МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Розв'язання завдань
з навчальної дисципліни
"ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ"
у середовищі MS Excel-2010

Навчально-практичний посібник
для іноземних студентів

Харків. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015

УДК 330.43:004.6(076)
ББК 65в611я7
Л 33

Рецензенти: докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної математики і математичного моделювання Національного технічного університету "ХПІ" *Любчик Л. М.;* докт. техн. наук, професор кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, провідний науковий співробітник відділу математичного моделювання і оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України *Романова Т. Є*.

Рекомендовано до видання рішенням вченої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.
Протокол № 3 від 29.10.2014 р.

Лебедєва І. Л.

Л 33 Розв'язання завдань з навчальної дисципліни "Оптимізаційні методи і моделі" у середовищі MS Excel-2010 : навчально-практичний посібник для іноземних студентів / І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Х. : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – 220 с. (Укр. мов.)
ISBN 978-966-676-572-0

Наведено приклади розв'язання завдань, перелік яких повністю відповідає програмі навчальної дисципліни. Розглянуто основні принципи і концепції побудови математичних моделей різних класів економічних завдань, для вирішення яких можуть бути використані методи математичного програмування. Продемонстровано можливості використання програмного забезпечення MS Excel-2010 для знаходження розв'язку реальних завдань економічного змісту. До кожної теми подано завдання для самостійної роботи і перелік питань для самоперевірки.

Рекомендовано для іноземних студентів економічних напрямів підготовки як навчально-практична допомога в процесі безперервної математичної підготовки, а також для викладачів для проведення занять і організації індивідуальної роботи студентів.

УДК 330.43:004.6(076)
ББК 65в611я7

ISBN 978-966-676-572-0

Вступ

Навчальна дисципліна "Оптимізаційні методи і моделі" є важливим ланцюгом у безперервній аналітико-математичній підготовці економістів. Вона базується на знаннях, які були отримані під час вивчення дисципліни "Математика для економістів" (до складу якої входять вища математика і теорія ймовірності та математична статистика) і передує вивченню дисциплін економічного напряму, що передбачають використання інструментарію економіко-математичного моделювання для розв'язання завдань економічного змісту.

Метою вивчення навчальної дисципліни "Оптимізаційні методи і моделі" є формування системи теоретичних знань, а також умінь і навичок щодо використання апарату вищої математики для побудови математичних моделей економічних процесів і явищ і вирішення оптимізаційних завдань як в детермінованих умовах, так і в умовах ризику.

Предметом навчальної дисципліни є математичні методи як інструмент математичного моделювання у вирішенні практичних завдань економіки, а її об'єктом – економіко-математичні моделі для вирішення оптимізаційних економічних завдань.

Отримані студентами в результаті вивчення дисципліни знання і навики складають основу компетентностей сучасного фахівця в контексті Національної рамки кваліфікацій:

знання основних математичних методів і принципів побудови моделей економічної системи з метою визначення керуючого впливу її параметрів та подальшою оптимізацією стану системи, що надалі застосовується для вирішення завдань кількісного аналізу процесів функціонування і розвитку соціально-економічних систем;

вміння виконувати постановку і формалізацію практичних завдань згідно загальної технології моделювання в економіці;

навики щодо обґрунтування математичних методів, які є інструментом економіко-математичного моделювання у процесі вирішення практичних завдань економіки;

навики щодо реалізації алгоритмів побудови економіко-математичних моделей оптимізаційних завдань і пошуку їх рішень;

навики застосування програмного середовища MS Excel до вирішення завдань оптимізаційного аналізу;

здатності автономно і відповідально виконувати завдання;

комунікації щодо взаємодії студентів під час сумісного вирішення завдань і ухвалення узгоджених рішень.

Необхідною умовою успішного засвоєння навчального матеріалу з даної дисципліні є самостійна робота студентів з додатковою літературою і вміння застосовувати пакети прикладних програм під час розв'язання завдань за допомогою комп'ютера. Застосування пакету MS Excel ґрунтується на тому, що завдяки своїй простоті і зручності у використанні програмне середовище MS Excel є звичним робочим середовищем для сучасного фахівця. Використання вбудованих функцій і такої надбудови MS Excel, як "**Поиск решения**"*), дозволяє швидко і ефективно розв'язувати не тільки навчальні приклади, але і складні економічні завдання великої розмірності, які мають практичне значення.

Навчальний матеріал, розглянутий в навчально-практичному посібнику для іноземних студентів "Розв'язання завдань з навчальної дисципліні "Оптимізаційні методи і моделі" в середовищі MS Excel-2010" повністю відповідає темам програми навчальної дисципліни "Оптимізаційні методи і моделі" і відповідає вимогам галузевого стандарту вищої освіти МОН України на базі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра, фахівця і магістра, розробленою науково-методичною комісією з економіки і підприємництва МОН України.

Основна увага в посібнику приділяється особливостям математичних моделей різних типів завдань, методиці їх побудови і реалізації. Детальний опис використання надбудови "**Поиск решения**" і вбудованих функцій MS Excel, вживаних для знаходження оптимального плану завдання, допоможуть іноземним студентам підвищити свій рівень роботи з електронними таблицями і оцінити можливості використання MS Excel для вирішення оптимізаційних завдань.

Посібник припускає логічну зв'язаність матеріалу, що дозволяє студентам послідовно накопичувати знання, а викладачеві – вибирати той матеріал, який найбільшою мірою відповідає можливостям аудиторії засвоювати нове.

---

*) Тут і надалі спеціальні терміни, що використовуються в програмному середовищі MS Excel, наведені мовою оригіналу і виділені напівжирним шрифтом

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання в економіці

1.1. Теоретичні відомості

Розвиток будь-якої науки можна трактувати як теоретичне моделювання. Метою математичного моделювання економічних систем є використання методів математики для найбільш ефективного вирішення завдань, що виникають у сфері економіки, з використанням, як правило, сучасної обчислювальної техніки.

Модель – це уявно представлена або матеріально реалізована система, яка, відображаючи або відтворюючи об'єкт дослідження, здатна заміщати його таким чином, що її вивчення дає нову інформацію про цей об'єкт. У процесі розробки моделей дотримуються основних методологічних принципів: адекватності, динамізму, заміщення та евристичності.

Загальна класифікація економіко-математичних моделей включає більше десяти основних ознак. З розвитком економіко-математичних досліджень проблема класифікації вживаних моделей ускладнюється. Разом з появою нових типів моделей (особливо змішаних типів) і нових ознак їх класифікації здійснюється процес інтеграції моделей різних типів в складніші модельні конструкції.

Цикл економіко-математичного моделювання складається з наступних етапів:

1. *Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз* – формулювання суті проблеми, допущень і тих питань, на які потрібно отримати відповіді, а також формулювання гіпотез, що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта. При цьому об'єктом аналізу є найважливіші властивості модельованого об'єкта, його структура, основні залежності, елементи, що зв'язують його.

2. *Побудова математичної моделі* – формалізація економічної проблеми, вираз її у вигляді конкретних математичних залежностей і відносин (функцій, рівнянь, нерівностей та ін.). Визначається основна конструкція (тип) математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (конкретний перелік змінних і параметрів, форма зв'язків).

3. *Математичний аналіз моделі* – з'ясування загальних властивостей моделі, для чого застосовуються математичні прийоми дослідження, доказ існування рішень. З'ясовують такі питання як: чи є рішення єдиним,

які змінні можуть входити в розв'язок, які будуть співвідношення між ними, в яких межах і залежно від яких початкових умов вони змінюються, які тенденції цих змін та ін.

4. *Підготовка початкової інформації* з використанням методів теорії ймовірності та математичної статистики.

5. *Чисельне рішення* – розробка алгоритмів, підбір необхідного програмного забезпечення і безпосереднє проведення розрахунків. Завдяки високій швидкодії сучасних комп'ютерів вдається проводити численні "модельні" експерименти, вивчаючи "поведінку" моделі під час різних змін умов.

6. *Аналіз кількісних результатів і їх застосування.* Неформальний аналіз теоретичних висновків і чисельних результатів, що отримуються за допомогою моделі, зіставлення їх з наявними знаннями і фактами дозволяють виявляти недоліки в постановці економічного завдання, сконструйованій математичній моделі, її інформаційному та математичному забезпеченні.

Будь-яка модель в економіці спирається на певну систему економічних вимірників (продукції, ресурсів, елементів і т. д.). В той же час одним із важливих результатів економіко-математичного моделювання є отримання нових (вторинних) економічних вимірників – економічно обґрунтованих цін на продукцію різних галузей, оцінок ефективності різних за природою або за якістю ресурсів, характеристик суспільної корисності продукції.

Основою підходу, що дозволяє обробляти первинні і матеріалізувати вторинні вимірники, є використання електронних таблиць. ***Електронна таблиця*** – це програма, яка призначена для автоматичної обробки даних, представлених у вигляді таблиці. Електронна таблиця MS Excel характеризується універсальністю, зручним стандартизованим інтерфейсом, а також широким спектром сервісних можливостей обробки табличних даних, що дозволяє здійснювати моделювання економічних процесів достатньо великої розмірності. Програма MS Excel містить понад 400 ***вбудованих функцій***, які використовуються для виконання стандартних обчислень в робочих книгах. Характеристики, для яких проводиться обчислення функцій, називаються ***аргументами***. Значення, що повертаються функціями як відповідь, називаються ***результатами***. Як аргументи функції можуть використовуватися числа, текст, логічні значення, масиви, значення помилок або посилання. Аргументи можуть бути як константами, так і формулами. У свою чергу ці формули можуть містити інші функції. Функції, які є аргументами іншої функції, називаються ***вкладеними***. MS Excel дозволяє використовувати до семи рівнів вкладеності функцій. Проте деякі дії в MS Excel можна виконати значно швидше, якщо використовувати функціональні клавіші (табл. 1.1) і клавіатурні комбінації, так звані "гарячі" клавіші (табл. 1.2).

Таблиця 1.1

Функціональні клавіші

Клавіша	Функція	Клавіші			
		Shift	Ctrl	Ctrl + Shift	Alt + Shift
1	2	3	4	5	6
F1	Вивести довідку чи запустити надбудову відповідей	Довідка типу "Що це?"	–	–	Додати новий аркуш
F2	Перейти до виправлення вмісту комірки і рядків формул	Перейти до виправлення примітки комірки	Вивести вікно **Сведения**	–	–
F3	Вставити ім'я у формулу	Запустити **Мастер функций**	Присвоїти ім'я	Створити імена за текстом комірок	–
F4	Повторити останню дію, закріпити значення комірки	Повторити останній перехід чи пошук	Закрити вікно	–	–
F5	Виконати команду **Перейти** (меню **Правка**)	Виконати команду **Найти** (меню **Правка**)	Відновити вихідний розмір вікна	–	–
F6	Перейти в наступну ділянку вікна	Перейти в попередню ділянку вікна	Перейти в наступну книгу	Перейти в попередню книгу	–
F7	Виконати команду **Орфография** (меню **Сервис**)	–	Виконати команду **Переместить** (меню документа)	–	–

Закінчення табл. 1.1

1	2	3	4	5	6
F8	Включити режим розширення виділеної ділянки	Включити режим переходу до наступної частини виділеної ділянки	Виконати команду **Размер** (віконне меню документа)	–	–
F9	Перерахувати всі аркуші в усіх відкритих книгах	Перерахувати поточний аркуш	Згорнути вікно документа	–	–
F10	Перейти в рядок меню	Вивести контекстне меню	Розгорнути вікно документа	–	
F11	Створити діаграму	–	–	–	–
F12	Виконати команду **Сохранить как** (меню **Файл**)	Виконати команду **Сохранить** (меню **Файл**)	Виконати команду **Открыть** (меню **Файл**)	Виконати команду **Печать** (меню **Файл**)	–

Таблиця 1.2

"Гарячі" клавіші

Операція	Комбінація клавіш
1	2
Клавіші для виправлення вмісту комірок чи рядка формул	
Увести набрані дані в комірку	Enter
Видалити набрані дані	Esc
Повторити останню дію	F4 або Ctrl + Y
Почати новий абзац у поточній комірці	Alt + Enter
Видалити символ або виділені символи ліворуч від курсору	Backspace
Вставити символ табуляції	Ctrl + Alt + Tab
Видалити символ або виділені символи праворуч від курсору	Delete
Перемістити курсор на один символ угору, вниз, ліворуч чи праворуч	Клавіші зі стрілками
Перемістити курсор на початок рядка	Home
Перейти до виправлення примітки комірки	Shift + F2
Створити імена за текстом комірок	Ctrl + Shift + F3

Продовження табл. 1.2

1	2
Заповнити вниз	Ctrl + D
Заповнити праворуч	Ctrl + R
Заповнити виділені комірки набраним значенням	Ctrl + Enter
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої знизу	Enter
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої угорі	Shift + Enter
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої праворуч	Tab
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої ліворуч	Shift + Tab
Почати формулу	=
Перейти в режим виправлення вмісту комірки	F2
Очистити рядок формул після зазначення комірки чи видалити в рядку формул символ ліворуч від курсору	Backspace
Вставити ім'я у формулу	F3
Присвоїти ім'я	Ctrl + F3
Перерахувати всі аркуші в усіх відкритих книгах	F9 чи Ctrl + =
Перерахувати поточний аркуш	Shift + F9
Виконати автопідсумовування	Alt + =
Увести поточну дату	Ctrl + ;
Увести поточний час	Ctrl + Shift + :
Скасувати результати виправлення комірки чи рядки формул	Esc
Завершити виправлення комірки	Enter
Почати новий абзац	Alt + Enter
Скопіювати вміст верхньої комірки в поточну комірку чи в рядок формул	Ctrl + Shift + “
Увести набрану формулу як формулу масиву	Ctrl + Shift + Enter
Скопіювати формулу верхньої комірки в поточну комірку чи в рядок формул	Ctrl + ' (апостроф)
Відобразити список автовведення	Alt + ↓ (Стрілка вниз)
Клавіші для форматування даних	
Виконати команду **Стиль** (меню **Формат**)	Alt +' (апостроф)
Виконати команду **Ячейка** (меню **Формат**)	Ctrl + 1
Виконати форматування загальним числовим форматом	Ctrl + Shift + ~

Закінчення табл. 1.2

1	2
Виконати форматування грошовим форматом із двома десятковими знаками після крапки (негативні числа відображаються в круглих дужках)	Ctrl + Shift + $
Виконати форматування процентним форматом з відсутньою дробовою частиною	Ctrl + Shift + %
Виконати форматування науковим форматом із двома десятковими знаками після коми	Ctrl + Shift + ^
Виконати форматування форматом для дат з полями дня, місяця і року	Ctrl + Shift + #
Виконати форматування форматом для часу з полями годин і хвилин та індексами A. M. чи P. M.	Ctrl + Shift + @
Виконати форматування форматом із двома десятковими знаками після коми	Ctrl + Shift+ !
Вставити рамку структури	Ctrl + Shift + &
Видалити всі межі	Ctrl + Shift + _
Виконати чи видалити форматування жирним шрифтом	Ctrl + И
Виконати чи скасувати форматування курсивом	Ctrl + Ш
Підкреслити текст чи видалити лінію підкреслення	Ctrl + Г
Перекреслити текст чи видалити лінію перекреслення	Ctrl + 5
Сховати рядки	Ctrl + 9
Показати рядки	Ctrl + Shift + (
Сховати стовпці	Ctrl + 0 (нуль)
Показати стовпці	Ctrl + Shift +)

Для зручності функції в MS Excel розбиті за такими категоріями: функції керування базами даних і списками, функції дати і часу, DDE/Зовнішні функції, інженерні функції, фінансові, інформаційні, логічні, функції перегляду і посилань. Крім того, присутні такі категорії функцій як статистичні, текстові та математичні.

За допомогою ***текстових функцій*** є можливість обробляти текст: витягати символи, знаходити потрібні, записувати символи в суворо визначене місце тексту і багато чого іншого.

За допомогою ***функцій дати й часу*** можна вирішити практично будь-яке завдання, пов'язане з урахуванням дати чи часу (наприклад, визначити вік, обчислити стаж роботи, визначити число робочих днів за будь-який проміжок часу).

Логічні функції допомагають створювати формули, що, залежно від виконання тих чи інших умов, здійснюють різні види обробки даних.

У MS Excel широко представлені ***математичні функції***. Наприклад, можна виконувати різні операції з матрицями: множити, знаходити зворотну, транспонувати.

За допомогою ***статистичних функцій*** проводиться статистичне моделювання. Крім того, можна використовувати елементи факторного та регресійного аналізу.

Безпосередньо вводити з клавіатури у формулу назви функцій і значення вхідних параметрів не завжди зручно, тому для роботи з функціями в MS Excel є спеціальний засіб – **Мастер функций**. Під час роботи з цим засобом спочатку пропонується вибрати потрібну функцію зі списку категорій, а потім у вікні діалогу ввести вхідні значення. Майстер функцій можна викликати послідовністю команд **Вставка** $\Rightarrow$ **Функции …** чи натисканням на кнопку **Мастер функций**, яка розташована на панелі інструментів **Стандартна**, а також безпосередньо у рядку формул.

Деякі функції повертають масиви значень або запитують масив значень як аргумент. Щоб обчислити декілька значень за допомогою формули масиву, потрібно ввести масив у діапазон клітинок, який має таку саму кількість рядків і стовпців, що й аргументи масиву. Формули масиву створюються так само, як і інші формули, за винятком того, що для вводу формули слід натискати комбінацію клавіші **Ctrl+Shift+Enter.**

Електронна таблиця MS Excel має ряд вбудованих функцій для роботи з матрицями (масивами).

Це такі функції:

ТРАНСП () – транспонування вихідної матриці (повертається вертикальний діапазон клітинок у вигляді горизонтального, і навпаки);

МОБР () – обчислення елементів матриці, що є оберненою до вихідної;

МОПРЕД () – обчислення визначника квадратної матриці (визначники матриць використовуються для розв'язання систем лінійних рівнянь з кількома змінними);

МУМНОЖ () – знаходження матриці, що є добутком матриць, які надаються у вигляді двох масивів.

Прикладом застосування елементів лінійної алгебри до розв'язання реальних економічних задач є визначення прогнозних значень виробництва продукції за відомими запасами сировини.

Нехай підприємство виробляє n видів продукції, використовуючи сировину m типів. Необхідні характеристики виробництва (норми витрат сировини за видами продукції) представлені матрицею $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, де $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$. Треба визначити обсяг виробництва кожного виду продукції, який позначається вектором $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, під час використання існуючих запасів сировини $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$. Така задача є типовою у прогнозуванні та оцінці ефективності функціонування підприємств та під час планування мікроекономічних показників їх діяльності.

За умовою повного використання запасів сировини кожного типу можна записати балансові співвідношення, які утворюють систему, що містить m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

де $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ – матриця системи;

$\mathbf{X} = \left(x_j \right)_{n\times 1}$ – матриця-стовпчик невідомих;

$\mathbf{B} = (b_i)_{m\times 1}$ – матриця-стовпчик вільних членів.

Серед методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь найбільш поширеними є застосування формул Крамера, метод оберненої матриці, метод виключення Гаусса та його модифікації, зокрема метод повного виключення Жордана – Гаусса.

За ***формулами Крамера*** розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь обчислюється співвідношеннями:

$$x_i = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.1}$$

де Δ – визначник матриці коефіцієнтів системи;

Δ_j – визначник матриці, яка побудована на основі матриці коефіцієнтів системи шляхом заміни j-го стовпчика (стовпчика коефіцієнтів при j-му невідомому) на стовпчик вільних членів системи.

Умовою застосування формул Крамера є $\Delta \neq 0$.

Метод оберненої матриці передбачає пошук розв'язку за співвідношенням:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \qquad (1.2)$$

де $\mathbf{A}^{-1}$ – матриця, що є оберненою до матриці коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

За означенням обернена матриця має вигляд:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елементу a_{ij} вихідної матриці.

Сутність ***методу Гаусса*** (методу виключення) полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень (перестановка рівнянь, множення рівняння на число, що не дорівнює нулю, та додавання рівнянь системи) від початкової системи лінійних алгебраїчних рівнянь переходять до системи, що має трикутну або трапецієподібну матрицю коефіцієнтів. Якщо внаслідок перетворень матриця коефіцієнтів системи набуває трикутну форму, то система рівнянь має єдиний розв'язок. У випадку трапецієподібної матриці система сумісна, але неозначена. Якщо у разі виключення невідомих одержано суперечне рівняння, то система є несумісною. Слід відзначити, що дослідження системи проводиться паралельно з її розв'язанням.

Модифікацією метода Гауса є ***метод Жордана – Гаусса*** (метод повного виключення), який полягає в тому, що внаслідок елементарних перетворень ***розширеної матриці*** (матриці, яка містить матрицю коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої справа дописано стовпець вільних членів) на місці матриці коефіцієнтів системи отримуємо одиничну матрицю.

В практиці планування часто виникає питання про пошук ***альтернативних розв'язків***, або визначення можливих варіантів планів. Це питання має сенс тоді, коли витрати і запаси одного типу сировини пропорційні витратам і запасам іншого типу, і, відповідно, завдання має безліч рішень. Саме такі завдання і складають предмет дослідження математичного програмування.

Розглянемо систему, яка складається з m лінійних алгебраїчних рівнянь і містить n невідомих:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Найбільш важливим випадком під час дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь є випадок, коли система сумісна і має безліч рішень, тобто, за теоремою Кронекера – Капеллі ***ранг матриці*** коефіцієнтів системи дорівнює рангу розширеної матриці, але ці ранги менше кількості невідомих:

$$Rg\mathbf{A} = Rg\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B} < n,$$

де $Rg\mathbf{A}$ – ранг матриці коефіцієнтів системи;

$Rg\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}$ – ранг розширеної матриці.

Не порушуючи спільності, припустимо, що в матриці $\mathbf{A}$ коефіцієнти при перших $r = Rg\mathbf{A}$ невідомих утворюють визначник, що відрізняється від нуля.

Залишимо ці невідомі x_j ($j = \overline{1, r}$) ліворуч, а інші x_j ($j = \overline{r+1, n}$) перенесемо праворуч. Тоді невідомі x_j ($j = \overline{1, r}$) є ***базисними***, а інші невідомі – ***вільними***.

Застосувавши будь-який з методів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, виразимо базисні невідомі через вільні:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n); \\ x_2 = f_2(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n), \end{cases} \qquad (1.3)$$

де $f_j(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n)$ – лінійна функція, яка виражає зв'язок між j-ю базисною невідомою ($j = \overline{1, r}$) і вільними невідомими ($j = \overline{r+1, n}$).

У загальному випадку задача немає обмежень на значення вільних невідомих.

Отже, маємо:

$$x_{r+1} \in \Re; \quad x_{r+2} \in \Re; \ldots; x_n \in \Re. \qquad (1.4)$$

Сукупність формул (1.3) і (1.4) є ***загальним розв'язком*** основної системи обмежень.

Надаючи вільним невідомим довільні значення, отримаємо ***часткові розв'язки*** системи.

У економічних завданнях, як правило, невідомі не можуть бути невід'ємними. Відповідно маємо:

$$x_{r+1} \geq 0; \quad x_{r+2} \geq 0; \ldots; x_n \geq 0. \qquad (1.5)$$

Якщо вільним невідомим надати нульові значення, то такий частковий розв'язок називається ***базисним розв'язком***.

Для завдань економічного змісту особливий інтерес представляють базисні розв'язки, для яких усі змінні є невід'ємними, тобто, виконується умова (1.5). Такі розв'язки називають ***опорними***. Саме отримання таких розв'язків і подальше визначення меж їх стійкості є кінцевою метою більшості завдань математичного програмування.

1.2. Приклад розв'язання задачі про планування обсягу виробництва

Розглянемо розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом зворотної матриці, за формулами Крамера і методом Жордана – Гаусса в середовищі MS Excel:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 240; \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 220; \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 270. \end{cases}$$

Математична модель відображає сенс загальної постановки задачі планування обсягів виробництва трьох видів продукції, які позначені x_1, x_2, x_3, за умовою використання трьох типів сировини, запаси якої дорівнюють, відповідно, 240, 220 та 270 одиниць.

Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом оберненої матриці на робочому аркуші книги MS Excel побудуємо вихідні данні у вигляді таблиць, що відповідають умовам завдання (рис.1.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4		Матриця системи			Вільні члени системи		
5		3	6	12		240	
6		2	9	4		220	
7		5	7	8		270	
8							

Рис. 1.1. **Вихідні дані завдання про розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом оберненої матриці**

Пошук розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь будемо здійснювати крок за кроком. Згадаємо, що відповідно формули (1.2) розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Тому спочатку обчислюємо матрицю, яка є оберненою до матриці коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього виділяємо сукупність клітинок, яка за розміром відповідає розміру матриці коефіцієнтів системи (в наведеному прикладі цей розмір матриці становить 3x3). Наприклад, масив клітинок **B13:D15**.

Далі викликаємо функцію **МОБР ()**, аргументами якої є масив елементів вихідної матриці (рис. 1.2).

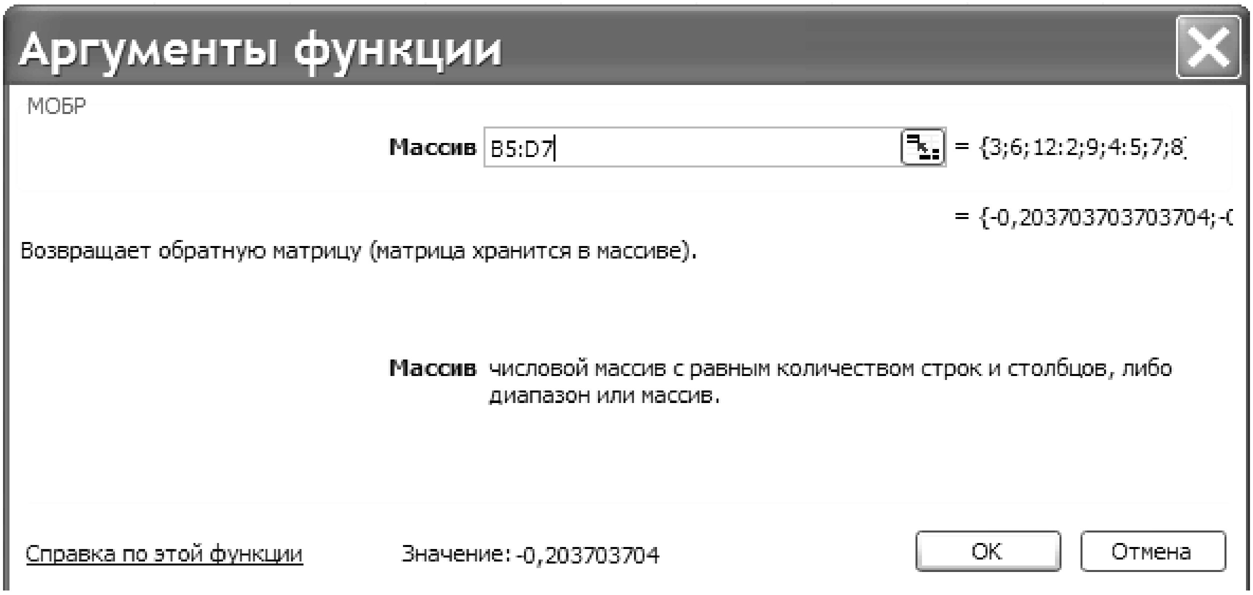


Рис. 1.2. **Діалогове вікно функції МОБР ()**

Оскільки аргументом вбудованої функції є масив, то для виведення результату обчислень (рис. 1.3) слід натиснути комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter** .

11		Обернена матриця		
12				
13		-0,20	-0,17	0,39
14		-0,02	0,17	-0,06
15		0,14	-0,04	-0,07
16				

Рис. 1.3. **Матриця, що є оберненою до основної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь**

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь отримаємо відповідно формули (1.2) за допомогою функції **МУМНОЖ ()**. Для цього необхідно виділити масив за розміром, що відповідає розміру матриці невідомих змінних системи (в наведеному прикладі це матриця-стовпець розміром 3х1), наприклад масив **А20:А22**. Тепер викликаємо функцію **МУМНОЖ ()** і у її діалоговому вікні вказуємо аргументи цієї функції – два масиви: елементи оберненої матриці та вільні члени системи (рис. 1.4).

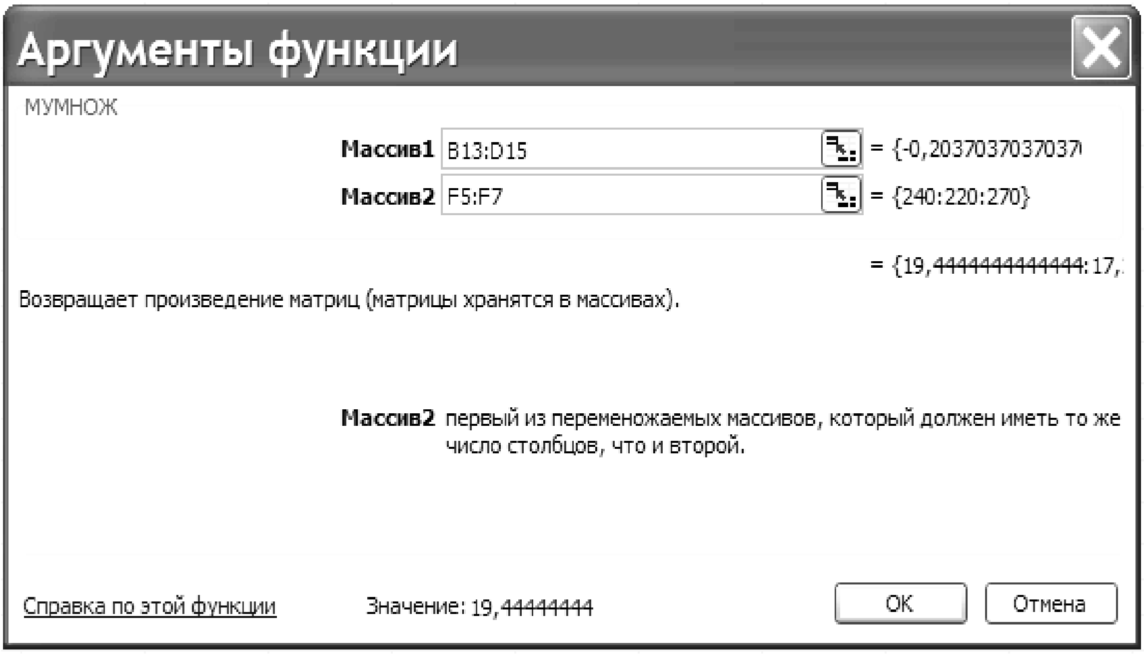


Рис. 1.4. **Діалогове вікно функції МУМНОЖ ()**

Для виведення результату обчислень (рис. 1.5) слід натиснути клавіші **Ctrl+Shift+Enter** і отримуємо значення невідомих.

20		19,4	x1
21		17,2	x2
22		6,5	x3

Рис. 1.5. **Розв'язок системи рівнянь**

Маємо значення прогнозних обсягів виробництва продукції кожного виду:

$$x_1 = 19{,}4; \quad x_2 = 17{,}2; \quad x_3 = 6{,}5.$$

Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера (1.1) на іншому робочому аркуші побудуємо вихідні таблиці (рис. 1.6). Розв'язання системи теж будемо здійснювати крок за кроком. Спочатку обчислимо визначник основної матриці коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою функції **МОПРЕД ()**, аргументом якої є матриця коефіцієнтів системи. Після заповнення параметрів діалогового вікна цієї функції значення визначника виводимо натисканням клавіші **OK** у виділену для цього клітину **E9**.

Значення визначника також показано в діалоговому вікні функції **МОПРЕД ()** (рис. 1.6).

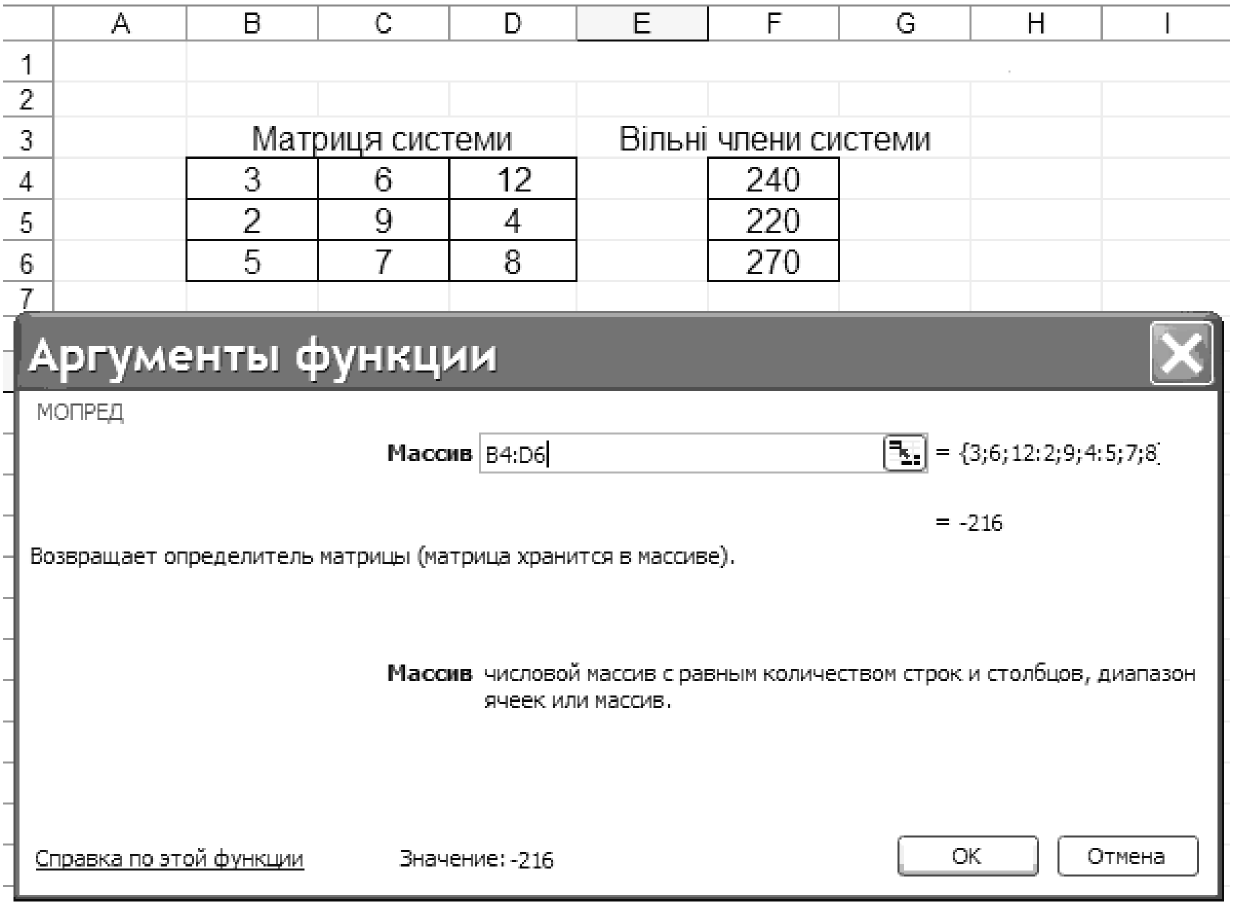


Рис. 1.6. **Скриншот з діалоговим вікном функції МОПРЕД ()**

У результаті отримуємо, що $\Delta = -216$.

Для обчислення визначників Δ_j $(j = 1; 2; 3)$ підготуємо три масиви, по черзі замінюємо кожен стовпчик на стовпчик вільних членів системи. Ці масиви є аргументами функції **МОПРЕД ()**. Далі за формулами (1.1) обчислюємо розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у клітинах **H11**, **H15** та **H19** (рис. 1.7).

Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Жордана – Гаусса на новому робочому аркуші в MS Excel побудуємо спеціальну таблицю, яка відповідає умовам завдання. Для цього у трьох рядках (на рис. 1.8 це рядки **4 – 6**) записуємо коефіцієнти вихідної системи рівнянь та вільні члени, тобто розширену матрицю системи. Далі здійснюємо еквівалентні перетворення системи рівнянь таким чином, щоб на місці матриці коефіцієнтів отримати одиничну матрицю.

Ці ітерації наведені на рис. 1.8 (рядки **7 – 15**).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Матриця системи			Вільні члени системи			
4		3	6	12		240		
5		2	9	4		220		
6		5	7	8		270		
7								
8								
9		визначник системи		Δ	-216			
10								
11	240	6	12	Δ_1	-4200		x1=	19,4
12	220	9	4					
13	270	7	8					
14								
15	3	240	12	Δ_2	-3720		x2=	17,2
16	2	220	4					
17	5	270	8					
18								
19	3	6	240	Δ_3	-1410		x3=	6,5
20	2	9	220					
21	5	7	270					

Рис. 1.7. **Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера**

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	x1	x2	x3	b	Контрольна сума	Коментар
4	**3**	6	12	240	261	
5	2	9	4	220	235	
6	5	7	8	270	290	
7	1	2	4	80	87	[4]/3
8	0	**5**	-4	60	61	[7]*(-2)+[5]
9	0	-3	-12	-130	-145	[7]*(-5)+[6]
10	1	0	5,6	56	62,6	[11]*(-2)+[7]
11	0	1	-0,8	12	12,2	[8]/5
12	0	0	**-14,4**	-94	-108,4	[11]*3+[9]
13	1	0	0	**19,4**	20,4	[15]*(-5,6)+[10]
14	0	1	0	**17,2**	18,2	[15]*0,8+[11]
15	0	0	1	**6,5**	7,5	[12]/(-14,4)

Рис. 1.8. **Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Жордана – Гаусса**

У стовпчику "Коментар" наведено пояснення еквівалентних перетворень, що проводяться у відповідному рядку (у квадратних дужках вводиться номер рядка). У рядках **13 – 15**, що відповідають останній ітерації, у стовпчику "b" отримуємо розв'язок системи рівнянь, тобто обсяг виробництва продукції кожного виду:

$$x_1 = 19{,}4; \quad x_2 = 17{,}2; \quad x_3 = 6{,}5.$$

Зрозуміло, що ми отримали той самий розв'язок, що і з використанням методу оберненої матриці та за формулами Крамера.

Наведена задача має єдиний розв'язок.

А тепер дещо змінимо умови даної задачі. Нехай запаси сировини та кількість її типів залишаються без змін, а додатковою умовою є можливість здійснювати виробництво нового виду продукції, при цьому норми витрат на виготовлення одиниці цієї продукції становлять 3, 6 та 8 одиниць відповідних типів сировини.

Позначимо кількість продукції нового виду через x_4.

Математичну модель нової задачі можна записати у вигляді такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 3x_4 = 240; \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 220; \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 270. \end{cases}$$

Оскільки кількість рівнянь системи менша за кількість невідомих, то якщо система сумісна, то вона має безліч розв'язків. Змінні набувають значення кількості виготовленої продукції кожного виду, тому не можуть бути від'ємними, тобто, нас цікавлять тільки опорні розв'язки цієї задачі.

Раніше вже було визначено, що коефіцієнти при невідомих x_1, x_2, x_3 утворюють матрицю, визначник якої не дорівнює нулю. Таким чином для системи з чотирма невідомими ми можемо вказати визначник третього порядку, який не дорівнює нулю, звідки визначаємо, що:

$$Rg\mathbf{A} = Rg\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B} = 3 < n = 4.$$

Це означає, що система має три базисні змінні, а одна (будь-яка) змінна є вільною. У загальному випадку кількість базисних розв'язків системи визначається як кількість сполучень по r елементів з множини, що містить n елементів:

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Для даної системи лінійних алгебраїчних рівнянь кількість базисних розв'язків дорівнює:

$$C_4^1 = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 1!} = 4.$$

Будемо вважати змінну x_4 вільною, тоді x_1, x_2, x_3 є базисними змінними. За методом Жордана – Гаусса отримуємо відповідний цьому випадку загальний розв'язок вихідної задачі (рис. 1.9).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Розв'язання лінійних систем алгебраїчних рівнянь						
2							
3	x1	x2	x3	x4	b	Контрольна сума	Коментар
4	**3**	6	12	3	240	264	
5	2	9	4	6	220	241	
6	5	7	8	8	270	298	
7	1	2	4	1	80	88	[4]/3
8	0	**5**	-4	4	60	65	[7]*(-2)+[5]
9	0	-3	-12	3	-130	-142	[7]*(-5)+[6]
10	1	0	5,6	-0,6	56	62	[11]*(-2)+[7]
11	0	1	-0,8	0,8	12	13	[8]/5
12	0	0	**-14,4**	5,4	-94	-103	[11]*3+[9]
13	1	0	0	**1,5**	**19,4**	21,9	[15]*(-5,6)+[10]
14	0	1	0	**0,5**	**17,2**	18,7	[15]*0,8+[11]
15	0	0	1	**-0,375**	**6,5**	7,2	[12]/(-14,4)

Рис. 1.9. **Вигляд таблиці розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з чотирма змінними за методом Жордана – Гаусса**

Розглянемо економічний зміст отриманого розв'язку.

У рядках **13 – 15** останньої ітерації (див. рис. 1.9) маємо обсяги виробництва продукції перших трьох видів, які визначені через обсяг виробництва продукції четвертого виду:

$$x_1 = 19{,}4 - 1{,}5x_4; \quad x_2 = 17{,}2 - 0{,}5x_4; \quad x_3 = 6{,}5 + 0{,}375x_4.$$

Припустимо, що випускається продукція тільки перших трьох видів, тобто вільній змінній надаємо значення $x_4 = 0$. Тоді отримуємо базисний розв'язок $x_1 = 19{,}4; \quad x_2 = 17{,}2; \quad x_3 = 6{,}5$. Оскільки всі його компоненти є невід'ємними, то цей розв'язок є опорним (саме такі обмеження існують у реальній економіці).

Для того, щоб перейти до іншого базисного розв'язку, треба ввести до базису змінну x_4. Наступний загальний розв'язок отримаємо шляхом уведення до базису змінної x_4 замість змінної x_1, яка стає вільною.

За методом Жордана – Гаусса визначимо обсяги виробництва продукції другого, третього та четвертого видів як функції від обсягу виробництва продукції першого виду (рис. 1.10).

13	1	0	0	**1,5**	**19,4**	21,9	[15]*(-5,6)+[10]
14	0	1	0	**0,5**	**17,2**	18,7	[15]*0,8+[11]
15	0	0	1	**-0,375**	**6,5**	7,2	[12]/(-14,4)
16	**0,67**	0,00	0,00	1,00	**12,96**	14,63	[13]/1,5
17	**-0,33**	1,00	0,00	0,00	**10,74**	11,41	[16]*(-0,5)+[14]
18	**0,38**	0,00	1,00	0,00	**13,82**	15,38	[16]*0,375+[15]
19							

Рис. 1.10. **Пошук альтернативного загального розв'язку**

Тобто маємо загальний розв'язок вихідної системи рівнянь:

$$x_2 = 10{,}74 + 0{,}33x_1; \quad x_3 = 13{,}82 - 0{,}38x_1; \quad x_4 = 12{,}96 - 0{,}67x_1.$$

Якщо вільна змінна $x_1 = 0$, то отримуємо ще один базисний розв'язок:

$$x_2 = 10{,}74; \quad x_3 = 13{,}82; \quad x_4 = 12{,}96.$$

Цей розв'язок теж є опорним. Він визначає кількість виробництва продукції 2-го, 3-го і 4-го видів, що і можна виготовити з тих запасів сировини, які є на підприємстві, якщо продукцію 1-го виду не виробляти.

Аналогічні міркування (вибір наступної вільної змінної) приводять до іншого базисного розв'язку. При цьому слід мати на увазі, що розв'язок є опорним, якщо всі його компоненти є невід'ємними. Отже, пошук опорних рішень передбачає попередній аналіз доцільності введення до базису тієї чи іншої змінної.

Наприклад, на етапі ітерації рядків **16 – 18** (див. рис. 1.10) не має сенсу виводити з базису змінну x_2, тому що замість неї знадобиться ввести до базису x_1, для чого рядок **17** треба буде поділити на від'ємне число $(-0{,}33)$. Це призведе до від'ємного значення у стовпчику "b", яке надалі стає основною складовою базисної змінної x_1.

Аналогічно на етапі ітерації рядків **13 – 15** (див. рис. 1.10) не має сенсу виводити з базису змінну x_3, оскільки для цього знадобиться ввести до базису змінну x_4 і рядок **15** поділити на від'ємне число $(-0{,}375)$. Це призведе до від'ємного значення у стовпчику "b", яке надалі стає основною складовою базисної змінної x_4.

Таким чином, задача про повне використання сировини має два опорних розв'язки – альтернативні плани обсягів виробництва продукції. За першим планом виробництва кількість продукції кожного виду становить:

$$x_1 = 19{,}4; \quad x_2 = 17{,}2; \quad x_3 = 6{,}5; \quad x_4 = 0,$$

тоді як за другим планом, відповідно, маємо такі обсяги виробництва:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 10{,}74; \quad x_3 = 13{,}82; \quad x_4 = 12{,}96.$$

Оскільки один із видів продукції не виробляється, то обидва плани виробництва є ***виродженими***.

Остаточний вибір одного з двох планів виробництва передбачає додатковий аналіз ринкового попиту на продукцію та ринкової вартості кожного з видів продукції.

1.3. Завдання для самостійної роботи

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (табл. 1.3) відображають витрати сировини на виготовлення продукції. Для системи рівнянь, основна матриця якої має розмір 4х4, за допомогою методу оберненої матриці, за формулами Крамера і за допомогою методу Жордана – Гаусса знайти єдиний розв'язок. Для системи рівнянь, основна матриця якої має розмір 3х5, знайти базисні і опорні рішення.

Дати економічну інтерпретацію отриманих результатів.

Таблиця 1.3

Вихідні умови задачі

№ варіанта	$A = (a_{ij})_{4\times4}$	$A = (a_{ij})_{3\times5}$
1	2	3
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 25; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 18; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 20. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9; \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 24; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 32; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = 28. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 9; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 5. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 36; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 45; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 51. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 60; \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 24; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 35. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 52; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 28; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 36. \end{cases}$

Продовження табл. 1.3

1	2	3
6	$\begin{cases} 47x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 11; \\ 39x_1 + 41x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 45; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 10; \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -8. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 72; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 21; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 34. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 50; \\ 7x_1 - 13x_3 - 5x_4 = 24; \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 23; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 20; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 16. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -5; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 14x_1 - 23x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 16; \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = -12. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 12; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 27; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 35. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 10x_1 - 11x_2 + 6x_3 + x_4 = 14; \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 11x_1 - 38x_2 + x_3 - 5x_4 = -38; \\ 3x_1 - 10x_2 + x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 20; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 = 23; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 18. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 6x_1 - 19x_2 + 10x_3 - x_4 = -14; \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 38; \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5; \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = -23. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 51; \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 42; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 34. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1 - 16x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 32; \\ 20x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -20; \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 63; \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 + x_4 = 29. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 28; \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 21; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 36. \end{cases}$

1	2	3
12	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = -10; \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 36; \\ 5x_1 - 5x_2 + 11x_3 + 4x_4 = 10; \\ 3x_1 - 9x_2 + 17x_3 + 6x_4 = -20. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 26; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 48; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 12. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5; \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 16; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 25; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 35. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 32; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 54; \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 4x_1 - 15x_2 + 17x_3 + 5x_4 = 11; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5; \\ 9x_1 - 19x_2 + 4x_3 - x_4 = -7; \\ x_1 - 15x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -41. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 40; \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 64; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 36. \end{cases}$
16	$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = 58; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 28; \\ 12x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 69; \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 37. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 46; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 32; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 36. \end{cases}$

1.4. Контрольні запитання

1. Що таке модель? Яким вимогам вона повинна відповідати?
2. За якими ознаками здійснюється класифікація економіко-математичних моделей?
3. З яких етапів складається цикл моделювання?

4. Які моделі складних систем є детермінованими?

5. Які використовуються вбудовані функції в програмному середовищі табличного процесора MS Excel?

6. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.

7. Які існують методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь? У чому полягають особливості застосування кожного з цих методів?

8. У яких випадках система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч рішень?

9. Дайте визначення загального розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Скільки існує загальних рішень для системи m рівнянь з n невідомими?

10. Що таке частковий розв'язок?

11. У чому полягає суть вільних і базисних змінних?

12. Якій вимозі повинні задовольняти змінні в економічних завданнях, математичні моделі яких містять системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

13. Як визначити кількість базисних змінних для системи m рівнянь з n невідомими?

14. Що таке базисний розв'язок? Як визначити кількість базисних розв'язків?

15. Що таке опорний розв'язок? Як можна його отримати?

Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі

2.1. Теоретичні відомості

Оптимізаційна задача може бути сформульована таким чином: є деякий об'єкт, стан якого характеризується двома видами параметрів – параметрами стану і параметрами управління, причому залежно від вибору останніх процес управління об'єктом здійснюється тим або іншим чином. Якість процесу управління оцінюється за допомогою деякої числової функції, на основі чого ставиться наступна ***задача управління***: знайти таку послідовність значень параметрів управління, за якою дана функція приймає екстремальне значення.

Обов'язковими елементами економіко-математичної моделі оптимізаційної задачі є змінні параметри процесу, умови обмеження задачі і критерій ефективності (рис. 2.1).

Рис. 2.1. **Елементи математичної моделі оптимізаційної задачі**

При цьому змінні параметри процесу – це набір невідомих величин, чисельні значення яких визначаються в ході розв'язання і використовуються для раціональної організації процесу; умови обмеження задачі – символьний запис обов'язкових умов організації даного процесу (як правило, лінійні нерівності або рівняння); критерій ефективності – економічний показник, зведення якого до максимуму або мінімуму говорить про якнайповніше досягнення цілей оптимізації. Запис критерію у вигляді функції від змінних задачі називається ***функцією цілі***.

Правильна постановка умов обмежень є важливим етапом розробки оптимізаційної економіко-математичної моделі. Типи обмежень узагальнено представлені на рис. 2.2.

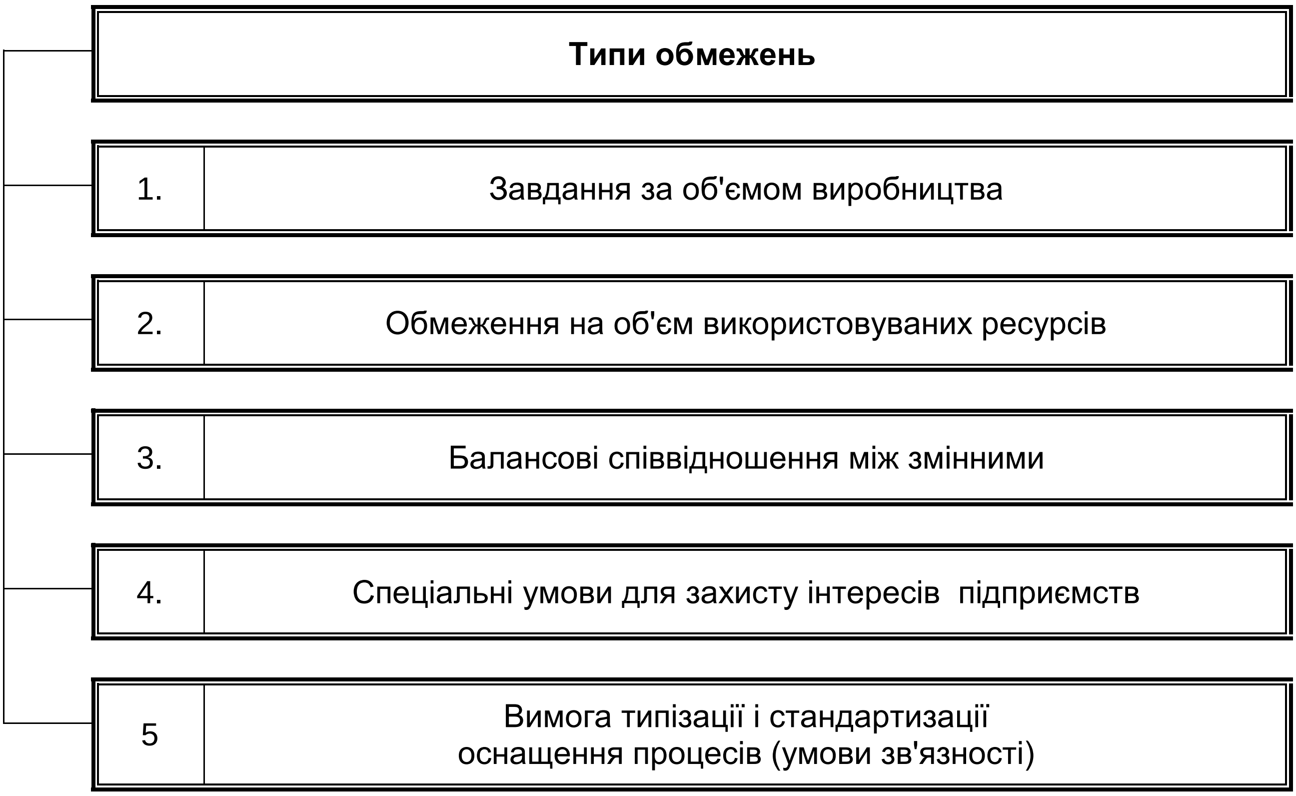


Рис. 2.2. **Типи обмежень**

У більшості оптимізаційних завдань дотримується принцип єдності критерію. При виборі критерію оптимальності враховується ряд загальних вимог (рис. 2.3).

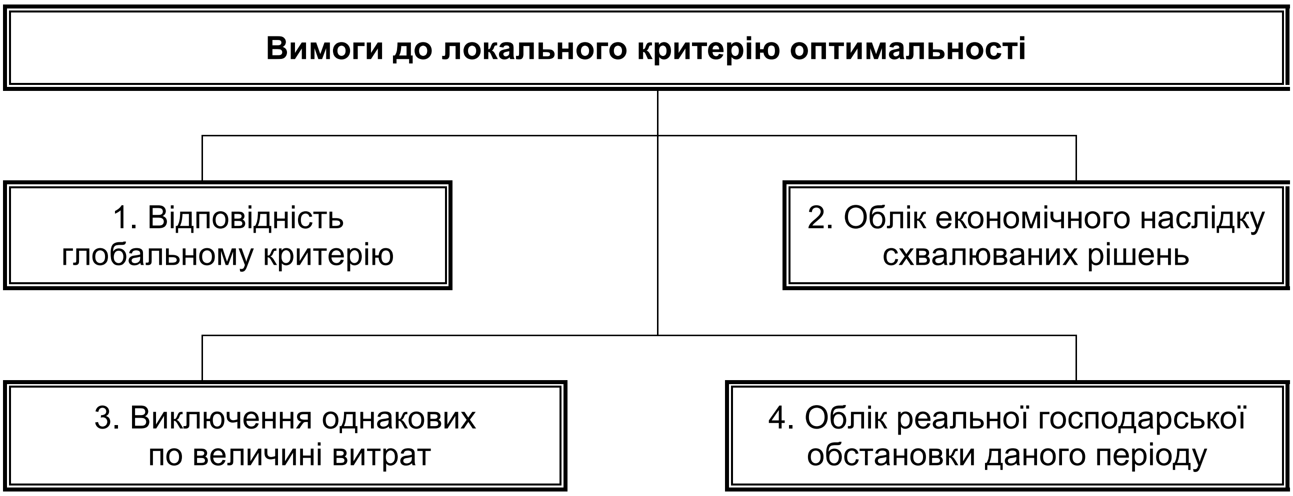


Рис. 2.3. **Вимоги до локального критерію оптимальності**

Як критерій оптимальності можуть бути прийняті тільки ті показники, які піддаються обчисленню для кожного можливого варіанту з помилкою не більше 2 3 %, інакше порівняння варіантів стають ненадійними.

Математичне трактування моделі задачі оптимізації полягає в наступному: знайти точку $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, у якій функція цілі $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ досягне свого максимуму (мінімуму) за умовою виконання обмежень:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\}b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

де $f(\mathbf{X})$, $g_i(\mathbf{X})$ – деякі функції;

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – набір параметрів управління.

Якщо функція цілі і система обмежень є лінійними, то задача оптимізації є ***задачею лінійного програмування*** (ЗЛП), інакше, тобто, якщо є нелінійність у функції цілі і/або в системі обмежень, то така задач є задачею ***нелінійного програмування***.

У загальному вигляді математична модель ЗЛП записується як:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min)$$

за обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ (\le, =, \ge)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ (\le, =, \ge)\ b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ (\le, =, \ge)\ b_m, \\ x_j \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ (\le, =, \ge)\ b_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

де x_j – невідомі, або керовані змінні;

a_{ij}, b_i, c_j – задані сталі величини, або параметри задачі.

Математична модель ЗЛП може бути задана в ***канонічній***, ***стандартній*** або ***загальній формах***. Якщо всі умови основної системи обмежень представлені рівняннями, то така форма моделі ЗЛП називається канонічною. Якщо обмеження основної системи задані у вигляді нерівностей одного знаку, відповідного виду екстремуму функції мети, то така форма моделі ЗЛП називається стандартною. Якщо в умовах обмеження присутні нерівності різних знаків і рівняння, то така форма моделі ЗЛП називається загальною.

Для того, щоб перейти до канонічної форми моделі ЗЛП, необхідно в кожну нерівність основної системи обмежень ввести ***балансову*** (додаткову) змінну $x_{n+i} \ge 0$. Знак, з яким балансова змінна вводиться в нерівність основної системи обмежень для перетворення його на рівняння, визначається знаком цієї нерівності. У функцію цілі балансові змінні входять з нульовими коефіцієнтами.

2.2. Приклади побудови математичних моделей економічних задач лінійного програмування

1. Завдання планування виробництва. Постановка задачі: необхідно визначити план виробництва одного або декількох видів продукції, у процесі реалізації якого забезпечується найбільш раціональне використання наявних матеріальних, фінансових і інших видів ресурсів. Такий план повинен бути оптимальним з погляду вибраного критерію – максимуму прибутку.

Нехай виробництво, яке має певну технологію, може виготовляти продукцію декількох найменувань, використовуючи при цьому декілька видів сировини. Матриця технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ визначає витрати сировини i-го виду ($i = \overline{1, m}$) на виготовлення одиниці продукції j-го типу ($j = \overline{1, n}$). Запаси всіх видів сировини, які використовуються у виробництві продукції, визначаються матрицею-стовпцем $\mathbf{B} = (b_i)_{m \times 1}$, де b_i – запас сировини i-го виду ($i = \overline{1, m}$). Прибуток від реалізації одиниці продукції описується матрицею-рядком $\mathbf{C} = (c_j)_{n \times 1}$, де c_j – прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції j-го типу ($j = \overline{1, n}$). Необхідно визначити оптимальний план виробництва $\mathbf{X}^* = (x_j^*)_{n \times 1}$, відповідно до якого загальний прибуток від реалізації продукції буде максимальним.

У даному завданні критерієм ефективності є загальний прибуток від реалізації продукції, зрозуміло, що він досліджується на максимум, отже, цільова функція $Z(\mathbf{X})$ має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \quad \to \quad \max. \tag{2.1}$$

Керованими змінними завдання є об'єми виготовленої продукції x_j ($j = \overline{1, n}$). Ці змінні повинні задовольняти певним обмеженням. Оскільки продукція виготовляється з сировини, яка вже є на підприємстві в певній кількості, то витрати сировини на виготовлення продукції за кожним її типом не можуть перевищувати запасів цієї сировини. Отже, ***основна система обмежень*** має вигляд нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i; \quad i = \overline{1, m}. \tag{2.2}$$

Крім того, об'єм виробництва не може бути від'ємним, тобто, маємо ***обмеження на знак***:

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

Системи нерівностей (2.2) і (2.3) утворюють систему обмежень на керовані змінні. Отже, математична модель задачі планування виробництва задана співвідношеннями (2.1) – (2.3) і представлена в стандартній формі. Розв'язком задачі є оптимальний план $\mathbf{X}^* = (x_j^*)$, який задовольняє системі обмежень і при якому функція цілі $Z(\mathbf{X}^*) = \max Z(\mathbf{X})$ досягає максимуму.

2. Завдання про суміші. Постановка задачі: необхідно вибрати якнайкращий спосіб змішування початкових інгредієнтів для отримання суміші із заданими властивостями. Суміш повинна мати необхідні властивості, які визначаються кількістю компонентів, що входять до складу початкових інгредієнтів. Необхідно при заданій вартості кожного з інгредієнтів вибрати склад суміші так, щоб загальні витрати на придбання її інгредієнтів були б найменшими.

Задача оптимального змішування зустрічається в багатьох галузях промисловості (металургія, парфумерія, харчова промисловість, фармакологія, сільське господарство). Сенс задачі про оптимальний склад суміші можна пояснити на прикладі задачі про оптимальний раціон кормів під час відгодовування домашніх тварин або птахів.

Раціон тварини по складу необхідних для життєдіяльності речовин повинен бути повноцінним, тобто, містити білки, жири, вуглеводи, мінеральні речовини і т д. у кількості, не меншій норми. Позначимо номер речовини індексом i $(i = \overline{1,m})$. Ці речовини входять до складу різноманітних продуктів. Для створення суміші можна використовувати певні продукти, змішуючи їх в різних пропорціях. Перелік цих продуктів є відомим.

Нехай маємо n різних продуктів, кожен вид якого позначатимемо індексом j $(j = \overline{1,n})$. Матриця питомого складу $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ визначає кількість речовин i-го типу $(i = \overline{1,m})$, які містяться в одиниці продукту j-го виду $(j = \overline{1,n})$. Вартість одиниці продукту кожного виду описується матрицею-рядком $\mathbf{C} = (c_j)_{1\times n}$. Мінімальні біологічні норми споживання для кожної речовини визначаються матрицею-стовпцем $\mathbf{B} = (b_i)_{m\times 1}$.

Необхідно визначити склад суміші (раціон, за яким здійснюється відгодовування тварин), в якій зміст всіх необхідних речовин був би не менше біологічної норми, і при цьому суміш мала б найменшу вартість.

У даному завданні критерієм ефективності є загальна вартість продуктів, які входять до складу суміші. Така цільова функція досліджується на мінімум, отже, маємо:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \quad \to \quad \min . \tag{2.4}$$

Керованими змінними є кількість x_j $(j = \overline{1,n})$ кожного з продуктів, які входять до складу суміші. Ці змінні повинні задовольняти певним обмеженням. Оскільки задані мінімальні біологічні норми споживання речовин, необхідних для життєдіяльності, то за кожним типом речовини їх загальна кількість, яка поступає з різними продуктами у складі суміші, не повинна бути менше цієї норми. Отже, основна система обмежень має вигляд нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i ; \quad i = \overline{1,m} . \tag{2.5}$$

Зрозуміло, що кількість продукту j-го виду не може бути від'ємною, тобто, маємо обмеження на знак:

$$x_j \ge 0 ; \quad j = \overline{1,n} . \tag{2.6}$$

Системи нерівностей (2.5) і (2.6) утворюють систему обмежень на керовані змінні. Отже, маємо математичну модель задачі про оптимальний склад суміші, яка задана співвідношеннями (2.4) – (2.6). Зверніть увагу, що основна система обмежень представлена у вигляді нерівностей, усі знаки яких однакові і знаходяться відповідно до виду екстремуму цільової функції, тобто, математична модель завдання про оптимальний склад суміші приведена у стандартній формі.

Розв'язком цієї задачі є оптимальний план $\mathbf{X}^* = \left(x_j^*\right)_{1\times n}$, компоненти якого задовольняють системі обмежень і за якого цільова функція досягає мінімуму: $Z(\mathbf{X}^*) = \min Z(\mathbf{X})$.

3. Транспортна задача. Постановка задачі: на складах виробників $A_1, A_2, ..., A_m$ є однорідний вантаж, кількість якого описується матрицею-стовпцем $\mathrm{A} = (a_i)_{m\times 1}$. Цей вантаж необхідно доставити в пункти призначення $B_1, B_2, ..., B_n$ у кількості, що задана матрицею-рядком $\mathrm{B} = (b_j)_{1\times n}$. Вартість перевезення одиниці вантажу (тариф) з пункту A_i у пункт B_j задані матрицею $C = (c_{ij})_{m\times n}$. Необхідно скласти план перевезень, за яким весь вантаж буде вивезений, всі споживачі задоволені і при цьому вартість перевезення буде мінімальною.

Математична модель транспортної задачі, для якої сумарний попит дорівнює сумарним потребам, має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (2.7)$$

за обмежень:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$x_{ij} \ge 0;\ i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}. \qquad (2.9)$$

Основна система обмежень містить рівняння, отже, математична модель наведена в канонічній формі.

Сукупність значень $x_{ij}\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, яка задовольняє системі обмежень (2.8) – (2.9), називається ***можливим планом*** транспортної задачі. ***Оптимальним планом*** транспортної задачі є матриця керованих змінних $\mathbf{X}^* = (x_{ij}^*)_{m\times n}$, що задовольняють системі обмежень і реалізація якого забезпечує мінімум цільової функції.

2.3. Завдання для самостійної роботи

Підприємство виготовляє харчову суміш, для чого використовуються напівфабрикати чотирьох видів. Відомі характеристики кожного виду напівфабрикату щодо вмісту в них основних речовин: білків, жирів і вуглеводів. У табл. 2.1 наведені технологічні норми вмісту речовин у кожному з видів напівфабрикатів, мінімально необхідний вміст речовин у суміші (біологічні норми) і ціна за одиницю напівфабрикату кожного виду.

За вихідними даними побудувати математичну модель задачі визначення оптимального складу суміші, який би забезпечив під час її споживання надходження основних речовин у необхідній кількості, і при цьому вартість такої суміші була б найменшою.

Таблиця 2.1

Вихідні дані задачі про суміш

№ варіанта	Тип напівфабрикату	Вміст основних речовин, г/кг			Ціна полуфабрикату, грн/кг
		білки	вуглеводи	жири	
1	2	3	4	5	6
1	1	3	7	5	4
	2	5	4	6	6
	3	2	2	6	3
	4	3	8	2	2
	мінімальна потреба	5	4	6	–
2	1	4	8	6	5
	2	6	5	7	7
	3	3	3	7	4
	4	4	9	3	3
	мінімальна потреба	4	6	5	–
3	1	2	6	4	3
	2	4	3	5	5
	3	1	1	5	2
	4	2	7	1	1
	мінімальна потреба	2	4	3	–
4	1	6	14	10	8
	2	10	8	12	12
	3	4	4	12	6
	4	6	16	4	4
	мінімальна потреба	6	10	8	–
5	1	9	21	15	12
	2	15	12	18	18
	3	6	6	18	9
	4	9	24	6	6
	мінімальна потреба	9	15	12	–

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6
6	1	12	28	20	16
	2	20	16	24	24
	3	8	8	24	12
	4	12	32	8	8
	мінімальна потреба	12	20	16	–
7	1	10	26	18	14
	2	18	14	22	22
	3	6	6	22	10
	4	10	30	6	6
	мінімальна потреба	10	18	14	–
8	1	9	25	17	13
	2	17	13	21	21
	3	5	5	21	9
	4	9	29	5	5
	мінімальна потреба	9	17	13	–
9	1	7	23	15	11
	2	15	11	19	19
	3	3	3	19	7
	4	7	27	3	3
	мінімальна потреба	7	15	11	–
10	1	6	22	14	10
	2	14	10	18	18
	3	2	2	18	6
	4	6	26	2	2
	мінімальна потреба	6	14	10	–
11	1	5	21	13	9
	2	13	9	17	17
	3	1	1	17	5
	4	5	25	1	1
	мінімальна потреба	5	13	9	–

Закінчення табл. 2.1

1	2	3	4	5	6
12	1	13	29	21	17
	2	21	17	25	25
	3	9	9	25	13
	4	13	33	9	9
	мінімальна потреба	13	21	17	–
13	1	11	15	13	12
	2	13	12	14	14
	3	10	10	14	11
	4	11	16	10	10
	мінімальна потреба	11	13	12	–
14	1	5	9	7	6
	2	7	6	8	8
	3	4	4	8	5
	4	5	10	4	4
	мінімальна потреба	5	7	6	–
15	1	6	10	8	7
	2	8	7	9	9
	3	5	5	9	6
	4	6	11	5	5
	мінімальна потреба	6	8	7	–
16	1	8	24	16	12
	2	16	12	20	20
	3	4	4	20	8
	4	8	28	4	4
	мінімальна потреба	8	16	12	–

2.4. Контрольні запитання

1. Як класифікують задачі оптимального управління?
2. Сформулюйте загальну постановку оптимізаційної задачі.
3. Наведіть приклади оптимізаційних задач економічного змісту.
4. Назвіть складові математичної моделі оптимізаційних задач.
5. У якій формі можна навести математичну модель оптимізаційної задачі? У чому полягають особливості цих форм?

Тема 3. Задача лінійного програмування та методи її розв'язання

3.1. Теоретичні відомості

Найбільш простим і наочним методом розв'язання задач лінійного програмування є графічний метод.

Не порушуючи спільності, розглянемо задачу лінійного програмування у ***стандартній формі***. Це передбачає, що основна система обмежень надана у вигляді нерівностей одного знака і знак нерівностей відповідає виду екстремуму ***цільової функції***. Зрозуміло, що геометрична інтерпретація доцільна, якщо багатокутник планів належить до двовимірного простору. У випадку трьох вимірів задача значно ускладнюється, а для чотирьох вимірів графічне розв'язання стає неможливим.

Отже, математичну модель задачі будемо розглядати у вигляді:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \to \quad \max \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \tag{3.3}$$

Кожна нерівність ***основної системи обмежень*** (3.2) згідно з рівнянням прямої $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ поділяє площину $0X_1X_2$ на півплощини та визначає ту з півплощин, де нерівність виконується. ***Обмеження на знак*** (3.3) також визначають півплощини, які обмежені прямими: $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$, отже, область визначення даної задачі розташована у I-й чверті координатної площини. Якщо система обмежень сумісна, то півплощини, де виконуються нерівності системи обмежень, перетинаючись, утворюють ***многокутник можливих розв'язків*** задачі лінійного програмування, тобто ***многокутник планів***.

Оскільки у випадку застосування графічного способу розв'язання цільова функція повинна бути функцією двох змінних, графіком її у тривимірному просторі буде деяка площина.

На площині $0X_1X_2$ цільову функцію можна відобразити за допомогою ***ліній рівня***, тобто ліній, що відповідають певному сталому значенню цільової функції $Z = \mathrm{Const}$. Так, лінія рівня, що відповідає нульовому значенню цільової функції, має рівняння $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, і її графіком є пряма, що проходить через початок координат. Коефіцієнти цільової функції мають значення проекцій нормалі до лінії рівня: $N = (c_1; c_2)$. Для лінійної функції ***градієнт***, тобто вектор, що вказує напрямок найбільш швидкого зростання функції, співпадає з вектором нормалі:

$$\mathbf{gradZ} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\mathbf{j} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} = \mathbf{N}. \tag{3.4}$$

Отже, значення цільової функції зростає, якщо лінія рівня пересувається в напряму нормалі, і зменшується, якщо лінію рівня пересувати в напряму, що є протилежним напряму градієнта.

Аналогічну графічну інтерпретацію може мати задача лінійного програмування і для більшої кількості керованих змінних, якщо вона представлена в канонічній формі і різниця між кількістю змінних та кількістю рівнянь основної системи обмежень дорівнює двом.

Графічне розв'язання задачі лінійного програмування базується на трьох теоремах, які наводимо без доведення.

Теорема 3.1*.* Множина планів задачі лінійного програмування є ***опуклою***, тобто всі внутрішні точки відрізку, що з'єднує довільні точки многокутника, теж належать цьому многокутнику.

Теорема 3.2. Кожній вершині многокутника планів відповідає опорний план і кожному опорному плану відповідає вершина многокутника планів.

Теорема 3.3. Екстремум цільової функції відповідає вершині многокутника планів.

Для розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом доцільно використовувати наступний алгоритм:

1. Знаходимо область допустимих розв'язків (ОДР) системи обмежень задачі – ***многокутник планів***.

2. Будуємо вектор-градієнт $\mathbf{N} = (c_1; c_2)$ і через точку (0; 0) проводимо лінію рівня L_0, яка перпендикулярна вектору $\mathbf{N}$.

3. Лінію рівня переміщаємо в напряму вектора $\mathbf{N}$ паралельно самій собі доти, доки вона не стане ***опорною*** до многокутника планів (буде перетинати одну із його вершин). Вершина, через яку лінія рівня входить в многокутник планів, відповідає плану, за яким функція цілі має мінімум, вершина, через яку лінія рівня виходить з многокутника планів, відповідає плану, за яким цільова функція має максимум.

Якщо лінія рівня входить (або виходить) через одну із сторін багатокутника плану, то у такому разі екстремум досягається в усіх точках відповідної сторони, і задача матиме незліченну безліч рішень. Така задача має ***альтернативний оптимум.*** Її розв'язками є координати обох вершин $\mathbf{X}_1^*$ і $\mathbf{X}_2^*$, що обмежують дану сторону, а також опукла лінійна комбінація $\mathbf{X}_1^*$ і $\mathbf{X}_2^*$: $\mathbf{X}_{опт} = \lambda \cdot \mathbf{X}_1^* + (1-\lambda) \cdot \mathbf{X}_2^*$, де $\lambda \in [0; 1]$.

Задача лінійного програмування може не мати розв'язку, якщо її система обмежень суперечлива, тобто область допустимих розв'язків виявиться порожньою множиною, або у тому випадку, коли цільова функція не обмежена на множині розв'язків.

4. Знаходимо координати точки екстремуму (координати вершини багатокутника планів) і відповідне значення функції цілі.

3.2. Приклад розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом

Технологія, яка застосовується на малому підприємстві, дозволяє виготовляти керамічну плитку двох типів: для внутрішніх і зовнішніх робіт. Для виробництва кожного з типів керамічної плитки використовується чотири види сировини. За допомогою матриці технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}$ задана кількість кожного виду сировини (у рядках матриці), яка необхідна для виготовлення одного квадратного метра плитки залежно від типу продукції (стовпці матриці):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \\ 0 & 5 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

Запаси сировини на виготовлення продукції визначаються матрицею-стовпцем:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 220 \\ 400 \\ 175 \\ 720 \end{pmatrix}.$$

Ринкові ціни на кожний вид продукції описуються матрицею-рядком $\mathbf{C} = (3 \quad 6)$.

Необхідно визначити, у якій кількості слід виробляти продукцію кожного виду, щоб загальна вартість її реалізації була найбільшою.

Побудуємо математичну модель задачі. Матриця $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ характеризує множину можливих планів виробництва, де x_1 – кількість продукції 1-го типу, а x_2 – кількість продукції 2-го типу. Відповідно:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \tag{3.3$^{\text{I}}$}$$

Отже, маємо обмеження на знак.

Витрати сировини всіх видів на виготовлення продукції обох типів можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 220; \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 400; \\ \qquad 5x_2 \leq 175; \\ 18x_1 + 6x_2 \leq 720. \end{cases} \tag{3.2$^{\text{I}}$}$$

Це основна система обмежень.

Сукупність нерівностей (3.2$^{\text{I}}$) та (3.3$^{\text{I}}$) визначає множину можливих планів виробництва. Серед них оптимальним є такий план, що забезпечує найбільшу суму коштів від реалізації продукції. Відповідно, критерієм ефективності у цій задачі є функція, що характеризує загальну суму від реалізації виготовленої продукції при заданому рівні ринкових цін на цю продукцію:

$$Z(\mathbf{X}) = 3x_1 + 6x_2 \quad \to \quad \max. \tag{3.1$^{\text{I}}$}$$

Співвідношення (3.1^{I}) – (3.3^{I}) утворюють математичну модель задачі про оптимальне використання сировини. Отже, цільова функція і всі функції системи обмежень є лінійними. Оскільки цільова функція досліджується на максимум, а всі нерівності основної системи обмежень мають знак $\leq$, то математична модель відповідає задачі лінійного програмування, що надана у стандартній формі.

Застосуємо для її розв'язання графічний метод.

За основною системою обмежень та обмеженнями за знаком будуємо багатокутник планів, тобто знаходимо область визначення задачі. Для цього за кожною нерівністю основної системи обмежень знайдемо на площині $0X_1X_2$ область її виконання.

Наприклад, визначимо півплощину, де виконується нерівність $4x_1 + 4x_2 \leq 220$. Для цього перепишемо це обмеження у вигляді рівняння і надамо рівняння прямої у відрізках на осях, поділивши обидві частини на 220. Матимемо:

$$l_1 : \frac{x_1}{55} + \frac{x_2}{55} = 1.$$

Це означає, що пряма l_1 відсікає на осі $0X_1$ відрізок 55 (знаменник першого дробу в рівнянні прямої) та на осі $0X_2$ – теж відрізок 55 (знаменник другого дробу). Відклавши ці відрізки вздовж відповідних осей, побудуємо цю пряму (рис. 3.1).

Тепер визначимо півплощину, де виконується вихідна нерівність. Для цього підставимо в дану нерівність координати точки, що не належить прямій l_1, наприклад, початок координат. Так, для т. O (0; 0) маємо: $4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 220$. Оскільки отримали правильну числову нерівність, то т. O належить тій півплощині, де вихідна нерівність задовольняється. Перпендикулярно до лінії l_1 ставимо дві стрілки, які вказують півплощину, де ця нерівність виконується.

Пронумеруємо всі нерівності основної системи обмежень і для кожної з них таким же чином визначимо півплощину, де це обмеження виконується. Як результат отримаємо область, усі точки якої задовольняють як основній системі обмежень, так і обмеженням на знак. Це і є многокутник планів задачі лінійного програмування. На рис. 3.1 його виділено штриховкою.

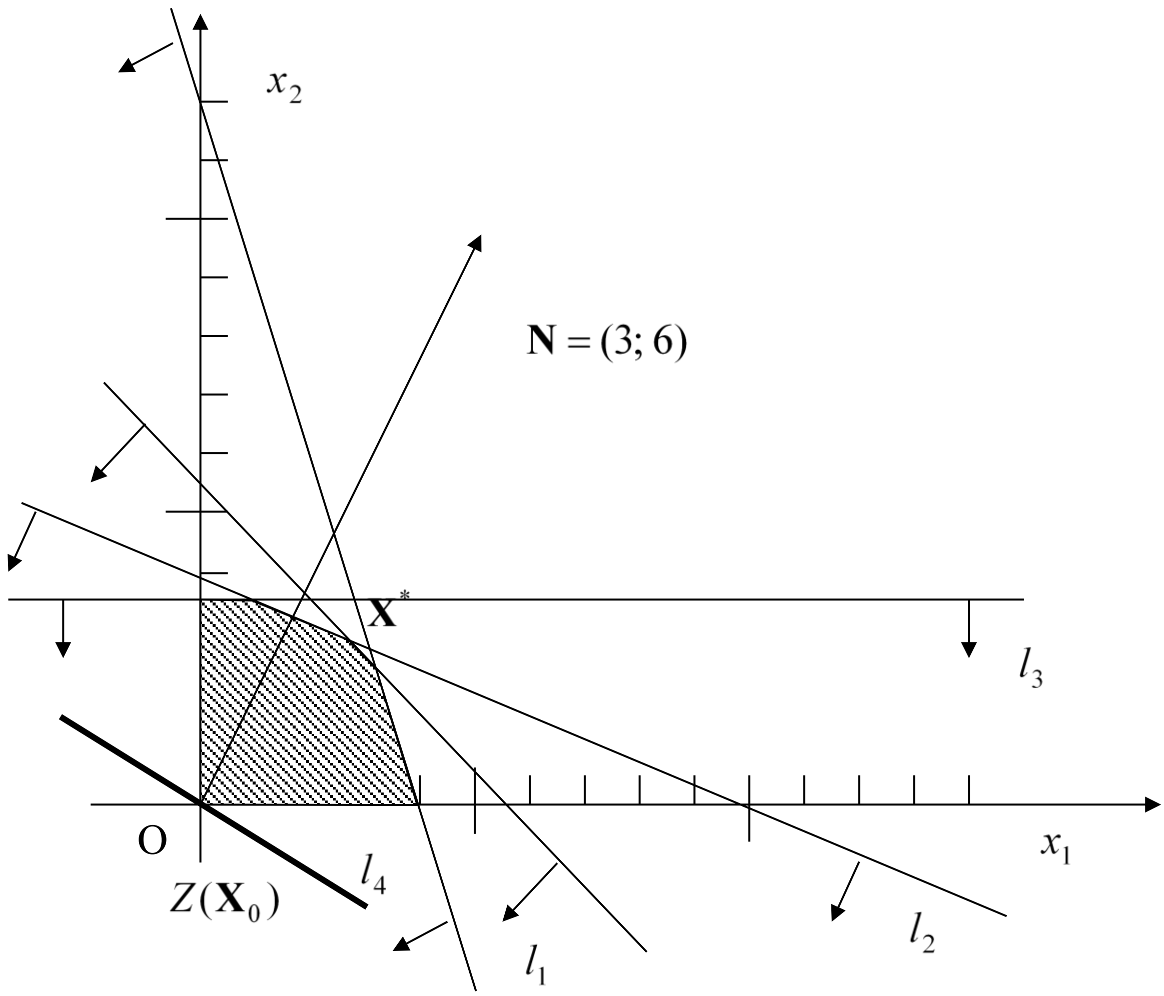


Рис. 3.1. **Графічний розв'язок**

Далі за коефіцієнтами рівняння цільової функції знаходимо вектор нормалі $\mathbf{N}(3; 6)$ і перпендикулярно до нього через початок координат проводимо лінію рівня $Z(\mathbf{X}_0)$. У даному випадку лінія рівня входить до многокутника планів через т. О (0,0). Цій вершині многокутника планів відповідає опорний план $\mathbf{X}_0 = (0; 0)$. За цим планом цільова функція має найменше з можливих значень: $Z(\mathbf{X}_0) = 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$.

Оскільки цільова функція досліджується на максимум, то пересуваємо лінію рівня в напряму вектора нормалі (градієнта цільової функції) і визначаємо вершину многокутника планів $\mathbf{X}^*$, через яку лінія рівня виходить з многокутника планів. Ця точка відповідає оптимальному плану, за яким цільова функція має найбільше значення на множині можливих розв'язків: $Z_{\max} = Z(\mathbf{X}^*)$.

Завдяки тому, що вершина $\mathbf{X}^*$ утворена перетином ліній l_1 та l_2, то відповідно оптимального плану $\mathbf{X}^*$ сировина першого і другого видів повністю використані. Це означає, що відповідні цим видам сировини нерівності основної системи обмежень перетворились на рівняння. Запишемо ці рівняння як систему:

$$\begin{cases} 4x_1^* + 4x_2^* = 220; \\ 4x_1^* + 10x_2^* = 400. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь, отримаємо значення компонентів оптимального плану $\mathbf{X}^* = (25;\, 30)$.

За оптимальним планом задачі обчислюємо максимальне значення функції цілі:

$$Z_{\max} = Z(\mathbf{X}^*) = 3 \cdot 25 + 6 \cdot 30 = 255 \text{ (ум. од.)}$$

Як відзначали раніше, під час реалізації оптимального плану сировина 1-го і 2-го видів буде використана повністю. Визначимо залишки решти видів сировини. Для цього підставимо значення оптимального плану в інші обмеження основної системи.

Залишки сировини 3-го виду складають: $175 - 5 \cdot 30 = 25$, залишки сировини 4-го виду: $720 - 18 \cdot 25 - 6 \cdot 30 = 90$.

Якщо разом з основними змінними, які визначають кількість виробленої продукції кожного типу розглядати ***додаткові змінні***, які визначають залишки сировини кожного виду, то можна перейти від стандартної форми у якій була представлена математична модель задачі лінійного програмування, до канонічної форми.

Залишки сировини 1-го виду позначимо через x_3, 2-го – через x_4, 3-го – x_5 і 4-го – x_6. Оскільки залишки сировини підприємство не продає, то вони входять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

Математична модель задачі про оптимальне використання сировини у канонічній формі має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = 3x_1 + 6x_2 \quad \rightarrow \quad \max, \tag{3.1^{II}}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 220; \\ 4x_1 + 10x_2 \quad + x_4 = 400; \\ \quad 5x_2 \qquad + x_5 = 175; \\ 18x_1 + 6x_2 \qquad + x_6 = 720, \end{cases} \tag{3.2^{II}}$$

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,5};\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,5}. \tag{3.3^{III}}$$

Отже, основна система обмежень замість системи нерівностей містить систему рівнянь.

Знайдемо опорні розв'язки основної системи обмежень (3.2^{II}) за допомогою MS Excel (див. приклад розв'язання задачі теми 1 даного посібника). Ці розв'язки було отримано за допомогою перетворень розширеної матриці системи (3.2^{II}) за методом Жордана – Гаусса (рис. 3.2).

2	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	План
3	4	4	1	0	0	0	220	
4	4	10	0	1	0	0	400	
5	0	5	0	0	1	0	175	
6	18	6	0	0	0	1	720	X_0
7	0	2,666667	1	0	0	-0,22222	60	
8	0	8,666667	0	1	0	-0,22222	240	
9	0	5	0	0	1	0	175	
10	1	0,333333	0	0	0	0,055556	40	X_1
11	4	0	1	0	-0,8	0	80	
12	4	0	0	1	-2	0	50	
13	0	1	0	0	0,2	0	35	
14	18	0	0	0	-1,2	1	510	X_2
15	0	1	0,375	0	0	-0,08333	22,5	
16	0	0	-3,25	1	0	0,5	45	
17	0	0	-1,875	0	1	0,416667	62,5	
18	1	0	-0,125	0	0	0,083333	32,5	X_3
19	0	0	1	-1	1,2	0	30	
20	1	0	0	0,25	-0,5	0	12,5	
21	0	1	0	0	0,2	0	35	
22	0	0	0	-4,5	7,8	1	285	X_4
23	0	1	-0,16667	0,166667	0	0	30	
24	0	0	-6,5	2	0	1	90	
25	0	0	0,833333	-0,83333	1	0	25	
26	1	0	0,416667	-0,16667	0	0	25	X_5

Рис. 3.2. **Опорні плани задачі**

Зверніть увагу, що додаткові змінні у системі рівнянь (3.2^{II}) утворюють одиничну матрицю розміру 4×4, визначник якої не дорівнює нулю. Отже, ранг матриці коефіцієнтів системи дорівнює чотирьом, тоді і кількість базисних змінних теж дорівнює чотирьом, а кількість вільних невідомих – двом. Згідно з цим кількість загальних розв'язків системи рівнянь визначається як кількість сполучень з множини, що містить шість елементів, по чотирьом:

$$C_6^4=\frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!}=15\,.$$

Однак многокутник планів має шість вершин, звідси випливає, що система рівнянь (3.2^{II}) матиме лише шість опорних розв'язків. Ці розв'язки є опорними планами задачі про оптимальне використання сировини і саме серед них треба шукати оптимальний план.

Вихідний план $\mathbf{X}_0=(0\quad 0\quad 220\quad 400\quad 175\quad 720)$ відповідає випадку, коли підприємство не виробляє продукцію і вся кількість сировини залишається не використаною. Йому відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}_0)=0$, тобто підприємство має нульовий дохід.

План $\mathbf{X}_1=(40\quad 0\quad 60\quad 240\quad 175\quad 0)$ означає, що виробляється лише продукція 1-го типу у кількості 40 одиниць, на її виробництво сировина 4-го виду використана повністю, а залишки сировини 1-го виду становлять 60 одиниць, 2-го – 240 одиниць, 3-го – 175 одиниць. За цим планом дохід підприємства під час реалізації продукції становитиме:

$$Z(\mathbf{X}_1)=3\cdot 40=120 \text{ (ум. од.).}$$

Обчислимо значення цільової функції за кожним із знайдених опорних розв'язків:

$$Z(\mathbf{X}_2)=6\cdot 35=210 \text{ (ум. од.);}$$

$$Z(\mathbf{X}_3)=3\cdot 32{,}5+6\cdot 22{,}5=232{,}5 \text{ (ум. од.);}$$

$$Z(\mathbf{X}_4)=3\cdot 12{,}5+6\cdot 35=247{,}5 \text{ (ум. од.);}$$

$$Z(\mathbf{X}_5)=3\cdot 25+6\cdot 30=255 \text{ (ум. од.).}$$

Номер опорного плану відповідає тому порядку, у якому лінія рівня цільової функції перетинає вершини многокутника планів, якщо її пересувати вздовж градієнта цільової функції (див. рис. 3.1). Найбільше значення відповідає плану $\mathbf{X}_5 = (25 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 25 \quad 90)$. Цей план і є оптимальним планом виробництва продукції:

$$\mathbf{X}^* = (25 \quad 30).$$

Зверніть увагу, що при розв'язанні системи рівнянь (3.2^{II}) було отримано відомості не тільки про кількість продукції, яку підприємство виробляє за оптимальним планом, але і про залишки сировини кожного виду. Зрозуміло, що результати, які одержано при аналізі математичної моделі задачі, що надана у канонічній формі, співпадають з тими, які отримано раніше у процесі аналізу математичної моделі задачі, що надана у стандартній формі.

3.3. Завдання для самостійної роботи

За вихідними даними матриці питомих витрат сировини $\mathbf{A}$, матриці запасів сировини $\mathbf{B}$ та матриці ринкових цін $\mathbf{C}$, що для кожного варіанту надані в табл. 3.1, скласти математичну модель задачі про оптимальне використання сировини у стандартній формі. Знайти розв'язок цієї задачі графічним методом. За допомогою додаткових змінних перетворити математичну модель задачі у канонічну форму і знайти оптимальний план, розв'язавши систему рівнянь, що утворюють основну систему обмежень цієї задачі, за допомогою MS Excel. Дати економічну інтерпретацію розв'язкам.

Таблиця 3.1

Вихідні дані задачі про оптимальне використання сировини

<table>
<tr><td>№ варіанта</td><td colspan="2">Параметри задачі</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 28 \\ 13 & 10 \\ 0 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix};$</td><td>$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = (242 \quad 130 \quad 80 \quad 150);$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{C} = (20 \quad 30)$</td></tr>
</table>

1	2	
2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 6 & 9 \\ 0 & 15 \\ 10 & 0 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 180 & 100 & 120 & 70 \end{pmatrix};$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \end{pmatrix}$
3	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 20 & 10 \\ 4 & 15 \\ 9 & 16 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 95 & 80 & 120 & 60 \end{pmatrix};$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix}$
4	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 6 \\ 12 & 6 \\ 5 & 16 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 32 & 46 & 57 & 74 \end{pmatrix};$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix}$
5	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 5 \\ 9 & 12 \\ 4 & 16 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 10 & 320 & 342 & 184 \end{pmatrix};$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 36 \end{pmatrix}$
6	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 13 \\ 11 & 12 \\ 4 & 16 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 150 & 370 & 296 & 340 \end{pmatrix};$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 20 & 35 \end{pmatrix}$
7	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 12 & 15 \\ 12 & 25 \\ 9 & 5 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 360 & 210 & 240 & 190 \end{pmatrix};$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 30 & 40 \end{pmatrix}$

1	2	
8	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}14 & 24\\ 15 & 8\\ 12 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}640 & 420 & 360 & 300\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12 & 16\end{pmatrix}$
9	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9 & 14\\ 7 & 4\\ 10 & 8\\ 25 & 14\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}160 & 280 & 320 & 250\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12 & 8\end{pmatrix}$
10	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}17 & 12\\ 16 & 8\\ 12 & 10\\ 9 & 12\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}200 & 210 & 160 & 150\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}10 & 8\end{pmatrix}$
11	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}15 & 12\\ 25 & 12\\ 24 & 6\\ 5 & 9\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}105 & 120 & 180 & 195\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}8 & 6\end{pmatrix}$
12	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}12 & 2\\ 10 & 13\\ 8 & 0\\ 16 & 10\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}124 & 130 & 100 & 180\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}10 & 6\end{pmatrix}$
13	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 12 & 7\\ 4 & 6\\ 4 & 9\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}420 & 320 & 180 & 250\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12 & 9\end{pmatrix}$

1	2	
14	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 16 \\ 10 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 120 & 210 & 160 & 150 \end{pmatrix};$
		$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16 & 20 \end{pmatrix}$
15	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 8 \\ 12 & 9 \\ 16 & 4 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 320 & 160 & 342 & 184 \end{pmatrix};$
		$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \end{pmatrix}$
16	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 13 & 7 \\ 6 & 9 \\ 12 & 11 \end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 340 & 370 & 150 & 296 \end{pmatrix};$
		$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 36 & 18 \end{pmatrix}$

3.4. Контрольні запитання

1. Які елементи містить математична модель ЗЛП?
2. Які існують форми представлення математичної моделі ЗЛП?
3. Яким чином можна привести математичну модель ЗЛП, яка представлена в стандартній формі, до канонічної форми?
4. Що таке багатокутник планів, опорний план, оптимальний план ЗЛП? Дайте їх геометричну інтерпретацію.
5. Яку кількість змінних може мати ЗЛП, щоб можна було застосовувати графічний метод для її розв'язання?
6. Наведіть основні теореми, на яких базується графічний метод розв'язання ЗЛП. Дайте їх геометричну інтерпретацію.
7. Перерахуєте послідовні етапи реалізації графічного методу розв'язання ЗЛП.
8. Як визначити кількість залишків сировини, які відповідають певному опорному плану?

Тема 4. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування і деякі його теоретичні аспекти

4.1. Теоретичні відомості

Класичним методом розв'язання задач лінійного програмування став ***симплекс-метод***, який є методом послідовного поліпшення планів. Ідея симплекс-методу полягає в тому, що починаючи з деякого початкового опорного плану здійснюється послідовно направлений перехід за опорними планами задачі до оптимального. Значення функції цілі при цьому переході для задач на максимум не убуває, на мінімум – не зростає. Оскільки кількість опорних планів кінцева, то через кінцеву кількість кроків виходить оптимальний розв'язок.

Алгоритм розв'язання задач симплекс-методом полягає в наступному:

1. Представити основну систему обмежень задачі з додатними вільними членами в канонічній формі, тобто, записати у вигляді рівнянь.
2. Виділити в системі обмежень одиничний базис, зберігши при цьому вільні члени додатними, тобто, виконати симплекс-перетворення.
3. Знайти початковий опорний план і значення функції цілі. Перевірити початковий план на оптимальність. Якщо критерій оптимальності не виконується, то план необхідно поліпшити.
4. Поліпшити початковий опорний план, перейшовши до нового опорного плану, за яким значення функції цілі не збільшується у процесі дослідження на мінімум (або не зменшується у процесі дослідження на максимум).
5. Новий опорний план перевірити на оптимальність. Процес продовжуємо до тих пір, поки не буде виконано критерій оптимальності.

Даний алгоритм є основою реалізації надбудови **Поиск решения** в програмному середовищі MS Excel, яка використовується для розв'язання різних видів оптимізаційних задач.

Застосування симплекс-методу до розв'язання задачі лінійного програмування передбачає, що основна система обмежень представлена у вигляді рівнянь. Проте додаткові невідомі можуть не утворювати одиничний базис простору. Тоді для розв'язання завдань такого типу використовується ***метод штучного базису***. Він полягає в тому, що в ліву частину одного з рівнянь додається ***фіктивна змінна***, яка має нульове значення. Якщо функція цілі досліджується на мінімум, то в математичних моделях таких завдань фіктивна змінна включається у функцію цілі з нескінченно великим коефіцієнтом М (М вважається більше за будь-який інший з коефіцієнтів функції цілі та їх лінійної комбінації). Базис, який містить фіктивні змінні, називається ***штучним***, а сама задача лінійного програмування, для вирішення якої використовується штучний базис, називається ***розширеною***, або ***М-задачою***. Далі для розв'язання розширеної задачі може застосовуватися симплекс-метод. Однією з переваг застосування надбудови **Поиск решения** MS Excel для розв'язання завдань описаного вище типу є те, що вона не вимагає перетворення моделі до канонічної форми, тобто, дозволяє уникнути таких перетворень.

4.2. Застосування надбудови "Поиск решения" для розв'язання завдань лінійної оптимізації

Для пошуку оптимального розв'язку задач лінійного програмування за допомогою MS Excel використовується надбудова **Поиск решения**. Для того, щоб її викликати, необхідно активізувати режим **Данные** ⇒ **Поиск решения**, в результаті чого з'являється діалогове вікно цієї надбудови (рис. 4.1). Слід зазначити, що її налаштування у MS Excel-2007 і у MS Excel-2010 дещо відрізняються.

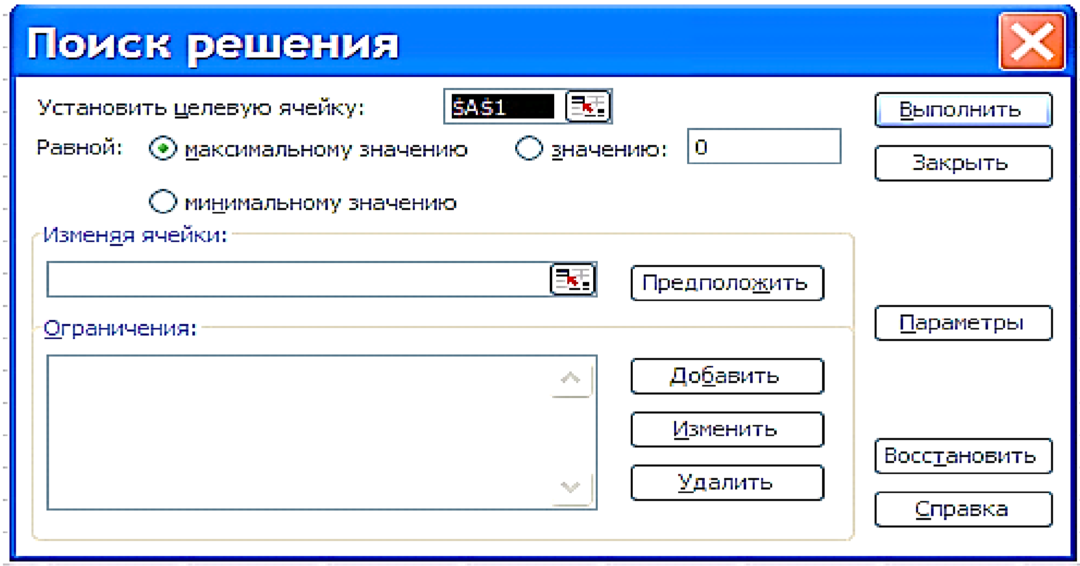


Рис. 4.1. **Діалогове вікно надбудови "Поиск решения" MS Excel-2007**

Слід звернути увагу на те, що надбудови не встановлюються автоматично, тому під час першого звернення до цієї опції необхідно активізувати режим **Параметры Excel** $\Rightarrow$ **Надстройки** $\Longrightarrow$ **Управление** і в діалоговому вікні прапорцем визначити секцію **Поиск решений**. Після чого натиснути клавішу **OK**. Тепер під час наступних звернень меню **Данные** буде пропонувати цей пакет.

Розглянемо опції діалогового вікна **Поиск решения**.

Опція **Установить целевую ячейку** служить для визначення комірки, до якої виводиться значення функції, яке необхідно максимізувати, мінімізувати або встановити рівним наперед заданому числу. Ця комірка повинна містити формулу.

Опція **Равной** застосовується для вибору варіанта оптимізації значення цільової клітини: максимізація, мінімізація або підбір заданого значення. В останньому випадку слід вказати необхідне значення.

Опція **Изменяя ячейки** служить для визначення діапазону клітин, значення у яких змінюються у процесі пошуку розв'язку доти, доки не будуть виконані діючі обмеження й умова оптимізації, що задана коміркою **Установить целевую ячейку.**

Опція **Предположить** використовується для автоматичного пошуку клітин, що впливають на формулу, посилання на яку містить цільова комірка. Результат відображається у вікні **Изменяя ячейки.**

Опція **Ограничения** служить для відображення списку граничних умов задачі, що розглядається.

Опція **Добавить** виводить відповідне діалогове вікно, що дає можливість задати обмеження в діалоговому вікні **Добавление ограничения** (рис. 4.2).

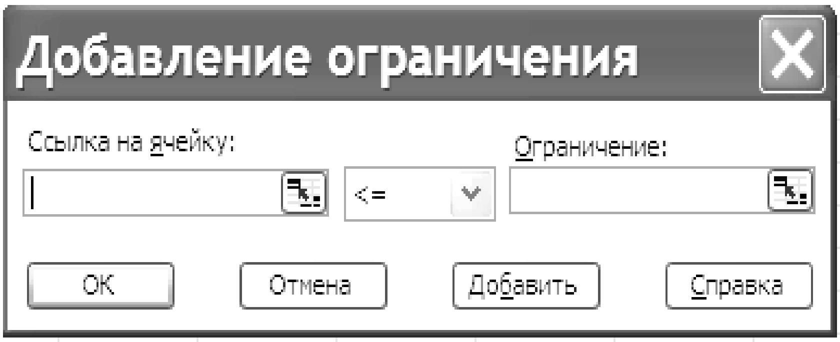


Рис. 4.2. **Діалогове вікно "Добавление ограничения"**

Опція **Изменить** дозволяє виправити помилку, якщо вона була зроблена, для чого виводиться діалогове вікно **Изменение ограничения** (рис. 4.3).

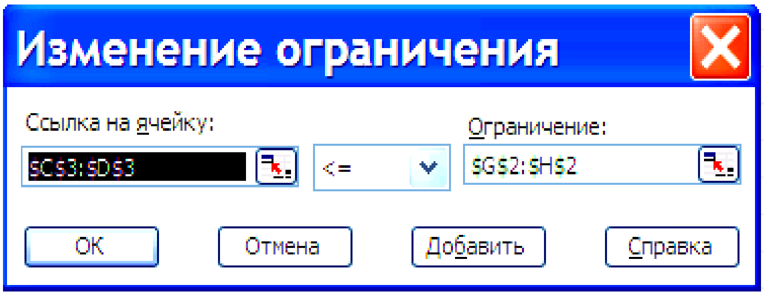


Рис. 4.3. **Діалогове вікно "Изменение ограничения"**

Опція **Удалить** видаляє зазначене обмеження.

Опція **Выполнить** здійснює запуск пошуку розв'язку поставленої задачі.

Опція **Закрыть** застосовується для виходу з вікна діалогу без запуску пошуку розв'язку поставленої задачі. При цьому зберігаються установки, які були зроблені раніше.

Опція **Параметры** служить для відображення діалогового вікна **Параметры** пошуку розв'язку, у якому можна вказати передбачені варіанти пошуку розв'язку (рис. 4.4).

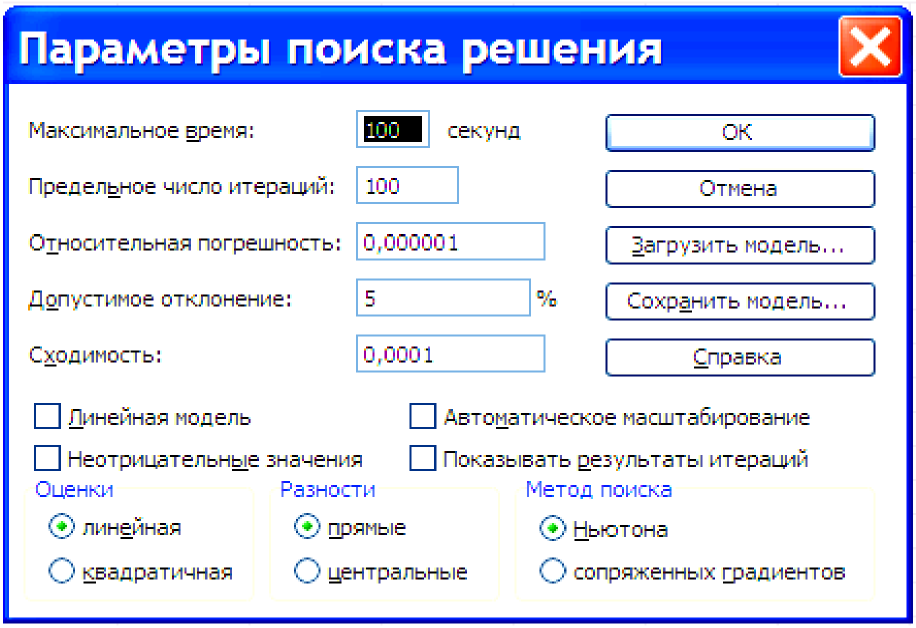


Рис. 4.4. **Опції розділу "Параметры" вікна "Поиск решения"**

Опція **Восстановить** використовується для видалення значень вікна діалогу й відновлення значень параметрів пошуку розв'язку.

Перейдемо до розгляду опцій діалогового вікна **Параметры поиска решения**.

Опція **Максимальное время** служить для обмеження часу, що виділений на пошук розв'язку задачі. Можна ввести час (у секундах), який не перевищує 32 767, причому значення 100, яке використовується за замовчуванням, підходить для розв'язання більшості простих задач. Після досягнення максимального часу пошук розв'язку припиняється.

Опція **Предельное число итераций** застосовується для керування часом розв'язання задач, обмежуючи число ітерацій, а також і обсяг проміжних обчислень.

Относительная погрешность – опція, яка служить для визначення точності розв'язку. Вона може приймати довільні значення в інтервалі від 0 до 1. Чим точніше визначається розв'язок задачі (тобто чим менше значення щодо погрішності), тим більше часу потрібно засобу **Поиск решения** для знаходження розв'язку.

Опція **Допустимое отклонение** визначає максимальне відхилення у відсотках для цілочислових розв'язків.

Опція **Сходимость** служить для припинення процесу пошуку розв'язку, якщо відносна зміна значення в цільовій клітині за останні п'ять ітерацій стає менше числа, зазначеного в текстовому полі **Сходимость.** Це число може приймати довільні значення в інтервалі від 0 до 1. Опція **Сходимость** застосовується тільки до нелінійних задач.

Линейная модель – опція, яка дозволяє прискорити пошук розв'язку лінійної задачі або лінійної апроксимації нелінійної задачі.

Опція **Неотрицательные значения** дозволяє встановити нульову нижню границю для тих клітин, для яких вона не була зазначена в розділі **Ограничения** діалогового вікна **Добавить**.

Опція **Показывать результаты итераций** дає можливість стежити за процесом розв'язання задачі. Якщо в діалоговому вікні встановлений прапорець опції **Показывать результаты итераций**, то засіб **Поиск решения** робить паузу після кожної ітерації, щоб показати проміжні результати. З'являється вікно **Текущее состояние поиска решения**. Щоб виконати наступну ітерацію, необхідно натиснути кнопку **Продолжить**. Для збереження поточних даних, перш ніж продовжувати, натисніть кнопку **Сохранить сценарий**.

Опція **Автоматическое масштабирование** служить для включення автоматичної нормалізації вхідних і вихідних значень, що якісно відрізняються за величиною, наприклад, максимізація прибутку у відсотках стосовно вкладень, обчислюваних у мільйонах гривень. При цьому якщо встановлено прапорець опції **Автоматическое масштабирование**, слід переконатися, що змінювані клітини містять значення того ж порядку, що очікується у відповіді.

Розділ **Оценки** застосовується для вказівки методу екстраполяції, використовуваного для одержання вихідних оцінок значень змінних у кожному одновимірному пошуку. Якщо перемикач встановлено на категорії **Линейная**, то використовується лінійна екстраполяція, **Квадратичная** – квадратична екстраполяція, що дає кращі результати під час розв'язання нелінійних задач.

У розділі **Разности** варто встановити перемикач у положення **Прямые**, якщо розв'язком задачі є гладка й безперервна функція (це має місце для лінійної моделі). Якщо ж функція має розривну похідну, то слід установити перемикач у положення **Центральные**. Але при цьому **Поиск решения** може видати повідомлення про те, що не може поліпшити результат.

У розділі **Метод поиска** можна вибрати алгоритм оптимізації, тобто напрям пошуку для кожної ітерації. Для нескладних задач краще використовувати метод **Ньютона**, який вимагає для вирішення задачі меншої кількості ітерацій. Якщо задача достатньо складна, то перемикач методу пошуку слід встановити в положення **сопряженных градиентов**.

Формування специфікації оптимізаційної моделі закінчується натисканням на кнопку **Выполнить**, після чого з'являється діалогове вікно **Результаты поиска решения**, в якому повідомляється про завершення пошуку (рис. 4.5).

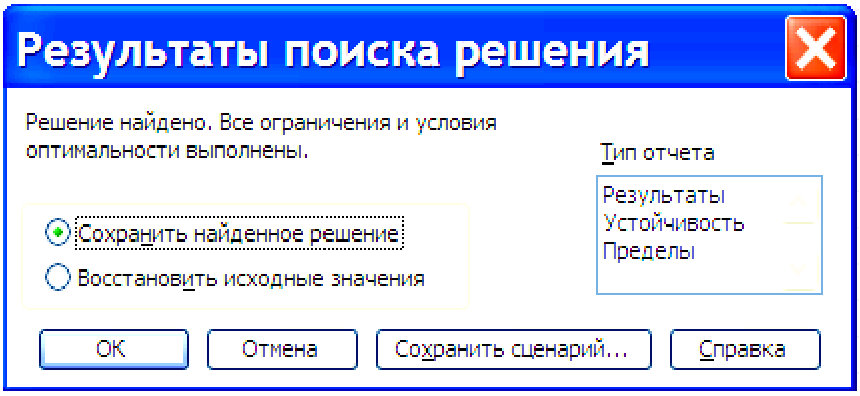


Рис. 4.5. **Діалогове вікно "Результаты поиска решения"**

Якщо розв'язок знайдено, то у діалоговому вікні мають бути ключові речення: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Якщо задача не має розв'язку, то з'явиться фраза **Поиск не может найти подходящего решения**. У випадку, коли розв'язок існує, можна отримати три типи звітів про результати обчислень: **Результаты**, **Устойчивость** та **Пределы**, вибираючи їх у діалоговому вікні.

Звіт **Результаты** складається з аналізу цільової клітини та списку керуючих клітин моделі, їх вихідних і кінцевих значень, а також формул обмежень та додаткових відомостей про накладені обмеження.

Звіт **Устойчивость** використовується для аналізу чутливості знайденого розв'язку до змін параметрів задачі. Перший блок звіту **Устойчивость** містить відомості про величини можливого зменшення або збільшення коефіцієнтів цільової функції, що не впливають на оптимальність знайденого розв'язку (**Допустимое увеличение, Допустимое уменьшение**). Другий блок звіту **Устойчивость** містить інформацію про чутливість до змін обмежень. Стовпчик **Теневая цена** містить значення двоїстих змінних, що відповідають заданим обмеженням, тобто внутрішню вартість одиниці ресурсів. В економічній теорії тіньову ціну називають ціною резервування. Тіньову ціну окремого обмеження можна інтерпретувати як коефіцієнт зміни оптимального значення цільової функції за умовою збільшення значення правої частини даного обмеження та незмінності інших даних. Така інтерпретація є правильною лише у відповідному діапазоні значень правої частини. Саме в цьому діапазоні тіньова ціна є сталою й має вказане значення. Значення у стовпчику **Нормированная стоимость** для відповідної змінної розв'язку визначається як величина, на яку слід змінити коефіцієнт даної змінної у цільовій функції, щоб оптимальне значення цієї змінної стало додатним. Якщо змінна розв'язку у точці оптимуму додатна, то **Нормированная стоимость** для неї дорівнює нулю. Тобто **Нормированная стоимость** відповідає оцінкам оптимального плану.

Звіт **Пределы** відображає мінімальне та максимальне значення змінних моделі і відповідні значення цільової функції. Цей звіт є обмеженим варіантом звіту **Устойчивость** і використовується для швидкого аналізу верхньої та нижньої границь керуючих клітин моделі.

Якщо в діалоговому вікні **Параметры поиска решения** натиснути на кнопку **Сохранить сценарий**, то з'явиться відповідне діалогове вікно.

За замовчуванням надбудова **Поиск решения** зберігає модель, яка починається з активної клітини, тому необхідно натиснути на робочому аркуші MS Excel, щоб вказати початкову клітину або діапазон клітин. При цьому якщо активна клітина містить дані, то модель буде збережена з ними. При збереженні моделі зберігаються цільові клітини, змінювані клітини й опції надбудови **Поиск решения**.

4.3. Приклад розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою надбудови "Поиск решения"

Припустимо, що виробництво продукції визначається матрицею технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}$, матрицею запасів $\mathbf{B}$ і матрицею прибутку від реалізації одиниці продукції $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 5 & 21 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо оптимальний план виробництва, за яким загальний прибуток від реалізації готової продукції буде найбільшим, і здійснимо дослідження його стійкості щодо зміни питомого прибутку.

За початковими даними побудуємо математичну модель задачі про оптимальне використання сировини:

$$Z(\mathbf{X}) = 2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ \phantom{2x_1 + {}} x_2 \le 5; \\ 3x_1 \phantom{{}+x_2} \le 21; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \qquad j = \overline{1,2}.$$

Знайдемо розв'язок цієї задачі, використовуючи вбудовані функції і надбудови MS Excel.

Застосуємо такий алгоритм виконання завдання.

1. Побудуємо на робочому аркуші книги MS Excel таблицю, яка відповідає умовам задачі (рис. 4.6).

	A	B	C	D	E
1		**Визначення оптимального плану**			
2					
3	Змінні	x1	x2		
4	Рішення	0	0		
5		Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Права частина
6	Обмеження ресурсу №1	1	3	0	18
7	Обмеження ресурсу №2	2	1	0	16
8	Обмеження ресурсу №3	0	1	0	5
9	Обмеження ресурсу №4	3	0	0	21
10	**Цільова функція**	2	3	**0**	max

Рис. 4.6. **Вихідні дані задачі визначення оптимального плану виробництва**

2. Стовпчик лівої частини **D6:D10** заповнюється за допомогою функції **СУМПРОИЗВ ()**. Так, **D6 = СУМПРОИЗВ ($B$4:$C$4,B6:C6)**. Блок **B4:C4** містить значення керованих змінних. Вважаємо, що первинний план виробництва складає 0 одиниць за кожним видом продукції. Тому у клітинах **B4:C4** записуємо нулі. Зверніть увагу на те, що позначення **$B$4:$C$4** означає, що дане посилання не змінюється під час "протягування" формули на весь блок клітин **B6:C10** для розрахунку витрат кожного виду сировини та значення цільової функції. Стовпчик правої частини **E6:E9** відображає існуючі обмеження щодо ресурсів.

3. Виділяємо клітину цільової функції (**D10**).

4. Активізуємо режим **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения**.

5. Заповнюємо поле **Установить целевую ячейку**. Обираємо варіант оптимізації – **максимальному значению**. У рядку **Изменяя ячейки** посилаємось на блок керованих змінних **B4:C4**. У вікні **Ограничения** вказуємо співвідношення між лівою та правою частинами системи обмежень (рис. 4.7).

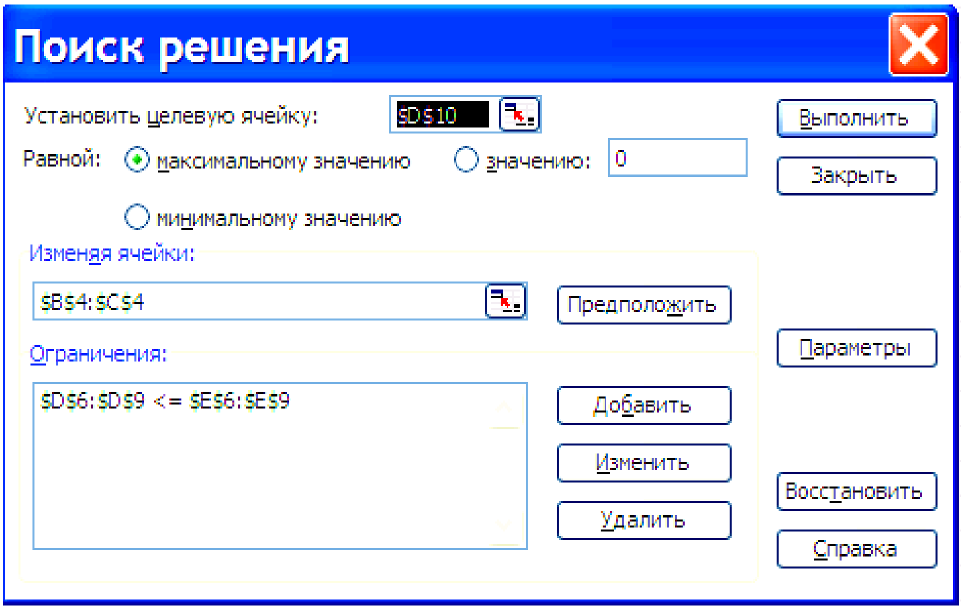


Рис. 4.7. **Діалогове вікно "Поиск решения"**

Для цього натискаємо **Добавить** і у діалоговому вікні, що з'являється при цьому, вводимо обмеження, або викликаємо вікно **Изменение ограничений**. Введення обмежень здійснюється наступним чином. У лівій частині діалогового вікна даємо посилання на блок клітин вихідних даних, які відповідають лівій частині системи обмежень, а у правій частині вікна – на такий блок клітин, який відповідає правій частині системи обмежень. У позиції **Знак** обираємо такий знак відношення, який відповідає обмеженню, що розглядається. У даному випадку це знак $\leq$ (рис. 4.8). Обмеження можна вводити кожне окремо або блоками, якщо вони мають один знак.

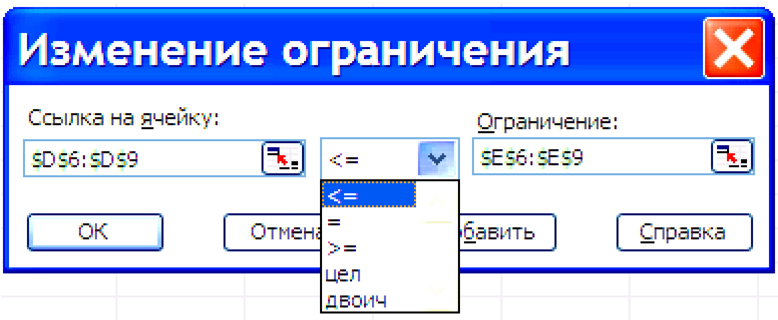


Рис. 4.8. **Діалогове вікно "Изменение ограничений"**

6. Натискаємо кнопку **Параметры** та обираємо режим **Линейная модель** і **Неотрицательные значения** (рис. 4.9). Далі натискаємо **OK** і повертаємось у діалогове вікно надбудови **Поиск решения**.

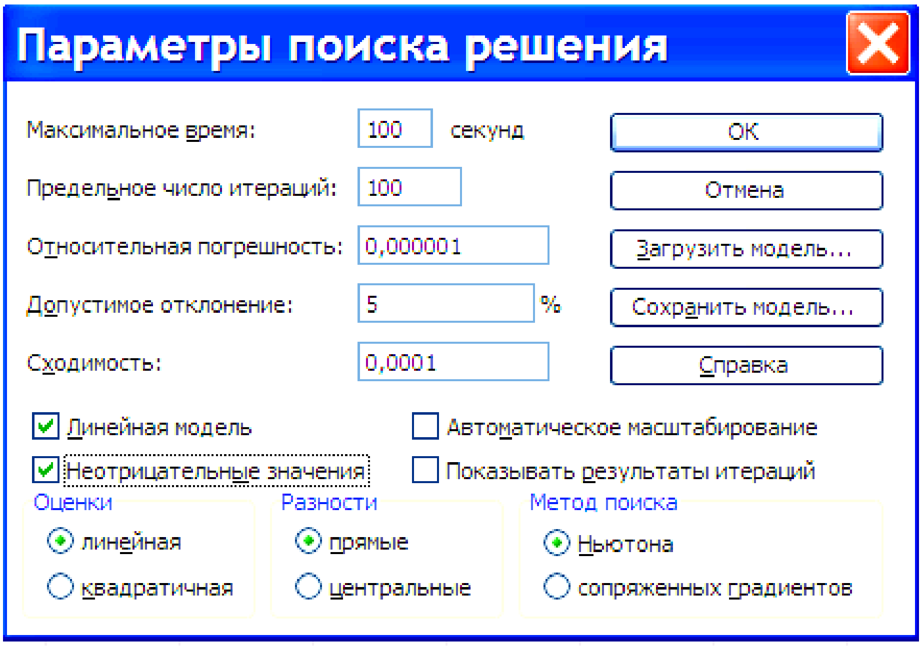


Рис. 4.9. **Діалогове вікно "Параметры поиска решения"**

7. Тепер натискаємо кнопку **Выполнить**. Унаслідок цього на екрані з'являється вікно **Результаты поиска решения** з повідомленням про результат роботи: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Натисканням клавіші **OK** зберігаємо отриманий розв'язок (рис. 4.10) та вказуємо типи звітів: **Результаты**, **Устойчивость**, **Пределы**, які будут виведені на екран, для чого слід вказати тип звіту.

	A	B	C	D	E
1		**Визначення оптимального плану**			
2					
3	Змінні	x1	x2		
4	Рішення	6	4		
5		Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Права частина
6	Обмеження ресурсу №1	1	3	18	18
7	Обмеження ресурсу №2	2	1	16	16
8	Обмеження ресурсу №3	0	1	4	5
9	Обмеження ресурсу №4	3	0	18	21
10	**Цільова функція**	2	3	**24**	max
11					

Рис. 4.10. **Результат розв'язання задачі**

На рис. 4.11 – 4.13 звіти подані у тому вигляді, в якому вони виводяться за допомогою надбудови **Поиск решения**.

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$10	Цільова функція	0	24

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$4	Рішення x1	0	6
$C$4	Рішення x2	0	4

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$6	Обмеження ресурсу № 1 Ліва частина	18	$D$6<=$E$6	связанное	0
$D$7	Обмеження ресурсу № 2 Ліва частина	16	$D$7<=$E$7	связанное	0
$D$8	Обмеження ресурсу № 3 Ліва частина	4	$D$8<=$E$8	не связан.	1
$D$9	Обмеження ресурсу № 4 Ліва частина	18	$D$9<=$E$9	не связан.	3

Рис. 4.11. **Звіт "Результаты"**

Ячейка	Целевое значение Имя	
$D$10	Цільова функція Ліва частина	24

Ячейка	Изменяемое значение Имя		Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$4	Рішення x1	6	0	12	6	24
$C$4	Рішення x2	4	0	12	4	24

Рис. 4.12. **Звіт "Пределы"**

Изменяемые ячейки						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Нормир. стои-мость**	**Целевой коэффи-циент**	**Допусти-мое увеличе-ние**	**Допусти-мое умень-шение**
$B$4	Рішення x1	6	0	2	4	1
$C$4	Рішення x2	4	0	3	3	2

Ограничения						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Теневая цена**	**Ограни-чение правая часть**	**Допусти-мое увеличе-ние**	**Допусти-мое умень-шение**
$D$6	Обмеження ресурсу № 1 Ліва частина	18	0,8	18	2,5	5
$D$7	Обмеження ресурсу № 2 Ліва частина	16	0,6	16	1,6666666 67	5
$D$8	Обмеження ресурсу № 3 Ліва частина	4	0	5	1E+30	1
$D$9	Обмеження ресурсу № 4 Ліва частина	18	0	21	1E+30	3

Рис. 4.13. **Звіт "Устойчивость"**

Відповідно до звіту **Результаты** отримано максимальне значення прибутку – 24 ум. од. Повністю використано ресурс № 1 (в кількості 18 од.) і ресурс № 2 (в кількості 16 од.) Статус відповідних обмежень – **Связанное**, тобто обмеження за цими ресурсами стримує подальше збільшення прибутку. У той же час вихідні запаси ресурсів № 3 та № 4 перевищують планові потреби, тим самим виникають додаткові витрати на збереження цих ресурсів, що може впливати на загальну прибутковість підприємства.

Проведений аналіз дозволяє встановити чутливість моделі задачі щодо зміни її параметрів. У випадку, якщо всі обмеження виконуються за оптимальним планом як тотожності, то будь-яка їх зміна веде до порушення оптимальності плану. Такий чутливий до будь-яких незначних змін зовнішніх параметрів план є потенціальною загрозою для стабільного функціонування підприємства. Отже, необхідно застосовувати заходи щодо підвищення стійкості плану.

Відповідно до звіту **Устойчивость** можливим є збільшення вартості продукції першого типу до 4 од., продукції другого типу – до 3 од. Зменшити вартість продукції першого типу можна до 1 од., продукції другого типу – до 2 од. Для правих частин обмежень обчислено також можливі відхилення, які не приведуть до змін оптимального плану.

Таким чином, аналіз стійкості вказує на припустимі зміни у внутрішньому та зовнішньому середовищах задачі планування, які не впливають на оптимальність прийнятого рішення.

4.4. Розв'язання розширеної М-задачі за допомогою надбудови "Поиск решения"

Відомо, що у процесі виготовлення сплаву можна використовувати напівфабрикати, які виготовляють чотири підприємства. Щоб отримати сплав потрібної якості необхідно, щоб зміст міді, нікелю і свинцю в ньому був не менше певної норми. Напівфабрикати, які постачають різні виробники, містять ці елементи в різних пропорціях, а також відрізняються вартістю (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Питомі характеристики напівфабрикатів і готового сплаву

Добавки	Мінімальний вміст добавок у сплаві, кг/т	Вміст добавок у напівфабрикатах різних постачальників, кг/т			
		1	2	3	4
Мідь	5	10	3	8	2
Нікель	100	90	150	75	175
Свинець	30	45	25	20	37
Вартість 1 т напівфабрикату, грн		800	400	600	500

Визначимо, у якому співвідношенні треба використовувати напівфабрикати від кожного виробника, щоб отримати сплав потрібної якості і при цьому щоб загальна вартість сплаву була найменшою.

За вихідними даними побудуємо математичну модель задачі про оптимальний склад суміші. Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 – кількість напівфабрикатів, що надходять, відповідно, з 1-го, 2-го, 3-го та 4-го підприємств.

Критерієм ефективності є вартість 1 т виплавленого сплаву. Відповідно до умови задачі функція цілі досліджується на мінімум:

$$Z(\mathbf{X}) = 800x_1 + 400x_2 + 600x_3 + 500x_4 \quad \rightarrow \quad \min .$$

Для того, щоб забезпечити необхідну якість сплаву, вміст у ньому добавок повинен бути не нижче за норму. Отримуємо основну систему обмежень:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 \ge 5; \\ 90x_1 + 150x_2 + 75x_3 + 175x_4 \ge 100; \\ 45x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 37x_4 \ge 30; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$

а також є обмеження на знак: $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Для розв'язання задачі використаємо вбудовані функції MS Excel та надбудову **Поиск решения**. Застосуємо такий алгоритм розв'язання.

1. Побудуємо на робочому аркуші книги MS Excel таблицю, що відповідає умовам задачі (рис. 4.14).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		**Задача про складання сплаву**						
3								
4		Елемент сплаву	Мінімально необхідний вміст елемента в сплаві, кг/т	Склад напівфабрикатів різних підприємств, кг/т				Отриманий вміст елемента у сплаві, кг/т
5				1	2	3	4	
6		Мідь	5	10	3	8	2	0
7		Нікель	100	90	150	75	175	0
8		Свинець	30	45	25	20	37	0
9		Вартість 1 т. напівфабриката, грн.		800	400	600	500	
10		Невідома кількість сплаву		0	0	0	0	0
11								
12		Вартість сплаву	**0**					

Рис. 4.14. **Вихідні дані задачі про складання сплаву**

Стовпчик "отриманий вміст елемента у сплаві" **H6:H8** заповнюється за допомогою функції **СУМПРОИЗВ ()**. Наприклад, в клітину **H6** вводимо формулу: **H6 = СУМПРОИЗВ ($D$10:$G$10,D6:G6)**.

Вважаємо, що первинний план закупівлі напівфабрикатів (блок клітин **D10:G10)** складає 0 одиниць від кожного постачальника. Тобто в керовані змінні "невідома кількість сплаву" записуємо нулі.

Для обчислення значення цільової функції "вартість сплаву" в клітину **C12** вводимо формулу: **= СУМПРОИЗВ ($D$10:$G$10,D9:G9)**.

2. Активізуємо режим **Данные** ⇒ **Поиск решения**.
3. Заповнюємо поле **Установить целевую ячейку**.
4. Обираємо варіант оптимізації – **минимальному значению**.
5. У рядку **Изменяя ячейки** посилаємось на блок **D10:G10**.
6. У вікні **Ограничения** вказуємо співвідношення між лівою та правою частинами обмежень (рис. 4.15).

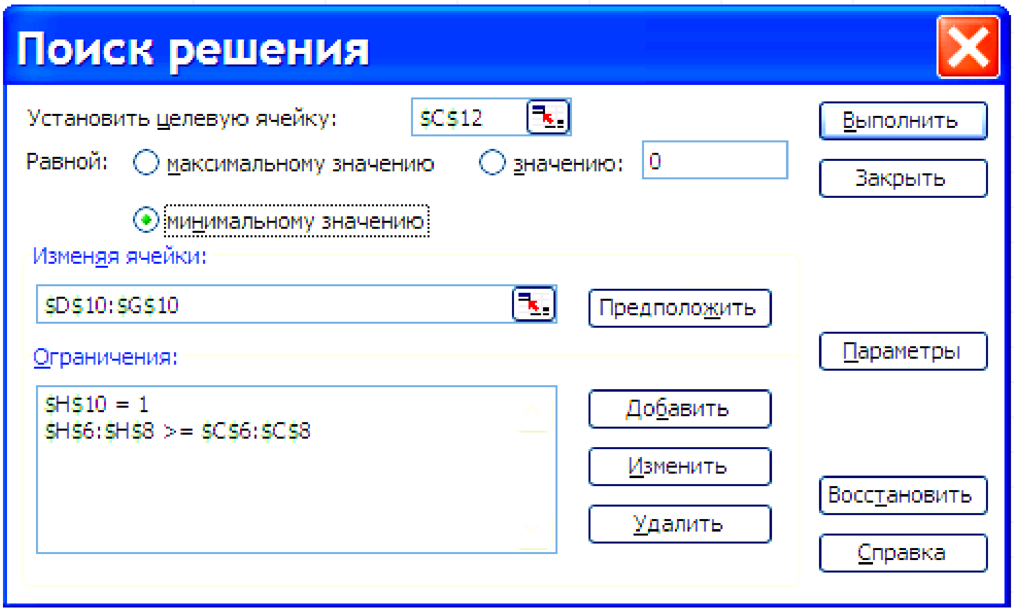


Рис. 4.15. **Діалогове вікно "Поиск решения"**

Натискаємо кнопку **Параметры** та переходимо до діалогового вікна, де вибираємо режим **Линейная модель** і **Неотрицательные значения**, потім натискаємо **ОК** і повертаємось у діалогове вікно **Поиск решения**. Далі натискаємо кнопку **Выполнить**. На екрані з'являється вікно **Результаты поиска решения** з повідомленням про результат роботи. Результат розв'язання даної задачі лінійного програмування подано на рис. 4.16.

Задача про складання сплаву

Елемент сплаву	Мінімально необхідний вміст елемента в сплаві, кг/т	Склад напівфабрикатів різних підприємств, кг/т				Отриманий вміст елемента у сплаві, кг/т
		1	2	3	4	
Мідь	5	10	3	8	2	5,00
Нікель	100	90	150	75	175	131,67
Свинець	30	45	25	20	37	30,00
Вартість 1 т. напівфабриката, грн.		800	400	600	500	
Невідома кількість сплаву		0,26	0,70	0,04	0,00	1

Вартість сплаву	**511,11**

Рис. 4.16. **Результат розв'язання задачі**

Таким чином, для забезпечення необхідного складу готового сплаву напівфабрикати слід придбати у постачальників у пропорції, що визначається оптимальним планом:

$$\mathbf{X}^* = (0{,}26 \quad 0{,}70 \quad 0{,}04 \quad 0),$$

тобто 26 % від усієї кількості напівфабрикатів повинна складати продукція 1-го постачальника, 70 % – продукція 2-го постачальника та 4 % – продукція 3-го постачальника, а продукцію 4-го постачальника не слід купувати.

Використання напівфабрикатів у такій пропорції забезпечує вміст міді та свинцю у готовій продукції у кількості, що точно співпадає з мінімальною нормою, а кількість нікелю перевищуватиме мінімальну норму: 131,67 кг/т замість 100 кг/т.

Загальна вартість готової продукції при цьому буде найнижчою і становитиме:

$$Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^*) = 511{,}11 \text{ грн/т.}$$

4.5. Завдання для самостійної роботи

Підприємство виготовляє чотири типи продукції: А, В, С і Д. Відомі норми витрат сировини на одиницю готової продукції, обсяг запасів сировини кожного виду і прибуток від реалізації одиниці продукції (табл. 4.2).

Знайти оптимальний план виробництва, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації продукції. Визначити ступінь дефіцитності ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, та рентабельність кожного виду продукції. Знайти інтервали зміни запасів ресурсів та змін ціни для кожного виду продукції.

Таблиця 4.2

Вихідні дані задачі про оптимальний план виробництва

<table>
<tr><th rowspan="2">№ варіанта</th><th rowspan="2">Вид сировини</th><th colspan="4">Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції</th><th rowspan="2">Запаси сировини</th></tr>
<tr><th>А</th><th>В</th><th>С</th><th>Д</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td>I</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>48</td></tr>
<tr><td>II</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>50</td></tr>
<tr><td>III</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>40</td></tr>
<tr><td>Прибуток від реалізації одиниці продукції</td><td>12</td><td>15</td><td>14</td><td>11</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>I</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>26</td></tr>
<tr><td>II</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>28</td></tr>
<tr><td>III</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>46</td></tr>
<tr><td>Прибуток від реалізації одиниці продукції</td><td>18</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>I</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>II</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>20</td></tr>
<tr><td>III</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Прибуток від реалізації одиниці продукції</td><td>7</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td>I</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>21</td></tr>
<tr><td>II</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>14</td></tr>
<tr><td>III</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Прибуток від реалізації одиниці продукції</td><td>6</td><td>9</td><td>8</td><td>5</td><td>–</td></tr>
</table>

Продовження табл. 4.2

1	2	3	4	5	6	7
5	I	2	3	1	1	40
	II	1	5	1	2	58
	III	2	1	1	2	34
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	12	6	10	–
6	I	1	3	3	2	40
	II	3	4	3	1	50
	III	3	3	1	2	48
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	9	15	11	10	–
7	I	2	1	1	2	17
	II	2	5	1	1	29
	III	1	3	1	2	20
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	10	12	5	7	–
8	I	1	3	2	4	34
	II	3	4	1	3	40
	III	5	3	2	2	42
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	24	28	20	26	–
9	I	3	1	3	2	118
	II	4	3	3	1	134
	III	3	5	1	2	150
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	40	24	34	20	–
10	I	3	3	1	2	96
	II	3	4	3	1	100
	III	1	3	3	2	80
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	24	30	28	22	–
11	I	3	1	2	4	52
	II	4	3	1	3	56
	III	3	5	2	1	92
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	36	24	24	28	–
12	I	3	1	1	2	36
	II	3	2	3	4	40
	III	1	2	2	1	28
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	14	10	12	18	–

Закінчення табл. 4.2

1	2	3	4	5	6	7
13	I	1	2	3	1	42
	II	3	4	3	2	28
	III	2	1	1	2	30
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	12	18	16	10	–
14	I	1	3	2	4	17
	II	3	4	1	3	20
	III	5	3	2	2	21
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	12	14	10	13	–
15	I	3	1	3	2	59
	II	4	3	3	1	67
	III	3	5	1	2	75
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	20	12	17	10	–
16	I	1	3	4	2	29
	II	3	4	3	1	32
	III	5	3	1	2	49
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	12	15	14	11	–

4.6. Контрольні запитання

1. Сформулюйте вимоги, які пред'являються до математичної моделі ЗЛП для її розв'язання за допомогою симплекс-метода.

2. Наведіть алгоритм розв'язання ЗЛП із використанням симплексної таблиці. У чому полягає критерій оптимальності плану під час дослідження функції цілі на мінімум за допомогою симплекс-методу?

3. Який зв'язок між результатами ітерацій симплекс-методу і опорними планами, які розглядаються у процесі розв'язання задачі графічним методом?

4. Сформулювати принцип використання додаткових змінних. Який сенс вони мають в задачі про використання сировини?

5. Що таке фіктивні змінні і в чому полягає їх призначення? Пояснити необхідність використання фіктивних змінних в математичній моделі ЗЛП.

6. Чому базис розширеної М-задачі називається штучним?

7. Охарактеризувати основні типи завдань, до розв'язання яких доцільно застосовувати надбудову **Поиск решения** MS Excel.

8. Наведіть алгоритм розв'язання оптимізаційних задач лінійного програмування в середовищі MS Excel.

9. Які існують опції надбудови **Поиск решения** для проведення аналізу отриманих результатів оптимізації?

Тема 5. Теорія двоїстості. Взаємно двоїсті задачі лінійного програмування

5.1. Теоретичні відомості

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, звану ***двоїстою***. Первинна задача по відношенню до двоїстої є початковою. Ці дві задачі тісно пов'язані між собою і утворюють єдину двоїсту пару.

Припустимо, що підприємство може не тільки використовувати наявні ресурси для виробництва продукції, але і реалізовувати сировину, якщо це буде більш вигідним. Позначимо через y_i $(i=\overline{1,n})$ ***умовну***, або ***маргінальну*** (***тіньову***) ***ціну*** одиниці сировини i-го виду, запаси якої на підприємстві дорівнюють b_i $(i=\overline{1,m})$. Умовна ціна залежить від прибутку, який підприємство очікує отримати від реалізації продукції, що вироблена з цієї сировини: чим вище цей прибуток, тим більшу ціну можна отримати від реалізації ресурсів, якщо реалізовувати сировину більш вигідно, ніж продукцію, яка вироблена з цієї сировини.

Задача про визначення граничних значень внутрішніх цін, за умов перевищення яких виробництво стає менш вигідним, ніж реалізація сировини, є двоїстою до задачі про оптимальне використання ресурсів.

Обидві задачі утворюють ***симетричну пару спряжених взаємно двоїстих задач***, і математична модель ***двоїстої задачі*** може бути побудованою за математичною моделлю вихідної згідно з їх властивостями. У випадку, коли математична модель вихідної задачі задана у стандартній формі, математичні моделі спряжених задач є симетричними.

Тоді у матричній формі співвідношення між математичними моделями вихідної та двоїстої задач у цьому випадку має вигляд:

Вихідна задача	**Двоїста задача**	
$Z = \mathbf{C}\cdot\mathbf{X} \quad \to \quad \max;$	$F = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}} \quad \to \quad \min;$	
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} \le \mathbf{B};$	$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{A} \ge \mathbf{C}^{\mathbf{T}};$	(5.1)
$\mathbf{X} \ge \mathbf{0}.$	$\mathbf{Y} \ge \mathbf{0}.$	

Побудуємо модель двоїстої задачі згідно з її економічним тлумаченням. Оскільки покупець прагне придбати сировину якомога дешевше, критерієм ефективності двоїстої задачі буде загальна вартість усіх видів ресурсів, яка досліджується на мінімум. Тобто маємо цільову функцію, яка досліджується на мінімум:

$$F(\mathbf{Y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \quad \to \quad \min. \tag{5.2}$$

Зрозуміло, що підприємство продаватиме наявні ресурси лише за умов, що кошти, які воно може отримає від реалізації сировини, не будуть нижчі, ніж очікувані прибутки від реалізації готової продукції. Цю умову можна записати як рівність екстремальних значень цільових функцій спряжених задач: $F(\mathbf{Y}^*) = Z(\mathbf{X}^*)$, що відповідає ***1-й теоремі двоїстості***.

Як і в задачі про оптимальне використання сировини, матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ – це матриця технологічних коефіцієнтів, а елементи c_j матриці-рядка $\mathbf{C} = (c_j)_{1\times n}$, $j = \overline{1,n}$ визначають прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції j-го типу. Розглянувши умову беззбитковості за кожним видом готової продукції, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases} \tag{5.3}$$

Система нерівностей (5.3) є основною системою обмежень задачі, що є двоїстою до задачі про оптимальне використання сировини. Отже, коефіцієнтами при невідомих у цій системі є елементи транспонованої матриці технологічних коефіцієнтів, а її правою частиною – елементи транспонованої матриці прибутку від реалізації.

Оскільки ціни, навіть умовні, не можуть бути від'ємними, то для змінних двоїстої задачі маємо обмеження на знак:

$$y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.4}$$

Отже, математична модель двоїстої задачі (5.2 – 5.4) відповідає співвідношенням (5.1), які випливають з теорем двоїстості.

Для двоїстої задачі необхідно визначити матрицю тіньових цін $\mathbf{Y} = \left(y_j\right)_{1\times n}$, за умов перевищення яких підприємству стає більш вигідним продати сировину, ніж виробляти з неї продукцію.

Розв'язком двоїстої задачі буде матриця-рядок $\mathbf{Y}^* = \left(y_j^*\right)_{1\times n}$, елементи якої задовольняють системі обмежень (5.3) та (5.4), а цільова функція $F(\mathbf{Y}^*) = \min F(\mathbf{Y})$ досягає мінімуму.

5.2. Приклад розв'язання двоїстої задачі

За вихідними даними, які визначають матрицю технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}$, матрицю запасів сировини $\mathbf{B}$ та матрицю питомого прибутку $\mathbf{C}$, знайти внутрішні ціни, за умов перевищення яких стає більш вигідним продати сировину, ніж виробляти з неї продукцію, та дослідити стійкість розв'язку.

Вихідна задача про оптимальне використання сировини має такі значення параметрів:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 5 & 9 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 8 & 11 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \left(220 \quad 360 \quad 410\right); \qquad \mathbf{C} = \left(6 \quad 3 \quad 7 \quad 2\right).$$

За даними вихідної задачі побудуємо математичну модель двоїстої. Оскільки цільова функція вихідної задачі досліджується на максимум, то цільова функція двоїстої задачі, коефіцієнтами якої є кількість запасів сировини кожного виду, повинна досліджуватись на мінімум:

$$F(\mathrm{Y}) = 220y_1 + 360y_2 + 410y_3 \quad \to \quad min.$$

Відповідно до виду екстремуму цільової функції нерівності основної системи обмежень повинні мати знак $\geq$. За кожним стовпцем вихідної матриці технологічних коефіцієнтів складаємо нерівність щодо загальної ціни на сировину, що витрачається на виготовлення певної продукції. Для цього транспонуємо вихідну матрицю технологічних коефіцієнтів і у правій частині нерівностей вказуємо ціни на готову продукцію:

$$\begin{cases} 10y_1 + 12y_2 + 8y_3 \geq 9; \\ 12y_1 + 6y_2 + 11y_3 \geq 3; \\ 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 7; \\ 9y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2. \end{cases}$$

Оскільки задачі симетричні, то змінні двоїстої задачі мають обмеження на знак:

$$y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,3}.$$

Для розв'язання задачі застосуємо надбудову "**Поиск решения"** MS Excel. Занесемо у вигляді таблиці вихідні дані до робочого аркуша книги MS Excel, дотримуючись математичної моделі двоїстої задачі (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Вихідна таблиця двоїстої задачі

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Двоїста задача**							
2	Види сировини	1-й	2-й	3-й				
3	Тіньові ціни	1	1	1	Усього			
4	Кількість сировини	220	360	410	990			
5	Тип продукції:					**Обмеження**		**Надлишок**
6	1-й	10	12	8	30	≥	9	21
7	2-й	12	6	11	29	≥	3	26
8	3-й	5	6	8	19	≥	7	12
9	4-й	9	3	4	16	≥	2	14

Комірки **B3:D3** містять початкові значення тіньових цін, які є керованими змінними даної задачі. Їх значення зручно прийняти рівними одиниці.

Значення функції цілі виводимо в клітині **E4** як суму добутків тіньових цін кожного з типів сировини, які розміщені в клітинах **B3:D3**, на кількість сировини відповідного типу, яке наведено в блоці клітинок **B4:D4**. Для цього в клітину **E4** записуємо формулу: **=СУММПРОИЗВ (B3:D3; B4:D4)**. Блок **B6:D9** містить елементи матриці технологічних коефіцієнтів, а значення кожної з клітин **E6:E9** дорівнює вартості запасу відповідного типу сировини в умовних цінах. Наприклад, в клітині **E6** вона обчислюється за формулою: **=СУММПРОИЗВ (B3:D3; B6:D6)**. В клітинах **G6:G9** розміщені граничні значення умовної вартості (праві частини основної системи обмежень), а в стовпчику **F** приведені знаки нерівностей основної системи обмежень. У комірках **H6:H9** обчислюємо різницю між значеннями кожної з комірок **E6:E9** та значеннями у відповідних їм комірках **G6:G9**. Наприклад, для обчислення значення комірки **H6** до неї вводимо формулу: **=E6-G6**. Значення інших комірок отримуємо, "розтягнувши" цю формулу на комірки **H7:H9**.

За допомогою команд **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения** викликаємо на екрані діалогове вікно "**Поиск решения"** і заповнюємо його поля відповідно до математичної моделі двоїстої задачі. До поля "**Установить целевую ячейку"** вводимо посилання на комірку **$E$4** та встановлюємо перемикач проти умови **Равной: максимальному значению**. До поля **Изменяя ячейки** вводимо посилання на комірки **$B$3:$D$3** та додаємо обмеження на їх значення. Для цього ставимо курсор у розділ **Ограничения**, натискаємо кнопку **Добавить.** У діалоговому вікні **Добавление ограничения** до лівого поля вводимо ліву частину нерівностей основної системи обмежень (**$E$6:$E$9**), вибираємо знак у центральному полі (**>=**) та до правого поля вводимо правую частину обмеження (**$G$6:$G$9**). За основною системою обмежень **$E$6:$E$9>=$G$6:$G$9** значення в комірках стовпчика **E** повинні бути не менші за значення у відповідних комірках стовпчика **G** (рис. 5.1).

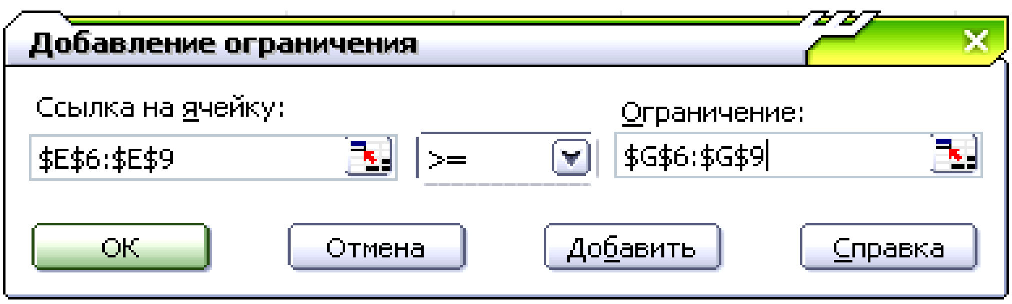


Рис. 5.1. **Основна система обмежень двоїстої задачі**

Натискаємо клавішу **ОК** і повертаємося до діалогового вікна **Поиск решения**. Тепер визначаємо параметри моделі, для чого натискаємо кнопку **Параметры** і в діалоговому вікні **Параметры поиска решения** ставимо прапорці до розділів **Линейная модель** та **Неотрицательные значения**, оскільки змінні двоїстої задачі мають обмеження на знак. Натисканням кнопки **ОК** повертаємося до діалогового вікна **Поиск решения**.

Для визначення розв'язку натискаємо кнопку **Выполнить**, унаслідок чого в табл. 5.1 змінюються значення умовних цін, вартості кожного типу сировини та загальної вартості усіх видів сировини в умовних цінах. Одночасно на екрані з'являється діалогове вікно **Результаты поиска решения**, в якому читаємо повідомлення: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Отже, знайдено оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Встановлюємо перемикач у положення **Сохранить найденное решение** й вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость.** Натискаємо **ОК**, і на робочому аркуші в таблиці, що відповідала табл. 5.1, зберігається розв'язок двоїстої задачі (табл. 5.2), а звіт виводиться на окремому робочому аркуші (рис. 5.2).

За таблицею результатів записуємо отримане рішення у вигляді матриці $\mathbf{Y}_1^* = (1{,}4;\ 0;\ 0)$. Цьому оптимальному плану відповідає мінімальне значення функції цілі: $\min F(\mathbf{Y}) = F(\mathbf{Y}_1^*) = 308$ ум. од.

Таблиця 5.2

Кінцева таблиця двоїстої задачі

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Двоїста задача**							
2	Види сировини	1-й	2-й	3-й				
3	Тіньові ціни	1,4	0	0	Усього			
4	Кількість сировини	220	360	410	308			
5	Тип продукції:	**Обмеження**						**Надлишок**
6	1-й	10	12	8	14	≥	9	5
7	2-й	12	6	11	16,8	≥	3	13,8
8	3-й	5	6	8	7	≥	7	0
9	4-й	9	3	4	12,6	≥	2	10,6

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэфф.	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$3	Тіньові ціни	1,4	0	220	36,25	220
$C$3	Тіньові ціни	0	96	360	1E+30	96
$D$3	Тіньові ціни	0	58	410	1E+30	58
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$E$6	Усього	14	0	9	5	1E+30
$E$7	Усього	16,8	0	3	13,8	1E+30
$E$8	Усього	7	44	7	1E+30	2,5
$E$9	Усього	12,6	0	2	10,6	1E+30

Рис. 5.2. **Звіт щодо стійкості розв'язку двоїстої задачі**

Розглянемо інтерпретацію отриманого плану. Оскільки тіньові ціни на сировину 2-го та 3-го типів дорівнюють нулю, це означає, що додаткове придбання цих типів сировини не буде сприяти збільшенню обсягів виробництва продукції, і, відповідно, закупати ці типи сировини не має сенсу. Дійсно, вихідні запаси цих видів сировини такі, що в процесі реалізації оптимального плану виробництва залишаються надлишки сировини 2-го та 3-го типів. При цьому сировина 1-го типу витрачається повністю. Отже, для того, щоб збільшити обсяг виробництва, потрібно придбати саме сировину 1-го типу. За умов збільшення кількості цієї сировини на одиницю в межах стійкості оптимального плану зростає обсяг виробництва, і, як наслідок, загальний прибуток від реалізації продукції (значення цільової функції) збільшиться на 1,4 ум. од.

5.3. Завдання для самостійної роботи

Підприємство може виготовляти чотири типи продукції. Виробництво продукції потребує витрат сировини трьох видів. Згідно з технологією, що застосовується на виробництві, задані питомі витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду – $\mathbf{A}$. Підприємство має певні запаси усіх цих видів сировини – $\mathbf{B}$ та відомі ринкові ціни на одиницю кожного з трьох видів продукції – $\mathbf{C}$. Ці вихідні дані наведено у табл. 5.3.

За вихідними даними скласти математичну модель задачі про оптимальне використання сировини та визначити її оптимальний план. Відповідно до моделі вихідної задачі побудувати математичну модель двоїстої задачі щодо внутрішніх (маргінальних) цін на сировину та знайти оптимальний план цієї задачі та відповідне йому значення цільової функції за допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel.

Надати економічну інтерпретацію отриманих результатів.

Таблиця 5.3

Вихідні дані задачі про оптимальне використання сировини

№ варіанта	Матриці параметрів системи	
1	2	
1	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 11 & 5 & 9\\ 9 & 6 & 6 & 3\\ 8 & 11 & 9 & 4\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=(220 \quad 160 \quad 310);$ $\mathbf{C}=(9 \quad 5 \quad 7 \quad 4)$
2	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 5 & 9\\ 9 & 6 & 8 & 3\\ 8 & 11 & 9 & 5\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=(180 \quad 240 \quad 320);$ $\mathbf{C}=(9 \quad 12 \quad 7 \quad 6)$
3	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 5 & 9\\ 9 & 10 & 6 & 3\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=(320 \quad 260 \quad 310);$ $\mathbf{C}=(4 \quad 5 \quad 7 \quad 8)$
4	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 5 & 9\\ 9 & 6 & 6 & 12\\ 6 & 10 & 9 & 4\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=(190 \quad 210 \quad 160);$ $\mathbf{C}=(7 \quad 6 \quad 9 \quad 4)$
5	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 7 & 5 & 9\\ 9 & 6 & 12 & 3\\ 8 & 4 & 9 & 5\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=(310 \quad 280 \quad 340);$ $\mathbf{C}=(9 \quad 10 \quad 7 \quad 6)$
6	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 12 & 5 & 9\\ 9 & 6 & 10 & 7\\ 8 & 4 & 9 & 4\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=(250 \quad 220 \quad 360);$ $\mathbf{C}=(10 \quad 5 \quad 7 \quad 12)$

Продовження табл. 5.3

1	2	
7	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 9 & 5 & 9\\ 9 & 11 & 8 & 3\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}340 & 260 & 280\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9 & 12 & 7 & 4\end{pmatrix}$
8	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 5 & 7\\ 9 & 4 & 8 & 9\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}320 & 290 & 270\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 7 & 9\end{pmatrix}$
9	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 12 & 9\\ 10 & 8 & 8 & 3\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}330 & 410 & 390\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 10 & 7 & 4\end{pmatrix}$
10	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 9 & 5 & 9\\ 9 & 4 & 12 & 8\\ 5 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}270 & 360 & 250\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 7 & 9\end{pmatrix}$
11	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 5 & 9\\ 12 & 6 & 8 & 12\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}190 & 280 & 210\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7 & 6\end{pmatrix}$
12	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 9 & 11 & 9\\ 9 & 11 & 8 & 12\\ 4 & 7 & 9 & 6\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}290 & 380 & 230\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 11 & 4\end{pmatrix}$
13	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 8 & 5 & 4\\ 9 & 12 & 6 & 9\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}250 & 360 & 240\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 9 & 7 & 4\end{pmatrix}$
14	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 9 & 5 & 9\\ 9 & 8 & 6 & 12\\ 8 & 12 & 9 & 4\end{pmatrix}$;	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}240 & 280 & 300\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 5 & 4\end{pmatrix}$

1	2	
15	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 12 & 9\\ 9 & 4 & 8 & 3\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}240 & 160 & 210\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 7 & 8\end{pmatrix}$
16	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 4 & 5 & 9\\ 9 & 6 & 8 & 12\\ 8 & 10 & 9 & 4\end{pmatrix};$	$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}280 & 260 & 340\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9 & 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$

5.4. Контрольні запитання

1. Пояснити економічний сенс задачі, яка є двоїстою щодо задачі про оптимальне використання сировини. Чому змінні цієї двоїстої задачі мають назву внутрішніх, або маргінальних цін?

2. Пояснити, у чому полягає різниця між тіньовими цінами (змінними двоїстої задачі) і цінами реалізації (коефіцієнтами цільової функції вихідної задачі).

3. Які існують типи спряжених задач? У чому полягають особливості їх математичних моделей?

4. Пояснити принцип побудови математичної моделі симетричної двоїстої задачі. Чи обов'язково для змінних задачі лінійного програмування повинно виконуватись обмеження на знак?

5. Сформулювати теореми двоїстості. Навести їх економічну інтерпретацію.

Тема 6. Економічна інтерпретація двоїстих невідомих. Двоїстий симплекс-метод

6.1. Теоретичні відомості

Нехай підприємство виробляє продукцію за певною технологією, тобто відома матриця технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, що визначає витрати сировини i-го типу ($i=\overline{1,m}$) на виготовлення одиниці продукції j-го типу ($j=\overline{1,n}$). Також відомі запаси сировини, що має підприємство. Вони визначаються матрицею-стовпцем $\mathbf{B} = (b_i)_{m\times 1}$. Прибуток від реалізації одиниці продукції j-го типу ($j = \overline{1,n}$) описується матрицею-рядком $\mathbf{C} = (c_j)_{n\times 1}$, де c_j – прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції j-го типу ($j = \overline{1,n}$). Необхідно дослідити стійкість оптимального плану виробництва $\mathbf{X} = (x_j)_{n\times 1}$ щодо ринкових цін на готову продукцію та кількості запасів сировини.

У даній задачі критерієм ефективності є загальний прибуток від реалізації продукції, зрозуміло, що він досліджується на максимум, отже, цільова функція $Z(\mathbf{X})$ має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \quad \to \quad \max. \tag{6.1}$$

Основна система обмежень щодо використання сировини надається у вигляді нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i; \quad i = \overline{1,m}. \tag{6.2}$$

Крім того, маємо обмеження на знак:

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}. \tag{6.3}$$

Співвідношення (6.1 – 6.3) утворюють математичну модель вихідної задачі про оптимальне використання сировини. Нехай ця задача має розв'язок $\mathbf{X}^* = (x_j^*)$.

Розглянемо двоїсту задачу. Її змінними є маргінальні ціни на сировину, математична модель двоїстої задачі є симетричною до вихідної і має вигляд:

$$F(\mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \quad \to \quad \min; \tag{6.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j; \quad j = \overline{1,n}; \tag{6.5}$$

$$y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m}. \tag{6.6}$$

Якщо вихідна задача має оптимальний план, то двоїста задача теж має оптимальний план $\mathbf{Y}^* = \left(y_i^*\right)_{m\times 1}$, за яким

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* .$$

Оскільки за 1-ю теоремою двоїстості $F_{\min} = Z_{\max}$, то $Z_{\max}$ можна розглядати як функцію відносно вільних членів системи обмежень вихідної задачі:

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* .$$

Для дослідження на локальний екстремум знайдемо частинні похідні цієї функції за змінними $b_i \ (i = \overline{1, m})$:

$$\frac{\partial Z_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*; \quad i = \overline{1, m} . \tag{6.7}$$

Таким чином, змінні двоїстої задачі визначають темп зміни цільової функції вихідної задачі, якщо змінюється запас i-го виду сировини. Це справедливо в околі точки b_i, а саме, доти, доки базис векторів $\mathbf{D}$ залишається незмінним.

Якщо $y_i^* > 0$, то значення цільової функції вихідної задачі можна збільшити завдяки збільшенню запасів j-ї сировини, оскільки ця додаткова кількість сировини буде використовуватися для збільшення випуску продукції. Якщо $y_i^* = 0$, то збільшення кількості сировини j-го виду не супроводжується зростанням цільової функції, оскільки за оптимальним планом є залишок цієї сировини. Ці співвідношення відповідають другій теоремі двоїстості і є підґрунтям теорії доповнюючої нежорсткості.

Система рівнянь (6.7) показує, що зміна величини b_i на одиницю супроводжується зміною екстремального значення цільової функції $Z_{\max}$ на величину $\left|y_i^*\right|$ і може бути охарактеризована лише тоді, коли під час зміни величини b_i значення змінних y_i^* в оптимальному плані не змінюється.

Отже, за знайденим розв'язком вихідної задачі можна без особливих труднощів провести аналіз стійкості двоїстих оцінок щодо зміни величин b_i і навпаки. Це дозволяє оцінювати стійкість оптимального плану щодо зміни параметрів задачі.

Слід відмітити, що в теорії двоїстості пряма задача вирішується симплекс-методом, а двоїста – двоїстим симплекс-методом. Сенс двоїстого симплекс-методу полягає в тому, що замість прямої задачі вирішують двоїсту за допомогою звичайного симплекс-методу, а потім за розв'язком двоїстої задачі знаходять оптимальний план прямої. При цьому немає необхідності застосовувати теореми двоїстості. Якщо розв'язання здійснюють в симплекс-таблиці, то отримують одночасно розв'язки і прямої, і двоїстої задач.

6.2. Приклад дослідження стійкості оптимального розв'язку

За вихідними даними, які визначають матрицю технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}$, матрицю запасів сировини $\mathbf{B}$ та матрицю питомого прибутку $\mathbf{C}$, знайти оптимальний план використання сировини та дослідити його стійкість.

Вихідна задача щодо оптимального використання сировини має такі значення параметрів:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 5 & 9 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 8 & 11 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 220 & 360 & 410 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

За вихідними даними укладемо математичну модель двоїстої задачі (позначимо її як задача № 1):

$$F(\mathbf{Y}) = 220y_1 + 360y_2 + 410y_3 \quad \to \quad \min,$$

$$\begin{cases} 10y_1 + 12y_2 + 8y_3 \geq 9; \\ 12y_1 + 6y_2 + 11y_3 \geq 3; \\ 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 7; \\ 9y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,3}.$$

Для розв'язання цієї задачі застосуємо надбудову "**Поиск решения"** MS Excel (див. приклад розв'язання задачі теми 5) і отримаємо оптимальний план $\mathbf{Y}_1^* = (1,4;\, 0;\, 0)$, за яким цільова функція приймає найменше значення: $\min F(\mathbf{Y}) = F(\mathbf{Y}_1^*) = 308$ ум. од.

Також за допомогою надбудови "**Поиск решения"** отримуємо звіт "**Устойчивость**" (рис. 6.1).

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэфф.	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$3	Тіньові ціни	1,4	0	220	36,25	220
$C$3	Тіньові ціни	0	96	360	1E+30	96
$D$3	Тіньові ціни	0	58	410	1E+30	58
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$E$6	Усього	14	0	9	5	1E+30
$E$7	Усього	16,8	0	3	13,8	1E+30
$E$8	Усього	7	44	7	1E+30	2,5
$E$9	Усього	12,6	0	2	10,6	1E+30

Рис. 6.1. **Звіт щодо стійкості розв'язку двоїстої задачі**

На рис. 6.1, окрім вихідних даних двоїстої задачі та її розв'язку, міститься інформація про стійкість оптимального плану двоїстої задачі щодо зміни коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі (розділ **Изменяемые ячейки**). Вони мають сенс запасів сировини певного типу. Те, що тіньові ціни на ресурси 2-го та 3-го типів дорівнюють нулю, означає, що за оптимальним планом виробництва витрати сировини 2-го та 3-го не перевищують запасів (запаси є надлишковими). Аналіз даних стовпчика **Допустимое уменьшение**, дозволяє зробити висновок, що запас сировини 2-го типу можна зменшити на 96 одиниць, а сировини 3-го типу – на 58 одиниць. При цьому оптимальний план залишається без змін.

Слід зазначити, що зміну запасів сировини одного типу можна здійснювати тільки за умови збереження запасів сировини іншого типу. Для того щоб переконатись у цьому, розглянемо нову задачу (позначимо її як задача № 2), що відрізняється від задачі № 1 лише кількістю сировини 2-го типу. Нехай $b_2 = 360 - 96 = 264$, тобто кількість сировини 2-го зменшено до гранично допустимого значення. При цьому система обмежень залишається незмінною, а функція цілі задачі № 2 має вигляд:

$$F(\mathbf{Y}) = 220y_1 + 264y_2 + 410y_3 \quad \rightarrow \quad \min .$$

Знайдемо розв'язок цієї задачі за допомогою надбудови **Поиск решения**. Результат наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Дослідження впливу кількості сировини 2-го типу

	A	B	C	D	E	F	G	H
11	**Двоїста задача**							
12	Види сировини	1-й	2-й	3-й				
13	Тіньові ціни	0	7/6	0	Усього			
14	Кількість сировини	220	264	410	308			
15	Тип продукції:	**Обмеження**						**Надлишок**
16	1-й	10	12	8	14	≥	9	5
17	2-й	12	6	11	7	≥	3	4
18	3-й	5	6	8	7	≥	7	0
19	4-й	9	3	4	3,5	≥	2	1,5

Отже, у разі зменшення сировини 2-го типу на 96 одиниць, ми отримали інший оптимальний план: $\mathbf{Y}_2^* = (0;\ 7/6;\ 0)$. Однак зверніть увагу, що йому відповідає цільова функція, яка має те ж саме значення: $\min F(\mathbf{Y}) = F(\mathbf{Y}_2^*) = 308$ ум. од. Це означає, що за умови такого співвідношення сировини різних типів лінія рівня цільової функції виходить з многокутника планів не через вершину $\mathbf{Y}_1^*$, як це відбувалось за умовами задачі № 1, а через ребро, що з'єднує вершини $\mathbf{Y}_1^*$ та $\mathbf{Y}_2^*$.

Таким чином, за вихідними умовами задачі № 2 оптимальними є і план $\mathbf{Y}_1^*$, і план $\mathbf{Y}_2^*$, а також їх опукла лінійна комбінація $\mathbf{Y}^* = \lambda\mathbf{Y}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{Y}_2^*$, де $\lambda \in [0;1]$. Це означає, що задача № 2 має ***альтернативний оптимум***, якому відповідає $\min F(\mathbf{Y}) = 308$ ум. од.

Рис. 6.1 також містить інформацію щодо стійкості оптимального плану двоїстої задачі за умов зміни правої частини нерівностей основної системи обмежень (розділ **Ограничения**). Ці параметри у вихідній задачі мають сенс ринкової ціни на одиницю продукції кожного виду.

Зверніть увагу, що продукція 1-го, 2-го та 4-го видів має нульову тіньову ціну, а тіньова ціна на продукцію 3-го виду дорівнює 44. Це означає, що збільшення ринкової ціни на продукцію 3-го виду на одиницю призведе до збільшення значення цільової функції на 44 ум. од.

Для того, щоб переконатись у цьому, розглянемо нову задачу (позначимо її як задача № 3), умови якої відрізняються від умов задачі № 1 тільки відносно ринкової ціни за одиницю продукції 3-го виду. Наприклад, нехай $c_3 = 7 + 2 = 9$ ум. од. Маємо математичну модель задачі № 3:

$$F(\mathbf{Y}) = 220y_1 + 360y_2 + 410y_3 \quad \to \quad \min,$$

$$\begin{cases} 10y_1 + 12y_2 + 8y_3 \geq 9; \\ 12y_1 + 6y_2 + 11y_3 \geq 3; \\ 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 9; \\ 9y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,3}.$$

Слід очікувати, що цільова функція задачі № 3, що відповідає оптимальному плану, буде більше цільової функції задачі № 1 на величину $\Delta F(\mathbf{Y}^*) = 2 \cdot 44 = 88$ ум. од. тому, що зросте значення y_1^* в оптимальному плані $\mathbf{Y}_1^*$. Саме те, що кількість сировини 1-го типу обмежує випуск продукції, робить цю сировину ще більш цінною для підприємства в умовах зростання ринкової ціни продукції.

Застосуємо для розв'язання цієї задачі надбудову **Поиск решения** MS Excel. Результати наведені в табл. 6.2. З табл. 6.2 видно, що цільова функція дійсно зросла на 88 ум. од. При цьому тип оптимального плану двоїстої задачі залишився без змін: дефіцитною є сировина 1-го виду, а для сировини 2-го та 3-го видів є надлишки. Тіньова ціна на сировину 1-го виду зросла до 1,8 ум. од., тобто сировина 1-го виду стала для підприємства ще більш цінною.

Таблиця 6.2

Дослідження впливу збільшення вартості продукції 3-го виду

	A	B	C	D	E	F	G	H
21	**Двоїста задача**							
22	Види сировини	1-й	2-й	3-й				
23	Тіньові ціни	1,8	0	0	Усього			
24	Кількість сировини	220	360	410	396			
25	Тип продукції:	**Обмеження**						**Надлишок**
26	1-й	10	12	8	18	≥	9	9
27	2-й	12	6	11	21,6	≥	3	18,6
28	3-й	5	6	8	9	≥	9	0
29	4-й	9	3	4	3,5	≥	2	14,2

Згідно з рис. 6.1 припустиме зменшення для ринкової ціни продукції 3-го виду становить 2,5 ум. од.

Розглянемо нову задачу (позначимо її як задача № 4), що відрізняється від вихідної тільки ринковою ціною за одиницю продукції 3-го виду. Наприклад, нехай $c_3 = 7 - 2{,}5 = 4{,}5$ ум. од. Тоді слід очікувати, що цільова функція задачі № 4 зменшиться відносно відповідного значення у задачі № 1 на величину $\Delta F(\mathbf{Y}^*) = 2{,}5 \cdot 44 = 110$ ум. од. і складатиме $\min F(\mathbf{Y}^*) = 308 - 110 = 198$ ум. од. Переконаємось у цьому.

Результати застосування надбудови **Поиск решения** для задачі № 4 наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Дослідження впливу зменшення вартості продукції 3-го виду

	A	B	C	D	E	F	G	H
31	**Двоїста задача**							
32	Види сировини	1-й	2-й	3-й				
33	Тіньові ціни	0,9	0	0	Усього			
34	Кількість сировини	220	360	410	198			
35	Тип продукції:	**Обмеження**						**Надлишок**
36	1-й	10	12	8	9	≥	9	0
37	2-й	12	6	11	10,8	≥	3	7,8
38	3-й	5	6	8	4,5	≥	4,5	0
39	4-й	9	3	4	8,1	≥	2	6,1

З табл. 6.3 видно, що значення цільової функції дійсно зменшилось до величини 198 ум. од. Крім того, це супроводжувалось зменшенням тіньової ціни на сировину 1-го виду до 0,9 ум. од., тобто завдяки змінам кон'юнктури ринку ця сировина стала менш важливою для підприємства.

6.3. Завдання для самостійної роботи

Дослідити стійкість оптимального плану прямої задачі (див. завдання для самостійної роботи до теми 5) щодо значення коефіцієнтів функції цілі двоїстої задачі (початкових запасів сировини кожного виду окремо) і значення параметрів в правій частині її основної системи обмежень (ринкових цін на готову продукцію).

6.4. Контрольні запитання

1. Поясніть економічний сенс параметрів, які містить математична модель задачі про оптимальне використання сировини.
2. Що розуміють під стійкістю оптимального плану задачі лінійного програмування? Дайте графічну інтерпретацію.
3. Як впливають зміни ринкової вартості готової продукції на оптимальний план використання сировини і значення функції цілі?
4. Як впливають зміни кількості запасів сировини на оптимальний план її використання і значення функції цілі за цим планом?
5. Поясніть принцип двоїстого симплекс-методу.

Тема 7. Аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач

7.1. Теоретичні відомості

Дослідження стійкості оптимального плану задачі лінійного програмування можна інтерпретувати як розв'язання задачі ***параметричного програмування***, суть якого полягає у вивченні поведінки оптимального розв'язку задачі лінійного програмування залежно від зміни параметрів задачі: коефіцієнтів функції цілі і/або правих частин основної системи обмежень. Обмежимося розглядом залежності оптимального розв'язку від зміни значень правих частин основної системи обмежень, тобто, проаналізуємо вплив зміни значень правих частин основної системи обмежень на оптимальний план задачі лінійного програмування.

У загальному вигляді задачу параметричного програмування з параметрами у вільних членах обмежень можна записати так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; (\leq, =, \geq) \; b_i + t_i; \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n},$$

де x_j, t_i – невідомі;

a_{ij}, b_i, c_j – сталі величини.

Величина t_i визначає, в яких межах можливі зміни правої частини кожної з умов основної системи обмежень. У загальному випадку $t_i \in (-\infty; +\infty)$, проте для більшості завдань існує вимога додатності правої частини. Для розв'язання задачі параметричного програмування з параметрами у вільних членах основної системи обмежень використовується надбудова **Поиск решения** MS Excel.

7.2. Приклад розв'язання задачі лінійного програмування з параметрами у вільних членах умов обмежень

У табл. 7.1 наведені норми витрат ресурсів (сталь, кольорові метали, завантаження токарних верстатів) для виробництва двох видів виробів А і В та прибуток від реалізації одиниці кожного виробу.

Таблиця 7.1

Вихідні дані задачі

Види ресурсів	А	В	Запас
Сталь, кг	10	70	570
Кольорові метали, кг	20	50	420
Токарні верстати, верстато-години	300	400	5 600
Прибуток від реалізації, тис. грн	3	8	

Знайдемо оптимальний план виробництва продукції і перевіримо його на стійкість до змін запасів ресурсів. Також проведемо дослідження, які ресурси можна скоротити, або збільшити і на скільки, і як при цьому зміниться оптимальний план виробництва і прибуток від реалізації виробленої продукції.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 і x_2 кількість виробів кожного виду. Для них існує обмеження на знак: $x_1, x_2 \geq 0$. Критерієм ефективності в даній задачі є загальний прибуток від реалізації виробленої продукції, тобто цільова функція досліджується на максимум:

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \to \max.$$

Оскільки продукція виготовляється з наявних запасів сировини, то аргументи цільової функції повинні задовольняти обмеження:

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 570; \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420; \\ 300x_1 + 400x_2 \leq 5\,600. \end{cases}$$

Приведена вище математична модель відповідає задачі лінійного програмування. Оскільки необхідно не тільки знайти оптимальний план ЗЛП, але і дослідити його стійкість залежно від зміни запасів сировини, запишемо математичну модель задачі як задачу параметричного програмування. З урахуванням параметрів $t_i \left(i=\overline{1,3}\right)$, що характеризують можливі межі зміни запасів заданих в задачі ресурсів, система обмежень задачі параметричного програмування прийме вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 570 + t_1; \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420 + t_2; \\ 300x_1 + 400x_2 \leq 5\,600 + t_3; \end{cases}$$
$$x_1;\ x_2 \geq 0.$$

Для розв'язання задачі використаємо надбудову **Поиск решения** MS Excel. Слід відмітити, що визначення діапазонів значень параметрів $t_i \left(i=\overline{1,3}\right)$ і подальший аналіз моделі задачі лінійного програмування, здійснюється за допомогою звіту **Устойчивость**.

Побудуємо на робочому аркуші книги MS Excel таблицю, в яку внесемо початкові дані задачі лінійного програмування, дотримуючись її математичної моделі, тобто, без урахування параметрів (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Вихідна таблиця задачі

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Задача параметричного програмування**							
2	**Вид виробу**	А	В					
3	Кількість одиниць виробу, шт.	1	1			**Усього прибуток**		
4	Прибуток від реалізації, тис. грн	3	8			11		
5	**Види ресурсів:**	**Норми витрат**		**Обмеження**			**Залишок**	
6	Сталь, кг	10	70	80	≤	570	490	
7	Кольорові метали, кг	20	50	70	≤	420	350	
8	Токарні верстати, верстато-години	300	400	700	≤	5600	4900	

Блок **B3:C3** містить початкові значення кількості одиниць вироблюваних виробів, які є керованими змінними даного завдання. Їх значення зручно прийняти рівними одиниці.

Блок **B6:C8** містить норми витрат ресурсів на виробництво одиниці певного виду виробу. У даному завданні, як в задачі параметричного програмування, ці значення є константами. Значення кожної з клітин блоку **D6:D8** дорівнює витраті відповідного виду ресурсу у процесі виробництва продукції відповідно до плану. Для розрахунку цієї величини скористаємося вбудованою функцією **СУММПРОИЗВ ()**. Наприклад, для клітини **D6** величина витрат сталі на виготовлення запланованого обсягу продукції обчислюється за формулою: **=СУММПРОИЗВ ($B$3:$C$3; B6:C6)**. Оскільки посилання на клітини **$B$3:$C$3** є абсолютним, то для обчислення значень в **D6:D8** "розтягуємо" формулу на цей блок клітин. В клітинах **F6:F8** записані значення правих частин основної системи обмежень. У задачі лінійного програмування вони містять константи, тоді як в задачі параметричного програмування їх значення можуть змінюватися. У стовпці **E** наведені знаки нерівностей основної системи обмежень.

У клітинах **G6:G8** обчислюємо різницю між значеннями кожної з клітин блоку **F6:F8 і** значеннями у відповідних ним клітинах блоку **D6:D8**. Наприклад, для обчислення значення клітини **G6** вводимо формулу: **= F6–D6**. Значення інших клітин цього стовпця набуваємо, "розтягнувши" цю формулу на клітини **G7**:**G8**.

Значення цільової функції виводимо в клітині **F4** як суму добутків кількості виготовлених виробів на прибуток від реалізації одиниці виробу кожного виду, значення якого приведені в клітинах **B4:C4**. Для цього в клітину **F4** вводимо формулу: **=СУММПРОИЗВ (B3:C3; B4:C4)**.

За допомогою послідовності команд **Данные** ⇒ **Поиск решения** викликаємо на екрані діалогове вікно **Поиск решения** і заповнюємо його поля відповідно до математичної моделі задачі. У полі **Установить целевую ячейку** вводимо посилання на клітину **$F$4** і встановлюємо перемикач на умові **Равной: максимальному значению**.

У поле **Изменяя ячейки** вводимо посилання на клітини **$B$3:$C$3** і додаємо обмеження на їх значення. Для цього ставимо курсор в розділ **Ограничения**, натискаємо кнопку **Добавить.** В діалоговому вікні **Добавление ограничения** у ліве поле вводимо значення лівої частини нерівностей основної системи обмежень (**$D$6:$D$8**), вибираємо знак в центральному полі ($\le$) і в праве поле вводимо значення правої частини обмежень з параметрами (**$F$6:$F$8**).

Оскільки всі умови основної системи обмежень внесені, натискаємо клавішу **ОК** і повертаємося в діалогове вікно **Поиск решения**. Тепер визначаємо параметри моделі, для чого натискаємо клавішу **Параметры** і в діалоговому вікні **Параметры поиска решения** відзначаємо прапорцями опції **Линейная модель** та **Неотрицательные значения**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємось у діалогове вікно **Поиск решения**.

Для виконання оптимізації натискаємо кнопку **Выполнить**, у результаті чого в табл. 7.2 змінюються значення керованих змінних і прибутку від реалізації виробів. На екрані з'являється діалогове вікно **Результаты поиска решения** з повідомленням: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Отже, знайдено оптимальний план. Встановлюємо перемикач у положення **Сохранить найденное решение**, із пропонованих типів звіту вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость.** Натискаємо **ОК**, і на робочому аркуші в таблиці, що відповідає таблиці вихідних даних, зберігається розв'язок задачі (табл. 7.3), а звіт про його стійкість виводиться на окремому аркуші (рис. 7.1).

Таблиця 7.3

Кінцева таблиця задачі

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Задача параметричного програмування**							
2	**Вид виробу**	А	В					
3	Кількість одиниць виробу, шт.	1	8			**Всього прибуток**		
4	Прибуток від реалізації, тис. грн	3	8			67		
5	**Види ресурсів:**	**Норми витрат**		**Обмеження**			**Залишок**	
6	Сталь, кг	10	70	570	≤	570	0	
7	Кольорові метали, кг	20	50	420	≤	420	0	
8	Токарні верстати, верстато-години	300	400	3 500	≤	5 600	2 100	

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэфф.	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$3	Кількість одиниць виробу, шт. А	1,00	0,00	3	0,2	1,86
$C$3	Кількість одиниць виробу, шт. В	8,00	0,00	8	13	0,5
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$D$6	Сталь, кг	570,00	0,0111	570	18	270
$D$7	Кольорові метали, кг	420,00	0,1444	420	111,18	12,86
$D$8	Токарні верстати, верстато-години	3 500,00	0,0000	5 600	1E+30	2 100

Рис. 7.1. **Звіт щодо стійкості розв'язку як метод визначення меж зміни вільних членів системи обмежень**

Для задачі лінійного програмування, математична модель якої відповідає початковим запасам сировини, отриманий оптимальний план виробництва $\mathbf{X}^* = ($[illegible]$;\, 8)$. Під час використання цього плану прибуток від реалізації готової продукції досягає найбільшої величини для даних значень зовнішніх параметрів (в даному випадку, запасів сировини) і складає: $\max Z(\mathbf{X}) = Z(\mathbf{X}^*) = 67$ тис. грн.

Розглянемо інтерпретацію результатів, наведених в звіті **Устойчивость**. Тіньова ціна певного обмеження є коефіцієнтом зміни оптимального значення цільової функції під час збільшення значення правої частини даного обмеження на одиницю за умови, що решта всіх даних залишаються незмінними. Така інтерпретація тіньової ціни правильна тільки в певному діапазоні значень правої частини. Цей діапазон задається значеннями, вказаними в стовпцях **Допустимое уменьшение** і **Допустимое увеличение** в розділі **Ограничения** звіту **Устойчивость**. Саме у цьому діапазоні оптимальний план задачі зберігає свою структуру, відповідно, тіньова ціна ресурсів постійна і має вказане значення. Поза допустимим діапазоном відбувається якісна зміна оптимального плану і тіньова ціна може приймати інші значення.

За даними стовпців **Допустимое уменьшение** і **Допустимое увеличение** (див. рис. 7.1) можна зробити висновок про те, що запас першого ресурсу можна зменшити на 270 кг і збільшити на 18 кг, другого ресурсу – зменшити на 12,86 кг і збільшити на 111,18 кг. При цьому прибуток від реалізації змінюватиметься, оскільки змінюється об'єм продукції, що випускається. Для третього ресурсу можна зменшити запас на 2 100 верстато-годин або необмежено його збільшити, але при цьому прибуток від реалізації продукції не зміниться.

Причини такого впливу зміни запасів ресурсів на значення функції цілі полягають в наступному. Оскільки тіньова ціна використання токарних верстатів дорівнює нулю, то це означає, що цей вид ресурсу не витрачений повністю, його залишок під час реалізації оптимального плану відмінний від нуля. Відповідно, зміна даного ресурсу у вказаних межах не дає можливості виготовляти додаткову продукцію і не принесе додаткового прибутку у разі збільшення його запасу.

Такі ресурси як сталь і кольорові метали витрачені повністю, їх залишки дорівнюють нулю, і саме це стримує подальше зростання виробництва. Розглядаючи тіньові ціни цих видів ресурсів, помічаємо, що збільшення запасу сталі на 1 кг приведе до збільшення прибутку на 0,011 вартісних одиниць (тис. грн), а збільшення запасу кольорових металів на 1 кг приведе до збільшення прибутку на 0,144 вартісних одиниць (тис. грн). Таким чином, з цих видів ресурсів другий є дефіцитнішим, кориснішим для збільшення прибутку. У процесі розширення виробництва треба в першу чергу вкладати кошти в збільшення запасу кольорових металів.

Таким чином, ми отримали такі інтервали зміни значень вільних членів правих частин основної системи обмежень і відповідні їм значення прибутку підприємства:

$$-270 \le t_1 \le 18; \qquad \max Z(X) = 67 + 0{,}011 t_1 \text{ (тис. грн)};$$

$$-12{,}86 \le t_2 \le 111{,}18; \quad \max Z(X) = 67 + 0{,}144 t_2, \text{ (тис. грн)};$$

$$-2100 \le t_3 \le \infty; \qquad \max Z(X) = 67 \text{ (тис. грн)}.$$

7.3. Завдання для самостійної роботи

Розв'язати завдання для самостійної роботи за темою 5 як задачу параметричного програмування з параметрами у правій частині основної системи обмежень.

7.4. Контрольні запитання

1. Які параметри містить математична модель задачі лінійного програмування?
2. У чому полягає задача параметричного програмування?
3. Чи може задача параметричного програмування містити параметри у лівій частині основної системи обмежень?
4. Сформулюйте задачу лінійного програмування з параметрами у правій частині основної системи обмежень. Наведіть економічний зміст такої задачі параметричного програмування.
5. З якою метою потрібно досліджувати вплив параметрів у коефіцієнтах цільової функції на розв'язок задачі лінійного програмування?
6. Наведіть приклад графічного розв'язання задачі параметричного програмування з параметрами у коефіцієнтах цільової функції.
7. Наведіть етапи розв'язання задачі лінійного програмування з параметрами у вільних членах за допомогою надбудови **Поиск решения**.

Тема 8. Транспортна задача. Методи розв'язання транспортної задачі

8.1. Теоретичні відомості

Одним із найбільш поширених типів задач лінійного програмування є транспортна задача. ***Класичну транспортну задачу за критерієм витрат*** можна сформулювати так. Є постачальники A_i $(i=\overline{1,m})$ однотипної продукції, запаси якої у кожного з постачальників відомі і дорівнюють, відповідно, a_i $(i=\overline{1,m})$. Також є споживачі B_j $(j=\overline{1,n})$ цієї продукції, потреби яких у цій продукції також відомі і визначаються для кожного із споживачів як b_j $(j=\overline{1,n})$. Задана матриця питомої вартості перевезень (тарифів) між усіма учасниками $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, де кожний елемент c_{ij} цієї матриці визначає вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника j-у споживачеві (передбачається, що постачання здійснюється без посередників). Необхідно скласти такий план перевезень, відповідно з яким усі споживачі задовольнили б свої потреби, запаси всіх постачальників були б вивезені і при цьому сумарна вартість перевезень була б найменшою.

Якщо через x_{ij} позначити кількість продукції (в умовних одиницях), яку постачає постачальник A_i $(i=\overline{1,m})$ споживачеві B_j $(j=\overline{1,n})$, то план постачання можна записати у вигляді матриці $\mathbf{X}=(x_{ij})_{m\times n}$. Оскільки у даній задачі ***критерієм ефективності*** є загальна вартість перевезень, що досліджується на мінімум, то цільова функція має вигляд:

$$Z(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot x_{ij} \quad\to\quad \min. \qquad (8.1)$$

Керованими змінними транспортної задачі є кількість вантажу x_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, яка перевезена від i-го постачальника j-у споживачеві. Ці змінні повинні відповідати певним умовам.

Запишемо ці обмеження.

По-перше, усі запаси продукції, що зберігаються у кожного з постачальників, необхідно вивезти:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i = \overline{1,m}. \qquad (8.2)$$

По-друге, потреби всіх споживачів у цій продукції необхідно задовольнити у повному обсязі:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (8.3)$$

Перевезення здійснюються тільки в одному напрямку: від постачальника до споживача, зворотних потоків нема, тому змінні транспортної задачі не можуть бути від'ємними:

$$x_{ij} \ge 0; \;\; i = \overline{1,m}; \;\; j = \overline{1,n}. \qquad (8.4)$$

Системи рівнянь (8.2) і (8.3) утворюють ***основну систему обмежень*** транспортної задачі, а нерівності (8.4) – це ***обмеження на знак***. Отже, система обмежень класичної транспортної задачі складається з умов (8.2) – (8.4).

Умови (8.2) і (8.3) одночасно можуть виконуватись лише тоді, коли сума всіх запасів дорівнює сумі всіх потреб, тобто виконується ***умова збалансованості***:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (8.5)$$

Таким чином математична модель класичної транспортної задачі за критерієм вартості задана співвідношеннями (8.1) – (8.4). Оскільки і цільова функція, і функції, що містяться у системі обмежень, є лінійними, то класична транспортна задача є задачею лінійного програмування. Зверніть увагу, що її основна система обмежень надана у вигляді рівняння, отже, математична модель транспортної задачі, яка задана співвідношеннями (8.1) – (8.4), дана у ***канонічній формі***.

Розв'язком транспортної задачі за критерієм вартості є ***оптимальний план*** перевезень $\mathbf{X}^* = \left(x_{ij}^*\right)_{m \times n}$, компоненти якого задовольняють системі обмежень (8.2) – (8.4) і у процесі використання якого цільова функція $Z(\mathbf{X}^*) = \min Z(\mathbf{X})$ має найменше з можливих значень.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є збалансованість попиту і пропозиції, тобто, виконання умови (8.5). Якщо балансова умова виконується, то така задача називається ***закритою***, або ***збалансованою***.

Якщо ж балансова умова не виконується, то задача називається ***відкритою***, і для її розв'язання спочатку необхідно перетворити її математичну модель таким чином, щоб зробити задачу закритою. Для цього вводять ***фіктивного учасника***. У тому випадку, коли має місце співвідношення: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то таким учасником є споживач, і йому приписують потреби у обсязі: $b_{j+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Величина b_{j+1} відповідає кількості продукції, яку не буде вивезено зі складів. Відповідно, у математичну модель задачі вводять ***додаткові*** (***балансові***) ***змінні***. У даному випадку це змінні $x_{i\,j+1} \geq 0$ $(i = \overline{1,3})$, вони характеризують залишки продукції у кожного з постачальників, тобто кількість продукції, яка не буде вивезена зі складів.

Якщо має місце нерівність $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то треба ввести фіктивного постачальника, якому приписують запас $a_{i+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. У цьому випадку величина a_{i+1} визначає загальну кількість продукції, яку недоотримують споживачі, а додаткові змінні $x_{i+1\,j} \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$ описують кількість продукції, якої не вистачить відповідному споживачеві для того, щоб задовольнити свої потреби у повному обсязі.

Нагадаємо, що додаткові змінні вводяться у нерівності основної системи обмежень для перетворення їх у рівняння. Використання додаткових змінних дозволяє звести відкриту транспортну задачу до закритої, завдяки цьому транспортна задача матиме розв'язок.

Оскільки перевезення за участю фіктивного постачальника або фіктивного споживача не здійснюються, то вартість перевезень за участю фіктивного учасника дорівнює нулю, відповідно, додаткові змінні входять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

8.2. Приклад розв'язання транспортної задачі за критерієм витрат

Визначимо оптимальний план перевезень для задачі, що має такі вихідні умови. На трьох складах A_1, A_2 і A_3 зосереджені запаси однотипної продукції, обсяги яких задані матрицею $\mathbf{A}$. Цю продукцію необхідно перевезти до п'яти споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5, потреби яких задані матрицею $\mathbf{B}$. Вартість перевезення одиниці вантажу (тариф) від кожного постачальника кожному споживачеві задана матрицею $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (240; 320; 180); \qquad \mathbf{B} = (100; 120; 160; 210; 150); \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконується балансова умова (8.5). Маємо:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 240 + 320 + 180 = 740;$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 200 + 120 + 160 + 210 + 150 = 740.$$

Оскільки сумарні запаси дорівнюють сумарним потребам, то задача є збалансованою, тобто закритою. Отже, математичну модель цієї задачі можна одразу записати у канонічній формі, не використовуючи для цього додаткові змінні.

Запишемо математичну модель задачі. Цільова функція (загальна вартість перевезень) має вигляд:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{X}) = {} & 2x_{11} + 8x_{12} + 5x_{13} + x_{14} + 3x_{15} + \\ & + 6x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 6x_{24} + 9x_{25} + \\ & + 3x_{31} + 6x_{32} + x_{33} + 4x_{34} + 5x_{35} \quad \to \quad \min; \end{aligned}$$

Основна система обмежень складається з рівнянь, три з яких описують кількість продукції, яка вивезена с трьох складів відповідно з певним планом, і ще п'ять – кількість продукції, яку за цим же планом отримав кожний з п'яти споживачів:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 240; \\ \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 320; \\ \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 180; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 100; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 120; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 160; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 210; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 150. \end{cases}$$

Система обмежень містить обмеження на знак:

$$x_{ij} \geq 0;\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,5}.$$

Для знаходження оптимального плану скористаємось надбудовою **Поиск решения**. На робочому аркуші книги MS Excel побудуємо таблицю, до якої потім буде введено оптимальний план (табл. 8.1). Це масив комірок **B3:F5**, у які записуємо вихідні значення керованих змінних. Для зручності будемо вважати їх рівними 1.

Таблиця 8.1

Допоміжна таблиця для застосування надбудови "Поиск решения"

	A	B	C	D	E	F	G
1	***Оптимізація транспортних витрат***						
2	***Постачальники***	***Споживачі***					***Факт***
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
3	A_1	1	1	1	1	1	5
4	A_2	1	1	1	1	1	5
5	A_3	1	1	1	1	1	5
6	***Факт***	3	3	3	3	3	15

У стовпці **G** "Факт" обчислюємо суми за рядками (обсяги поставок від кожного постачальника). Для цього курсор встановлюємо у комірку **G3**, вибираємо послідовність команд **Вставка** $\Rightarrow$ **функция** і серед функцій вибираємо **СУММ**. У комірці **G3** з'являється вираз **=СУММ (B3:F3)**. Тепер натискаємо **Enter**, і у комірку виводиться результат. Потім формулу розтягуємо на комірки **G4** і **G5**. У комірці **G6** підраховуємо загальний обсяг поставок як суму за комірками **G3:G5**.

Аналогічно в комірках **B6:F6** обчислюємо кількість продукції, що була отримана кожним споживачем, як суми за стовпцями від **B** до **F**. Наприклад, загальну кількість продукції, яку отримав споживач B_1, вводимо у комірку **B6** за допомогою вбудованої функції за формулою: **=СУММ (B3:B5)**. І в комірці **G6** обчислюємо загальний обсяг поставок, застосувавши формулу: **=СУММ (B6:F6)**.

Потім на цьому ж самому робочому аркуші створюємо ще одну таблицю, куди заносимо інформацію про попит і пропозиції, а також про тарифи перевезень, тобто всі вихідні дані (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Вихідні дані транспортної задачі

	A	B	C	D	E	F	G
7		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	***Пропозиція***
8	A_1	2	8	5	1	3	240
9	A_2	6	4	7	6	9	320
10	A_3	3	6	1	4	5	180
11	***Попит***	100	120	160	210	150	
12	***Вартість***	11	18	13	11	17	**70**

У комірках **B12:F12** табл. 8.2 для кожного споживача обчислюємо вартість перевезень продукції від усіх його постачальників. Наприклад, для споживача B_1 (комірка **B12**) сумарну вартість перевезень обчислюємо за формулою: **=B3*B8+B4*B9+B5*B10**. З цією ж метою можна скористатись функцією: **СУММПРОИЗВ ()**. Тоді значення у комірці **B12** обчислюємо як **=СУММПРОИЗВ (B3:B5; B8:B10)**. У комірку **G12** вводимо загальну вартість перевезень, записавши формулу: **=СУММ (B12:F12)**. Таким чином, комірка **G12** містить значення цільової функції відповідно з планом, який надано у табл. 8.1.

Для знаходження оптимального плану транспортної задачі застосуємо процедуру **Поиск решения**. Для цього за допомогою послідовності команд **Данные** ⇒ **Поиск решения** визиваємо на екрані діалогове вікно цієї процедури і заповнюємо його поля, як показано на рис. 8.1.

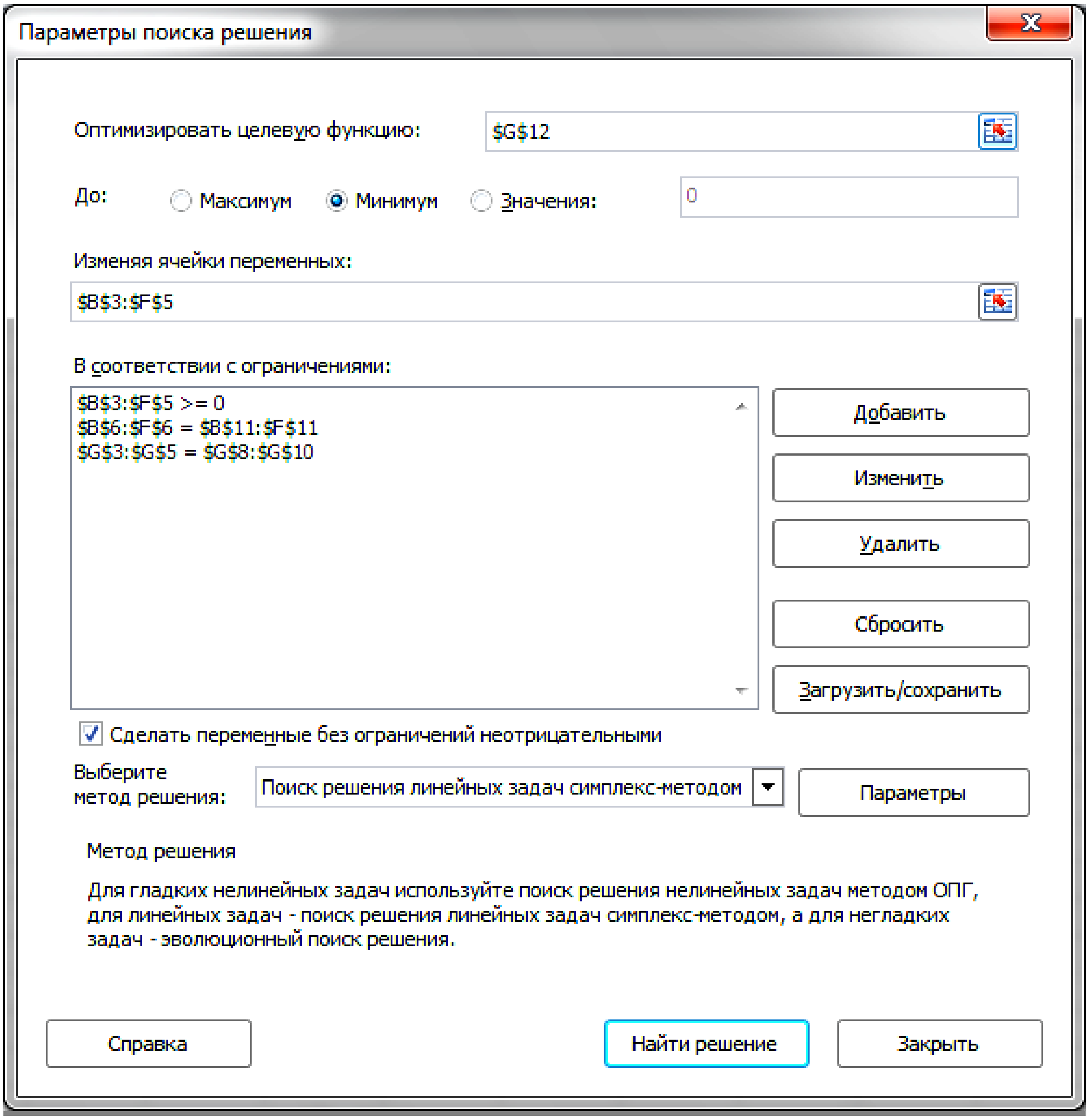


Рис. 8.1. **Вигляд діалогового вікна "Поиск решения" MS Excel-2010**

У полі **Оптимизировать целевую функцию** даємо посилання на комірку **$G$12**, що містить формулу загальної вартості перевезень, і встановлюємо перемикач умови **До: Минимум**. У полі **Изменяя ячейки переменных** вводимо посилання на комірки, що містять компоненти плану транспортної задачі **$B$3:$F$5**, і вводимо обмеження на їх значення. Для цього ставимо курсор у віконце **В соответствии с ограничениями**, натискаємо кнопку **Добавить**, і на екрані з'являється діалогове вікно **Добавление ограничения** (рис. 8.2).

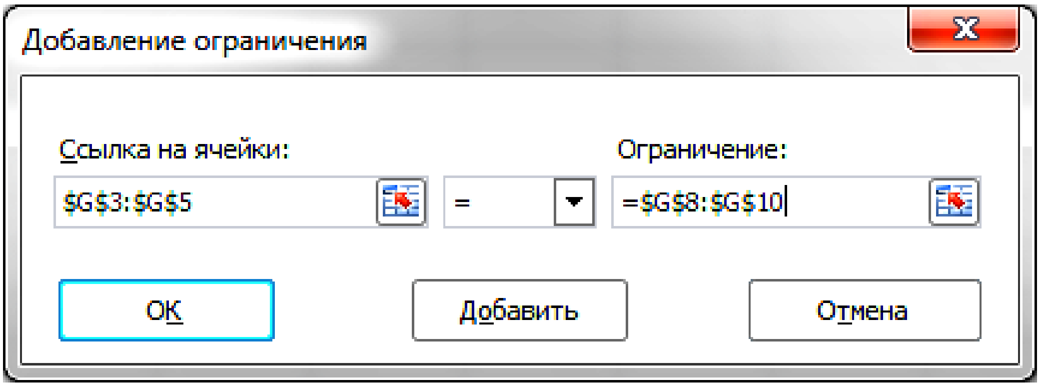


Рис. 8.2. **Діалогове вікно "Добавление ограничения"**

У його полі **Ссылка на ячейки** вводимо посилання на ліву частину сукупності обмежень "попит кожного споживача необхідно задовольнити", тобто на комірки **$B$6:$F$6**, що містять сумарні поставки для кожного споживача, вибираємо знак обмеження у центральному полі (**=**) і у полі **Ограничение** вводимо посилання на праву частину цього обмеження – комірки **$B$11:$F$11**, де вказано попит. Отже, обмеження набуває вигляду: **$B$6:$F$6=$B$11:$F$11**, тобто значення у комірках 6-го рядка повинні дорівнювати значенням у відповідних комірках 11-го рядка.

Тепер натискаємо **Добавить** і вводимо ще одну сукупність обмежень: **$G$3:$G$5=$G$8:$G$10**, що означає "запаси усіх постачальників необхідно вивезти". Зазначимо, що надбудова **Поиск решения** дозволяє знаходити розв'язок і відкритої транспортної задачі без введення у її модель фіктивного учасника. У цьому випадку у центральному полі діалогового вікна **Добавление ограничения** застосовуємо знаки нестрогих нерівностей **>=** і **<=**. Отже, основна система обмежень введена. Натискаємо кнопку **Добавить** і у вікні **Добавление ограничения** вводимо обмеження на знак. Для цього у лівому полі даємо посилання на комірки **$B$3:$F$5**, у центральному полі вводимо знак **>=**, а у правому полі пишемо 0.

Після введення усіх умов натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося у діалогове вікно **Поиск решения**. Тепер заповнюємо вікно **Выберите метод решения**, де вказуємо **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**. Тепер усю необхідну інформацію введено. Натискаємо кнопку **Найти решение**, у результаті чого в табл. 8.1 і 8.2 змінюються значення комірок **B3:F5** (кількість перевезеної продукції), а також комірок **B12:F12** і **G12** (вартість перевезень), які приймають значення, що відповідають оптимальному плану. Одночасно з цим на екрані з'являється діалогове вікно

Результаты поиска решения, яке містить повідомлення: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Встановлюємо перемикач у положення **Сохранить найденное решение**, вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость** і натискаємо **ОК.** На робочому аркуші зберігається розв'язок транспортної задачі (табл. 8.3), а звіт **Устойчивость** виводиться на окремому аркуші цієї ж книги (рис. 8.3).

Таблиця 8.3

Кінцевий вигляд розрахункової таблиці

	A	B	C	D	E	F	G
1	***Оптимізація транспортних витрат***						
2	***Постачальники***	***Споживачі***					***Факт***
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
3	A_1	0	0	0	110	130	240
4	A_2	100	120	0	100	0	320
5	A_3	0	0	160	0	20	180
6	***Факт***	100	120	160	210	150	740
7							***Пропозиція***
8	A_1	2	8	5	1	3	240
9	A_2	6	4	7	6	9	320
10	A_3	3	6	1	4	5	180
11	***Попит***	100	120	160	210	150	
12	***Вартість***	600	480	160	710	490	**2 440**

Розглянемо інформацію, яку ми отримуємо як результат застосування надбудови **Поиск решения**. Перш за все, було визначено оптимальний план, який запишемо у вигляді матриці:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 & 130 \\ 100 & 120 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 160 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

якому відповідає найменша загальна вартість перевезень:

$$Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^*) = 2\,440 \text{ (у. о.).}$$

Ячейка	Имя	Окончат. значение	Приведенн. стоимость	Целевая коэфф.	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$3		0	1	2	1E+30	1
$C$3		0	9	8	1E+30	9
$D$3		0	6	5	1E+30	6
$E$3		110	0	1	0	1
$F$3		130	0	3	1	0
$B$4		100	0	6	0	1E+30
$C$4		120	0	4	5	1E+30
$D$4		0	3	7	1E+30	3
$E$4		100	0	6	1	0
$F$4		0	1	9	1E+30	1
$B$5		0	0	3	1E+30	0
$C$5		0	5	6	1E+30	5
$D$5		160	0	1	3	1E+30
$E$5		0	1	4	1E+30	1
$F$5		20	0	5	0	3

Рис. 8.3. **Таблиця "Ячейки переменных" звіту "Устойчивость"**

Таблиця **Ячейки переменных** звіту **Устойчивость** містить оптимальний план, інформацію о можливих змінах коефіцієнтів цільової функції, у межах яких знайдений план залишається оптимальним, а також **Приведенную стоимость**, тобто оцінки оптимального плану. Зверніть увагу, що комірка **B5**, яка за планом $\mathbf{X}^*$ є вільною, має нульову оцінку. Отже, задача має ***альтернативний оптимум***. Позначимо знайдений план через $\mathbf{X}_1^*$.

Для того, щоб визначити ще один оптимальний план, побудуємо ***контур перерозподілу*** для того, щоб зробити поставку в клітину з нульовою оцінкою (рис. 8.4).

	B_1	B_2	B_3 +	B_4	B_5
A_1	0	0	0	– 110	+ 130
A_2	100 –	120	0	100	0
A_3	0 +	0	160	0	– 20

Рис. 8.4. **Контур перерозподілу**

Цей контур повинен відповідати таким вимогам: контур є замкненим, поворот можливо робити лише під прямим кутом і тільки у комірках, де є поставки. Кути контуру позначаємо по черзі знаками "+" і "–", починаючи з комірки, у яку потрібно зробити поставку. Порівнюючи обсяги поставок у комірки, які відповідають кутам зі знаком "–", вибираємо менше значення: $\min\{20;100;110\}=20$. Тобто, по контуру можна перерозподіліти 20 одиниць, додаючи ці значення у кутові клітини зі знаком "+" і віднімаючи у кутових клітинах зі знаком "–". Отримуємо ще один оптимальний план:

$$\mathbf{X}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 & 150 \\ 80 & 120 & 0 & 120 & 0 \\ 20 & 0 & 160 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Йому відповідає те ж саме значення цільової функції:

$$\min Z(\mathrm{X}) = Z(\mathrm{X}_1^*) = Z(\mathrm{X}_2^*) = 80\cdot 6 + 20\cdot 3 + 120\cdot 4 + \\ + 160\cdot 3 + 90\cdot 1 + 120\cdot 6 + 150\cdot 3 = 2\,440 \quad (у.\ о.).$$

Для наочності оптимальний план можна представити у вигляді графіку, тобто ***на мережах***. На рис. 8.5, зокрема, наведено оптимальний план $\mathbf{X}_1^*$.

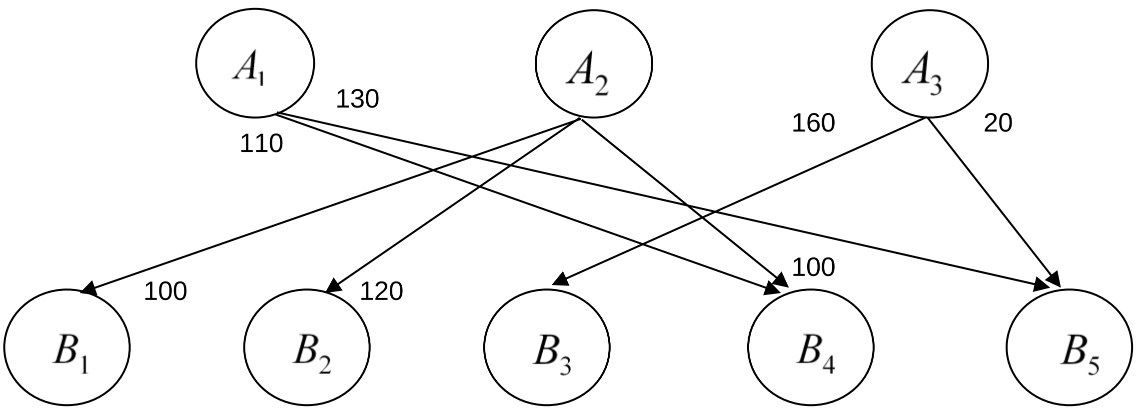


Рис. 8.5. **Оптимальний план $\mathbf{X}_1^*$ транспортної задачі на мережах**

Друга частина звіту **Устойчивость**, яка має назву **Ограничения** (рис. 8.6), містить відомості про ***тіньові ціни***, тобто про ***потенціали*** учасників перевезень. Стовпці **Допустимое увеличение** і **Допустимое уменьшение** містять інформацію про межі, в яких можна змінювати праву частину кожного із обмежень (зауважимо, що лише кожне окремо), і при цьому структура оптимального плану не змінюється, хоча може змінитися кількість перевезеного вантажу. Оскільки коміркам **C6** і **D6** відповідають від'ємні потенціали, то збільшення попиту споживачів або B_2, або B_3 у припустимих межах, які вказані у звіті **Устойчивость**, призведе до зменшення цільової функції. Розглянемо це на прикладі.

Ячейка	Имя	Окончат. значение	Тень цена	Ограничение Прав. сторона	Допуст. увелич.	Допуст. уменьш.
$B$6		100	6	100	0	100
$C$6		120	4	120	0	120
$D$6		160	4	160	0	100
$E$6		210	6	210	0	100
$F$6		150	8	150	0	100
$G$3		240	-5	240	100	0
$G$4		320	0	320	0	1E+30
$G$5		180	-3	180	100	0

Рис. 8.6. **Таблиця "Ограничения" звіту "Устойчивость"**

Нехай попит споживача B_3 зросте на 20 одиниць. Це знаходиться у межах припустимого збільшення, тому структура оптимального плану не повинна змінюватись. Внесемо відповідні зміни у комірку **D11** (записуємо у цю комірку 180 одиниць). Оскільки попит зростає, а пропозиція залишилась без змін, то транспортна задача стає відкритою. Якщо розв'язувати таку задачу симплексним методом, необхідно ввести фіктивного постачальника A_4 з запасом $a_4 = 20$ одиниць. Однак застосовувати надбудову **Поиск решения** можна і для розв'язання відкритої задачі. У цьому випадку під час заповнення діалогового вікна цієї надбудови у поле **Ограничения** записуємо нестрогу нерівність. Для споживачів основна система обмежень має вигляд: **$B$6:$F$6<=$B$11:$F$11** (оскільки попит у повному обсязі неможна задовольнити), а для постачальників її записуємо як рівність: **$G3:$G5=$G8:$G10** (усі запаси вивезені).

Результати розв'язання цієї задачі наведені в табл. 8.4.

Таблиця 8.4

Перевірка стійкості оптимального плану

	A	B	C	D	E	F	G
1	***Оптимізація транспортних витрат***						
2	***Постачальники***	***Споживачі***					***Факт***
		B_1	B_1	B_2	B_3	B_5	
3	B_5	0	0	0	110	90	200
4	A_2	100	120	0	100	0	320
5	A_3	0	0	160	0	20	180
6	***Факт***	100	120	160	210	110	740
7							***Пропозиція***
8	B_5	2	8	5	1	3	240
9	A_2	6	4	7	6	9	320
10	A_3	3	6	1	4	5	180
11	***Попит***	100	120	160	210	150	
12	***Вартість***	600	480	160	710	370	**2 320**

Видно, що загальна схема перевезень, тобто структура оптимального плану $\mathbf{X}_1^*$ залишилась та ж сама, однак постачання у комірку **F3** зменшилось на 40 одиниць. Відповідно, уся продукція зі складів була вивезена, однак споживач B_5 не отримав продукцію у повному обсязі, йому не вистачило 40 одиниць (зверніть увагу, що споживач B_5 має найбільший потенціал, тому саме за його рахунок було зменшене перевезення).

Зменшення загальної вартості перевезень як наслідок зміни умов транспортної задачі визначається зміною обсягів перевезень та величиною тарифу для комірок, обсяг постачання у які зазнав змін. За новим оптимальним планом цільова функція повинна зменшитися на величину $\Delta Z = 3 \cdot 40 = 120$ (у. о.). Відповідно, загальна вартість перевезень за цим планом повинна становити $\min Z(\mathbf{X}) = 2\ 440 - 120 = 2\ 320$ (у. о.). Саме це значення ми і отримали за допомогою надбудови **Поиск решения**.

8.3. Завдання для самостійної роботи

За допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel визначити оптимальний план перевезень однорідної продукції від постачальників A_1, A_2 і A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 і B_4, за яким загальні транспортні витрати будуть найменшими. Ресурси постачальників задані матрицею $\mathbf{A}$, потреби споживачів – матрицею $\mathbf{B}$. Вартість перевезень одиниці вантажу (тариф) між усіма учасниками визначається матрицею $\mathbf{C} = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$ (табл. 8.5).

Провести аналіз стійкості оптимального плану відносно зміни потреб одного із споживачів (того, що має найменший потенціал), а також відносно зміни питомої вартості перевезень (найбільшого з тарифів) у межах, припустимих за результатами дослідження стійкості оптимального плану. Надати економічну інтерпретацію отриманих результатів.

Таблиця 8.5

Вихідні дані транспортної задачі за критерієм витрат

Варіант	Матриці параметрів системи	
1	2	
1	$\mathbf{A} = (115;\, 90;\, 205)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (95;\, 150;\, 85;\, 80)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 16 & 6 \\ 12 & 10 & 11 & 13 \\ 14 & 19 & 15 & 9 \end{pmatrix}$
2	$\mathbf{A} = (120;\, 180;\, 200)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (90;\, 120;\, 80;\, 110)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 11 & 10 \\ 17 & 9 & 14 & 12 \\ 13 & 8 & 19 & 9 \end{pmatrix}$
3	$\mathbf{A} = (150;\, 90;\, 120)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (80;\, 90;\, 140;\, 50)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 & 12 \\ 13 & 9 & 14 & 11 \\ 15 & 19 & 18 & 9 \end{pmatrix}$
4	$\mathbf{A} = (170;\, 190;\, 120)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (130;\, 150;\, 100;\, 100)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 12 & 6 \\ 7 & 9 & 13 & 17 \\ 15 & 10 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

1	2	
5	$\mathbf{A}=(170;195;205)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(120;145;125;180)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}11&13&16&8\\9&18&15&6\\14&19&17&13\end{pmatrix}$
6	$\mathbf{A}=(710;105;205)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(420;245;100;255)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}11&13&18&7\\9&12&14&6\\3&8&16&13\end{pmatrix}$
7	$\mathbf{A}=(230;180;215)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(120;165;240;100)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12&19&17&20\\13&16&15&11\\8&11&14&9\end{pmatrix}$
8	$\mathbf{A}=(270;195;215)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(130;145;225;180)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}16&10&8&11\\11&17&7&15\\9&14&13&6\end{pmatrix}$
9	$\mathbf{A}=(250;195;205)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(160;165;12;185)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}21&15&17&12\\18&13&20&11\\8&16&14&10\end{pmatrix}$
10	$\mathbf{A}=(140;190;210)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(100;145;115;180)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9&5&10&13\\7&3&14&8\\11&4&6&12\end{pmatrix}$
11	$\mathbf{A}=(610;105;205)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(320;245;100;255)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}16&12&11&10\\17&9&14&12\\13&8&19&9\end{pmatrix}$
12	$\mathbf{A}=(120;270;215)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B}=(100;165;240;120)$;	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12&10&8&14\\11&16&7&15\\9&14&13&8\end{pmatrix}$

Закінчення табл. 8.5

1	2	
13	$\mathbf{A} = (140; 195; 235)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (110; 145; 135; 180)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 12 & 8 \\ 12 & 8 & 13 & 6 \\ 14 & 19 & 7 & 13 \end{pmatrix}$
14	$\mathbf{A} = (270; 190; 170)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (130; 150; 200; 150)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 8 & 6 \\ 10 & 9 & 15 & 17 \\ 15 & 10 & 8 & 18 \end{pmatrix}$
15	$\mathbf{A} = (150; 190; 120)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (180; 90; 140; 50)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 20 & 20 & 12 \\ 13 & 11 & 24 & 11 \\ 15 & 16 & 18 & 9 \end{pmatrix}$
16	$\mathbf{A} = (510; 105; 205)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{B} = (220; 245; 120; 235)$;	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 9 & 10 \\ 17 & 9 & 7 & 12 \\ 13 & 8 & 11 & 9 \end{pmatrix}$

8.4. Контрольні запитання

1. Сформулювати загальну постановку класичної транспортної задачі за критерієм витрат.

2. Записати математичну модель транспортної задачі і пояснити економічний зміст цільової функції, елементів основної системи обмежень та оптимального плану.

3. За яких умов транспортна задача має розв'язок?

4. У яких випадках під час побудови математичної моделі транспортної задачі застосовуються додаткові змінні? У чому полягає їх економічний зміст?

5. Наведіть перелік параметрів транспортної задачі і поясніть їх економічний зміст.

6. Як за допомогою надбудови **Поиск решения** можна розв'язати відкриту транспортну задачу?

7. Які графічно можна подати план транспортної задачі?

8. Що вказує на існування альтернативного оптимуму?

Тема 9. Задачі економічного змісту, які можна звести до транспортної задачі

9.1. Теоретичні відомості

Математична модель транспортної задачі в її класичному поданні широко застосовується у логістиці. Однак цим її коло використання з метою оптимізації економічних процесів не обмежується. Задачі про розміщення устаткування, розподіл технологічних операцій за верстатами, задача про призначення – можуть бути зведені до транспортної. Особливістю оптимального плану транспортної задачі є його цілочисельність, тобто якщо параметри математичної моделі задачі є цілими числами, то і компоненти оптимального плану також будуть цілими числами. Відповідно, у задачах про оптимізацію призначень на вакантні посади, формування верстатного парку та в інших подібних задачах нема необхідності додатково накладати умову цілочисельності.

Розглянемо задачу про розподіл технологічних операцій за верстатами. Її зміст полягає в тому, що під час виготовлення продукції необхідно виконати кілька різних операцій, які потребують використання різних типів обладнання. Необхідно розподілити операції за верстатами таким чином, щоб загальна продуктивність обладнання, що використовується, була би якомога більшою. Побудуємо математичну модель цієї задачі. Позначимо кожний із типів верстатів через A_i $(i=\overline{1,m})$, і ресурс верстата i-го типу дорівнює a_i $(i=\overline{1,m})$. У відповідності з технологічним процесом загальний час на виконання певної операції B_j $(j=\overline{1,n})$ складає b_j $(j=\overline{1,n})$. Матриця $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ визначає продуктивність кожного із верстатів у процесі виконання певної операції. Керованими змінними x_{ij} у задачі про розподіл технологічних операцій за верстатами є час, який необхідно витратити під час виконання i-ї операції на верстаті j-го типу. Критерієм ефективності, за яким здійснюється порівняння можливих планів, є загальна продуктивність усіх операцій, отже, цільова функція досліджується на максимум:

$$Z(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \quad \to \quad \max . \qquad (9.1)$$

Змінні x_{ij} повинні задовольняти основну систему обмежень:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = \overline{1,n}; \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Також має місце обмеження на знак:

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (9.3)$$

Хоча цільова функція задачі про оптимальне використання обладнання досліджується на максимум, а транспортної задачі за критерієм витрат – на мінімум, математична модель (9.1) – (9.3) побудована за тим самим принципом, що і математична модель класичної транспортної задачі. У задачі про оптимальний розподіл операцій за верстатами ресурс верстата a_i $(i = \overline{1,m})$ відіграє роль запасів постачальника A_i, а час, який витрачається на виконання кожної операції b_j $(j = \overline{1,n})$, відіграє роль потреб споживача B_j. Продуктивність c_{ij} верстата A_i у процесі виконання операції B_j відіграє ту ж роль, що і тариф перевезень c_{ij}, а витрати часу x_{ij}, які необхідні i-му типу верстатів для виконання операції j-го типу, є аналогами обсягів перевезень x_{ij} у класичній транспортній задачі.

Нагадаємо, що тільки закрита транспортна задача має розв'язок. Для задачі про розподіл операцій за верстатами умова збалансованості має такий вигляд: загальний час виконання операцій дорівнює загальному часу використання верстатів, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Якщо рівняння балансу не виконується, то вводять відповідного фіктивного учасника, продуктивність роботи якого дорівнює нулю.

9.2. Приклад розв'язання задачі про розподіл операцій за верстатами як транспортної задачі

На виробничій дільниці застосовуються три види верстатів: фрезерувальний, шліфувальний і токарний. Ресурс верстатів становить, відповідно, 100, 150 і 250 годин. Для виготовлення продукції застосовують чотири технологічні операції, кожну з яких можна виконати на будь-якому з цих верстатів. Виконання виробничого завдання передбачає, що загальна тривалість першої операції становить 50 годин, другої – 100 годин, третьої – 200 годин і четвертої – 150 годин. Продуктивність кожного виду верстатів під час виконання відповідної операції (кількість деталей, що обробляються за одну годину) задана матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необхідно за допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel скласти оптимальний план розподілу операцій за верстатами таким чином, щоб необхідний за технологією виробництва обсяг робіт було виконано з найбільшою продуктивністю. Провести аналіз стійкості оптимального плану залежно від зміни параметрів математичної моделі задачі.

Складемо математичну модель задачі. Слід зауважити, що умова виконати весь обсяг робіт з якомога більшою продуктивністю означає, що за заданою продуктивністю верстатів на кожному з них треба обробити якомога більшу кількість деталей. Критерієм ефективності в цій задачі є загальна продуктивність верстатів, відповідно, цільова функція описує загальну кількість продукції, що виготовлена з використанням усіх верстатів, і ця функція досліджується на максимум:

$$\begin{aligned} Z = {} & 8x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + x_{22} + 6x_{23} + 7x_{24} + \\ & + x_{31} + 9x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34} \quad \to \quad \max. \end{aligned}$$

Оскільки балансова умова виконується: $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$, то задача є закритою, і основа система обмежень має вигляд рівнянь. Вона складається з двох частин: по-перше, усі виробничі операції, які передбачені технологічним процесом виготовлення продукції, необхідно виконати у повному обсязі, по-друге, термін роботи кожного з верстатів потрібно використати у повному обсязі.

Отже, маємо основну систему обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 100; \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 150; \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 250; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 50; \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 100; \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 200; \\ \sum_{j=1}^{3} x_{4j} = 150. \end{cases}$$

Крім того, має місце обмеження на знак:

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,4}; \; j = \overline{1,3}.$$

Для розв'язання задачі на робочому аркуші книги MS Excel побудуємо дві таблиці, що аналогічні табл. 8.1 і 8.2. У цих таблицях запишемо вихідні умови задачі. Керовані змінні записуємо в комірках **C6:F9** і приймаємо їх значення рівними 1. У комірках **C9:F9** визначаємо загальний час, який відпрацювали верстати під час виконання певних операцій. Цей час обчислюємо як суму за відповідним стовпцем. Наприклад, для визначення часу, який витрачається на виконання першої операції, у комірку **C9** записуємо формулу: **=СУММ (C6:C8)**. Для обчислення значень інших комірок розтягуємо цю формулу на комірки **C9:F9**. У комірках **G6:G8** визначаємо фактичний час роботи кожного з верстатів як суму вдовж відповідного рядка. Так, у комірку **G6** записуємо формулу: **=СУММ (C6:F6)** і потім розтягуємо її на комірки **G6:G8**. Комірка **G9** містить інформацію про загальні витрати часу на виконання усіх операцій.

У комірках **C13:F15** записуємо елементи матриці $\mathbf{C} = (c_{ij})_{3\times4}$, комірки **C16:F16** містять інформацію про витрати часу на виконання кожної операції відповідно з технологічним завданням, а комірки **G12:G15** – інформацію про ресурси кожного верстата.

У комірках **C17:F17** визначаємо кількість продукції, яка виготовлена на даному виді верстатів за фактичний час його роботи. Для цього у комірку **C17** записуємо формулу: **=СУММПРОИЗВ (C6:C8;C13:C15)** і розтягуємо її вздовж рядка. Загальну кількість виготовленої продукції, тобто значення цільової функції, виводимо за формулою: **=СУММ (C17:F17)**.

Отже, готова таблиця має такий вигляд, як наведено на рис. 9.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Розподіл операцій за верстатами**					
3							
4		**Верстати**	**Час виконання операцій**				**Фактичний час роботи верстата**
5			**№ 1**	**№ 2**	**№ 3**	**№ 4**	
6		**Фрезерувальний**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**
7		**Шліфувальний**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**
8		**Токарний**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**
9		**Фактичний час виконання операції**	**3**	**3**	**3**	**3**	**12**
10							
11		**Верстати**	**Продуктивність верстата**				**Ресурс верстата**
12			**№ 1**	**№ 2**	**№ 3**	**№ 4**	
13		**Фрезерувальний**	**8**	**3**	**5**	**2**	**100**
14		**Шліфувальний**	**4**	**1**	**6**	**7**	**150**
15		**Токарний**	**1**	**9**	**4**	**3**	**250**
16		**Загальний час виконання операції**	**50**	**100**	**200**	**150**	
17		**Кількість виготовленої продукції**	**13**	**13**	**15**	**12**	**53**

Рис. 9.1. **Скриншот з вихідною таблицею**

За допомогою послідовності команд **Данные** ⇒ **Поиск решения** активуємо надбудову **Поиск решения** і у її діалоговому вікні у полі **Оптимизировать целевую функцию** вказуємо комірку **G17**, що містить значення цільової функції. Вибираємо варіант оптимізації **До:** М**аксимум**. У полі **Изменяя ячейки переменных** даємо посилання на блок комірок $**C$6:$F$8**. У полі **В соответствии с ограничениями:** вказуємо співвідношення, що відповідають основній системі обмежень. У полі **Выберете метод решения** встановлюємо перемикач у положення **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**. Діалогове вікно надбудови **Поиск решения** набуває вигляду, як це показано на рис. 9.2. Оскільки математичну модель задачі повністю введено, натисканням кнопки **Найти решение** виводимо на екран вікно **Результаты поиска решения**, яке містить повідомлення про те, що рішення знайдено. Встановлюємо перемикач у положення **Сохранить найденное решение**, вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость** і натисканням кнопки **ОК** виводимо інформацію про оптимальний план розподілу операцій за верстатами на робочий аркуш MS Excel.

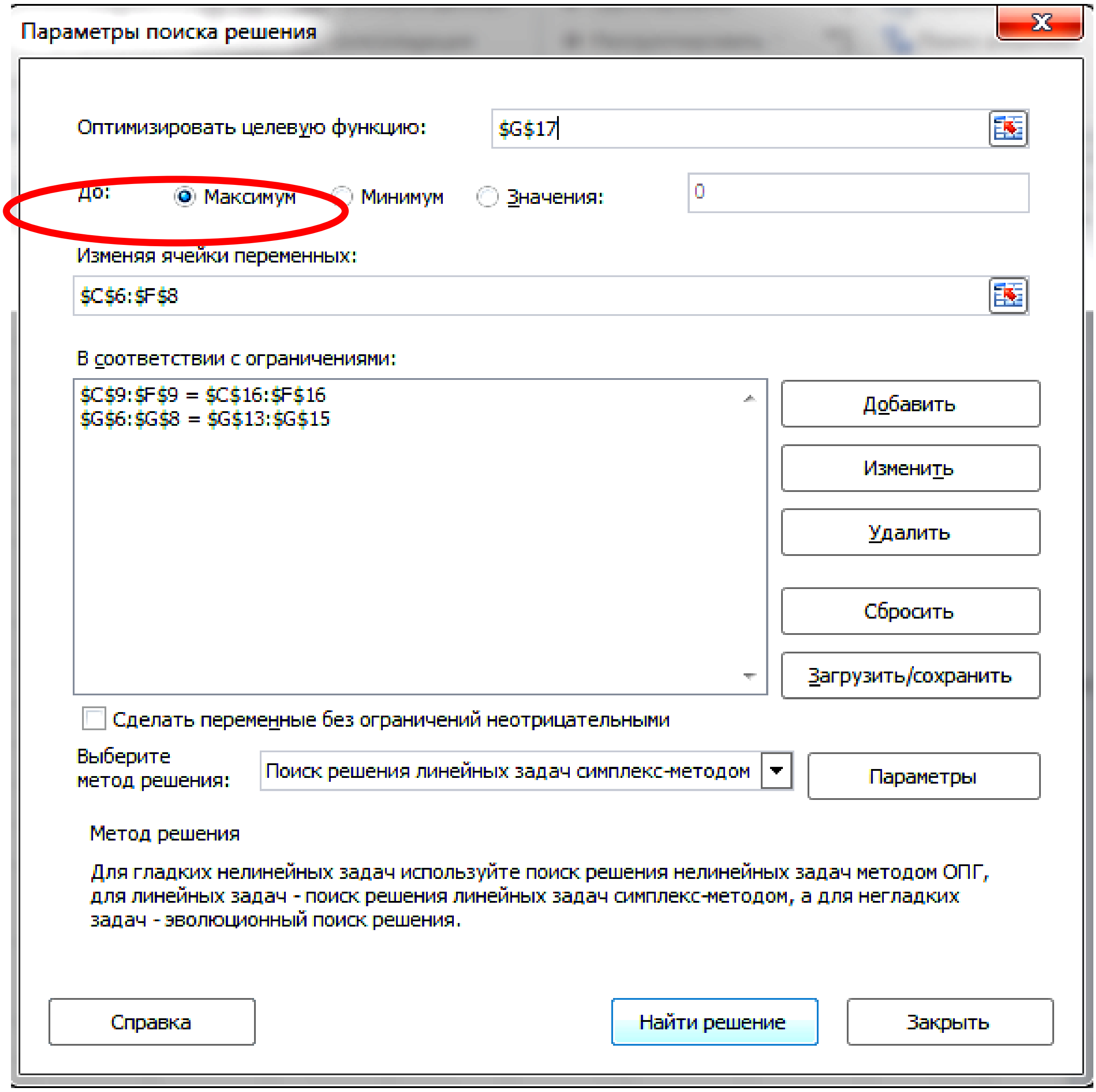


Рис. 9.2. **Діалогове вікно надбудови "Поиск решения" із заповненими полями**

Таким чином, за допомогою надбудови **Поиск решения** на місці вихідної таблиці ми отримали таблицю, що містить оптимальний план розподілу технологічних операцій за видам верстатів (рис. 9.3), а звіт про стійкість знайденого розв'язку виводиться на окремому аркуші цієї ж книги MS Excel.

Розподіл операцій за верстатами

Верстати	Час виконання операцій				Фактичний час роботи верстата
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Фрезерувальний	50	0	50	0	100
Шліфувальний	0	0	0	150	150
Токарний	0	100	150	0	250
Фактичний час виконання операції	50	100	200	150	500

Верстати	Продуктивність верстата				Ресурс верстата
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Фрезерувальний	8	3	5	2	100
Шліфувальний	4	1	6	7	150
Токарний	1	9	4	3	250
Загальний час виконання операції	50	100	200	150	
Кількість виготовленої продукції	400	900	850	1 050	3 200

Рис. 9.3. **Скриншот таблиці, що містить результати застосування надбудови "Поиска решения"**

Поряд з тим, що оптимальний план наведено в таблиці, його також можна надати у вигляді матриці:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 100 & 150 & 0 \end{pmatrix}.$$

За цим планом передбачається, що на фрезерувальному верстаті треба виконувати операції № 1 і 3, при цьому тривалість кожної операції становить по 50 годин, на шліфувальному верстаті – операцію № 4 протягом 150 годин, на токарному – операцію № 2 протягом 100 годин і операцію № 3 протягом 150 годин. При цьому максимальна кількість деталей, яку можна виготовити за умови повного використання ресурсів усіх верстатів, становить 3 200 одиниць (значення цільової функції відповідно з оптимальним планом). Цей план також можна надати у вигляді графіка, тобто на мережах (рис. 9.4):

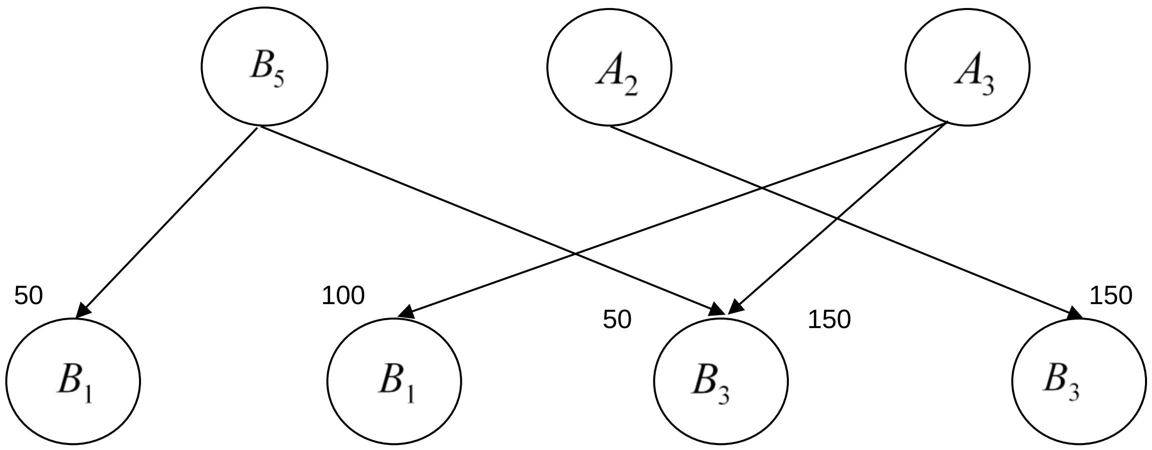


Рис. 9.4. **Оптимальний план задачі про розподіл операцій за видами обладнання**

Проведемо аналіз даних, що містить звіт **Устойчивость**. У першій частині звіту, що має назву **Ячейки переменных** (рис. 9.5), виводиться оптимальний план (**Окончательные значения**), значення коефіцієнтів цільової функції (**Целевая функция коэффициент**) і межі, у яких кожний з цих коефіцієнтів може змінюватись і при цьому не змінюється оптимальний план. Слід зазначити, що ці зміни одночасно можливі лише для одного із коефіцієнтів. Стовпець **Приведенная стоимость** містить величини, які дорівнюють ***оцінкам плану***, якщо їх узяти з протилежним знаком. Оцінки плану для кожної комірки визначаються як різниця між сумою ***потенціалів учасників*** і тарифом за даною коміркою. Для комірок, що містять ненульові елементи оптимального плану, ці оцінки дорівнюють нулю, а для вільних комірок вони не повинні бути від'ємними. Саме такою є ***умова оптимальності*** плану під час дослідження цільової функції на максимум. Це означає, що стовпець **Приведенная стоимость** не повинен містити додатних величин. Слід зазначити, що оптимальний план, який ми отримали, є ***виродженим***, оскільки кількість додатних елементів матриці $\mathbf{X}^* = \left(x_{ij}\right)_{3\mathrm{x}4}$ дорівнює 5, отже, менше, ніж ранг основної матриці системи обмежень: $3+4-1=6$. У зв'язку з цим **Приведенная стоимость** для однієї з вільних комірок повинна дорівнювати нулю. Такою коміркою виявилась комірка **F8**. Це означає, що задача має

альтернативний оптимум, який отримуємо, зробивши поставку у комірку **F8**, яка до цього була вільною. Пропонуємо знайти цей план самостійно і переконатись, що цільова функція за новим оптимальним планом матиме те ж саме значення.

Ячейка	**Имя**	**Окон-чат. значение**	**Привед. стоим.**	**Целевая функц. коэфф.**	**Допустимое**	
					Увелич.	**Уменьш**
\$C\$6	Фрезерувальний № 1	50	0	8	1E+30	6
\$D\$6	Фрезерувальний № 2	0	-7	3	7	1E+30
\$E\$6	Фрезерувальний № 3	50	0	5	6	2
\$F\$6	Фрезерувальний № 4	0	-2	2	2	1E+30
\$C\$7	Шліфувальний № 1	0	-7	4	7	1E+30
\$D\$7	Шліфувальний № 2	0	-12	1	12	1E+30
\$E\$7	Шліфувальний № 3	0	-2	6	2	1E+30
\$F\$7	Шліфувальний № 4	150	0	7	1E+30	2
\$C\$8	Токарний № 1	0	-6	1	6	1E+30
\$D\$8	Токарний № 2	100	0	9	1E+30	7
\$E\$8	Токарний № 3	150	0	4	2	2
\$F\$8	Токарний № 4	0	0	3	2	2

Рис. 9.5. **Таблиця "Ячейки переменных" звіту "Устойчивость"**

У другій частині звіту **Устойчивость**, яка має назву **Ограничения** (рис. 9.6), виведені значення лівих частин рівнянь основної системи обмежень, тобто загальна кількість виготовленої продукції на кожному із видів верстатів у процесі виконання кожної із технологічних операцій (**Окончательные значения**). Крім того, у звіті наведені значення правих частин рівнянь основної системи обмежень (**Ограничение. Правая сторона**), а також визначені припустимі межі, у яких може змінюватись один із параметрів основної системи обмежень математичної моделі задачі і при цьому оптимальний план зберігатиме свою структуру. Стовпчик **Теневая цена** містить інформацію про змінні двоїстої задачі, якими у транспортній задачі є ***тіньові ціни*** (потенціали учасників).

Ячейка	Имя	Окончат. значение	Тень Цена	Огранич. Правая сторона	Допустимое	
					Увелич.	Уменьш.
$C$9	Фактичний час виконання операції № 1	50	11	50	0	50
$D$9	Фактичний час виконання операції № 2	100	13	100	0	100
$E$9	Фактичний час виконання операції № 3	200	8	200	0	150
$F$9	Фактичний час виконання операції № 4	150	7	150	0	150
$G$6	Фрезерувальний Фактичний час роботи верстатів	100	-3	100	150	0
$G$7	Шліфувальний Фактичний час роботи верстатів	150	0	150	0	1E+30
$G$8	Токарний Фактичний час роботи верстатів	250	-4	250	150	0

Рис. 9.6. **Таблиця "Ограничения" звіту "Устойчивость"**

Розглянемо стійкість оптимального плану відносно зміни параметрів основної системи обмежень. Наприклад, скоротимо ресурс фрезерного верстата на 40 годин, що є у межах припустимого зменшення. На робочому аркуші MS Excel побудуємо нову таблицю, яка відповідає умовам задачі. Оскільки нова задача стає відкритою, то вводимо фіктивного учасника, яким є додатковий верстат (рис. 9.7).

Фіктивний верстат (рядок **9**) має ресурс 40 годин (значення комірки **G9**), а його продуктивність під час виконання будь-якої технологічної операції дорівнює нулю, тобто у комірки **C17:F17** записуємо нулі. Тепер задача є закритою, отже, матиме розв'язок. Кількість виробленої продукції виводимо для кожної операції. У комірку **C19** записуємо формулу: **=СУММПРОИЗВ (C6:C9;C14:C17)**, яку потім розтягуємо на комірки **C19:F19**. Комірка **G19** містить інформацію про загальний обсяг виробленої продукції, отже, це і є значення цільової функції, яке виводиться за допомогою формули: **=СУММ (C19:F19)**. За допомогою надбудови **Поиск решения** отримуємо розв'язок задачі (рис. 9.7).

Розподіл операцій за верстатами

Верстати	Час виконання операцій				Фактичний час роботи верстата
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Фрезерувальний	50	0	10	0	60
Шліфувальний	0	0	0	150	150
Токарний	0	100	150	0	250
Фіктивний	0	0	40	0	40
Фактичний час виконання операції	50	100	200	150	500

Верстати	Продуктивність верстата				Ресурс верстата
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Фрезерувальний	8	3	5	2	100
Шліфувальний	4	1	6	7	150
Токарний	1	9	4	3	250
Фіктивний	0	0	0	0	40
Загальний час виконання операції	50	100	200	150	
Кількість виготовленої продукції	400	900	650	1050	3000

Рис. 9.7. **Скриншот розв'язку задачі з фіктивним верстатом**

Аналіз отриманих результатів свідчить про те, що структура оптимального плану, який визначає час обробки деталей на верстатах певного виду, залишилась тією ж самою, що і у попередній задачі. Запишемо його у вигляді матриці:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 100 & 150 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однак, оскільки ресурс фрезерного верстата зменшився, то, відповідно, скоротився і час, протягом якого можна використовувати фрезерний верстат для виконання певної операції. Виявилось, що такою є операція № 3.

Це стає зрозумілим, якщо порівняти продуктивність виконання операцій № 1 і 3, які виконуються на фрезерному верстаті. Так, продуктивність фрезерного верстата у процесі виконання операції № 1 становить 8 одиниць продукції за годину, а під час виконання операції № 3 – лише 5 одиниць продукції за годину. Такий самий результат отримуємо, якщо порівняти потенціали (тіньові ціни) операцій № 1 і 3 (див. рис. 9.6).

Оскільки зменшується загальний час роботи фрезерного верстата, а час роботи інших верстатів залишається без змін, то, відповідно, зменшується кількість виробленої продукції. Так, продуктивність фрезерного верстата у процесі виконання операції № 3 складає 5 одиниць за годину, а час на виконання цієї операції скоротився на 40 годин (комірка **E9** містить час, який відповідає тривалості роботи фіктивного верстата), то значення цільової функції за оптимальним планом нової задачі зменшиться на величину $\Delta Z = 5 \cdot 40 = 200$ і дорівнює $Z(\mathbf{X}^*) = 3\,200 - 200 = 3\,000$ (деталей). Таке значення ми і отримали у процесі розв'язання нової задачі (комірка **G19** на рис. 9.7).

9.3. Завдання для самостійної роботи

За допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel побудувати оптимальний план авіаперевезень за таких вихідних умов. Авіакомпанія обслуговує п'ять авіаліній. Для цього вона може використовувати три типи літаків, кількість яких становить 25, 55 і 20 одиниць. Для забезпечення своєчасності перевезень потреби у літаках для кожної з цих авіаліній становлять 25, 15, 30, 10 і 20 одиниць. Прибуток від експлуатації кожного типу літака у процесі його використання на кожній з авіаліній визначається матрицею $\mathbf{C} = (c_{ij})_{3\times5}$.

Необхідно розподілити літаки для виконання рейсів на різних авіалініях таким чином, щоб перевезення здійснювались у необхідному обсязі, парк літаків використовувався повністю і щоб загальний прибуток від їх експлуатації був максимальним.

Провести аналіз стійкості оптимального плану та зробити висновки.

Для кожного варіанта матриця питомого прибутку від експлуатації літаків на різних авіалініях наведена у табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Вихідні дані задачі

№	Матриця питомого прибутку	№	Матриця питомого прибутку
1	2	1	2
1	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&12&7&8&4\\6&3&2&9&6\\5&8&6&4&3\end{pmatrix}$	2	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}8&9&7&5&4\\6&3&4&9&5\\10&8&6&7&3\end{pmatrix}$
3	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&2&7&6&4\\7&9&2&9&6\\5&8&6&12&3\end{pmatrix}$	4	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&10&7&8&4\\6&3&12&9&6\\5&8&6&7&4\end{pmatrix}$
5	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}7&5&7&8&4\\6&4&10&9&6\\5&8&6&4&7\end{pmatrix}$	6	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&9&5&5&4\\6&10&4&9&5\\4&8&6&7&12\end{pmatrix}$
7	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9&8&7&8&4\\6&5&2&10&6\\5&4&6&4&5\end{pmatrix}$	8	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&5&7&8&5\\8&3&9&12&6\\5&8&6&4&10\end{pmatrix}$
9	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&8&7&8&4\\8&3&12&9&6\\5&9&6&4&3\end{pmatrix}$	10	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&8&11&8&4\\8&10&4&9&6\\12&6&8&4&13\end{pmatrix}$
11	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&9&4&8&7\\8&12&9&10&6\\5&8&6&4&8\end{pmatrix}$	12	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&8&7&8&9\\6&5&10&6&14\\5&4&6&4&5\end{pmatrix}$
13	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}8&6&7&8&4\\6&3&4&9&6\\5&8&6&5&9\end{pmatrix}$	14	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12&6&7&8&4\\6&3&10&9&6\\5&8&6&4&8\end{pmatrix}$

Закінчення табл. 9.1

1	2	1	2
15	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 8 & 2 \\ 6 & 10 & 9 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	16	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 2 & 12 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

9.4. Контрольні запитання

1. Сформулюйте, які задачі економічного змісту можуть бути зведені до транспортної?

2. Яка транспортна задача називається відкритою?

3. Якщо транспортна задача є відкритою, то чи може вона мати розв'язок?

4. Навіщо в математичну модель транспортної задачі вводити фіктивних учасників?

5. Поясніть, чому керовані змінні транспортної задачі, що пов'язані з фіктивним учасником, є саме додатковими.

6. Поясніть економічний зміст фіктивних змінних у задачі про оптимальний розподіл операцій за видами обладнання.

7. Сформулюйте основні принципи побудови таблиці потенціалів транспортної задачі.

8. Який план транспортної задачі є виродженим?

9. Які ускладнення виникають у процесі побудови таблиці потенціалів, що відповідає виродженому плану?

10. Який економічний зміст мають фіктивні змінні у транспортній задачі? Яку кількість фіктивних змінних можна застосовувати одночасно?

11. Що таке альтернативний оптимум? Як за таблицею потенціалів визначити, що транспортна задача має альтернативний оптимум?

12. За яким співвідношенням можна оцінити величину, на яку змінюється цільова функція під час зміни параметрів математичної моделі транспортної задачі в межах стійкості оптимального плану?

13. Поясніть економічний зміст тіньових цін.

14. Яку інформацію містить звіт **Устойчивость**, який можна отримати за допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel?

Тема 10. Задачі дробово-лінійного програмування. Основні методи їх розв'язання і аналізу

10.1. Теоретичні відомості

Під час визначення рентабельності виробництва продукції, витрат або собівартості виробів тощо ми стикаємось з математичними моделями, які містять дробово-лінійні функції.

Як і математична модель задачі лінійного програмування модель задачі дробово-лінійного програмування складається з трьох складових: цільова функція, основна система обмежень і обмеження на знак. Цільова функція має вигляд:

$$Z(X) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to \max (\min); \quad \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0, \tag{10.1}$$

а керовані змінні x_{ij} відповідають основній системі обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (\leq = \geq)\ b_i; \quad i = \overline{1,m} \tag{10.2}$$

та мають обмеження на знак:

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,n}, \tag{10.3}$$

де c_j, d_j, a_{ij} и b_i – деякі сталі числа, які є параметрами моделі.

При цьому передбачається, що знаменник цільової функції на області визначення керованих змінних, тобто на многокутнику планів, не дорівнює нулю. Без порушення спільності можна вважати, що виконується умова: $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$

Задачі дробово-лінійного програмування належать до класу задач нелінійного програмування, оскільки цільова функція у таких задачах не є лінійною. Однак основна система обмежень цієї задачі надана у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей, тобто має той же вид, що і в математичній моделі задачі лінійного програмування. Ця задача може бути зведена до задачі лінійного програмування, якщо ввести нові змінні:

$$y_j = y_0 x_j, \tag{10.4}$$

де

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}. \tag{10.5}$$

У процесі застосування нових змінних цільова функція задачі набуває вигляд:

$$Z(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max\ (\min), \tag{10.1$^{\text{I}}$}$$

при цьому керовані змінні повинні відповідати основній системі обмежень:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - y_0 b_i \; \{\le = \ge\} \; 0; \quad i = \overline{1,m}; \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1 \end{gathered} \tag{10.2$^{\text{I}}$}$$

та обмеженню на знак:

$$y_0 > 0; \quad y_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}. \tag{10.3$^{\text{I}}$}$$

Математична модель задачі дробово-лінійного програмування в нових змінних (10.1$^{\text{I}}$) – (10.3$^{\text{I}}$) відповідає задачі лінійного програмування, що надана у канонічній формі. Тепер для її розв'язання можна застосувати надбудову **Поиск решения** MS Excel за тим самим алгоритмом, що використовувався для розв'язання задач лінійного програмування.

10.2. Приклад розв'язання задачі про мінімізацію собівартості продукції

Розглянемо таку задачу. Для виробництва двох видів продукції підприємство використовує три види технологічного обладнання. Кожна одиниця продукції проходить обробку на даному типі обладнання.

Необхідно таким чином розподілити операції за видами обладнання, щоб собівартість продукції була найменшою. Час, що витрачається на виготовлення одиниці продукції, матеріальні витрати, що пов'язані із виробництвом, та нормативний термін роботи обладнання наведені в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Вихідні дані задачі

Тип обладнання	Витрати часу на обробку одиниці продукції, год		Обмеження часу роботи обладнання, год
	Вид А	Вид Б	
I	2	8	≤ 26
II	1	1	≥ 4
III	12	3	≤ 39
Витрати на виробництво одиниці продукції, тис. грн	2	3	–

Визначимо керовані змінні. Позначимо через x_1 кількість одиниць продукції виду А та через x_2 – кількість одиниць продукції виду Б. Тоді загальні витрати на виробництво продукції обох видів складають $2x_1 + 3x_2$ (тис. грн), а для визначення собівартості ці витрати треба поділити на кількість продукції, яка дорівнює $x_1 + x_2$, отже, маємо середню собівартість продукції за один виріб: $\dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$ (тис. грн/од.).

Звідси отримуємо, що критерій оптимальності (цільова функція) для даної задачі має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \quad \to \quad \min .$$

При цьому керовані змінні повинні задовольняти нерівностям (основна система обмежень):

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39, \end{cases}$$

а також має місце обмеження на знак:

$$x_1;\, x_2 \ge 0.$$

Отже, отримали математичну модель задачі, яка є задачею дробово-лінійного програмування. Тепер введемо нові змінні, за допомогою яких перетворимо математичну модель задачі дробово-лінійного програмування до вигляду задачі лінійного програмування, що дозволить застосувати надбудову **Поиск решения** MS Excel для знаходження оптимального плану цієї задачі.

Введемо змінну $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$. Оскільки для обох керованих змінних є обмеження на знак $x_1;\, x_2 \ge 0$, і підприємство виробляє продукцію, то одночасно змінні x_1 і x_2 не можуть дорівнювати нулю, тобто, умова: $y_0 > 0$ виконується. Помножимо нерівності основної системи обмежень на y_0 (їх знак не змінюється, оскільки $y_0 > 0$) і введемо змінні: $y_1 = x_1 y_0$ і $y_2 = x_2 y_0$. У цих змінних математична модель задачі матиме вигляд:

$$Z(\mathrm{Y}) = 2y_1 + 3y_2 \quad \to \quad \min;$$

$$\begin{cases} -26y_0 + 2y_1 + 8y_2 \le 0; \\ -4y_0 + y_1 + y_2 \ge 0; \\ -39y_0 + 12y_1 + 3y_2 \le 0; \\ y_1 + y_2 = 1; \\ y_1, y_2 \ge 0, \;\; y_0 > 0. \end{cases}$$

Таким чином, ми отримали математичну модель задачі лінійного програмування. На робочому аркуші MS Excel побудуємо таблицю вихідних даних відносно нових змінних аналогічно тому, як це ми робили у процесі розв'язання задач лінійного програмування (рис. 10.1).

F12 | f_x | =СУММПРОИЗВ($C$5:$E$5;C12:E12)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Розв'язання допоміжної задачі лінійного програмування**					
3							
4		Змінні	Y0	Y1	Y2		
5		Розв'язок	1	0,5	0,5		
6							
7			Матриця коефіцієнтів основної системи обмежень			Ліва частина	Права частина
8			-26	2	8	-21	0
9			-4	1	1	-3	0
10			-39	12	3	-31,5	0
11			0	1	1	1	1
12		Цільова функція	0	2	3	2,5	
13							

Рис. 10.1. **Скриншот з таблицею вихідних даних**

Для запису у комірки **C5:E5**, які відповідають керованим змінним, вибираємо значення $y_1 = y_2 = 0{,}5$ і $y_0 = 1$, отже, виконується вимога: $y_1 + y_2 = 1$. У комірках **F8:F11** за допомогою функції **СУМПРОИЗВ ()** виводимо значення лівих частин нерівностей основної системи обмежень. Так, у комірку **F8** вводимо формулу: **= СУМПРОИЗВ ($C$5:$E$5,C8:E8)**. Нагадаємо, що позначення **$C$5:$E$5** свідчить про те, що посилання на комірки є абсолютним. Для того, щоб зробити посилання на певні комірки абсолютним, необхідно натиснути на клавіатурі клавішу **F4**. Для обчислення значення цільової функції у комірку **F12** вводимо таку формулу: **= СУМПРОИЗВ ($C$5:$E$5,C11:E11)**. Стовпець **G8:G11** містить інформацію про праві частини нерівностей основної системи обмежень.

За допомогою послідовності команд **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения** активуємо надбудову **Поиск решения** і у її діалоговому вікні у полі **Оптимизировать целевую функцию** вказуємо комірку **F12**. Вибираємо варіант оптимізації **До: Минимум**. У полі **Изменяя ячейки переменных** даємо посилання на блок комірок **$C$5:$E$5**. У поле **В соответствии с ограничениями:** вказуємо співвідношення, що відповідають основній системі обмежень. Під час заповнення поля **В соответствии с ограничениями** у полі **Знак** вибираємо такий знак співвідношення, який відповідає певному обмеженню. У полі **Выберите метод решения** встановлюємо перемикач у положення **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**. Діалогове вікно надбудови **Поиск решения** набуває вигляду, як це показано на рис. 10.2.

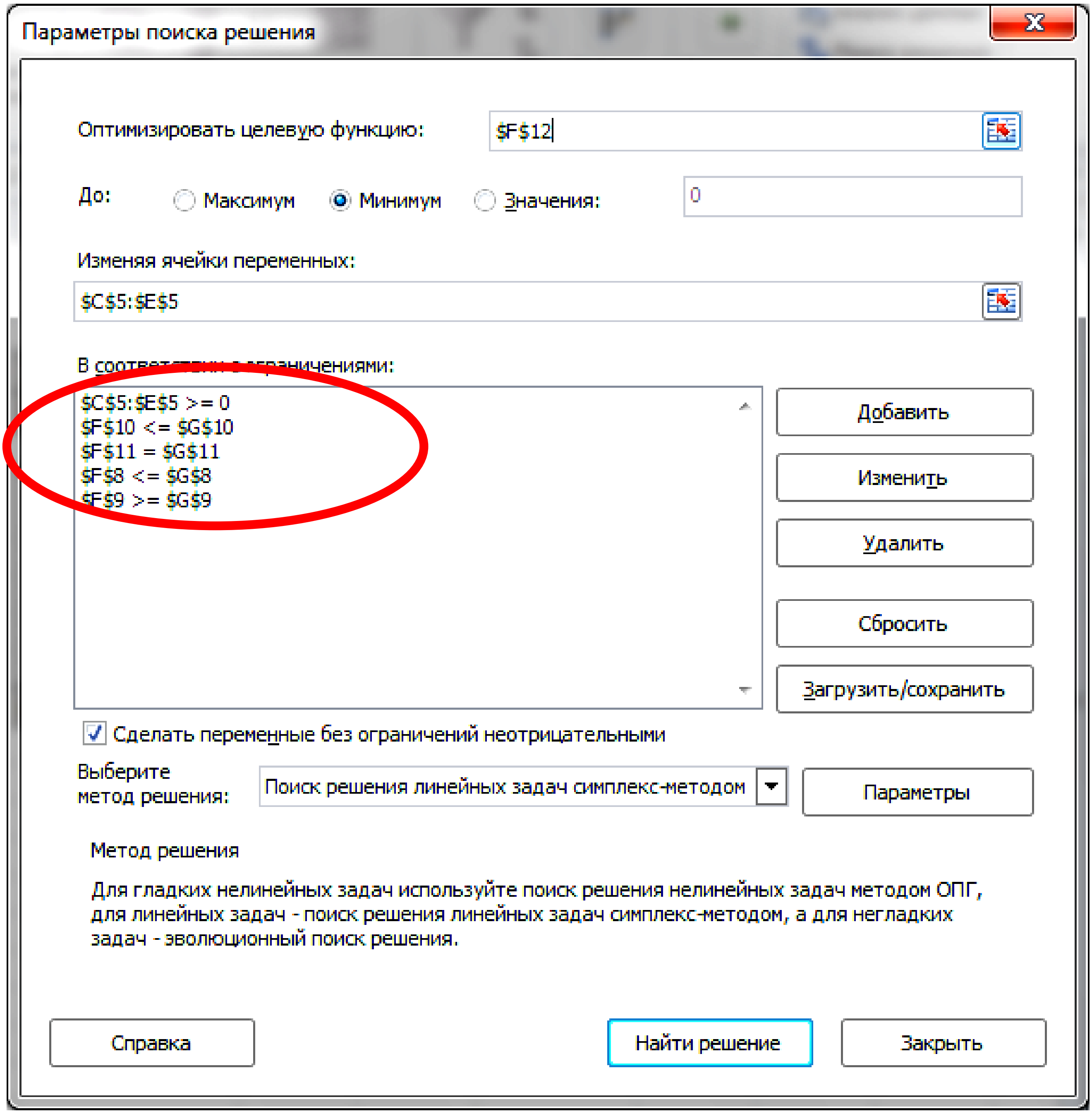
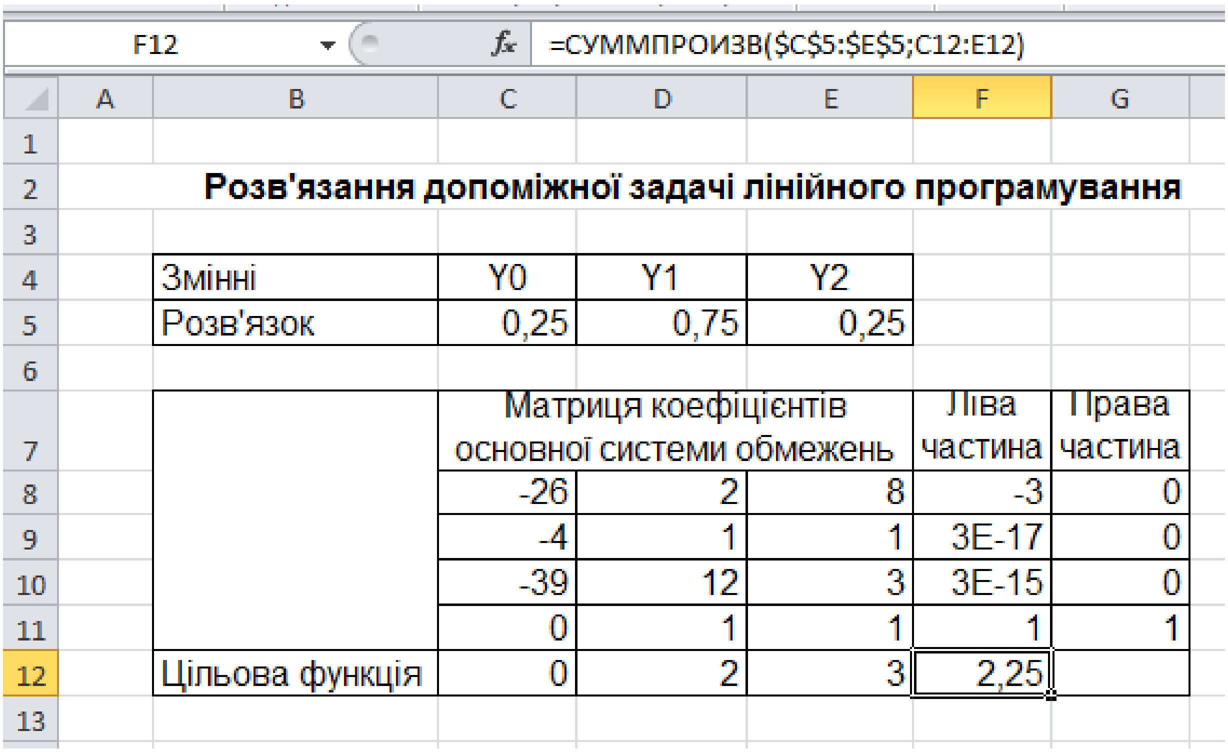


Рис. 10.2. **Діалогове вікно "Поиск решения"**

Оскільки математичну модель задачі повністю введено, натисканням кнопки **Найти решение** виводимо на екран вікно **Результаты поиска решения**, яке містить повідомлення по те, що рішення знайдено.

Встановлюємо перемикач у положення **Сохранить найденное решение**, вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость** і натисканням кнопки **ОК** виводимо інформацію про оптимальний план виробництва продукції, який забезпечує її мінімальну собівартість, на робочий аркуш MS Excel у таблиці, що містила вихідні дані математичної моделі допоміжної задачі (рис. 10.3).



F12 =СУММПРОИЗВ($C$5:$E$5;C12:E12)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Розв'язання допоміжної задачі лінійного програмування					
3							
4		Змінні	Y0	Y1	Y2		
5		Розв'язок	0,25	0,75	0,25		
6							
7			Матриця коефіцієнтів основної системи обмежень			Ліва частина	Права частина
8			-26	2	8	-3	0
9			-4	1	1	3E-17	0
10			-39	12	3	3E-15	0
11			0	1	1	1	1
12		Цільова функція	0	2	3	2,25	
13							

Рис. 10.3. **Скриншот з розв'язком допоміжної задачі лінійного програмування**

Маємо такий оптимальний план: $y_0^* = 0{,}25;\ \ y_1^* = 0{,}75;\ \ y_2^* = 0{,}25$. Йому відповідає найменше значення цільової функції (середня собівартість одиниці продукції): $Z(\mathbf{Y}^*) = 2{,}25$ тис. грн.

Тепер повернемося до задачі дробово-лінійного програмування і за розв'язком допоміжної задачі лінійного програмування знайдемо її оптимальний план. Для цього підставляємо знайдені значення компонентів оптимального плану задачі лінійного програмування в умову (10.4) і знайдемо розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}25x_1^* = 0{,}75; \\ -0{,}25x_2^* = 0{,}25; \end{cases} \Rightarrow \ x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = 3;\ \ x_2^* = \frac{y_2^*}{y_0^*} = 1.$$

Таким чином, середня собівартість продукції буде найменшою, якщо підприємство буде виробляти 1 одиницю продукції виду А і 3 одиниці продукції виду Б. Маємо оптимальний план: $\mathbf{X}^* = (1; 3)$. Цільова функція при цьому дорівнює $Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^*) = 2{,}25$ (тис. грн).

10.3. Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачі дробово-лінійного програмування, математичні моделі яких наведені в табл. 10.2, застосувавши для цього нові змінні, що дозволяють звести вихідну задачу до задачі лінійного програмування.

Таблиця 10.2

Вихідні дані задачі

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
1	2	1	2
1	$z = \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max;$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2; \\ 2x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$	2	$z = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ -x_1 + 6x_2 \le 18; \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$z = \dfrac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4; \\ 3x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$	4	$z = \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 11; \\ -x_1 + 3x_2 \le 9; \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$z = \dfrac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2} \to \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 7; \\ -x_1 + 4x_2 \le 5; \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$	6	$z = \dfrac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18; \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$

Продовження табл. 10.2

1	2	1	2
7	$z=\frac{2x_1-x_2-3}{x_1+2}\to\max;$ $\begin{cases}x_1+x_2\ge 5;\\2x_1-x_2\ge 1;\\x_1-3x_2\le 1;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$	8	$z=\frac{3x_1+2_2}{2x_1+2x_2}\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+6x_2\ge 12;\\2x_1-2x_2\le 10;\\x_1-3x_2\le 9;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$
9	$z=\frac{x_1-x_2+3}{2x_1+3x_2+1}\to\max;$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 9;\\x_1+x_2\le 6;\\2x_1-x_2\le 10;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$	10	$z=\frac{6x_1+5x_2}{2x_1+2x_2}\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+4x_2\ge 11;\\2x_1-3x_2\le 8;\\-2x_1+4x_2\le 9;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$
11	$z=\frac{x_1+3x_2}{x_1+x_2+2}\to\min;$ $\begin{cases}x_1+3x_2\ge 4;\\3x_1-x_2\le 6;\\x_1+x_2\le 3;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$	12	$z=\frac{5x_1+4x_2}{3x_1+3x_2}\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+2x_2\ge 9;\\2x_1-x_2\le 9;\\2x_1-5x_2\le 9;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$
13	$z=\frac{3x_1-2x_2}{x_1+x_2}\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+4x_2\le 16;\\-4x_1+2x_2\le 8;\\x_1+3x_2\ge 9;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$	14	$z=\frac{3x_1+2x_2}{x_1+x_2}\to\max;$ $\begin{cases}x_1+x_2\ge 5;\\-x_1+3x_2\le 7;\\3x_1-x_2\le 11;\\x_1;x_2\ge 0\end{cases}$

1	2	1	2
15	$z=\dfrac{-5x_1+4x_2}{-x_1-3x_2}\to \min;$ $\begin{cases}2x_1-4x_2\le 12;\\ -x_1+2x_2\le 8;\\ x_1+x_2\ge 10;\\ x_1;x_2\ge 0\end{cases}$	16	$z=\dfrac{-3x_1+2x_2}{3x_1+4x_2}\to \max;$ $\begin{cases}x_1+4x_2\le 16;\\ 2x_1+3x_2\ge 12;\\ 3x_1-2x_2\le 18;\\ x_1;x_2\ge 0\end{cases}$

10.4. Контрольні запитання

1. Назвіть економічні задачі, математичні моделі яких доцільно подавати як задачу дробово-лінійного програмування.

2. У чому полягають відмінності математичної моделі задачі дробово-лінійного програмування від задач лінійного програмування?

3. Які особливості має графічне розв'язання двофакторної задачі дробово-лінійного програмування порівняно з задачами лінійного програмування?

4. Чи може задача дробово-лінійного програмування мати альтернативний оптимум? Поясніть свою відповідь, застосувавши графічний метод розв'язання.

5. Як за допомогою введення нових змінних здійснити перетворення математичної моделі задачі дробово-лінійного програмування у модель задачі лінійного програмування?

6. Чи зберігається кількість керованих змінних у процесі перетворення математичної моделі задачі дробово-лінійного програмування у модель задачі лінійного програмування?

7. У якій формі можна надати математичну модель допоміжної задачі лінійного програмування?

8. Як знайти цільову функцію вихідної задачі дробово-лінійного програмування, якщо відомо значення цільової функції допоміжної задачі лінійного програмування?

9. Складіть алгоритм розв'язання задачі дробово-лінійного програмування із застосуванням надбудови **Поиск решения** MS Excel.

Тема 11. Цілочисельні задачі лінійного програмування. Основні методи їх розв'язання і аналізу

11.1. Теоретичні відомості

Деякі задачі математичного програмування мають додаткове обмеження на значення керованих змінних. Це вимога цілочисельності, якому повинні задовольняти або тільки основні змінні, або як основні, так і допоміжні змінні. До таких задачах належать, наприклад, задачі про призначення на посаду, формування програми переобладнання виробництва, складання маршрутів транспортних засобів, розміщення об'єктів виробництва, управління інвестиційним портфелем та ін.

Математична модель задачі за наявності вимоги цілочисельності має такий вигляд. Цільова функція є лінійною:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min). \tag{11.1}$$

У загальному випадку система обмежень крім основної системи рівнянь та/або нерівностей, а також обмеження на знак містить умову цілочисельності і може бути записана таким чином:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \tag{11.2}$$

$$x_j \in N \cup \{0\} \ . \tag{11.3}$$

Ці задачі утворюють окремий клас задач цілочисельного програмування, для розв'язання яких необхідно застосовувати спеціальні методи оптимізації. Методи цілочисельної оптимізації можна об'єднати у три основні групи: методи відсікання (графічний метод та метод Гоморі); комбінаторні методи (метод розгалужень і меж); наближені числові методи.

У програмному середовищі MS Excel задачі цілочисельного програмування розв'язують, застосовуючи той самий алгоритм, що і під час розв'язання задач лінійного програмування, використовуючи надбудову **Поиск решения**. Однак під час заповнення поля діалогового вікна у процесі введення математичної моделі задачі цілочисельного програмування необхідно додати посилання на те, що керовані змінні можуть приймати тільки цілі значення. Для цього у вікні **Поиск решения** окрім основної системи обмежень у полі **В соответствии с ограничениями:** необхідно додати ще одну умову – вимогу цілочисельності керованих змінних. Для цього у вікні **Добавление ограничения** вибираємо із списку, який міститься у центральному полі, значення **цел**, при цьому у правому полі автоматично з'являється **Ограничение: целое**, як вказано на рис. 11.1.

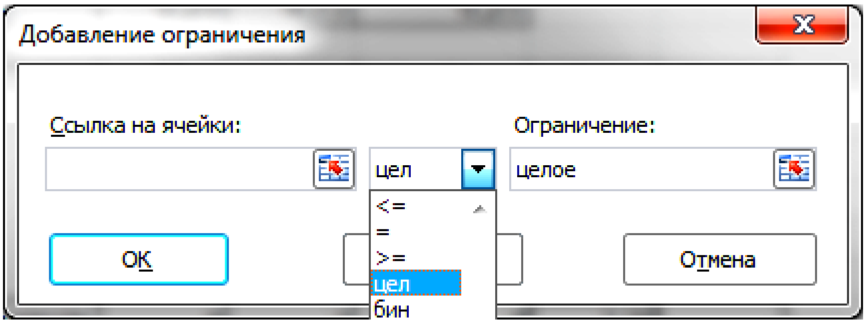


Рис. 11.1. **Діалогове вікно "Добавление ограничения"**

Необхідно зазначити, що у процесі розв'язання задач цілочисельного програмування за допомогою надбудови **Поиск решения** інформація про стійкість оптимального плану відносно зміни параметрів математичної моделі (тобто звіт **Устойчивость**) не надається. Таку інформацію можна отримати лише шляхом повторної оптимізації моделі, але вже з новими значеннями параметрів.

11.2. Приклад розв'язання задачі про призначення

Розглянемо таку задачу. Деяка фірма оголосила конкурс на заміщення кількох вакантних посад. З метою оптимізації призначення на посаду інспектор відділу кадрів провів тестування кожного із претендентів. Ділові і людські якості претендентів на кожну з посад оцінювали за 10-ти бальною шкалою відповідно до вимог, яким повинна відповідати людина, що займає цю посаду (чим вище оцінка, тим більше даний кандидат відповідає вимогам, що висуваються). За результатами тестування усі претенденти були об'єднані у п'ять груп відповідно з ефективністю їх роботи на певній посаді. Кількість вакансій, на які оголошено конкурс, кількість претендентів за кожною групою ефективності і результати їх тестування надані в табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Вихідні дані задачі про призначення

Результати тестування	Посада 1	Посада 2	Посада 3	Посада 4	Посада 5	Посада 6	Посада 7	Усього претендентів
Група 1	4	4	7	5	7	4	3	1
Група 2	2	5	6	4	6	4	2	3
Група 3	3	4	5	5	5	4	3	3
Група 4	4	3	4	4	4	4	4	4
Група 5	5	4	3	2	3	4	5	7
Усього вакансій	3	2	1	2	1	1	2	18 / 12

Необхідно скласти такий план призначень на вакантні посади, щоб загальна ефективність виконання ними службових обов'язків була якомога більшою.

Складемо математичну модель задачі. Задачу про призначення можна представити по типу транспортної задачі, де кількість претендентів на посаду відповідає матриці $\mathbf{A}$ (запаси постачальників), кількість вакансій – матрицю $\mathbf{B}$ (потреби споживачів), а бали, які отримали претенденти за результатами тестування – матрицю $\mathbf{C}$ (тарифи). Зверніть увагу, що табл. 11.1 побудована за тим же принципом, що і таблиця вихідних даних транспортної задачі.

Оскільки критерієм ефективності в задачі про призначення є загальний виграш, який отримає фірма від роботи нових співробітників, то цільова функція задачі досліджується на максимум. Позначимо можливий план призначень через $\mathbf{X} = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$. Тоді цільова функція має вигляд:

$$\begin{aligned}
Z = {} & 4x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 5x_{14} + 7x_{15} + 4x_{16} + 3x_{17} + \\
& + 2x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} + 4x_{24} + 6x_{25} + 4x_{26} + 2x_{27} + \\
& + 3x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 5x_{34} + 5x_{35} + 4x_{36} + 3x_{37} + \\
& + 4x_{41} + 3x_{42} + 4x_{43} + 4x_{44} + 4x_{45} + 4x_{46} + 4x_{47} + \\
& + 5x_{51} + 4x_{52} + 3x_{53} + 2x_{54} + 3x_{55} + 4x_{56} + 5x_{57} \quad \to \max .
\end{aligned}$$

Основна система обмежень складається з двох частин. Одна частина її містить вимогу, що всі вакансії треба заповнити. Це відповідає умові транспортної задачі "усі потреби необхідно задовольнити".

Оскільки пропозиція перевищує попит, то цю частину основної системи обмежень можна записати у вигляді рівнянь:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 3; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 2; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 2; \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1; \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1; \\ x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} = 2. \end{cases}$$

Друга частина основної системи обмежень записується відносно пропозиції і відповідає умові транспортної задачі "усі товари необхідно вивезти". Попит є меншим за пропозицію, тому цю частину основної системи обмежень записуємо у вигляді нерівностей:

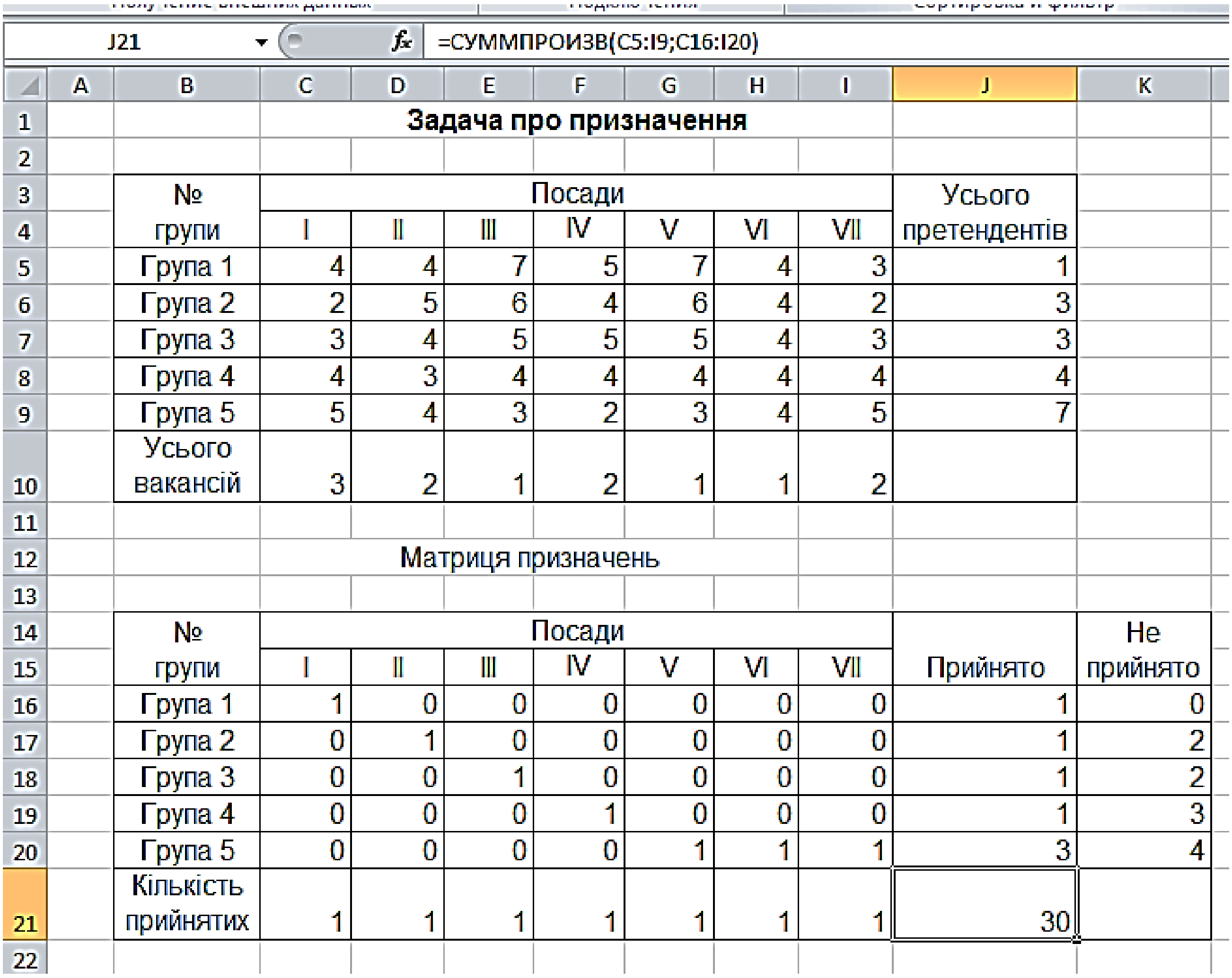
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \le 1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \le 3; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} \le 3; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \le 4; \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} \le 7. \end{cases}$$

Крім того, система обмежень містить вимогу цілочисельності і обмеження на знак. Ці вимоги можна поєднати і записати у такому вигляді:

$$x_{ij} \in N \cup \{0\}; \quad i = \overline{1,5}; \quad j = \overline{1,7}.$$

Слід зазначити, що у тому випадку, коли параметри транспортної задачі є цілими числами, то її розв'язок теж буде цілочисельним, тобто вимога цілочисельності для задач типу транспортної виконується автоматично, без введення додаткових обмежень.

Для знаходження оптимального плану задачі застосуємо надбудову **Поиск решения**. З цією метою на робочому аркуші книги MS Excel побудуємо таблицю, яка містить умови задачі (рис. 11.2).



J21 =СУММПРОИЗВ(C5:I9;C16:I20)

Задача про призначення

№ групи	Посади I	II	III	IV	V	VI	VII	Усього претендентів
Група 1	4	4	7	5	7	4	3	1
Група 2	2	5	6	4	6	4	2	3
Група 3	3	4	5	5	5	4	3	3
Група 4	4	3	4	4	4	4	4	4
Група 5	5	4	3	2	3	4	5	7
Усього вакансій	3	2	1	2	1	1	2	

Матриця призначень

№ групи	Посади I	II	III	IV	V	VI	VII	Прийнято	Не прийнято
Група 1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
Група 2	0	1	0	0	0	0	0	1	2
Група 3	0	0	1	0	0	0	0	1	2
Група 4	0	0	0	1	0	0	0	1	3
Група 5	0	0	0	0	1	1	1	3	4
Кількість прийнятих	1	1	1	1	1	1	1	30	

Рис. 11.2. **Скриншот з таблицею вихідних даних**

Елементи матриці призначень запишемо в комірки **C16:I20**. Будемо вважати, що вихідному плану відповідає матриця, елементами якої є нулі і одиниці. У рядку "Кількість прийнятих" виводимо кількість прийнятих за кожною посадою (стовпцями). Так, у комірку **C21** записуємо формулу **=СУММ (C16:C20)** і розтягуємо її на комірки **C21:I21**. У стовпці "Прийнято" виводимо кількість прийнятих за кожною групою. Так, у комірку **J16** записуємо формулу **=СУММ (C16:I16)** і розтягуємо її на комірки **J16:J20**. Елементи стовпця "Не прийнято" обчислюємо як різницю між відповідними елементами стовпця "Усього претендентів" і "Прийнято". Так, вводимо формулу **=J5-J16** у комірку **K16**.

Для обчислення значення цільової функції, що відповідає даному плану, скористаємось вбудованою функцією **СУМПРОИЗВ ()**. Для цього у комірку **J21** вводимо формулу **= СУММПРОИЗВ (C5:I9;C16:I20)**. Усі вихідні дані введені, отже, таблиця підготовлена для проведення оптимізації.

Для активізації надбудови **Поиск решения** набираємо послідовність команд **Данные** ⇒ **Поиск решения** і у діалоговому вікні цієї надбудови виконуємо налаштування математичної моделі задачі (рис. 11.3).

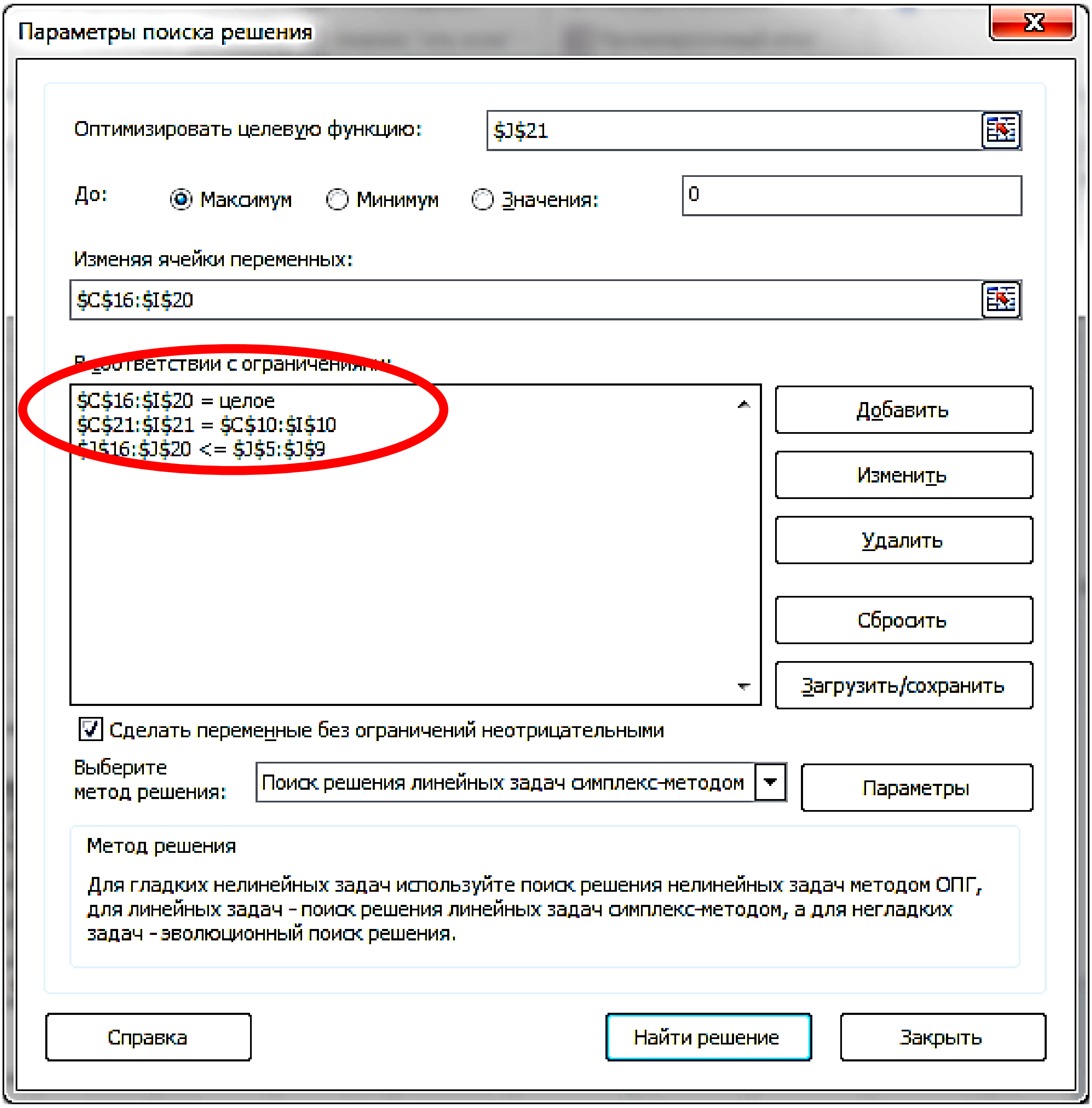


Рис. 11.3. **Діалогове вікно надбудови "Поиск решения" із заповненими полями**

Вказуємо, що цільова функція досліджується **До: максимум**, що здійснюється шляхом зміни значень керованих змінних, які виводяться у комірках **$C$16:$I$20**. Вибираємо метод розв'язання: **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**. Тепер натискаємо кнопку **Найти решение**, і на екрані з'являється діалогове вікно **Результаты поиска решений**, у якому повідомляється, що рішення знайдено.

Зверніть увагу, що під час заповнення поля **В соответствии с ограничениями:** діалогового вікна **Поиск решения** була введена умова цілочисельності, хоча у цьому не було потреби. Якщо таке обмеження не вводити, оскільки параметри математичної моделі даної задачі є цілими, розв'язок все одно буде цілочисельним і при цьому є можливість не тільки отримати розв'язок, але і вивести звіт щодо стійкості оптимального плану.

Результати оптимізації наведені на рис. 11.4.

J21 =СУММПРОИЗВ(C5:I9;C16:I20)

Задача про призначення

№ групи	Посади I	II	III	IV	V	VI	VII	Усього претендентів
Група 1	4	4	7	5	7	4	3	1
Група 2	2	5	6	4	6	4	2	3
Група 3	3	4	5	5	5	4	3	3
Група 4	4	3	4	4	4	4	4	4
Група 5	5	4	3	2	3	4	5	7
Усього вакансій	3	2	1	2	1	1	2	

Матриця призначень

№ групи	Посади I	II	III	IV	V	VI	VII	Прийнято	Не прийнято
Група 1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
Група 2	0	2	1	0	0	0	0	3	0
Група 3	0	0	0	2	0	0	0	2	1
Група 4	0	0	0	0	0	0	0	0	4
Група 5	3	0	0	0	0	1	2	6	1
Кількість прийнятих	3	2	1	2	1	1	2	62	

Рис. 11.4. **Скриншот з таблицею результатів оптимізації**

Оптимальний план задачі про призначення можна надати у вигляді матриці:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до цього плану усі вакансії заповнені, а загальна ефективність роботи нових співробітників є максимальною і складає:

$$\max Z(\mathbf{X}) = Z(\mathbf{X}^*) = 62 \text{ (у. о.)}.$$

Оскільки задача є відкритою (кількість претендентів більша за кількість вакансій), то не всі претенденти отримали роботу на фірмі. У тій частині таблиці, де виводиться матриця призначень, комірки **K16:K20** містять інформацію про кількість претендентів із різних груп, які не були забезпечені роботою.

Для дослідження чутливості знайденого оптимального плану щодо зміни параметрів математичної моделі розглянемо звіт **Устойчивость**, який було виведено одночасно з розв'язком задачі. Нагадаємо, що якщо в полі **В соответствии с ограничениями:** діалогового вікна **Поиск решения** введемо обмеження **Целое**, то для виведення звіту про стійкість потрібно здійснити повторну оптимізацію. У даному випадку у цьому нема необхідності. Табл. 11.2 і 11.3 містять результати перевірки стійкості оптимального плану в узагальненому вигляді.

Таблиця 11.2

Узагальнені результати аналізу чутливості оптимального плану щодо зміни кількості претендентів

Характеристика чутливості	Збільшення на 1 претендента у групі				
	група 1	група 2	група 3	група 4	група 5
Значення цільової функції	63	62	62	62	62

Аналіз табл. 11.2 показує, що найбільшу цінність для фірми мають претенденти, які об'єднані в групу 1. Збільшення кількості фахівців цієї групи на 1 людину дає можливість збільшити значення цільової функції на 1 у. о.

Таблиця 11.3

Аналіз чутливості оптимального плану до зміни кількості вакансій

Характеристика чутливості	Збільшення на 1 вакансію по кожній посаді						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Значення цільової функції	67	66	67	67	67	66	67

Аналіз табл. 11.3 показує, що найбільшу цінність для фірми мають посади I, III, IV, V и VII.

Детальний аналіз стійкості розв'язку є теоретичною основою для прийняття управлінських рішень щодо оптимізації підбору персоналу.

11.3. Завдання для самостійної роботи

На меблевій фабриці із листів фанери необхідно викроїти заготовки чотирьох видів. Один лист довжиною 200 см можна розрізати на заготовки довжиною 50, 65, 70 и 75 см кількома способами. Необхідно вирізати 125, 134, 89 и 95 заготовок кожного виду. Можливі способи розкрою листа і довжина відходів виробництва надані в табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Вихідні дані задачі

№ варі-анта	Довжина заготовки, см	Кількість заготовок, яку можна отримати під час розкрою одного листа за певної методикою													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	50	4	2	2	2	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-
	60	-	1	-	-	2	-	-	-	1	1	3	2	2	1
	70	-	-	1	-	-	2	-	1	1	-	-	1	-	2
	75	-	-	-	1	-	-	2	1	-	1	-	-	1	-
	Відходи, см	-	40	30	25	30	10	-	5	20	15	20	10	5	-

Продовження табл. 11.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	50	1	-	-	-	1	1	1	2	1	1	1	1	-	1
	60	1	1	-	1	-	1	-	-	2	1	-	1	3	-
	70	-	3	1	2	2	1	1	1	-	1	1	-	-	2
	75	1	-	3	-	-	-	1	-	-	-	1	1	-	-
	Відходи, см	15	30	5	-	10	20	5	30	30	20	5	15	20	10
3	50	3	1	1	4	2	1	-	1	1	1	-	1	1	-
	60	-	-	-	-	1	-	1	1	-	-	3	1	-	1
	70	-	2	-	-	-	2	2	-	2	-	-	1	-	2
	75	-	-	2	-	-	-	-	1	-	1	-	-	2	-
	Відходи, см	50	10	-	-	40	10	-	15	10	25	20	20	-	-
4	50	4	2	-	1	1	3	1	1	1	1	1	1	-	1
	60	-	1	-	-	-	-	2	1	-	-	1	-	1	2
	70	-	-	3	-	2		-	1	1	-	-	-	2	-
	75	-	-	1	2	-	-	-	-	1	2	1	2	-	-
	Відходи, см	-	40	15	-	10	50	30	20	5	-	15	-	-	30
5	50	-	4	2	2	2	1	1	1	1	1	1	-	-	-
	60	1	-	1	-	-	2	-	-	-	1	1	3	2	2
	70	2	-	-	1	-	-	2	-	1	1	-	-	1	-
	75	-	-	-	-	1	-	-	2	1	-	1	-	-	1
	Відходи, см	-	-	40	30	25	30	10	-	5	20	15	20	10	5
6	50	1	-	-	1	1	1	1	1	-	1	-	1	1	-
	60	2	1	1	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	2
	70	-	2	2	1	-	2	1	1	2	1	2	1	-	-
	75	-	-	-	1	2	-	1	1	-	1	-	1	1	1
	Відходи, см	30	-	-	5	-	10	5	5	-	5	-	5	15	5
7	50	1	1	-	-	4	2	1	2	-	1	1	1	1	-
	60	1	1	2	3	-	-	2	1	1	1	1	2	1	2
	70	1	1	-	-	-	-	-	-	2	1	1	-	1	-
	75	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1
	Відходи, см	20	20	5	20	-	25	30	40	-	20	20	30	20	5

Продовження табл. 11.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	50	2	-	1	1	2	1	1	1	1	1	-	4	-	2
	60	1	-	2	-	-	-	1	1	-	1	2	-	3	1
	70	-	-	-	2	1	1	-	1	1	1	-	-	-	-
	75	-	2	-	-	-	1	1	-	1	-	1	-	-	-
	Відходи, см	40	50	30	10	30	5	15	20	5	20	5	-	20	40
9	50	1	-	-	1	1	-	1	1	1	1	1	1	-	1
	60	-	3	2	-	-	1	1	-	-	-	1	-	2	1
	70	1	-	-	1	-	2	1	2	2	1	1	1	-	1
	75	1	-	1	1	2	-	-	-	-	1	-	1	1	-
	Відходи, см	5	20	5	5	-	-	20	10	10	5	20	5	5	20
10	50	-	1	-	-	1	1	2	2	-	-	1	-	3	1
	60	1	1	2	3	-	1	-	-	2	1	-	1	-	1
	70	2	1	-	-	2	-	1	-	1	2	1	-	-	-
	75	-	-	1	-	-	1	-	1	-	-	1	1	-	1
	Відходи, см	-	20	5	20	10	15	30	25	10	-	5	65	50	15
11	50	-	4	2	1	-	-	2	2	1	-	-	1	1	1
	60	1	-	1	1	-	3	-	-	2	2	2	2	1	1
	70	2	-	-	-	1	-	-	1	-	-	1	-	-	1
	75	-	-	-	1	1	-	1	-	-	1	-	-	1	-
	Відходи, см	-	-	40	15	55	20	25	30	30	5	10	30	15	20
12	50	1	-	1	1	2	-	1	1	-	1	2	1	1	-
	60	-	2	1	1	1	-	1	-	2	1	-	-	1	1
	70	1	-	1	-	-	1	1	2	1	1	1	1	-	2
	75	1	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	1	1	-
	Відходи, см	5	5	20	15	40	55	20	10	10	20	30	5	15	-
13	50	-	1	2	-	1	1	1	1	1	-	-	1	1	1
	60	1	2	-	2	-	1	-	-	1	3	2	-	-	1
	70	2	-	1	1	1	1	2	1	-	-	-	-	1	-
	75	-	-	-	-	1	-	-	1	1	-	1	2	1	1
	Відходи, см	-	30	30	10	5	20	10	5	15	20	5	-	5	15

Закінчення табл. 11.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14	50	2	1	1	1	1	1	1	-	2	-	1	-	3	-
	60	-	-	1	-	1	-	-	1	1	1	1	3	-	2
	70	1	1	-	2	1	-	1	2	-	1	1	-	-	-
	75	-	1	1	-	-	2	1	-	1	1	-	-	-	1
	Відходи, см	30	5	15	10	20	10	5	5	30	25	20	20	50	5
15	50	1	1	-	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	-
	60	-	1	2	-	-	-	-	-	-	1	-	1	1	3
	70	1	-	1	1	-	1	2	-	2	1	1	-	1	-
	75	1	1	-	1	1	-	-	2	-	-	1	1	-	-
	Відходи, см	5	15	10	5	25	30	10	-	10	20	5	15	20	20
16	50	-	-	1	-	-	1	2	2	1	-	1	1	2	1
	60	2	1	-	2	2	1	-	-	-	3	1	-	-	1
	70	-	2	-	-	1	-	-	1	2	-	1	1	1	-
	75	1	-	2	1	-	1	1	-	-	-	-	1	-	1
	Відходи, см	5	-	-	5	10	15	25	30	10	20	20	5	30	15

Необхідно визначити кількість листів, які потрібно розрізати на заготовки із застосуванням певного способу розкрою, що дозволить отримати необхідну кількість заготовок і при цьому загальний обсяг відходів виробництва був би мінімальним.

11.4. Контрольні запитання

1. Які особливості має математична модель задачі цілочислового програмування?

2. Які задачі економічного змісту належать до класу задач цілочислового програмування?

3. Назвіть методи розв'язання задач цілочислового програмування і принципи, на яких ці методи базуються.

4. У чому полягають особливості застосування надбудови **Поиск решения** MS Excel, якщо є вимога цілочисельності?

5. Як дослідити стійкість оптимального плану задачі цілочислового програмування відносно зміни параметрів її математичної моделі?

Тема 12. Методи нелінійного програмування

12.1. Теоретичні відомості

Детальне дослідження практичних задач, які умовно можна вважати лінійними, показує, що таке уявлення є спрощеним. Серед реальних завдань економіки задачі лінійного програмування скоріше є винятком, ніж правилом. Задачі, у процесі побудови математичних моделей яких застосовуються нелінійні функції, відокремлено в окремий розділ математичного програмування – ***нелінійне програмування***, і цей розділ значно ширше і більш різноманітний, ніж розділ лінійного програмування.

У загальному випадку задача нелінійного програмування полягає у визначенні екстремального значення (мінімуму або максимуму) функції кількох змінних:

$$Z(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \rightarrow \quad \max\ (\min) \qquad (12.1)$$

за умови, що її змінні відповідають певним умовам обмеження:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \{\le = \ge\} b_i; \quad i = \overline{1, m}. \qquad (12.2)$$

І також існує обмеження на знак:

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1, n}. \qquad (12.3)$$

Математична модель (12.1) – (12.3) є моделлю задачі нелінійного програмування, якщо або цільова функція, або функції основної системи обмежень, або і та, і інші функції одночасно є нелінійними.

На даний час не існує універсального методу, який би дозволяв розв'язувати будь-які задачі нелінійного програмування, тому ці задачі, у свою чергу, об'єднують в окремі групи задач по типу цільової функції або функцій умов обмежень.

Ієрархія нелінійних оптимізаційних задач у міру зростання складності їх розв'язання вибудовується так: опуклі задачі квадратичного програмування, опуклі задачі нелінійного програмування, задачі нелінійного програмування загального виду.

Задачі ***опуклого програмування*** полягають у знаходженні такого розв'язку, за яким опукла функція сягає найменшого значення (або угнута функція сягає найбільшого значення). Будь-яка задача лінійного програмування є окремим випадком задачі опуклого програмування.

Зауважимо, що слід розрізняти локальний і глобальний екстремуми функції. Якщо цільова функція у точці $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ сягає значення $Z(\mathbf{X}^*) = Z_{\max}(\mathbf{X}),$ що є найбільшим для всіх планів $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на множині припустимих планів, то такий екстремум є ***глобальним максимумом***. Якщо ж це значення цільової функції є найбільшим лише для деякого околу точки $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то у цій точці цільова функція має ***локальний максимум***. Аналогічно визначаються глобальний і локальний мінімуми. Під час розв'язання задачі оптимізації в усіх випадках прагнуть знайти глобальний екстремум. Розв'язки задачі нелінійного програмування (глобальні максимум або мінімум) можуть належати або границі, або внутрішній частині множини припустимих розв'язків.

Розглянемо окремі випадки задачі нелінійного програмування у припущенні, що основна система обмежень містить лише рівняння, тобто має вигляд:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i; \quad i = \overline{1, m}. \tag{12.4}$$

Задача, математична модель якої задана співвідношеннями (12.1) і (12.4), є ***задачею на умовний екстремум***, або ***класичною задачею оптимізації***. Для іі розв'язання можна застосовувати кілька методів, серед яких найбільш зручним є ***метод множників Лагранжа***. Він передбачає такий алгоритм пошуку розв'язку:

записують ***функцію Лагранжа*** як лінійну комбінацію цільової функції і всіх функцій основної системи обмежень:

$$\begin{aligned} &L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \\ &\quad = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right), \end{aligned} \tag{12.5}$$

де λ_i – невідомі ***множники Лагранжа***.

Потім досліджують її на екстремум. Значення $(x_1^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$, за якими функція Лагранжа сягає екстремуму, відповідає тому значенню $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, за яким цільова функція задачі оптимізації має умовний екстремум того ж типу, що і функція Лагранжа. Таким чином, метод множників Лагранжа дозволяє звести задачу про знаходження умовного екстремуму цільової функції (12.1), змінні якої повинні задовольняти умовам обмеження (12.4), до задачі про знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа (12.5).

Для розв'язання задачі про знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа необхідно знайти всі її частинні похідні і відповідно з необхідною умовою екстремуму прирівняти їх нулю. Отже, знаходження оптимального плану задачі нелінійного програмування зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0; \qquad j = \overline{1, n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{12.6}$$

Система (12.6) містить $m + n$ незалежних рівнянь відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_q, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Її розв'язком будуть координати стаціонарної точки, у якій функція Лагранжа може мати локальний екстремум. Відповідно, якщо з координат знайденої стаціонарної точки виключити значення множників Лагранжа, то отримаємо план $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, під час застосування якого цільова функція вихідної задачі нелінійного програмування може мати екстремум.

Для функції кількох змінних перевірка того, чи є стаціонарна точка, координати якої були знайдені, точкою локального екстремуму і який саме тип екстремуму має місце, зводиться до визначення знака її диференціала другого порядку у стаціонарній точці. Знак диференціала другого порядку функції Лагранжа d^2L розглядається за умови фіксованих значень множників Лагранжа λ_i $(i = \overline{1, m})$. Похідні другого порядку входять до диференціала d^2L як коефіцієнти при частинних диференціалах другого порядку за відповідними аргументами функції (похідні другого порядку за відповідними змінними), а також при парних добутках частинних диференціалів першого порядку за аргументами функції (мішані похідні за цими змінними). З похідних другого порядку, що обчислюються у стаціонарній точці, складають ***матрицю квадратичної форми***. Матриця квадратичної форми, елементами якої є коефіцієнти диференціалу другого порядку функції Лагранжа при фіксованих значеннях λ_i $(i=\overline{1,m})$, має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \qquad (12.7)$$

Розглянемо мінори цієї матриці. Нагадаємо, що мінор матриці називається ***головним***, якщо номери рядків матриці, що утворюють мінор, співпадають з номерами стовпців, що утворюють мінор. Для n-мірної матриці (12.7) існує n головних мінорів, якими є мінори:

$$\Delta_1 = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \right|; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \text{ та ін.,} \qquad (12.8)$$

а головний мінор порядку n співпадає з визначником самої матриці квадратичної форми.

Відповідно з ***критерієм Сильвестра***, якщо знаки всіх головних мінорів матриці є додатними, то матриця квадратичної форми повного диференціала є додатно визначеною. У цьому випадку повний диференціал другого порядку приймає додатні значення для будь-яких ненульових значень приростів аргументів функції Лагранжа. Це означає, що у стаціонарній точці, для якої обчислюється квадратична форма, функція Лагранжа має локальний мінімум, що відповідає умовному мінімуму цільової функції задачі нелінійного програмування. Звідси випливає, що достатньою умовою існування у стаціонарній точці локального мінімуму є виконання системи нерівностей:

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \Delta_3 > 0; \ \ldots; \ \Delta_n > 0. \qquad (12.9)$$

Якщо знаки головних мінорів матриці квадратичної форми змінюються таким чином:

$$\Delta_1 < 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \Delta_3 < 0; \; \ldots; \; (-1)^n \Delta_n > 0, \qquad (12.10)$$

то матриця квадратичної форми повного диференціала другого порядку функції Лагранжа є від'ємно визначеною, і у стаціонарній точці спостерігається локальний максимум функції Лагранжа, що відповідає умовному максимуму цільової функції задачі нелінійного програмування. Отже, умова (12.10) є достатньою умовою існування у стаціонарній точці локального максимуму.

12.2. Приклад розв'язання задачі про мінімізацію загальних витрат у процесі виробництва продукції

Розглянемо таку задачу. Підприємство може виробляти два види продукції. Попередні дослідження довели, що загальні витрати на виготовлення продукції можуть бути визначені за допомогою функції:

$$Z(x_1, x_2) = 0{,}4x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 + 0{,}6x_2^2 + 500x_1 + 400x_2 + 1\,000,$$

де x_1 і x_2 – кількість одиниць продукції кожного виду.

Ці два види продукції є товарами-замінниками. Відомо, що загальний обсяг виробництва продукції повинен дорівнювати 1 000 одиниць. Необхідно визначити, у якій кількості потрібно виготовляти продукцію кожного виду, щоб план виробництва було виконано у повному обсязі і при цьому загальні витрати на її виготовлення були би найменшими.

Для знаходження плану виробництва сформулюємо цю задачу як задачу математичного програмування. Запишемо математичну модель цієї задачі. Її критерієм ефективності є функція, що описує загальні витрати підприємства на виготовлення продукції. Ця функція досліджується на мінімум:

$$Z(x_1, x_2) = 0{,}4x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 + 0{,}6x_2^2 + 500x_1 + 400x_2 + 1\,000 \quad \to \quad \min.$$

Основна система обмежень подана у вигляді рівняння:

$$x_1 + x_2 = 1\,000.$$

І змінні цільової функції повинні відповідати обмеженню на знак:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Оскільки цільова функція не є лінійною, то ця задача належить до класу задач нелінійного програмування. Зверніть увагу, що основна система обмежень надана у вигляді рівняння. Отже, для розв'язання цієї задачі можна застосувати метод множників Лагранжа.

Побудуємо функцію Лагранжа, однак спочатку перепишемо умову обмеження у такому вигляді:

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1\,000 = 0.$$

Тоді отримуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 0{,}4x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 + 0{,}6x_2^2 + 500x_1 + 400x_2 + 1\,000 +$$
$$+ \lambda(x_1 + x_2 - 1\,000) \quad \rightarrow \quad \min.$$

Таким чином, ми перейшли від задачі про дослідження цільової функції $Z(x_1, x_2)$ на умовний екстремум до задачі дослідження функції Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ на безумовний екстремум.

Відповідно з алгоритмом дослідження функції на екстремум знайдемо всі частинні похідні першого порядку від функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 + 500 + \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0{,}5x_1 + 1{,}2x_2 + 400 + \lambda;$$

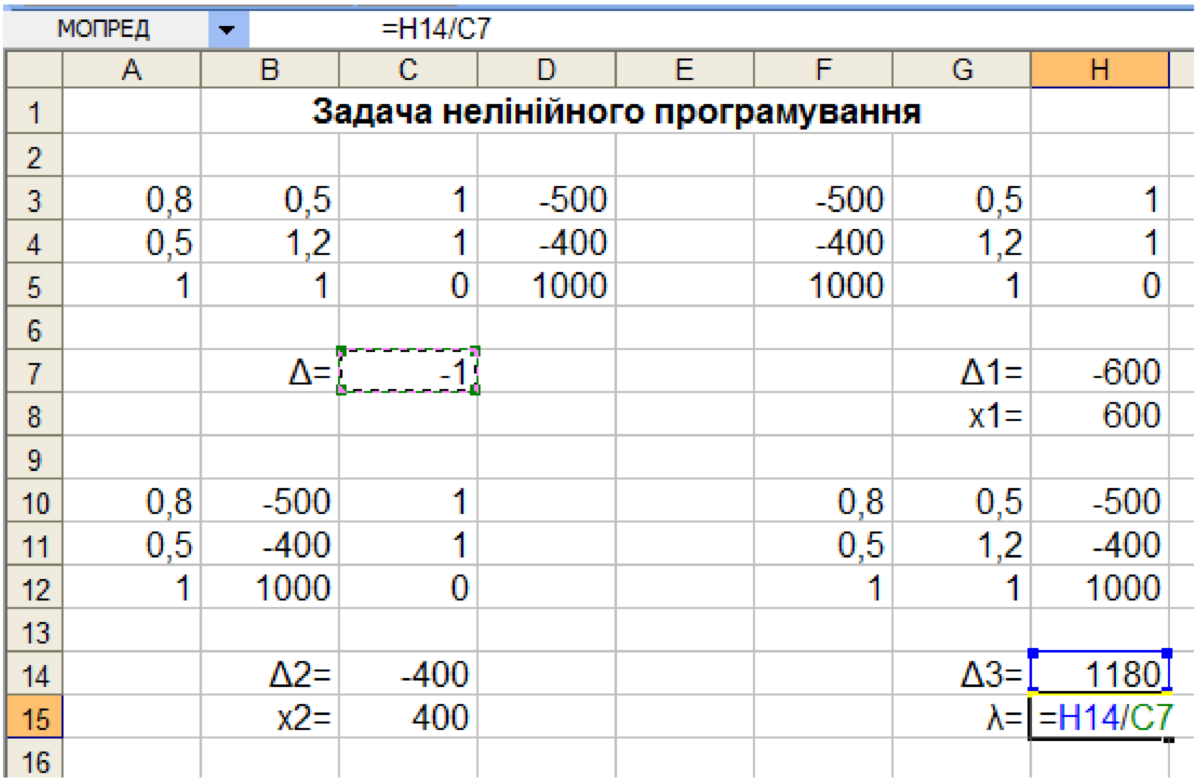
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1\,000.$$

За необхідною умовою екстремуму прирівнюємо знайдені похідні до нуля і отримуємо систему рівнянь відносно координат стаціонарної точки функції Лагранжа:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1^* + 0{,}5x_2^* + 500 + \lambda^* = 0; \\ 0{,}5x_1^* + 1{,}2x_2^* + 400 + \lambda^* = 0; \\ x_1^* + x_2^* - 1\,000 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0{,}8x_1^* + 0{,}5x_2^* + \lambda^* = -500; \\ 0{,}5x_1^* + 1{,}2x_2^* + \lambda^* = -400; \\ x_1^* + x_2^* = 1\,000. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь, наприклад, за формулами Крамера (див. розв'язання задачі за темою 1). Для цього застосуємо вбудовані функції MS Excel.

На робочому аркуші книги MS Excel записуємо основну матрицю системи лінійних рівнянь (блок комірок **A3:C3**) і поряд (у комірках **D3:D5**) записуємо матрицю-стовпець вільних членів (рис. 12.1).


МОПРЕД =H14/C7

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Задача нелінійного програмування						
2								
3	0,8	0,5	1	-500		-500	0,5	1
4	0,5	1,2	1	-400		-400	1,2	1
5	1	1	0	1000		1000	1	0
6								
7		Δ=	-1				Δ1=	-600
8							x1=	600
9								
10	0,8	-500	1			0,8	0,5	-500
11	0,5	-400	1			0,5	1,2	-400
12	1	1000	0			1	1	1000
13								
14		Δ2=	-400				Δ3=	1180
15		x2=	400				λ=	=H14/C7
16								

Рис. 12.1. **Знаходження координат стаціонарної точки функції Лагранжа**

Значення визначників, які необхідно обчислити для визначення невідомих за формулами Крамера, знаходимо за допомогою вбудованої функції **МОПРЕД ()**. Наприклад, для знаходження визначника основної матриці системи у комірку **С7** вводимо формулу: = **МОПРЕД (A3:C5)**. Далі послідовно замінюємо стовпець коефіцієнтів при відповідному невідомому на стовпець вільних членів і обчислюємо визначники відповідних матриць. Для відшукання невідомих ці значення визначників ділимо на визначник основної матриці системи. Таким чином, отримуємо координати стаціонарної точки функції Лагранжа: $x_1^* = 600$, $x_2^* = 400$, $\lambda^* = -1180$. Тепер перевіряємо, чи виконується для цієї точки достатня умова екстремуму. Для цього обчислюємо частинні похідні другого порядку від функції Лагранжа за змінними x_1 і x_2:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 0{,}8; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 1{,}2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0{,}5.$$

Повний диференціал другого порядку (за фіксованим значенням λ) має вигляд:

$$d^2 L = 0{,}8 dx_1^2 + 2 \cdot 0{,}5 dx_1 dx_2 + 1{,}2 dx_2^2.$$

Побудуємо матрицю його квадратичної форми:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}2 \end{pmatrix}.$$

Вона має два головних мінори:

$$\Delta_1 = 0{,}8 > 0 \quad \text{і} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}8 \cdot 1{,}2 - 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}71 > 0.$$

Оскільки всі головні мінори є додатними, то у стаціонарній точці, що досліджується, функція Лагранжа має локальний мінімум і, відповідно, ця точка є умовним мінімумом цільової функції задачі нелінійного програмування. Отже, це екстремум того виду, який потрібно за умовою задачі. Ми отримали оптимальний план виробництва продукції $\mathbf{X}^* = (600;\ 400)$, за яким загальні витрати на виготовлення продукції є мінімальними і складають:

$$Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^*) = 0{,}4 \cdot 600^2 + 0{,}5 \cdot 600 \cdot 400 + 0{,}6 \cdot 400^2 +$$
$$+ 500 \cdot 600 + 400 \cdot 400 + 1\,000 = 821\,000 \quad \text{(у. о.)}$$

Звернемо увагу на економічний зміст множників Лагранжа. У даній задачі для стаціонарної точки маємо $\lambda^{*} = -1\,180$. Це означає, що за умови збільшення загального обсягу випуску продукції на одиницю, загальні витрати на виконання планового завдання збільшаться на 1 180 у. о. Для того, щоб переконатись у цьому, розглянемо ще одну задачу. Вона відрізняється від попередньої лише умовою обмеження, яка тепер має вигляд: $x_1 + x_2 = 1001$. По суті це можна розглядати як дослідження стійкості оптимального плану відносно зміни правої частини основної системи обмежень.

На новому робочому аркуші книги MS Excel записуємо усі необхідні дані для розв'язання задачі про відшукання екстремуму функції Лагранжа (рис. 12.2).

H15 =H14/C7

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Задача нелінійного програмування**						
2								
3	0,8	0,5	1	-500		-500	0,5	1
4	0,5	1,2	1	-400		-400	1,2	1
5	1	1	0	1001		1001	1	0
6								
7		Δ=	-1				Δ1=	-600,7
8							x1=	600,7
9								
10	0,8	-500	1			0,8	0,5	-500
11	0,5	-400	1			0,5	1,2	-400
12	1	1001	0			1	1	1001
13								
14		Δ2=	-400,3				Δ3=	1180,7
15		x2=	400,3				λ=	-1181
16								

Рис. 12.2. **Дослідження стійкості оптимального плану відносно зміни правої части системи обмежень**

Для цього просто копіюємо всі відомості, що містяться на робочому аркуші попередньої задачі (див. рис. 12.1) на новий робочий аркуш і вносимо зміни у стовпець вільних членів системи лінійних рівнянь. Автоматично отримуємо новий оптимальний план: $\mathbf{X}^* = (600{,}7;\ \ 400{,}3)$. Йому відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}^*) = 822\ 180$ у. о. Отже, як і очікувалось, значення цільової функції, яке ми отримали під час збільшення загального обсягу випуску продукції на 1 одиницю, збільшилося від попереднього на величину:

$$\Delta Z = 822\ 180 - 821\ 000 = 1\,180 \quad \text{у. о.}$$

12.3. Завдання для самостійні роботи

Дослідження ринку двох супутніх товарів А і Б показали, що попит на ці товари можна описати функцією $Z = ax_1^2 + bx_2^2$, де величини x_1 і x_2 характеризують потреби у товарах виду А і Б, відповідно. Крім того, між попитом на товари А і Б існує зв'язок, який можна описати співвідношенням: $cx_1 + dx_2 = 10$. Для кожного варіанта індивідуального завдання значення параметрів функції попиту, а також співвідношення, що описує взаємозв'язок між попитом на товари А і Б, наведені в табл. 12.1.

Дослідити функцію попиту на умовний екстремум за допомогою метода множників Лагранжа, тобто побудувати функцію Лагранжа, знайти координати стаціонарної точки цієї функції, перевірити, чи має функція екстремум у цій точці, визначити вид екстремуму, якщо він існує у цій точці, і відповідне йому значення цільової функції, а також дослідити стійкість оптимального плану відносно зміни співвідношення між вжитком товарів А і Б. Зробити економічні висновки.

Таблиця 12.1

Таблиця значень параметрів задачі нелінійного програмування

№ варіанта	a	b	c	d
1	2	3	4	5
1	40	20	-20	50
2	20	40	10	30
3	30	40	10	-20
4	40	20	10	50
5	20	40	10	-20
6	50	10	20	30
7	20	20	40	50

Закінчення табл. 12.1

1	2	3	4	5
8	30	40	30	-40
9	40	50	60	20
10	20	40	-30	30
11	40	20	20	80
12	60	30	10	-20
13	70	40	-20	20
14	80	20	30	-40
15	30	30	-20	-10
16	50	60	40	30

12.4. Контрольні запитання

1. Які задачі є задачами нелінійного програмування? Чи існує єдиний підхід до їх розв'язання?

2. За якими принципами відбувається об'єднання задач математичного програмування у окремий клас задач нелінійного програмування?

3. Пояснять, які задачі є задачами опуклого програмування?

4. Що таке умовний екстремуму?

5. У чому полягає основна ідея метода множників Лагранжа?

6. Назвіть умови застосування метода множників Лагранжа.

7. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції кількох змінних.

8. Як побудувати систему рівнянь, що дозволяє визначити координати стаціонарної точки функції Лагранжа?

9. Наведіть формулу повного диференціала функції Лагранжа. Як за допомогою повного диференціала другого порядку перевірити виконання достатньої умови екстремуму?

10. Наведіть принцип побудови матриці квадратичної форми повного диференціала другого порядку?

11. Яка квадратична форма вважається додатно (від'ємно) визначеною?

12. Сформулюйте достатню умову екстремуму функції кількох змінних, застосовуючи поняття додатно (від'ємно) визначеної квадратичної форми.

13. Наведіть пояснення економічного змісту множників Лагранжа.

Тема 13. Квадратичне програмування

13.1. Теоретичні відомості

Одним із найбільш важливих класів задач нелінійного програмування є задачі квадратичного програмування. Вони відрізняються від інших оптимізаційних задач тим, що їхня математична модель містить цільову функцію, яка є квадратичною, а функції, що входять до складу основної системи обмежень – лінійними.

Математична модель задачі квадратичного програмування має такий вигляд. Критерієм ефективності є квадратична функція, яка досліджується на екстремум довільного типу:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \quad \rightarrow \quad \max(\min). \qquad (13.1)$$

Основна система обмежень математичної моделі задачі містить лінійні рівняння та/або нерівності:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge) b_i, \qquad (13.2)$$

а також існує обмеження на знак:

$$x_j \ge 0; \; j = \overline{1, n}. \qquad (13.3)$$

Таким чином, математична модель задачі квадратичного програмування (13.1) – (13.3) відрізняється від задачі лінійного програмування лише видом цільової функції.

Процес оптимізації нелінійних моделей передбачає такі етапи:

– визначають припустимий розв'язок, який задовольняє всім умовам обмежень. Цей план $\mathbf{X}_0$ розглядається як ***вихідний***, або ***начальний план***, для послідовної реалізації процесу оптимізації;

– для знайденого начального плану визначаємо напрям, якому відповідає найбільш швидке змінювання значення цільової функції, що відповідає певному виду екстремуму, саме тому, на який досліджується функція (вдовж ***градієнта цільової функції***, якщо задача досліджується на максимум, або в протилежному напрямку, якщо на мінімум);

– у знайденому напряму змінюють значення начального плану доти, доки не буде досягнута межа області обмежень або перестане змінюватись значення цільової функції. Отриманий план $\mathbf{X}_1$ є новим вихідним планом для наступного етапу оптимізації;

– за даними отриманого плану $\mathbf{X}_1$ визначаємо новий напрямок найбільш швидкої зміни цільової функції, і процес повторюється, доки подальша зміна значення цільової функції стає неможливою.

У MS Excel для розв'язання задач нелінійного програмування застосовується надбудова **Поиск решения**, за допомогою якої у даному випадку реалізується метод градієнта.

Оскільки задачі квадратичного програмування є більш складними, ніж задачі лінійного програмування, то у процесі їх розв'язання можуть виникати певні ускладнення. Слід звернути увагу на те, що використання надбудови **Поиск решения** може привести до отримання розв'язку, який не є оптимальним, або може виявитися, що знайдено локальний, а не глобальний оптимумом. Крім того, може з'явитись таке повідомлення: **поиск свелся к текущему значению**, що означає, що програма припинила пошук, оскільки під час проведення останніх п'яти ітерацій швидкість змінювання значення цільової функції була меншою за значення, яке задано в поле **Сходимость** діалогового вікна **Параметры поиска решения**. Оскільки процес оптимізації моделей нелінійного програмування за допомогою надбудови **Поиск решения** завжди починається від визначеного вихідного плану, то можна запустити програму ще раз, щоб дослідити, чи можна досягти кращого значення цільової функції.

Для забезпечення більш ефективної роботи надбудови **Поиск решения** при розв'язанні задач нелінійного програмування можна також налаштовувати окремі параметри роботи цієї надбудови. Так, якщо встановити в полі **Сходимость** значення, яке менше за 0,0001, то програма буде здійснювати процес оптимізації навіть за незначних змін цільової функції. Крім того, якщо у розділі **Оценки** встановити перемикач **квадратичная**, то в процесі обчислень буде застосовуватись більш точна апроксимація порівняно з лінійною.

Слід зазначити, що в діалоговому вікні **Параметры поиска решения** можна задати більш зручний метод пошуку розв'язку, наприклад, **метод сопряженных градиентов** потребує менше пам'яті, ніж **метод Ньютона**.

13.2. Приклад розв'язання задачі про формування інвестиційного портфеля як задачі квадратичного програмування

Розглянемо таку задачу. Відомо, що інвестор має грошові заощадження обсягом 16 млн грн, які він має намір вкласти з метою отримання прибутку. За попереднім аналізом найбільш перспективними були визнані три види цінних паперів.

У процесі формування структури інвестиційного портфеля слід приймати до уваги такі обмеження:

– верхня межа інвестицій за кожним видом цінних паперів складає, відповідно, 75, 60 і 50 %;

– річний прибуток, який можна очікувати за кожним видом цінних паперів, у середньому складає 6, 4 і 2 %;

– нижня межа очікуваного річного прибутку від усього обсягу інвестицій сягає 4 %.

Необхідно визначити, у якому співвідношенні доцільно виділити кошти на придбання цінних паперів кожного типу, щоб за високим рівнем прибутку ризик був якомога меншим, тобто визначити оптимальний план формування інвестиційного портфеля.

У даній задачі елементами плану $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ є частки від загальної суми капіталовкладень, які необхідно вкласти у кожний вид цінних паперів. Вимогою задачі є зведення до мінімуму можливих ризиків за умови високого прибутку, отже, передбачається, що необхідно забезпечити найменшу дисперсію прибутку, який можна отримати відповідно до сформованої структури портфеля інвестицій.

Проведення попередніх досліджень дозволили визначити вигляд функції ризиків. Так, було показано, що відносно обраних трьох видів цінних паперів функція, за допомогою якої описується дисперсія загального прибутку і яка за умовою задачі досліджується на мінімум, має такий вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = 0{,}09 \cdot x_1^2 + 0{,}06 \cdot x_2^2 + +0{,}08 \cdot x_3^2 +$$
$$+0{,}04 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0{,}05 \cdot x_1 \cdot x_3 + 0{,}03 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad \to \quad \min .$$

Система обмежень містить лінійні рівняння і нерівності різних знаків, які мають такий економічний зміст:

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 1, \ (\text{необхідно вкласти всі кошти}); \\
x_1 \le 0{,}75, \ (\text{верхня межа інвестицій у папери 1-го виду}); \\
x_2 \le 0{,}60, \ (\text{верхня межа інвестицій у папери 2-го виду}); \\
x_3 \le 0{,}50, \ (\text{верхня межа інвестицій у папери 3-го виду}); \\
0{,}06 \cdot x_1 + 0{,}04 \cdot x_2 + 0{,}02 \cdot x_3 \ge 0{,}04, \ (\text{нижня межа того прибутку, що} \\
\text{очікується}); \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0 \ (\text{продаж цінних поперів без покриття неможливий}).
\end{cases}
$$

Отже, дана задача є задачею квадратичного програмування. Для визначення її оптимального плану за допомогою надбудови **Поиск решения** застосуємо такий алгоритм:

1. На робочому аркуші MS Excel відповідно до умов задачі побудуємо таблицю вихідних даних (рис. 13.1).

МОПРЕД =СУММ(C10:H10)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Модель формування інвестиційного портфеля**							
2								
3			Цінні папери 1-го типу, X1	Цінні папери 2-го типу, X2	Цінні папери 3-го типу, X3	Усього		
4	Інвестиції, частка від загальної суми		0,00	0,00	0,00	0,00	=1	
5	Верхня межа інвестицій		0,75	0,60	0,50			
6	Очікуваний питомий прибуток		0,06	0,04	0,02	0,00	>=4 %	0,04
7								
8	Додатки цільової функції		(X1)^2	(X2)^2	(X3)^2	X1*X2	X1*X3	X2*X3
9	Показники ризику		0,09	0,06	0,08	0,04	0,05	0,03
10	Дисперсія ризику		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11		=СУММ(C10:H10)						
12								

Рис. 13.1. **Скриншот з таблицею вихідних даних задачі про формування інвестиційного портфеля**

2. Керованими змінними є частки від загальної суми інвестицій, що виділяються на придбання цінних паперів певного типу, для виведення їх значень відводимо блок комірок **C4:E4**. Будемо вважати, що за вихідним

планом частка інвестицій у кожний вид цінних паперів від загальної суми коштів дорівнює нулю.

3. Значення комірки "Усього" у рядку "Інвестиції, частка від загальної суми" є сумою елементів цього рядка, тому у комірку **F4** вводимо формулу: **=СУММ (C4:E4)**. За умовою задачі це значення повинно дорівнювати одиниці.

4. Значення комірки "Усього" у рядку "Очікуваний питомий прибуток" обчислюється за допомогою функції **СУМПРОИЗВ ()** як сума добутків часток, які припадають на відповідний тип цінних паперів, тобто на питомий прибуток за кожним із типів цінних паперів. З цією метою у комірку **F6** вводять формулу: **=СУММПРОИЗВ (C4:E4;C6:E6)**. За умовою задачі це значення повинно бути не менше, ніж 4 %.

5. У рядку "Дисперсія прибутку" обчислюємо окремі додатки цільової функції як добуток значень показників ризику (коефіцієнтів цільової функції) на квадрат значень частки відповідних типів цих цінних паперів або на добуток цих часток між собою. Найменування (принцип побудови) кожного із доданків записані у відповідних комірках п'ятого рядка. Для їх обчислення у блок комірок десятого рядка записуємо, відповідно, такі формули: **C10 =C9*C4^2**, **D10 =D9*D4^2** і **E10 =E9*E4^2**, а також **F10 =F9*C4*D4**, **G10 =G9*C4*E4** і **H10 =H9*D4*E4**.

6. Значення цільової функції вводимо у комірку **B11** як суму значень дисперсії прибутку від кожного типу цінних паперів окремо і з урахуванням їх взаємного впливу: **=СУММ (C10:H10)**.

7. За допомогою послідовності команд **Данные** ⇒ **Поиск решения** визиваємо на екрані діалогове вікно процедури **Поиск решения** і заповнюємо його поля відповідно з наведеною вище економіко-математичною моделлю задачі.

8. Заповнюємо поле **Оптимизировать целевую функцию**. Вибираємо потрібний варіант оптимізації **До: минимум**.

9. У полі **Изменяя ячейки переменных** даємо посилання на блок комірок **C4:E4**.

10. Заповнюємо поле **В соответствии с ограничениями**, вказавши у ньому співвідношення між лівою і правою частинами основної системи обмежень за умовами задачі (рис. 13.2).

11. У полі **Выберите метод решения:** встановлюємо **Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ**.

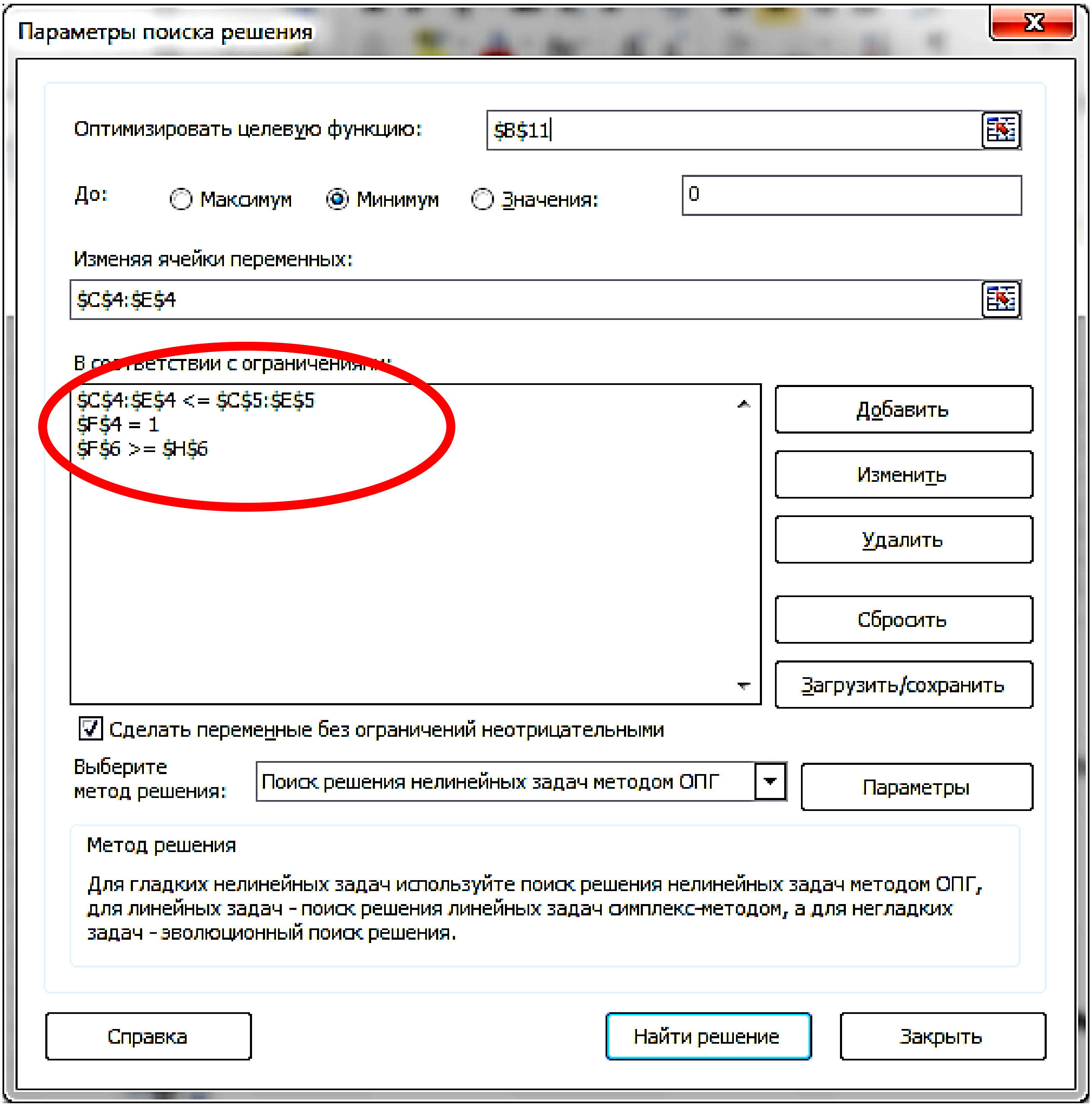


Рис. 13.2. **Діалогове вікно надбудови "Поиск решения"**

12. Оскільки всі обмеження моделі враховані, натискаємо кнопку **Найти решение**. Після завершення обчислень на екрані з'являється вікно **Результаты поиска решений**, у якому відображено повідомлення про результати роботи: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.**

13. У діалоговому вікні вибираємо **Тип отчета**: **Результаты** і **Устойчивость** та погоджуємося на пропозицію **Сохранить найденное решение** натисканням кнопки **OK**. Результат застосування надбудови

Поиск решения надано на рис. 13.3. Таким чином, розв'язання задачі формування інвестиційного портфеля за критерієм мінімальної ризику капіталовкладень знайдено. Зрозуміло, що у процесі формування портфеля за критерієм максимального прибутку ми отримаємо інший результат. Інший результат матимемо, якщо не дотримуватись вимоги щодо використання всієї суми грошей (пропонуємо перевірити це самостійно).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Модель формування інвестиційного портфеля							
2								
3			Цінні папери 1-го типу, X1	Цінні папери 2-го типу, X2	Цінні папери 3-го типу, X3	Усього		
4	Інвестиції, частка від загальної суми		0,265625	0,468750	0,265625	1,000000	=1	
5	Верхня межа інвестицій		0,75	0,60	0,50			
6	Очікуваний питомий прибуток		0,06	0,04	0,02	0,04	>=4 %	0,04
7								
8	Додатки цільової функції		(X1)^2	(X2)^2	(X3)^2	X1*X2	X1*X3	X2*X3
9	Показники ризику		0,0900	0,0600	0,0800	0,0400	0,0500	0,0300
10	Дисперсія ризику		0,0064	0,0132	0,0056	0,0050	0,0035	0,0037
11		0,037422						
12								

Рис. 13.3. **Скриншот з кінцевим результатом "Поиска решения"**

Отже, частки, що відповідають оптимальному співвідношенню цінних паперів різних типів у структурі інвестиційного портфеля визначаються таким чином:

$$\mathbf{X}^* = (0{,}265625 \quad 0{,}46875 \quad 0{,}265625).$$

При цьому ризик буде найменшим:

$$\min Z(\mathbf{X}) = Z(\mathbf{X}^*) = 0{,}037422 .$$

Загальний прибуток за цим планом дорівнює 4 %.

Також на окремих аркушах тієї ж робочої книги MS Excel були виведені звіти **Устойчивость** (рис. 13.4) і **Результаты** (рис. 13.5).

Ячейки переменных			
Ячейка	Имя	Окончат. значение	Нормир. градиент
$C$4	Цінні папери 1-го типу, X1	0,2656	0,0000
$D$4	Цінні папери 2-го типу, X2	0,4688	0,0000
$E$4	Цінні папери 3-го типу, X3	0,2656	0,0000
Ограничения			
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Лагранжа Множитель**
$F$4	Інвестиції, частка від загальної суми. Усього	1,00	0,06
$F$6	Очікуваний питомий прибуток. Усього	0,04	0,25

Рис. 13.4. **Звіт "Устойчивость"**

Целевая ячейка (Мінімум)					
Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
$B$11		0,037422	0,037422		
Изменяемые комірки					
Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
$C$4	Цінні папери 1-го типу, X1	0,2656	0,2656		
$D$4	Цінні папери 2-го типу, X2	0,4688	0,4688		
$E$4	Цінні папери 3-го типу, X3	0,2656	0,2656		
Ограничения					
Ячейка	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
$F$4	Інвестиції, частка від загальної суми. Усього	1,00	$F$4=$H$4	не связан.	0
$F$6	Очікуваний питомий прибуток. Усього	0,04	$F$6>=$H$6	связанное	0,00
$C$4	Цінні папери 1-го типу, X1	0,2656	$C$4<=$C$5	не связан.	0,484375
$D$4	Цінні папери 2-го типу, X2	0,4688	$D$4<=$D$5	не связан.	0,13125
$E$4	Цінні папери 3-го типу, X3	0,2656	$E$4<=$E$5	не связан.	0,234375

Рис. 13.5. **Звіт "Результаты"**

Множники Лагранжа у звіті **Устойчивость** визначають миттєві швидкості зміни оптимального значення цільової функції за умов, що відбуваються зміни значення правої частини однієї із умов обмежень. У моделях нелінійного програмування множникам Лагранжа можна надати інтерпретацію, яка подібна тіньовим цінам у задачах лінійного програмування. Наприклад, значення множника Лагранжа у звіті **Устойчивость** (табл. 13.1) показує, що збільшення очікуваного прибутку на 1 % (тобто, збільшити значення у комірці **H6** на величину 0,01) приведе до збільшення міри ризику (дисперсія прибутку) приблизно на 25 %.

Вихідні дані для кожного варіанта подано в табл. 13.1.

Таблиця 13.1

Вихідні умови задачі

№ варіанта	a	b	c	d	m, %
1	400 000	200 000	600 000	100 000	85
2	300 000	300 000	400 000	200 000	75
3	200 000	400 000	500 000	200 000	45
4	100 000	100 000	600 000	300 000	60
5	400 000	100 000	400 000	100 000	55
6	300 000	400 000	500 000	200 000	65
7	200 000	300 000	600 000	200 000	60
8	100 000	200 000	400 000	100 000	45
9	400 000	300 000	500 000	300 000	55
10	300 000	200 000	600 000	150 000	75
11	200 000	100 000	400 000	250 000	60
12	100 000	400 000	500 000	100 000	75
13	400 000	400 000	600 000	150 000	60
14	300 000	100 000	400 000	200 000	65
15	200 000	200 000	500 000	300 000	55
16	100 000	300 000	600 000	100 000	70

Значенням **нормированного градиента** у звіті **Устойчивость** для моделей нелінійного програмування можна надати таку ж саму інтерпретацію, як і значенням **нормированной стоимости** для задач лінійного програмування. Від'ємний **нормированный градиент** для даної змінної вказує на те, що збільшення її значення призведе до зменшення оптимального значення цільової функції, а додатний **нормированный градиент** – до збільшення оптимального значення цільової функції.

Якщо значення керованої змінної, яке вона має за оптимальним планом, знаходиться між його верхньою і нижньою межами, то **нормированный градиент** у цій точці (точці оптимуму) повинен дорівнювати нулю.

Таким чином за результатами розв'язання задачі про оптимізацію структури інвестиційного портфеля ми отримали оптимальний план, елементами якого є частки від загальної суми інвестицій, у яких доцільно буде придбати цінні папери кожного типу. Нагадаємо, що загальна сума інвестицій складає 16 млн грн. Тепер визначимо склад оптимального інвестиційного портфеля цінних паперів у кількісному відношенні. Так, у цінні папери першого типу доцільно вкласти $16 \cdot 0{,}2656 = 4{,}25$ млн грн, другого – $16 \cdot 0{,}4688 = 7{,}5$ млн грн, третього – $16 \cdot 0{,}2656 = 4{,}25$ млн грн. За таким розподілом коштів середня дисперсія прибутку у грошовому виразі становитиме $16 \cdot 0{,}03742 = 9{,}58$ млн грн в кв. (нагадаємо, що дисперсія вимірюється у квадратних одиницях).

Таке ж саме значення цільової функції отримаємо, якщо у формулу, за якою вона обчислюється, підставити знайдені значення обсягів інвестицій за кожним видом цінних паперів. Відповідно, ризик за таким розподілом коштів, які передбачається вкласти в якості інвестицій, буде найменшим. Прибуток від інвестицій за оптимальним планом складає 4 % від інвестицій, тобто $16 \cdot 0{,}04 = 0{,}64$ млн грн, при цьому середнє квадратичне відхилення (яке знаходимо як корінь квадратний з дисперсії) дорівнює 3,1 млн грн.

Слід зазначити, що за допомогою надбудови **Поиск решения** можна оптимізувати структуру інвестиційного портфеля за критерієм максимального прибутку. У такій задачі обмеження ризику (дисперсія досліджуваної величини, яка не повинна перевищувати певного рівня) буде вже просто однією з умов основної системи обмежень. Ця задача також є задачею нелінійного програмування, але це не задача квадратичного програмування, оскільки цільова функція цієї задачі є лінійною, а нелінійною є функція, яку містить одна із умов основної системи обмежень.

13.3. Завдання для самостійної роботи

Рада директорів банку прийняла рішення сформувати план надання кредитів корпоративного і індивідуального банкінгів для своїх клієнтів. Для зменшення власних витрат на надання кредитів необхідно визначити оптимальний обсяг грошей, які можна надати за тим чи іншим видам банкінгу.

Попередній аналіз статистичних даних дозволяє припустити, що функція $Z(\mathbf{X})$, яка описує витрати на сплату кредитів залежно від розміру тих кредитів, що видаються корпоративним клієнтам (x_1, грн) і клієнтам індивідуального банкінгу (x_2, грн), має такий вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = (a \cdot x_1 - b)^2 + (x_2 - c)^2 + d \cdot x_1 \cdot x_2,$$

де $a,\ b,\ c,\ d$ – деякі коефіцієнти, значення яких відомі.

Видача грошових коштів корпоративним і індивідуальним клієнтам обмежена, що пов'язано з обмеженістю власних коштів банку, і загальна сума кредитів не повинна перевищувати 14 млн. грн. Крім того, відповідно з політикою банку частина коштів, яка виділяється для кредитування корпоративних клієнтів, повинна складати не менше, ніж m відсотків від загальної суми.

Визначити кількість кредитних коштів, які можна видавати клієнтам з найменшими витратами, тобто, загальні витрати банку за кредитами будуть найменшими.

13.4. Контрольні запитання

1. Які задачі належать до задач квадратичного програмування?

2. Що є критерієм ефективності в задачі про оптимальну структуру інвестиційного портфеля як задачі квадратичного програмування?

3. У якому випадку задача про оптимальну структуру інвестиційного портфеля не є задачею квадратичного програмування?

4. Які методи розв'язання задач квадратичного програмування ви знаєте? У чому полягає особливість їх застосування?

5. У чому полягає особливість застосування надбудови **Поиск решения** MS Excel під час розв'язання задачі квадратичного програмування порівняно із задачами лінійного програмування?

6. Що визначає градієнт цільової функції?

7. Який економічний зміст мають множники Лагранжа, що виводяться у звіті **Устойчивость**?

Тема 14. Теорія ігор. Основні методи їх розв'язання і аналізу

14.1. Теоретичні відомості

У практичній діяльності часто виникає необхідність в узгодженні дій кількох сторін, які мають розбіжності в інтересах. У таких ситуаціях кращу стратегію поведінки всіх учасників, які зобов'язані узгоджувати свої дії незважаючи на протилежність інтересів, може запропонувати теорія ігор. ***Гра*** у даному випадку – це математична модель конфліктної ситуації, у якій кожна із сторін (***гравець***) дотримується певних правил, тобто дотримується обраної ***стратегії***. Прикладом застосування парної матричної гри у процесі розв'язання реальних економічних задач є вибір оптимальних маркетингових стратегій двох конкуруючих фірм.

Нехай є дві фірми A і B, які виробляють ті ж самі товари. Кожна з фірм прагне збільшити свою частку ринку. При цьому передбачається, що інших конкурентів ці фірми не мають. Виграш фірми A визначається тим, наскільки її прибуток буде більшим за прибуток фірми B. Кожна з фірм має різні маркетингові стратегії просування свого товару на ринок. Прибуток від реалізації товару під час реалізації кожної із стратегій ("виграш") утворює ***платіжну матрицю*** $\Pi = (\pi_{ij})_{m\times n}$, кожний елемент якої π_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ розглядається як виграш фірми A у процесі реалізації її i-ї стратегії за умови, що фірма B дотримується своєї j-ї стратегії. Оскільки гра є ***парною***, тобто у цій грі приймають участь два гравця, то елемент платіжної матриці π_{ij} є одночасно і програшем фірми B. Така гра називається ***грою з нульовою сумою***.

Під час розв'язання матричної гри передбачається, що тип стратегії, якого дотримується кожна з фірм, є ***стратегію обережного спостерігача***. Кожна з фірм реалізує її відповідно зі своєю роллю у матричній грі. Так, фірма A аналізує свої стратегії і обирає ту з них, яка забезпечує їй найбільший гарантований виграш α:

$$\alpha = \max_i \min_j \{\pi_{ij}\} = \max_i \pi_i . \qquad (14.1)$$

Величина α називається ***нижньою ціною*** парної матричної гри, а стратегія гравця A називається ***максиминною***.

Фірма B прагне мінімізувати свій програш і, згідно зі стратегією обережного спостерігача, вона аналізує свої стратегії і обирає ту з них, якій відповідає найменший з можливих програшів β:

$$\beta = \min_j \max_i \left\{\pi_{ij}\right\} = \min_j \pi_j . \tag{14.2}$$

Величина β є ***верхньою ціною гри***, а стратегія гравця B називається ***мінімаксною***.

Якщо $\alpha \neq \beta$, то гра має розв'язок у ***мішаних стратегіях***. Відповідно, ***ціна гри*** ν, тобто виграш, який отримує фірма A і платить фірма B, задовольняє умові: $\alpha < \nu < \beta$. В окремому випадку можливо, що $\alpha = \beta$. Це означає, що гра має ***сідлову точку***, і її розв'язок передбачає дотримання ***чистих стратегій***, при цьому $\alpha = \beta = \nu$.

На базі платіжної матриці можна скласти пару спряжених задач. Якщо гру розглядати с позиції гравця A, то така задача вважається вихідною, її цільова функція (виграш гравця A) досліджується на максимум. Задача з позиції гравця B вважається двоїстою, її цільова функція (програш гравця B) досліджується на мінімум.

Нехай деяка мішана стратегія гравця A характеризується ймовірностями, з якими гравець приймає чисті стратегії, що входять до складу мішаної. Запишемо це у вигляді матриці-стовпця $\mathbf{P} = \left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right)^T$, де $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$. Відповідно з максимінною стратегією ціна гри визначається як максимальний виграш з тих мінімальних виграшів, які може отримати гравець A за кожною зі своїх стратегій. Звідси отримуємо систему нерівностей, кожна з яких відповідає певній мішаній стратегії гравця A:

$$\begin{cases} \pi_{11} p_1 + \pi_{21} p_2 + \ldots + \pi_{m1} p_m \geq \nu; \\ \pi_{12} p_1 + \pi_{22} p_2 + \ldots + \pi_{m2} p_m \geq \nu; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_{1n} p_1 + \pi_{2n} p_2 + \ldots + \pi_{mn} p_m \geq \nu. \end{cases} \tag{14.3}$$

Зверніть увагу, що коефіцієнти системи нерівностей утворюють матрицю, яка є транспонованою відносно платіжної матриці.

Якщо перейти до нових змінних $p_i/\nu = x_i \ (i=\overline{1,m})$, то отримаємо таку систему нерівностей допоміжної задачі:

$$\begin{cases} \pi_{11}x_1 + \pi_{21}x_2 + ... + \pi_{m1}x_m \geq 1; \\ \pi_{12}x_1 + \pi_{22}x_2 + ... + \pi_{m2}x_m \geq 1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \pi_{1n}x_1 + \pi_{2n}x_2 + ... + \pi_{mn}x_m \geq 1. \end{cases} \tag{14.4}$$

Оскільки всі змінні і вихідної, і допоміжної задач є невід'ємними, то існує обмеження на знак:

$$x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,m}. \tag{14.5}$$

Відносно нових змінних маємо співвідношення: $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1/\nu$, отже, цільова функція допоміжної задачі досліджується на мінімум:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} x_i \quad \to \quad \min. \tag{14.6}$$

Відносно допоміжних змінних, які записуємо як компоненти матриці $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, співвідношення (14.4) – (14.6) утворюють математичну модель задачі лінійного програмування, яка записана в стандартній формі. За розв'язком $\mathbf{X}^*$ допоміжної задачі знаходимо оптимальний план вихідної задачі, тобто матрицю ймовірностей $\mathbf{P}^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$, з якими гравець A дотримується своїх стратегій, а також ціну гри $\nu(\mathbf{P}^*)$. Для цього розв'язуємо систему із m рівнянь відносно елементів матриці $\mathbf{X}^*$ і ще одного рівняння – умови нормування, оскільки сума ймовірностей ***активних стратегій*** повинна дорівнювати одиниці.

Розв'язком двоїстої задачі є оптимальна стратегія гравця B, тобто матриця ймовірностей $\mathbf{Q}^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$, кожний елемент якої відповідає ймовірності, з якою гравець B дотримується кожної j-ї стратегії ($j = \overline{1,n}$) із своїх можливих стратегій. За теоремою двоїстості отримуємо рівняння відносно цільових функцій спряжених задач: $\nu(\mathbf{P}^*) = \nu(\mathbf{Q}^*)$.

14.2. Приклад розв'язання задачі про вибір оптимальної стратегії в матричній грі "Покупець – продавець"

Задана платіжна матриця Π, елементи якої визначають виграш продавця (гравець A) під час реалізації однієї з його можливих стратегій за умови, що покупець (гравець B) дотримується однієї із своїх можливих стратегій:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 12 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ймовірності, за якими покупець A і продавець B дотримуються своїх стратегій (оптимальні плани обох гравців) для досягнення оптимальної вартості покупки, а також вартість покупки (ціну гри) за допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel.

Побудуємо математичну модель задачі, розглядаючи її з позиції гравця A (пряма задача). Оскільки платіжна матриця має розмір 5×3, то гравець A має п'ять стратегій, яким поставимо у відповідність матрицю-стовпець ймовірностей $\mathbf{P} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$. Це змінні прямої задачі. Гравець B (двоїста задача) має три стратегії, які описуються матрицею-стовпцем ймовірностей $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3)^T$.

Для прямої задачі система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} 5p_1 + 7p_2 + 6p_3 + 9p_4 + 8p_5 \geq \nu; \\ 6p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 12p_4 + 7p_5 \geq \nu; \\ 2p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 + 6p_5 \geq \nu; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1; \\ 0 \leq p_i \leq 1; \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Введемо нові змінні $x_i = {p_i}/{\nu}$ $(i = \overline{1,5})$ і за їхньою допомогою запишемо систему обмежень допоміжної задачі, яка є задачею лінійного програмування:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \geq 1; \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 7x_5 \geq 1; \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \geq 1; \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Цільова функція цієї задачі має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \to \quad \min .$$

Застосування надбудови **Поиск решения** дозволяє проводити оптимізацію стратегій обох гравців одночасно. Для знаходження розв'язку цієї задачі застосуємо такий алгоритм.

1. На робочому аркуші книги MS Excel побудуємо таблицю вихідних даних, дотримуючись математичної моделі допоміжної задачі лінійного програмування (табл. 14.1).

Таблиця 14.1

Таблиця вихідних даних допоміжної задачі про вибір оптимальної стратегії

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Допоміжна задача (ЗЛП)**								
2	Стратегії гравця A	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	**Усього**		
3	Керовані змінні	1	1	1	1	1	–	–	–
4	Коефіцієнти цільової функції	1	1	1	1	1	5	–	–
5	Стратегії гравця B:						**Обмеження**		
6	1-й	5	7	6	9	8	35	≥	1
7	2-й	6	3	4	12	7	32	≥	1
8	3-й	2	7	5	4	6	24	≥	1
9	**Пряма задача**	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	–	–

2. Керованим змінним допоміжної задачі відповідає блок комірок **B3:F3**. Ці комірки містять вихідні значення змінних, які зручно прийняти рівними одиниці. У комірках **B4:F4** записуємо значення коефіцієнтів цільової функції. Усі вони дорівнюють одиниці.

3. У комірку **G4** вводимо значення цільової функції допоміжної задачі як суму добутків змінних цієї задачі (комірки **B3:F3**) на значення коефіцієнтів цільової функції (комірки **B4:F4**). Для цього у комірку **G4** вводимо формулу: **=СУММПРОИЗВ (B3:F3; B4:F4)**.

4. Блок комірок **B6:F8** містить елементи транспонованої платіжної матриці Π^{T}.

5. Значення комірок **G6:G8** (ліва частина основної системи обмежень) обчислюється як добуток транспонованої матриці Π^{T} на матрицю керованих змінних. Для цього у комірку **G6** записуємо таку формулу: **=СУММПРОИЗВ ($B$3:$F$3; B6:F6)**. Зверніть увагу, що посилання на комірки **$B$3:$F$3** є абсолютним, тому цю формулу можна розтягнути на комірки **G7** та **G8**.

6. У комірках **I6:I8** містяться значення правої части основної системи обмежень.

7. До таблиці даних допоміжної задачі додамо **9**-ий рядок, де будемо вводити компоненти оптимального плану прямої задачі. Значення комірок **B9:F9 з**находимо із співвідношення:

$$\mathbf{P}^* = \frac{1}{Z(\mathbf{X}^*)}\,\mathbf{X}^*.$$

Так, для обчислення значення комірки **B9** у неї вводимо формулу: **=B3/$G$4**. Оскільки посилання на комірку, що містить значення цільової функції допоміжної задачі, є абсолютним, то розтягуємо цю формулу на решту комірок.

8. Значення цільової функції вихідної задачі вводимо у комірку **G9**, обчислюючи його за формулою: **=1/G4**, що відповідає співвідношенню $v(\mathbf{P}^*) = 1/Z(\mathbf{X}^*)$.

9. Оптимальний план допоміжної задачі знаходимо за допомогою надбудови **Поиск решения**. Для цього викликаємо діалогове вікно надбудови, набравши послідовність команд **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения**, і заповнюємо його поля відповідно з даними математичної моделі допоміжної задачі. Оскільки математична модель є лінійною, то у полі **Выберите метод решения** вказуємо **Поиск решения линейных задач симплекс-методом** (рис. 14.1).

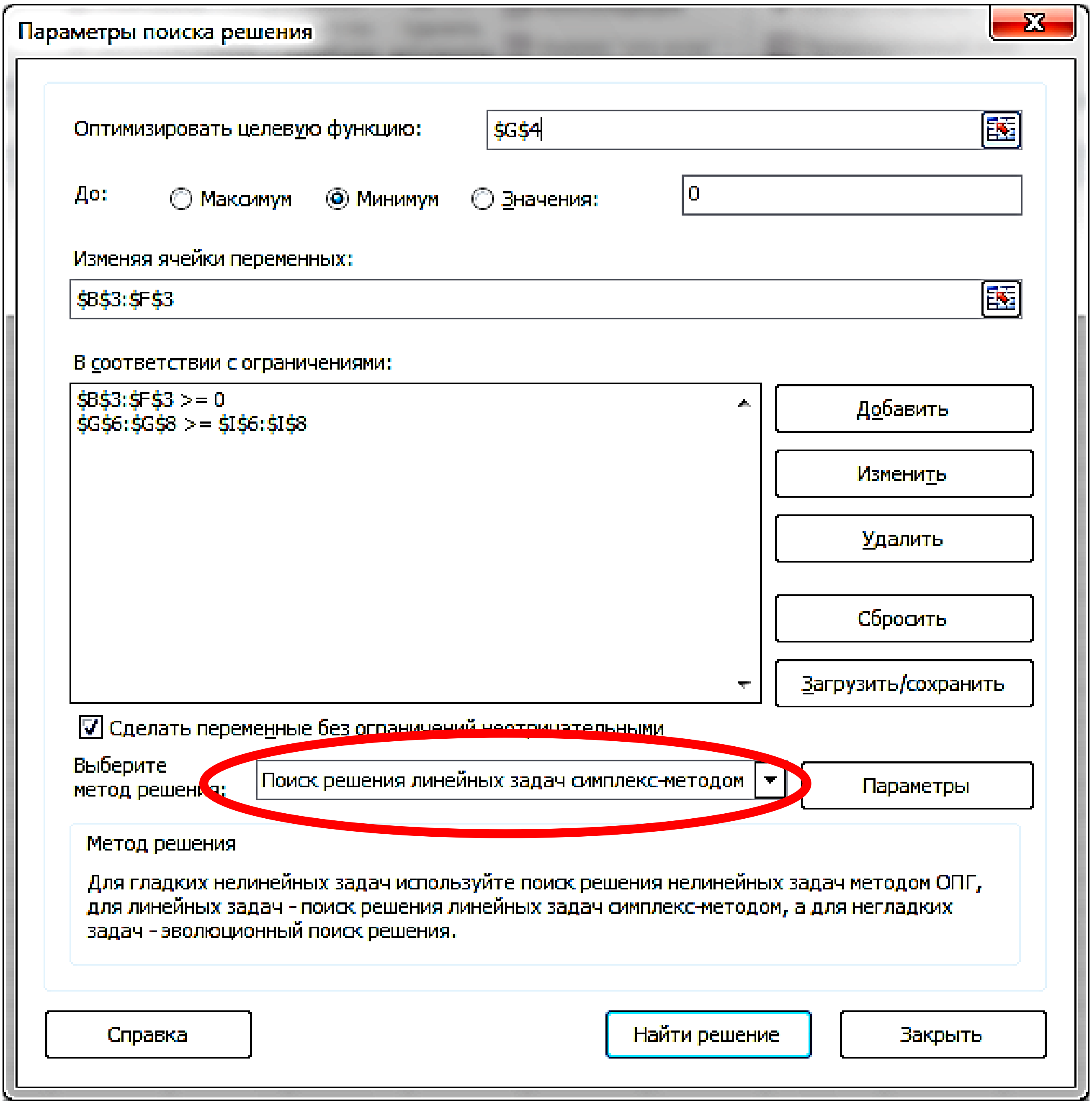


Рис. 14.1. **Діалогове вікно надбудови "Поиск решения" із заповненими полями**

10. Натискаємо кнопку **Найти решение**. У діалоговому вікні **Результаты поиска решения**, яке містить повідомлення: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**, встановлюємо перемикач у положення **Сохранить найденное решение** і в полі **Тип отчета** вибираємо звіт **Устойчивость**. Натискаємо **ОК**, і на екрані виводиться таблиця результатів (табл. 14.2), а на окремому аркуші – звіт про стійкість (рис. 14.2).

Таблиця 14.2

Таблиця результатів розв'язання допоміжної задачі

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Допоміжна задача (ЗЛП)**								
2	Стратегії гравця A	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	**Усього**	–	–
3	Керовані змінні	0	0,0323	0	0	0,1290	–	–	–
4	Коефіцієнти цільової функції	1	1	1	1	1	0,1613	–	–
5	Стратегії гравця B:						**Обмеження**		
6	1-й	5	7	6	9	8	1,2581	≥	1
7	2-й	6	3	4	12	7	1	≥	1
8	3-й	2	7	5	4	6	1	≥	1
9	**Пряма задача**	0	0,2	0	0	0,8	6,2	–	–

У **9**-му рядку табл. 14.2 отримуємо оптимальну стратегію покупця (гравця A), яку надамо у вигляді матриці $\mathbf{P}^* = (0;\ 0{,}2;\ 0;\ 0;\ 0{,}8)^T$, і відповідне їй значення цільової функції $\nu(\mathbf{P}^*) = 6{,}2$ у.о. Отже, гравець A застосовує дві активні стратегії. З імовірністю $p_2^* = 0{,}2$ він дотримується другої стратегії, а з імовірністю $p_5^* = 0{,}8$ – п'ятої. Решту стратегій він не використовує (відповідні їм імовірності дорівнюють нулю). При цьому його прибуток буде найбільшим і дорівнюватиме 6,2 у.о.

Ограничения						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Теневая цена**	**Правая часть**	**Допустимое увеличение**	**Допустимое уменьшение**
$G$5	Усього	1,25807	0	1	0,25807	1E+30
$G$6	Усього	1	0,03226	1	0,16667	0,571429
$G$7	Усього	1	0,12903	1	1,33333	0,142857

Рис. 14.2. **Звіт "Устойчивость"**

За звітом про стійкість розв'язку, а саме, з його частини **Ограничения**, знаходимо оптимальний план покупця (гравця B). Стовпчик тіньових цін містить розв'язок задачі, двоїстої до допоміжної. Звідси отримуємо $\mathbf{Y}^* = (0;\ 0{,}03226;\ 0{,}12903)$, що є її оптимальним планом.

Обчислюємо елементи матриці оптимальних стратегій гравця B за формулою: $\mathbf{G}^* = \frac{1}{F(\mathbf{Y}^*)}\mathbf{Y}^*$. Отримуємо: $\mathbf{G}^* = (0;\ 0{,}2;\ 0{,}8)^T$, тобто гравець B має дві активні стратегії. Першу стратегію він не застосовує, а з імовірністю $q_2^* = 0{,}2$ дотримується своєї другої стратегії і з імовірністю $q_3^* = 0{,}8$ – третьої. За теоремою двоїстості значення цільових функцій спряжених задач співпадають, отже, якщо покупець буде дотримуватись оптимального плану, то його витрати будуть найменшими і становитимуть 6,2 у.о.

14.3. Завдання для самостійної роботи

Під час реалізації продукції виробник має можливість дотримуватись декількох стратегій. Так, він може постачати продукцію дрібним оптом у декілька магазинів, може продати посереднику, відправити на реалізацію в інше місто, відкрити власний спеціалізований магазин. Покупець, якому потрібна ця продукція, теж може дотримуватись декількох стратегій. Рівень прибутку, який отримає виробник, залежить від того, якої стратегії буде дотримуватись він сам і яку стратегію обере покупець.

Необхідно визначити оптимальні стратегії продавця і покупця як розв'язок матричної гри, що задана платіжною матрицею (табл. 14.3), а також ціну гри.

Дати економічну трактовку отриманих результатів.

Таблиця 14.3

Вихідні дані задачі

№ варіанта	Платіжна матриця	№ варіанта	Платіжна матриця
1	2	1	2
1	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 11 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	2	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 9 & 3 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 5 \\ 11 & 7 & 9 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 5 & 9 & 6 \\ 12 & 2 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

1	2	1	2
3	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 6 & 9 & 3 \\ 7 & 10 & 8 & 6 & 5 \\ 4 & 10 & 9 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 12 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	4	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 14 & 5 \\ 4 & 6 & 9 & 11 & 3 \\ 5 & 8 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$
5	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 12 & 7 \\ 6 & 12 & 5 & 7 & 8 \\ 11 & 7 & 9 & 10 & 7 \\ 3 & 14 & 5 & 9 & 4 \\ 12 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	6	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 9 & 3 \\ 10 & 8 & 10 & 6 & 9 \\ 8 & 15 & 9 & 10 & 7 \\ 6 & 12 & 5 & 13 & 8 \\ 12 & 9 & 11 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
7	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 7 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 9 & 14 & 5 \\ 12 & 6 & 8 & 11 & 8 \\ 8 & 11 & 5 & 10 & 6 \\ 6 & 10 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$	8	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 9 & 6 \\ 11 & 6 & 8 & 14 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 5 & 8 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$
9	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 6 & 9 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 8 & 10 \\ 9 & 6 & 9 & 7 & 13 \\ 12 & 8 & 5 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$	10	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 9 & 8 \\ 6 & 8 & 11 & 6 & 5 \\ 11 & 7 & 9 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 9 & 6 \\ 12 & 4 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
11	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 & 9 & 6 \\ 13 & 4 & 8 & 8 & 5 \\ 9 & 6 & 11 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	12	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 13 & 9 & 6 \\ 11 & 4 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 12 & 8 & 9 \\ 10 & 8 & 5 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Закінчення табл. 14.3

1	2	1	2
13	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 10 & 5 \\ 11 & 6 & 9 & 11 & 9 \\ 5 & 8 & 7 & 12 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$	14	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 6 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 11 & 6 & 7 \\ 7 & 12 & 9 & 10 & 5 \\ 6 & 11 & 5 & 13 & 8 \\ 5 & 9 & 13 & 7 & 4 \end{pmatrix}$
15	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 10 & 5 \\ 4 & 6 & 9 & 5 & 7 \\ 12 & 8 & 5 & 14 & 6 \\ 11 & 9 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$	16	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 & 7 & 6 \\ 12 & 8 & 10 & 6 & 9 \\ 8 & 15 & 9 & 10 & 8 \\ 10 & 8 & 12 & 13 & 4 \\ 14 & 7 & 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$

14.4. Контрольні запитання

1. Які існують типи ігор?

2. Що таке матрична гра? Поясніть її економічний зміст.

3. До якого класу задач математичного програмування належать задачі, які базуються на матричної грі?

4. Яка гра називається грою з нульовою сумою?

5. Що таке платіжна матриця? Який зміст мають її елементи?

6. Скільки учасників може мати матрична гра?

7. За яким принципом здійснюється вибір оптимальних стратегій учасниками матричної гри?

8. Сформулюйте теорему Неймана щодо розв'язку матричної гри.

9. Як визначити верхню і нижню ціни матричної гри? Поясніть їх економічний зміст

10. У чому полягає принцип графічного розв'язання матричної гри? Які умови застосування графічного методу?

11. Як перетворити математичну модель матричної гри у модель задачі лінійного програмування?

Тема 15. Аналіз і управління ризиком, що базуються на концепції теорії ігор

15.1. Теоретичні відомості

Прийняттю зважених управлінських рішень завжди передує всебічний аналіз можливих альтернатив відповідно з прийнятим критерієм ефективності, що дозволяє обрати оптимальне рішення із множини можливих. Якщо інформація про можливі альтернативи є достатньо повною і метод визначення оптимального розв'язку відомий, то такі задачі називаються ***детермінованими***. Математична модель такої задачі описується поведінкою системи в умовах визначеності. До таких задач, наприклад, належать задачі лінійного програмування.

Якщо перелік можливих альтернатив є повним і критерій, за яким здійснюється оцінювання ефективності цих альтернатив є відомим, однак реалізація будь-якої з переліку альтернатив може мати місце або ні з імовірністю, що заздалегідь відома, то існує ***стохастична невизначеність***. Такі умови, коли відомі всі можливі альтернативи, а також імовірності їх реалізації (закон розподілу імовірностей для кожної з альтернатив), визначаються як ***умови ризику***. Це клас задач, що розглядається у межах стохастичного програмування.

Однак більшість реальних економічних задач не містить повної інформації щодо можливих альтернатив і/або імовірностей, з якими реалізуються ці альтернативи. У цьому випадку умови, для яких необхідно приймати рішення, характеризуються як ***умови невизначеності***. Основним принципом розв'язання таких задач є перехід від умов невизначеності до умов ризику або до умов визначеності.

Одним із прикладів задач, пов'язаних з прийняттям рішення в умовах невизначеності, є ***гра с природою***. Відмітною особливістю гри з природою є те, що в такій матричній грі усвідомлено вибирає стратегії лише один із гравців, за звичай, це гравець A, при цьому гравець B (природа) не має конкретної мети, тому вибирає свої стратегії випадково, навмання. У загальному випадку термін "природа" характеризує деяку об'єктивну дійсність, яку не слід розуміти буквально.

У грі з природою платіжна матриця може представляти собою матрицю виграшів, як і у парній грі, де кожний із гравців усвідомлено вибирає свої стратегії: $\Pi = (\pi_{ij})_{m\times n}$. Кожному елементу π_{ij} цієї матриці відповідає виграш гравця A у тому випадку, коли він вибирає свою i-у стратегію ($i = \overline{1,m}$), і при цьому гравець B (природа) випадковим чином приймає свою j-у стратегію ($j = \overline{1,n}$). Однак у більшості задач в якості основної інформаційної бази для прийняття управлінських рішень в умовах невизначеності розглядається ***матриця ризиків***: $\mathrm{R} = (r_{ij})_{m\times n}$. Кожний елемент r_{ij} цієї матриці визначається як різниця між максимальним для j-ї стратегії (станом зовнішнього середовища) виграшем і тим виграшем, який гравець A отримає у тому випадку, коли реалізує свою i-у стратегію. Відповідно, $r_{ij} = \beta_i - \pi_{ij}$, де $\beta_i = \max_i (\pi_{ij})$.

Залежно від конкретної постановки задачі і її вихідних умов можливе використання кількох типів критеріїв ефективності у процесі розв'язання матричної гри з природою. Розглянемо найбільш поширені з них, а також особливості їх застосування.

1. ***Критерій Байєсса*** застосовується у тому випадку, коли відомі всі можливі стани системи, що досліджується, тобто альтернативні стратегії природи, а також відомі імовірності, з якими ці стратегії можуть реалізовуватись. Тоді під час аналізу платіжної матриці $\Pi = (\pi_{ij})_{m\times n}$ свідомий гравець (гравець A) вибирає таку чисту стратегію, застосування якої дає йому найбільший середній виграш $\overline{a}$:

$$\overline{a} = \max_i (\overline{a_i}), \tag{15.1}$$

де $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} q_j$ – середній виграш гравця A, якщо він приймає свою i-у стратегію ($i = \overline{1,m}$);

$\mathbf{Q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ – матриця-рядок апріорних імовірностей, що характеризує можливі стани зовнішнього середовища (стратегії природи).

Якщо інформаційною базою для прийняття управлінського рішення є матриця ризиків $\mathrm{R} = (r_{ij})_{m\times n}$, то гравець A вибирає ту чисту стратегію, застосування якої забезпечує йому найменший середній ризик:

$$\bar{r} = \max_i \left(\bar{r}_i\right), \qquad (15.2)$$

де $\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$ – середній ризик гравця A за умов, що він застосовує свою i-у чисту стратегію ($i = \overline{1, m}$).

2. ***Критерій Лапласа*** застосовується у тому випадку, коли можна вважати, що всі припустимі стани зовнішнього середовища є рівними за ймовірністю. Оскільки під час виконання такої умови апріорні ймовірності кожного із можливих станів системи дорівнюють $1/n$, то для визначення середніх показників виграшу або ризику за кожною із стратегій гравця A можна застосувати співвідношення:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (15.3)$$

або

$$\bar{r}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (15.4)$$

І вже ці середні показники порівнюються для всіх можливих стратегій за співвідношеннями (15.1) і (15.2), відповідно.

3. ***Критерій Вальда*** за змістом є аналогічним критерію обережного спостерігача, який використовується для визначення розв'язку матричної гри двох гравців, які свідомо вибирають свої стратегії. Відповідно з цим критерієм гравець A вибирає ту зі своїх чистих стратегій, яка у найгірших умовах гарантує йому максимальний виграш:

$$\alpha = \max_i \min_j \left(\pi_{ij}\right) = \max_i \pi_i. \qquad (15.5)$$

4. ***Критерій Севіджа*** в якості інформаційної бази використовує матрицю ризиків. Його застосування дозволяє гарантувати, що у найгірших умовах гарантує гравцю A, що його програш буде мінімальним:

$$r = \min_i \max_j \left(r_{ij}\right) = \min_i r_i. \qquad (15.6)$$

5. ***Критерій Гурвіца***, або ***критерій виваженого песимізму-оптимізму*** дозволяє враховувати можливість не тільки найменш сприятливого із можливих станів зовнішнього середовища, але і найбільш сприятливого із її станів. Відповідно з цим критерієм оптимальною вважається така чиста стратегія, для якої виконується співвідношення:

$$\alpha = \max_i \left\{ \lambda \min_j \{a_{ij}\} + (1-\lambda) \max_j \{a_{ij}\} \right\} \qquad (15.7)$$

де $\lambda \in [0;1]$.

За $\lambda = 0$ ми отримуємо критерій ***максімакса*** (граничного оптимізму), за $\lambda = 1$ реалізується критерій Вальда. Значення λ вибирають, виходячи із попереднього аналізу станів зовнішнього середовища.

15.2. Приклад розв'язання задачі про вибір оптимального обсягу виробництва

Попередні дослідження ринку показали, що залежно від погоди попит на продукцію фірми у весняні місяці може коливатись у певних межах. Фірма отримала відомості про прогноз погоди на найближчий весняний місяць, де стан погоди визначається з певною ймовірністю. Прибуток фірми визначається співвідношенням обсягів виробленої і реалізованої продукції, а останній, у свою чергу, залежить від погодних умов. Ця залежність надана у вигляді матриці платоспроможного попиту (табл. 15.1).

Таблиця 15.1

Прибуток залежно від зовнішніх і внутрішніх факторів

Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови			
	S_1	S_2	S_3	S_4
500	35	35	35	35
750	50	180	180	180
1 000	-60	120	210	210
1 250	-120	80	180	320
Імовірність, q	0,1	0,2	0,5	0,2

Необхідно визначити оптимальний обсяг виробництва і дати економічну інтерпретацію отриманих результатів.

Оскільки вихідні дані задачі окрім платіжної матриці містять матрицю ймовірностей, з якими реалізуються ті чи інші погодні умови, то для знаходження оптимальної стратегії можна використовувати всі названі раніше критерії ефективності, застосовуючи їх як до платіжної матриці, так і до матриці ризиків. Скористуємося для розв'язання задачі можливостями MS Excel.

1. Оптимізація за критерієм Байєсса. Відповідно з умовами задачі на робочому аркуші MS Excel побудуємо таблицю (рис. 15.1), яка містить платіжну матрицю (блок комірок **B5:E8**) і ймовірності, з якими реалізуються певні погодні умови (блок комірок **B9:E9**).

F16 fx =СУММ(B16:E16)

	A	B	C	D	E	F
1		**Платіжна матриця**				
2						
3		Погодні умови				
4	Обсяг виробництва, тис. грн	S1	S2	S3	S4	
5	500	35	35	35	35	
6	750	50	180	180	180	
7	1 000	-60	120	210	210	
8	1 250	-120	80	180	320	
9	Найбільший виграш, тис. грн	50	180	210	320	
10						
11		**Матриця можливого прибутку**				
12						
13		Погодні умови				Середній
14	Обсяг виробництва, тис. грн	S1	S2	S3	S4	виграш
15	500	3,5	7	17,5	7	35
16	750	5	36	90	36	**167**
17	1 000	-6	24	105	42	165
18	1 250	-12	16	90	64	158
19						

Рис. 15.1. **Вибір оптимальної стратегії за критерієм Байєсса**

Для знаходження оптимальної стратегії, що забезпечить найбільший середній виграш, побудуємо допоміжну матрицю, елементами якої є доданки, з яких складається середній виграш (блок комірок **B15:E18**). Значення елементів цієї матриці отримуємо як добуток відповідного елемента платіжної матриці на імовірність певних погодних умов. Так, у комірку **B15** вводимо формулу: **=B5*$B$9**. Оскільки посилання на комірку, де записана ймовірність даного стану погоди, є абсолютною (для цього слід натиснути клавішу **F4**), то можна розтягнути цю формулу на комірки **B15:B18**. Аналогічно обчислюємо решту елементів матриці. Значення середнього виграшу у стовпці **F** знаходимо як суму елементів за рядком. Так, у комірку **F15** вводимо формулу **=СУММ (B15:E15)**. Найбільший середній виграш фірма отримає, якщо обсяг виробництва у грошовому виразі дорівнюватиме 750 тис. грн.

Застосуємо критерій Байєсса для визначення стратегії, що забезпечить найменший середній ризик. Для цього на тому ж робочому аркуші MS Excel побудуємо матрицю ризиків (рис. 15.2).

F26 =СУММ(B26:E26)

	A	B	C	D	E	F
1		**Платіжна матриця**				
2						
3	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				
4		S1	S2	S3	S4	
5	500	35	35	35	35	
6	750	50	180	180	180	
7	1 000	-60	120	210	210	
8	1 250	-120	80	180	320	
9	Найбільший виграш, тис. грн	50	180	210	320	
10						
11		**Матриця ризиків**				
12						
13	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				
14		S1	S2	S3	S4	
15	500	15	145	175	285	
16	750	0	0	30	140	
17	1 000	110	60	0	110	
18	1 250	170	100	30	0	
19	Імовірність, *q*	0,1	0,2	0,5	0,2	
20						
21		**Матриця можливих втрат**				
22						
23	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				Середні втрати
24		S1	S2	S3	S4	
25	500	1,5	29	87,5	57	175
26	750	0	0	15	28	**43**
27	1 000	11	12	0	22	45
28	1 250	17	20	15	0	52

Рис. 15.2. **Скриншот з розрахунками ризиків**

Доповнимо платіжну матрицю рядком, у якому запишемо найбільший виграш, який матиме місце за кожною з можливих погодних умов. Для цього, наприклад, у комірку **B9** введемо функцію **=МАКС (B5:B8)**, за допомогою якої виводимо найбільше із значень, що записані у вибраних комірках. Цю формулу розтягуємо на комірки **B9:E9**.

Для визначення елементів матриці ризику виділяємо блок комірок **B15:E18**. Значення кожної з комірок обчислюємо як різницю між максимальним значенням прибутку для випадку, коли мають місце погодні умови S_j ($j = \overline{1,4}$), і значенням прибутку, що записано у відповідній комірці платіжної матриці. Так, для комірки **B15** значення елемента матриці ризику обчислюється за формулою **=$B$9–B5**. Оскільки посилання на комірку, що містить значення максимального виграшу за погодних умов S_1, є абсолютною, то формулу можна розтягнути на блок комірок **B15:B18**. Аналогічно обчислюємо інші елементи матриці ризиків. До матриці ризиків дописуємо додатковий рядок, комірки **B19:E19** якого містять імовірність реалізації певних погодних умов.

Тепер обчислюємо середні втрати, які може понести фірма під час застосування кожної із своїх стратегій. У комірках **B25:E28** виводимо результати добутку елементів матриці ризиків на імовірність реалізації певних погодних умов аналогічно тому, як були визначені елементи матриці можливого прибутку. Наприклад, у комірку **B25** вводимо формулу **=B15*$B$19** і розтягуємо її на комірки **B25:B28**. Середні втрати визначаємо як суму за відповідним рядком. Так, для обчислення середніх втрат за обсягом виробництва 500 тис. грн, значення яких виведені у комірці **F25**, застосовується формула: **=СУММ (B25:E25)**. Як бачимо, найменші втрати відповідають тій стратегії, відповідно з якою фірма виробляє продукції на 750 тис. грн. Ця стратегія є оптимальною і за величиною середнього виграшу, і за величиною середнього ризику.

2. Оптимізація зі критерієм Лапласа. На новому робочому аркуші MS Excel побудуємо таблицю (рис. 15.3), що містить платіжну матрицю (блок комірок **B5:E8**). Оскільки всі погодні умови у разі застосування критерію Лапласа вважаються рівними за ймовірністю, то вводити додатковий рядок для виведення значень імовірності нема необхідності. Для обчислення середнього значення виграшу застосуємо вбудовану функцію **СРЗНАЧ (B5:E5)**. У комірку **F6** вводимо формулу: **=СРЗНАЧ (B6:E6)** і розтягуємо її на комірки **F5:F8**. Аналіз середнього виграшу свідчить, що оптимальною є стратегія, відповідно з якою фірма виробляє продукції на 750 тис. грн. Тобто ми отримали такий самий результат, що і у процесі застосування критерію Байєсса.

F6 =СРЗНАЧ(B6:E6)

	A	B	C	D	E	F
1		Платіжна матриця				
2						
3	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				Середній виграш
4		S1	S2	S3	S4	
5	500	35	35	35	35	35
6	750	50	180	180	180	**147,5**
7	1 000	-60	120	210	210	120
8	1 250	-120	80	180	320	115

Рис. 15.3. **Вибір оптимальної стратегії за критерієм Лапласа**

Для вибору стратегії, що забезпечує мінімальний ризик, порівняємо середні ризики фірми за різних погодних умов (рис. 15.4).

F7 =СРЗНАЧ(B7:E7)

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Матриця ризиків				
3						
4	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				Середній ризик
5		S1	S2	S3	S4	
6	500	15	145	175	285	155
7	750	0	0	30	140	**42,5**
8	1 000	110	60	0	110	70
9	1 250	170	100	30	0	75

Рис. 15.4. **Вибір оптимальної стратегії, якій відповідає найменший середній ризик**

За критерієм Лапласа отримуємо, що найменший середній ризик відповідає випуску продукції в обсязі 750 тис. грн.

3. Критерій Вальда. На новому робочому аркуші MS Excel побудуємо таблицю (рис. 15.5), що містить платіжну матрицю (комірки **B5:E8**).

F6 =МИН(B6:E6)

	A	B	C	D	E	F
1		Платіжна матриця				
2						
3	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				Найменший виграш
4		S1	S2	S3	S4	
5	500	35	35	35	35	35
6	750	50	180	180	180	**50**
7	1 000	-60	120	210	210	-60
8	1 250	-120	80	180	320	-120
9						

Рис. 15.5. **Вибір оптимальної стратегії за критеієм Вальда**

У кожному рядку матриці знайдемо мінімальне значення прибутку, застосовуючи функцію **МИН ()**. Так, для визначення мінімального виграшу у випадку, коли фірма дотримується першої стратегії, у комірку **F5** вводимо формулу: **=МИН (B5:E5)**. Потім розтягуємо цю формулу на блок комірок **F5:F8**. Аналіз значень найменшого виграшу показує, що найбільший гарантований мінімум забезпечує стратегія, відповідно з якою фірма виробляє продукції на 750 тис. грн. Саме вона і є оптимальною.

4. Критерій Севиджа. На новому робочому аркуші MS Excel побудуємо таблицю, яка містить матрицю ризиків (рис. 15.6).

F8 =МАКС(B8:E8)

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Матриця ризиків				
3						
4	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				Найменший ризик
5		S1	S2	S3	S4	
6	500	15	145	175	285	285
7	750	0	0	30	140	140
8	1 000	110	60	0	110	**110**
9	1 250	170	100	30	0	170
10						

Рис. 15.6. **Застосування критерію Вальда до аналізу матриці ризиків**

Доповнюємо цю таблицю стовпцем, куди будемо записувати максимальні втрати у процесі реалізації певної стратегії. Так, для визначення максимальних втрат у тому випадку, коли фірма дотримується першої стратегії, у комірку **F5** вводимо формулу **=МАКС (B5:E5)** і розтягуємо її на блок комірок **F5:F8**.

Аналіз отриманих значень свідчить, що найменш ризикованим є застосування стратегії, відповідно з якою фірма виробляє продукції на 1 000 тис. грн. Саме вона і є оптимальною. Цей результат відрізняється від усіх, які ми отримали за іншими критеріями.

5. Критерій Гурвіца. На новому робочому аркуші MS Excel побудуємо таблицю (рис. 15.7), що містить платіжну матрицю (блок комірок **B5:E8**), і доповнимо її трьома стовпцями. У двох з них виведемо найменший і найбільший виграші для кожної із стратегій фірми. Для цього скористаємося вже відомими функціями **МИН () і МАКС ()**. А у третьому додатковому стовпці обчислимо критерій Гурвіца.

H6 =0,5*(F6+G6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Платіжна матриця**						
2								
3	Обсяг виробництва, тис. грн	Погодні умови				Найменший виграш	Найбільший виграш	Критерій Гурвіца, λ=0,5
4		S1	S2	S3	S4			
5	500	35	35	35	35	35	35	35
6	750	50	180	180	180	50	180	**115**
7	1 000	-60	120	210	210	-60	210	75
8	1 250	-120	80	180	320	-120	320	100
9								

Рис. 15.7. **Застосування критерію Гурвица**

Під час обчислення критерію Гурвіца приймемо (без порушення спільності), що $\lambda = 0{,}5$. Відповідно, у комірку **H5** вводимо формулу **=0,5*(F5+G5)** і розтягуємо її на блок комірок **H5:H8**. Аналіз отриманих значень свідчить, що кращою за критерієм виваженого песимізму-оптимізму є стратегія, за якою фірма виробляє продукції на 750 тис. грн.

Таким чином, більшість критеріїв свідчить про те, що з усіх стратегій, що розглядаються, оптимальною є та, відповідно з якою фірма виробляє продукцію на 750 тис. грн.

15.3. Завдання для самостійної роботи

Підприємство може здійснювати виробництво трьох видів продукції. Відповідно до технологічного процесу передбачається, що обсяги цих видів продукції можуть співвідноситись як 1:1:1; 1:2:1; 2:3:1 або 4:1:1. Залежно від кон'юнктури ринку за однакових витрат на виробництво прибуток підприємства може коливатись у певних межах.

Рівень попиту на продукцію підприємства було умовно поділено на три категорії: низький, середній та підвищений. Результати статистичних досліджень дозволили представити залежність прибутку підприємства від номенклатури продукції і рівня попиту на неї у вигляді платіжної матриці. Крім того, були висловлені припущення відносно ймовірностей, з якими може мати місце певний рівень попиту. Ці дані наведені в табл. 15.2.

Необхідно визначити оптимальну стратегію щодо співвідношення обсягів випуску продукції певного виду, застосовуючи для цього різні критерії ефективності. Провести економічний аналіз результатів.

Таблиця 15.2

Вихідні умови задачі

№ варіанта	Платіжна матриця і ймовірності реалізації умов, що визначають попит	№ варіанта	Платіжна матриця і ймовірності реалізації умов, що визначають попит
1	2	1	2
1	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 5 & 40 & 75 \\ 10 & 35 & 60 \\ 15 & 35 & 55 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = (0{,}2 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$	2	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 70 \\ 15 & 40 & 65 \\ 25 & 35 & 45 \\ 20 & 35 & 50 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = (0{,}1 \quad 0{,}6 \quad 0{,}3)$
3	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 5 & 40 & 75 \\ 20 & 45 & 70 \\ 10 & 40 & 70 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = (0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}2)$	4	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 55 \\ 10 & 35 & 60 \\ 25 & 55 & 75 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = (0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}2)$

1	2	1	2
5	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 65 \\ 20 & 45 & 70 \\ 15 & 50 & 85 \\ 10 & 50 & 90 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4)$	6	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 18 & 44 & 70 \\ 30 & 45 & 60 \\ 25 & 50 & 65 \\ 20 & 45 & 70 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}4)$
7	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 12 & 36 & 60 \\ 10 & 35 & 60 \\ 20 & 35 & 50 \\ 35 & 45 & 55 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}3 \quad 0{,}4 \quad 0{,}3)$	8	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 50 \\ 10 & 45 & 70 \\ 20 & 35 & 50 \\ 15 & 45 & 75 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}4 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3)$
9	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 65 \\ 10 & 35 & 60 \\ 15 & 35 & 55 \\ 20 & 40 & 70 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}2)$	10	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 25 & 50 & 65 \\ 10 & 35 & 60 \\ 12 & 36 & 60 \\ 20 & 40 & 60 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}5)$
11	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 18 & 40 & 62 \\ 10 & 35 & 60 \\ 25 & 35 & 45 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}2 \quad 0{,}7 \quad 0{,}1)$	12	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 50 \\ 26 & 42 & 58 \\ 25 & 35 & 45 \\ 18 & 40 & 50 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}2 \quad 0{,}6 \quad 0{,}2)$
13	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 25 & 50 & 75 \\ 10 & 35 & 60 \\ 25 & 45 & 65 \\ 20 & 40 & 60 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}3 \quad 0{,}4 \quad 0{,}3)$	14	$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 70 \\ 22 & 36 & 60 \\ 25 & 45 & 65 \\ 20 & 50 & 80 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}5 \quad 0{,}4 \quad 0{,}1)$

Закінчення табл. 15.2

1	2	1	2
15	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 24 & 48 & 72 \\ 10 & 35 & 60 \\ 20 & 40 & 60 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}2 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$	16	$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 24 & 48 & 72 \\ 30 & 45 & 60 \\ 25 & 45 & 65 \\ 10 & 35 & 50 \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = (0{,}4 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3)$

15.4. Контрольні запитання

1. У чому полягають відмінності оптимізаційних задач в умовах ризику від детермінованих задач?

2. За допомогою яких величин можна охарактеризувати ризик у задачах оптимізації?

3. Що таке матрична гра з природою? Наведіть приклад такої задачі економічного змісту.

4. За допомогою яких характеристик описуються стратегії гравця "природа"?

5. Як можна охарактеризувати принцип, за яким гравець "природа" здійснює вибір своєї стратегії?

6. Як побудувати матрицю ризиків за відомою платіжною матрицею у грі з "природою"?

7. Чи існує єдине рішення у процесі вибору оптимальної стратегії свідомого гравця (гравця A) у грі з "природою"? Наведіть аргументи, що підтверджують вашу відповідь.

8. Охарактеризуйте критерій Байєсса і критерій Лагранжа як критерії ефективності під час вибору оптимальної стратегії у грі з "природою". Що спільного у цих критеріїв і у чому полягають їх відмінності?

9. Що таке критерій Вальда? Чи існують розбіжності між цим критерієм і мінімаксним критерієм, який застосовується для вибору оптимальної стратегії під час гри двох гравців, які свідомо здійснюють вибір своїх стратегій? Наведіть аргументи, що підтверджують вашу відповідь.

10. Охарактеризуйте критерій Гурвіца. У чому полягають його відмінності від критерію Вальда?

Тема 16. Динамічне програмування

16.1. Теоретичні відомості

Математичні моделі, які відповідають задачам лінійного програмування, зазвичай складаються на даний момент часу, тобто, обмежені якимсь одним часовим проміжком. Моделі, що розроблені для одного часового періоду, називаються ***статичними.*** Відповідно моделі, що охоплюють декілька часових періодів, називаються ***динамічними***.

Існують два підходи до розв'язання задач динамічного програмування. Згідно одному з них кожен період розглядається окремо як задача лінійного програмування зі своїм критерієм ефективності. У цьому випадку загальним критерієм ефективності вважається сума критеріїв ефективності всіх періодів, які узяті з певними ваговими коефіцієнтами, причому значення вагових коефіцієнти залежать від часу. Також необхідно синхронізувати події так, щоб вони розвивалися в потрібному напрямі. Цей підхід дозволяє істотно зменшити розмірність кожної з математичних моделей, які в сукупності визначають загальну задачу. Згідно з іншим підходом, задача динамічного програмування розглядається в цілому, а окремим проміжкам часу відповідають обмеження, яким повинні задовольняти змінні цільової функції. Істотним ускладненням цього підходу є експоненціальне зростання вимірності математичної моделі у процесі збільшення кількості періодів, на які ділиться термін планування. Нагадаємо, що для MS Excel існує ліміт на кількість стовпців (не більше 256) і на кількість змінних (200 змінних) під час застосування надбудови **Поиск решения.** Динамічні моделі управління запасами є достатньо поширеним класом економічних задач, що потребують побудови багатофазних моделей управління матеріальними ресурсами, фінансовими резервами, трудовими ресурсами і т. п.

Розглянемо приклад класичної детермінованої однопродуктової моделі управління ресурсами. Вона називається ***детермінованою***, оскільки передбачається, що на початку першого періоду планування відомий попит (потреби в даному виді ресурсу, які необхідно задовольнити) для всіх наступних періодів. Нехай для певних n майбутніх періодів відомо, яким саме буде попит на продукцію певного виду. Позначимо через d_t кількість цієї продукції, яку необхідно мати протягом t-го періоду ($t = \overline{1, n}$), щоб задовольнити попит у повному обсязі.

Отже, d_t – це відомий нам попит, тобто, об'єм продукції, яка реалізовуватиметься протягом t-го періоду. Передбачається, що повернення продукції неможливе, отже $d_t > 0$.

Для того, щоб задовольнити попит, протягом періоду необхідно виготовити продукцію в обсязі $\mathbf{X} = \left(x_t\right)_{1\times n}$, частина якого може накопичуватися у вигляді запасу. Витрати виробництва на одиницю продукції протягом певного тижня задані матрицею витрат $\mathbf{C} = \left(c_t\right)_{1\times n}$. Позначимо також через K_t максимальну кількість продукції, яку можна виготовити протягом t-го періоду.

Запас визначається як кількість продукції, яка переходить з t-го тижня на тиждень $t+1$. Позначимо через h_t питомі витрати на зберігання продукції протягом t-го періоду.

Припустимо, що початковий запас (запас перед початком періоду планування) складає I_0. Під час його зберігання плата не нараховується. Запас продукції, який отримуємо в кінці t-го періоду, складає I_t. Вважається, що запас продукції, що існує в кінці t-го періоду, є початковим запасом на початку тижня $t+1$, тобто під час зберігання продукція не псується.

Необхідно визначити оптимальний план виробництва $\mathbf{X}^* = \left(x_t^*\right)_{1\times n}$, за яким попит на продукцію кожного періоду задовольняється у повному обсязі, а загальні витрати за цим планом на виробництво і зберігання продукції протягом всього терміну реалізації цього плану будуть мінімальними.

Запаси продукції в кінці кожного періоду описуються балансовими рівняннями. Так, в кінці 1-го періоду матимемо запас:

$$I_1 = I_0 + x_1 - d_1.$$

Запишемо балансове рівняння щодо запасу продукції в кінці довільного періоду.

Відповідно запас, який утворився для кінця t-го періоду, можна визначити за рекурентним співвідношенням через запас попереднього $t-1$ періоду і кількість продукції, яка була виготовлена і реалізована протягом t-го періоду:

$$I_t = I_{t-1} + x_t - d_t, \tag{16.1}$$

де $t = \overline{1,n}$.

Якщо в це співвідношення підставити значення запасів попередніх періодів, які теж визначені за кількістю виготовленої і реалізованої продукції, то отримаємо формулу, за якою можна обчислити запас в кінці будь-якого періоду:

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^{t} x_i - \sum_{i=1}^{t} d_i\ .$$

Отже, змінна I_t $(t = \overline{1,n})$ визначається через керовані змінні x_t і параметри моделі, якими є величини I_0 і d_t.

Запишемо умову, яка передбачає, що в кожному періоді попит на продукцію задовольняється в повному обсязі. Для 1-го періоду маємо:

$$I_0 + x_1 \geq d_1.$$

Перепишемо це співвідношення у вигляді:

$$I_0 + x_1 - d_1 \geq 0.$$

Така форма запису означає, що запас в кінці 1-го періоду не повинен бути від'ємним. Тобто, вимога задоволення попиту за період t є еквівалентною до вимоги додатності запасу в кінці періоду t.

Отже, отримаємо математичну модель задачі управління запасами у такому вигляді.

Цільова функція досліджується на мінімум:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{t=1}^{n} c_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t I_t \quad \to \quad \min, \tag{16.2}$$

а керовані змінні повинні задовольняти основній системі обмежень:

$$\begin{cases} I_t = I_{t-1} + x_t - d_t; \quad t = \overline{1,n}; \\ x_t \leq K_t, \end{cases} \tag{16.3}$$

а також є обмеження на знак:

$$\begin{cases} x_t \geq 0; \\ I_t \geq 0. \end{cases} \quad (16.4)$$

Співвідношення (16.2) – (16.4) утворюють математичну модель задачі управління запасами, яка в такій постановці є задачею динамічного програмування.

Слід зазначити, що у процесі побудови математичної моделі задачі динамічного програмування необхідно визначити термін, для якого здійснюється планування (***термін планування***), а також обґрунтувати кількість періодів, на які слід розділяти цей термін. Визначення тривалості кожного з періодів, на які розподіляється термін планування, передбачає, що кожен з цих періодів повинен характеризуватися постійними значеннями всіх параметрів, які розглядаються в даній задачі. Звідси витікає, що чим більшою є кількість періодів, тим більш точно математична модель описує певний економічний процес. Проте із збільшенням кількості періодів зростає кількість змінних, які необхідно ввести в математичну модель для її побудови, отже, тим більшою стає розмірність цієї моделі і, відповідно, значно ускладнюється пошук її розв'язку. Зазвичай тривалість окремих періодів, на які розбивають загальний термін планування, обумовлена термінами постачання готової продукції і пов'язана з тривалістю технологічних процесів. У процесі вирішення виробничих завдань таким періодом, як правило, є квартал.

16.2. Приклад розв'язання задачі динамічного лінійного програмування

Підприємство, що виробляє потужні генератори, сформувало портфель замовлень на рік, розподіливши його за кварталами (табл. 16.1). Постачання матеріалів, які необхідні для виробництва продукції, здійснюється щоквартально, постачання готової продукції замовникам також здійснюється наприкінці відповідного кварталу. У зв'язку з неритмічністю роботи підприємства протягом року та коливанням цін на матеріали у табл. 16.1 також наведені виробничі потужності підприємства та питомі витрати на виробництво одного генератора протягом року.

Крім того, табл. 16.1 містить вартість зберігання одного генератора на складі підприємства протягом одного кварталу.

Таблиця 16.1

Дані щодо виробництва генераторів за кварталами

Показники	I-й квартал	II-й квартал	III-й квартал	IV-й квартал
Обсяг замовлення	58	36	34	59
Виробничі потужності	60	62	64	66
Питомі витрати, млн грн	28	27	27,8	29
Вартість зберігання 1 генератора, тис. грн	300	300	300	300

Під час побудови математичної моделі задачі динамічного програмування слід вибрати як період планування саме квартал, оскільки протягом цього терміну параметри моделі можна вважати сталими.

Вихідний запас на початок року становив 15 генераторів. Перехідний запас на період, наступний за плановим, повинен становити не менше ніж 7 генераторів. Вартість зберігання визначається для кількості генераторів, що обчислюється як середнє між залишками на початок та на кінець періоду, яким в даному випадку є квартал.

Складемо такий щоквартальний план виробництва генераторів протягом одного року, що забезпечує своєчасне виконання замовлення і при цьому загальні витрати на виробництво і зберігання генераторів протягом усього року, на який здійснюється планування, будуть найменшими.

Позначимо через $\mathbf{X} = (x_t)_{1\times 4}$ річний план виробництва, елементами якого є незалежні змінні x_t $(t = \overline{1,4})$, тобто кількість генераторів, що виробляється кожного кварталу. Введемо залежні змінні I_t, які відповідають запасам, що створюються наприкінці певного кварталу як надлишок по відношенню до замовлення. Згідно вихідним умовам про питомі витрати на виробництво генераторів c_t $(t = \overline{1,4})$ і їх зберігання h_t $(t = \overline{1,4})$, наведених в табл. 16.1, записуємо критерій ефективності, яким в даному випадку є загальні витрати підприємства протягом поточного року, які пов'язані з виготовленням генераторів і їх зберіганням, у вигляді:

$$
\begin{aligned}
Z(\mathrm{X}) = {} & 28x_1 + 27x_2 + 27{,}8x_3 + 29x_4 + \\
& + 0{,}3\cdot(I_0 + I_1)\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot(I_1 + I_2)\cdot 0{,}5 + \\
& + 0{,}3\cdot(I_2 + I_3)\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot(I_3 + I_4)\cdot 0{,}5 \quad \to \quad \min .
\end{aligned}
$$

Зверніть увагу, що за даними, які наведені табл. 16.1, питомі витрати на виробництво генераторів вимірюються у млн грн, а вартість їх зберігання – в тис. грн. Під час побудови функції цілі необхідно ці показники привести до загальної одиниці вимірювання. В даному випадку витрати на виготовлення і зберігання генераторів переведені в млн грн.

Хоча цей вираз можна спростити, застосувавши елементарні перетворення, але для обчислень за допомогою MS Excel така форма запису є більш зручною. Відповідно до економічного сенсу задачі основна система обмежень враховує такі основні співвідношення:

по-перше, обсяг випуску продукції, яку виготовляє підприємство, може здійснюватися в межах його виробничих потужностей;

по-друге, надлишки продукції наприкінці поточного кварталу дорівнюють різниці між обсягом продукції, що вироблена в поточному кварталі з урахуванням залишків продукції наприкінці кварталу, що безпосередньо передує поточному, і обсягом постачань готової продукції в поточному кварталі;

по-третє, для забезпечення ритмічності роботи підприємства передбачається, що перехідний запас на період, який є наступним за плановим (тобто, після закінчення року, для якого здійснюється планування), повинен складати не менше ніж 7 генераторів.

Відповідно, отримуємо основну систему обмежень математичної моделі задачі як задачі динамічного програмування в такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1 \le 60; \\ x_2 \le 62; \\ x_3 \le 64; \\ x_4 \le 66; \\ I_1 = 15 + x_1 - 58; \\ I_2 = I_1 + x_2 - 36; \\ I_3 = I_2 + x_3 - 34; \\ I_4 = I_3 + x_4 - 59; \\ I_4 \ge 7. \end{cases}$$

Математична модель задачі містить також обмеження на знак, оскільки як основні, так і залежні змінні не можуть бути від'ємними:

$$\begin{cases} x_t \geq 0, & t = \overline{1, 4}; \\ I_t \geq 0, & t = \overline{0, 4}. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї задачі, застосувавши для цього надбудову **Поиск решения** MS Excel. Застосуємо такий алгоритм.

1. На робочому аркуші книги MS Excel побудуємо таблицю, яка відповідає умовам задачі. Отже, заповнюємо вихідні дані (рис. 16.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Задача управління запасами**						
2	**Питомі витрати**		I-й квартал	II-й квартал	III-й квартал	IV-й квартал	
3	Виробництво, млн грн		28	27	27,8	29	
4	Зберігання, млн грн		0,3	0,3	0,3	0,3	
5							
6	Вироблено за планом		50	50	50	50	
7	Потужність виробництва		60	62	64	66	
8	Запас на початок періоду		15	7	21	37	
9	Замовлення		58	36	34	59	
10	Запас на кінець періоду		7	21	37	28	7
11							
12	Виробничі витрати		1 400	1 350	1 390	1 450	
13	Витрати на зберігання		3,3	4,2	8,7	9,75	
14		Усього	1 403,3	1 354,2	1 398,7	1 459,75	**5 616**
15							

Рис. 16.1. **Вихідні дані задачі управління запасами**

2. Для кожного кварталу виділяємо окремий стовпчик (це стовпчики **C**, **D**, **E** та **F**. У комірках **C3:F3** записуємо питомі витрати на виробництво генератора за періодами.

3. Комірки **C4:F4** містять питомі витрати на зберігання генератора.

4. Для виведення елементів матриці плану виробництва виділяємо комірки **C6:F6**. Будемо вважати, що первинний план виробництва для кожного кварталу становить 50 генераторів (за таким обсягом залишки продукції у кожному кварталі не будуть приймати від'ємні значення).

5. Комірки **C7:F7** містять інформацію про потужність виробництва.

6. Інформація щодо запасів на початок періоду міститься у комірках **C8:F8**. Для першого кварталу за умовою задачі початковий запас дорівнює 15 генераторам. Для комірок **D8:F8** запас визначається за

формулами (16.1), що відповідає першій сукупності нерівностей у основній системі обмежень (16.3).

7. Комірки **C9:F9** містять інформацію про обсяги замовлень у кожному кварталі.

8. У комірках **C10:F10** обчислюються запаси на кінець планового періоду. Ці запаси відповідають запасам на початок наступного періоду, отже, їх значення обчислюються за формулами (16.1). Крім того, у комірці **G10** вказано нижню границю запасу, що за вихідними умовами задачі відповідає кінцю всього періоду планування, тобто кінцю 4-го кварталу.

9. Виробничі витрати, що виводяться у комірках **C12:F12**, відповідають витратам на виробництво генераторів протягом кварталу і визначаються як добуток питомих витрат на відповідну їм кількість генераторів. Так, для комірки **C12** маємо формулу: **=C3*C6**.

10. Витрати на зберігання, що виводяться у комірках **C13:F13**, визначаються як середні витрати на зберігання генераторів протягом кварталу. Так, для комірки **C12** маємо формулу: **=C4* (C8+C10)/2**.

11. Рядок "Усього" містить загальні витрати на виробництво і зберігання генераторів, що виводяться у комірках **C14:F14** і визначаються як сума відповідних витрат, тобто комірок у дванадцятому та тринадцятому рядках.

12. Значення комірки **G14** обчислюється як сума значень комірок **C14:F14** і визначає загальні витрати підприємства протягом року, для якого здійснювалось планування. Для виведення цього значення застосовується формула: **=СУММ (C14:F14)**. Отже, ця комірка містить значення цільової функції задачі динамічного програмування.

13. Активізуємо режим **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения**. У діалоговому вікні надбудови **Поиск решения** виконуємо налаштовування економіко-математичної моделі задачі.

14. У полі **Оптимизировать целевую функцию** надаємо посилання на комірку **$G$12,** вибираємо варіант оптимізації відновідно умовам задачі і встановлюємо перемикач умови **До: Минимум**.

15. У полі **Изменяя ячейки переменных** вводимо посилання на блок комірок **C6:F6** і вводимо обмеження на їх значення.

16. Заповнюємо вікно **В соответствии с ограничениями**, ввівши у нього співвідношення між лівою і правої частинами системи обежень.

17. Тепер заповнюємо вікно **Выберете метод решения**, де вказуємо **Поиск решения линейных задач симплекс-методом** (рис. 16.2).

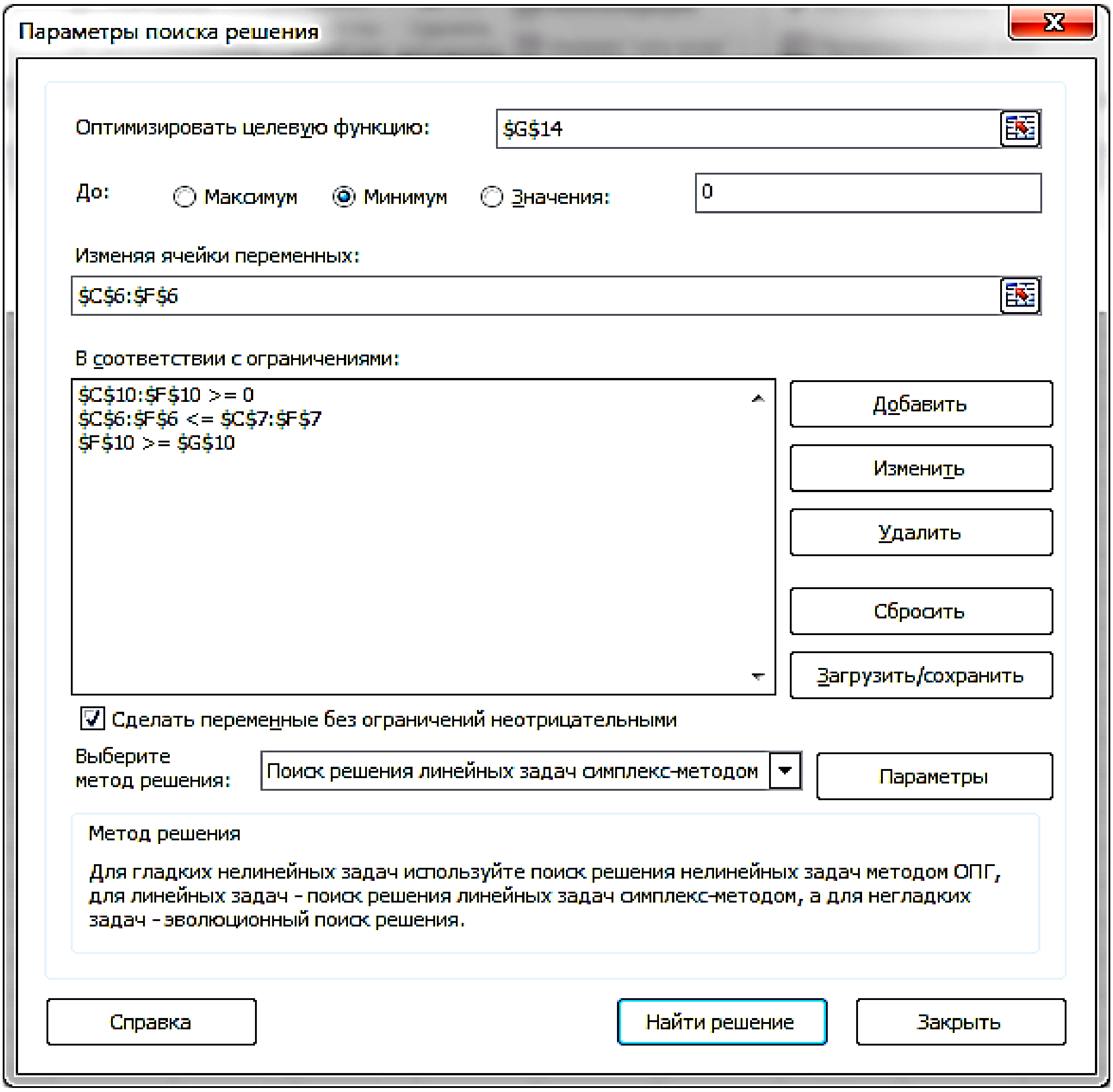


Рис. 16.2. **Діалогове вікно надбудови "Поиск решения"**

18. Оскільки всі обмеження математичної моделі враховані, натискаємо кнопку **Найти решение** і після завершення обчислень на екрані з'являється вікно **Результаты поиска решений**, у якому відображено повідомлення про результат роботи: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**.

19. У діалоговому вікні вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость** і погоджуємося на пропозицію **Сохранить найденное решение** натисканням клавіші **ОК**. Результат розв'язання задачі динамічного програмування подано на рис. 16.3, при цьому на окремому аркуші тієї ж книги MS Excel виводиться звіт **Устойчивость** (рис. 16.4).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Задача управління запасами**						
2	**Питомі витрати**		І-й квартал	ІІ-й квартал	ІІІ-й квартал	IV-й квартал	
3	Виробництво, млн грн		28	27	27,8	29	
4	Зберігання, млн грн		0,3	0,3	0,3	0,3	
5							
6	Вироблено за планом		53	62	64	0	
7	Потужність виробництва		60	62	64	66	
8	Запас на початок періоду		15	10	36	66	
9	Замовлення		58	36	34	59	
10	Запас на кінець періоду		10	36	66	7	7
11							
12	Виробничі витрати		1 484	1 674	1 779,2	0	
13	Витрати на зберігання		3,75	6,9	15,3	10,95	
14		Усього	1 487,75	1 680,9	1 794,5	10,95	4 974,1

Рис. 16.3. **Розв'язок задачі управління запасами**

За результатами оптимізації отримуємо оптимальний план виробництва генераторів, розподілений за кварталами:

$$\mathbf{X}^* = (53 \quad 62 \quad 64 \quad 0).$$

За цим планом замовлення на постачання готової продукції у кожному кварталі будуть своєчасно виконані, перехідний запас на майбутній рік складатиме 7 генераторів (що відповідає нижній межі необхідного запасу продукції), а загальні витрати підприємства на виробництво та зберігання готової продукції будуть найменшими і становитимуть:

$$\min Z(\mathbf{X}) = Z(\mathbf{X}^*) = 4\,974{,}10 \text{ млн грн.}$$

До речі, якщо здійснити оптимізацію чотирьох статичних моделей за цими ж вихідними умовами, то отримаємо інший план виробництва, за яким цільова функція матиме значення 5 038,50 млн грн, тобто на 64,4 млн грн більше, ніж під час оптимізації цієї задачі як задачі динамічного програмування.

Порівняємо результати (див. рис. 16.3), з даними, що містяться у звіті щодо стійкості розв'язку задачі динамічного програмування (рис. 16.4).

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончат. значение	Приведенн. стоимость	Целевая Коэфф.	Допуст. увелич.	Допус. уменьш.
$C$6	Вироблено за планом, І-й квартал	53	0	29,05	0,1	0,8
$D$6	Вироблено за планом, ІІ-й квартал	62	-1,3	27,75	1,3	1E+30
$E$6	Вироблено за планом, ІІІ-й квартал	64	-0,8	28,25	0,8	1E+30
$F$6	Вироблено за планом, IV-й квартал	0	0,1	29,15	1E+30	0,1

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончат. значение	Тень Цена	Огранич. Пр. стор.	Допуст. увелич.	Допуст. уменьш.
$F$10	Запас, кінець IV-го кварталу	7	29,05	7	7	7
$C$10	Запас, кінець І-го кварталу	10	0	0	10	1E+30
$D$10	Запас, кінець ІІ-го кварталу	36	0	0	36	1E+30
$E$10	Запас, кінець ІІІ-го кварталу	66	0	0	66	1E+30
$F$10	Запас, кінець IV-го кварталу	7	0	0	7	1E+30

Рис. 16.4. **Звіт "Устойчивость" задачі управління запасами**

Зверніть увагу на коефіцієнти цільової функції, що містяться у розділі **Ячейки переменных**. На перший погляд здається, що ці значення є помилковими. Наприклад, коефіцієнт цільової функції, який відповідає змінній x_1 (на рис. 16.3 його значення записано в комірці **С3** таблиці вихідних даних) дорівнює 28, тоді як в звіті **Устойчивость** цій же змінній відповідає значення 29,05. Ця розбіжність пояснюється тим, що змінна x_1 входить в цільову функцію не тільки як окремий доданок, але і у складі залежних змінних I_1, I_2, I_3 та I_4, які теж містяться у цільовій функції. Отже, для 1-го кварталу необхідно враховувати питомі витрати на зберігання одного генератора до кінця року. Оскільки ми враховували середні оцінки рівня запасів за квартал, то це рівнозначно тому, що генератори випускаються всередині кварталу. Отже, генератор, який виготовлено у першому кварталі, згідно з моделлю зберігається протягом 3,5 кварталів. Звідси отримуємо додаткові витрати $0{,}3 \cdot 3{,}5 = 1{,}05$ млн грн, які і необхідно враховувати у складі питомих витрат 1-го кварталу.

Так само можна пояснити розбіжності в значеннях коефіцієнтів, які містяться у функції цілі при змінних x_2, x_3 та x_4, за вихідними даними і за звітом **Устойчивость**.

16.3. Завдання для самостійної роботи

Компанія формує інвестиційний портфель на два роки. На даний момент вона має вільні кошти у кількості 2 млн грн, але через 6, 12 та 18 місяців компанія очікує надходження прибутків від попередніх інвестицій. Розмір грошових надходжень надано в табл. 16.2. Фінансова політика компанії передбачає, що вкладати можна тільки власні кошти, а не користуватись позикою.

Таблиця 16.2

Надходження від попередніх інвестицій

Термін надходження	6 місяців	12 місяців	18 місяців
Прибуток, тис. грн	500	400	380

Компанія має можливість інвестувати кошти у проекти "5-й кілометр" та "Медична картка", а також покласти їх на депозит із розрахунку m % за шість місяців (такий термін дії депозиту розглядається для того, щоб задачу можна було розглядати як задачу динамічного програмування з тривалістю одного періоду – півроку). Участь у кожному проекті можлива як у повному обсязі, так і менше, ніж 100 %. Однак якщо компанія бере участь у проекті менше, ніж 100 %, то її внески протягом дії відповідного проекту і прибуток від інвестицій зменшується, оскільки він визначається пропорційно частці участі.

Інвестиційні проекти передбачають наступні умови. За умови стовідсоткової участі у проекті "5-й кілометр" фінансові потоки надані у табл. 16.3, де від'ємні величини визначають обсяг інвестиційних відрахувань на різних етапах проекту, а додатні – прибутки від інвестицій у припущенні 100 % рівня участі.

Таблиця 16.3

Фінансова динаміка проекту "5-й кілометр"

Термін надходження	Вихідний внесок	6 місяців	12 місяців	18 місяців	24 місяця
Прибуток, тис. грн	-1 000	$-a_1$	a_2	a_3	a_4

Фінансова динаміка проекту "Медична картка" за умови 100 % рівня участі наведена у табл. 16.4, де від'ємні величини визначають обсяг інвестиційних відрахувань, а додатні – прибутки від інвестицій.

Таблиця 16.4

Фінансова динаміка проекту "Медична картка"

Термін надходження	Вихідний внесок	6 місяців	12 місяців	18 місяців	24 місяця
Прибуток, тис. грн	-800	b_1	$-b_2$	$-b_3$	b_4

Необхідно визначити, у яких частках від загальної суми коштів, що складає 2 млн грн, компанія повинна робити інвестиції у запропоновані проекти і чи варто замість участі у інвестиційних проектах частину або всі кошти покласти на депозит. При цьому критерієм ефективності є максимізація прибутку після закінчення 24 місяців.

Побудувати математичну модель задачі оптимізації інвестиційного портфеля як задачі динамічного програмування і визначити її розв'язок за допомогою надбудови **Поиск решения**. Дослідити стійкість оптимального плану за допомогою аналізу звіта **Устойчивость** надбудови **Поиск решения**.

Значення параметрів задачі за варіантами наведені в табл. 16.5.

Таблиця 16.5

Значення параметрів задачі динамічного програмування

№ варіанта	Кількість коштів за етапами інвестиційних проектів, тис. грн								m, %
	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	700	1 800	400	600	500	200	700	2 000	7
2	500	1 300	800	500	600	300	500	1 900	10
3	600	1 500	900	700	400	400	200	2 100	15
4	700	1 300	600	900	600	500	200	2 200	7
5	400	1 200	900	800	500	400	300	1 800	12
6	500	1 500	700	400	600	800	500	2 100	10
7	900	800	1 400	800	500	300	400	2 000	15
8	500	1 200	900	800	700	400	500	2 200	10
9	800	1 300	600	900	500	200	600	1 700	7
10	400	1 600	700	400	400	500	800	2 000	12
11	600	1 400	900	500	600	700	300	2 300	10
12	500	1 800	600	400	400	800	700	1 900	7
13	700	1 600	500	400	800	300	600	1 700	12
14	500	1 500	700	400	600	800	500	2 100	7
15	700	1 700	500	700	600	300	500	1 900	15
16	500	1 800	700	600	500	800	400	2 000	10

16.4. Контрольні запитання

1. Які задачі вважаються задачами динамічного програмування?

2. Які існують методи розв'язання задач динамічного програмування і які принципи покладені в їх основу?

3. Чи співпадають розв'язки задачі управління запасами у процесі застосування різних методів побудови її математичної моделі?

4. Як визначається критерій ефективності в задачах динамічного програмування?

5. За яким принципом у задачах динамічного програмування термін планування розбивається на окремі періоди?

6. Які змінні містить математична модель задачі управління запасами і в чому полягає економічний зміст цих змінних?

7. Поясніть, чому коефіцієнти цільової функції математичної моделі задачі динамічного програмування відрізняються від тих значень, які виводяться в звіті **Устойчивость** як цільові коефіцієнти.

Глосарій

Альтернатива – ситуація, в якій потрібно зробити вибір однієї з двох або більше можливостей, які виключають одна одну.

Альтернативний оптимум – існування двох або більше оптимальних планів задачі лінійного програмування, яким відповідають однакові екстремальні значення цільової функції.

Багатокритеріальна модель – математична модель задачі лінійного програмування, яка передбачає послідовне дослідження многокутника планів за декількома критеріями ефективності за умов, що за кожним попереднім критерієм задача має декілька альтернативних оптимумів.

Базисний розв'язок СЛАР – частинний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), який можна отримати з її загального розв'язку, якщо всім його вільним невідомим надати нульові значення.

Балансова умова – рівність між загальним попитом і загальною пропозицією у математичній моделі задачі математичного програмування, яка може бути зведеною до транспортної.

Відкрита (***незбалансована***) ***транспортна задача*** – транспортна задача, для якої загальний попит перевищує загальні потреби або загальні потреби перевищують загальний попит.

Гра з природою – матрична гра, де у якості одного з гравців виступає "природа", тобто сукупність невизначених факторів, які впливають на ефективність управлінських рішень; на відміну від матричної гри свідомих гравців "природа" є байдужою до виграшу і під час вибору стратегії по ходу гри приймає рішення випадково, не спираючись при цьому ні на які обґрунтування; ці задачі належать до задач прийняття рішень в умовах ризику або в умовах невизначеності.

Градієнт – вектор, проекціями якого є частинні похідні цільової функції; він вказує напрямок найбільш швидкого зростання функції і є перпендикулярним до її лінії рівня.

Градієнтні методи – методи розв'язання задач нелінійного програмування, що дозволяють знайти точку локального екстремуму цільової функції як наслідок руху вздовж її градієнта, якщо функція досліджується на максимум, або в протилежному напряму, якщо на мінімум.

Графічний метод – метод розв'язання задач математичного програмування, модель яких або містить дві керовані змінні, або може бути перетворена таким чином, що базисними будуть лише дві змінні.

Двоїсті оцінки – змінні двоїстої ЗЛП, які дозволяють оцінити стійкість розв'язку вихідної задачі відносно зміни параметрів моделі за розв'язком зв'язаної.

Детермінована модель – аналітичне подання закономірностей, що припускає лише жорсткі функціональні зв'язки між факторами моделі; як наслідок цього, для кожної певної сукупності вхідних даних на виході завжди отримуємо лише єдиний результат.

Динамічна модель – модель, що враховує взаємозв'язок змінних у часі; у задачах математичного програмування це моделі з дискретним часом, які описують систему як послідовність її станів.

Додаткові змінні – змінні, які вводяться в основну систему обмежень, яка подана в стандартній формі (тобто таку, основна система обмежень якої містить лише нерівності одного знаку, що відповідає типу екстремуму цільової функції), для перетворення її в канонічну форму (тобто таку, основна система обмежень якої надана у вигляді рівнянь) .

Допустимий розв'язок (***план***) – сукупність значень керованих змінних, що містить математична модель задачі математичного програмування, які задовольняють системі обмежень.

Дослідження операцій – дисципліна, яка займається розробкою і застосуванням методів відшукання оптимальних розв'язків на основі різних евристичних підходів у різних сферах людської діяльності.

Економіко-математичне моделювання – концептуальний вираз найбільш істотних взаємозв'язків і закономірностей поведінки керованої системи в математичній формі.

Загальна форма математичної моделі ЗЛП – задача, математична модель якої містить в основній системі обмежень одночасно рівняння та нерівності різних знаків.

Загальний розв'язок СЛАР – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, за яким невідомі, що утворюють базис системи (базисні невідомі), визначені через інші (вільні невідомі).

Задача лінійного програмування (***ЗЛП***) – клас задач математичного програмування, математична модель якої передбачає використання лише лінійних функцій як в якості цільової функції, так і в якості функцій основної системи обмежень.

Закрита (***збалансована***) ***транспортна задача*** – транспортна задача, основна система обмежень якої подана у формі рівнянь, оскільки загальний попит дорівнює загальній пропозиції.

Канонічна (***основна***) ***форма математичної моделі ЗЛП*** – оптимізаційна задача, математична модель якої містить в основній системі обмежень лише рівняння.

Квадратичне програмування – розділ опуклого програмування, що розглядає задачі, в яких функція цілі (критерій ефективності) є алгебраїчним виразом другого ступеня, а обмеження є лінійними функціями.

Керовані (***впливові***) ***змінні*** – змінні задачі математичного програмування, шляхом направленої зміни яких здійснюють вплив на значення цільової функції з метою досягнення екстремуму саме такого типу, який передбачено умовами задачі математичного програмування.

Критерій ефективності – принцип, за яким здійснюється вибір оптимального плану на множині можливих значень керованих змінних цільової функції.

Критерій обережного спостерігача (***максимінний критерій***) – критерій ефективності, що застосовується у матричній грі двох осіб для вибору стратегій; він полягає у тому, що під час аналізу своїх стратегій продавець обирає ту з них, яка забезпечує йому найбільший гарантований мінімум (нижня ціна гри), а покупець обирає ту зі своїх стратегій, що дозволяє йому сплачувати не більше певної суми (верхня ціна гри).

Лінійне програмування (***ЛП***) – розділ математичного програмування, що розглядає завдання, в яких функції основної системи обмежень, а також функція цілі є лінійними.

Лінія рівня – лінія сталого значення цільової функції; у процесі графічного розв'язання задач математичного програмування за допомогою лінії рівня визначають, який саме план є оптимальним планом.

Математична модель ЗЛП – модель, що складається з цільової функції, основної системи обмежень, яким повинні відповідати керовані змінні, та обмеження на знак.

Математичне програмування – математична дисципліна, присвячена теорії і методам розв'язання задач про знаходження екстремумів функцій на кінцевій безлічі вимірного векторного простору, яка визначається лінійними і нелінійними обмеженнями.

Матрична гра – формалізований опис (модель) конфліктної ситуації, що включає чіткий опис правил дії її учасників (гравців), які прагнуть до виграшу як результату реалізації своїх можливих стратегій.

Метод множників Лагранжа – метод, який застосовується для розв'язання задач математичного програмування; він полягає у переході від задачі про дослідження цільової функції на умовний екстремум до задачі дослідження функції Лагранжа на безумовний екстремум.

Многокутник планів – сукупність допустимих розв'язків ЗЛП, тобто, значень керованих змінних, які задовольняють системі обмежень.

Модель – уявний або матеріальний об'єкт, який в процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал і дозволяє отримати нову інформацію щодо властивостей об'єкта-оригінала.

Моделювання – процес побудови, вивчення та застосування моделей для розв'язання задач; у процесі побудови математичної моделі реальний об'єкт або процес замінюють його формальним описом.

Невироджений план – опорний розв'язок системи обмежень ЗЛП, кількість додатних компонент якого дорівнює кількості обмежень основної системи обмежень.

Невизначеність – ситуація, коли повністю або частково відсутня інформація про можливі стани системи, внаслідок чого система може знаходитися в станах, повний перелік яких невідомий, а також (або) невідомі ймовірності, з якими система може перебувати у кожному зі своїх можливих станів.

Операція – будь-який захід або система дій, які об'єднані єдиним задумом і направлені на досягнення певної мети.

Опорний план – план, елементи якого відповідають координатам вершин многокутника планів.

Опорний розв'язок СЛАР – базисний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, за яким усі значення змінних є невід'ємними.

Оптимальний план – розв'язок системи обмежень (основної системи обмежень і обмеження на знак, якщо воно є), якому відповідає екстремальне значення цільової функції.

Оптимізаційна задача – задача, яка полягає у визначенні умовного екстремуму цільової функції, тобто функції кількох змінних, значення яких повинні відповідати певним обмеженням.

Параметр моделі – відносно постійна величина, що характеризує модельовану систему або її окремі елементи.

Параметричне програмування – розділ математичного програмування, що вивчає завдання, в математичних моделях яких коефіцієнти функції цілі і/або праві частини основної системи обмежень не мають постійного значення, а можуть змінюватися залежно від деякого зовнішнього параметра.

Розширена М-задача – задача лінійного програмування, математична модель якої містить фіктивні зміні, ці змінні входять до складу цільової функції, що досліджується на мінімум, з нескінченно великими коефіцієнтами.

Ризик – характеристика ситуації, яка має невизначеність результату (як правило, передбачається можливість подій, що призводять до несприятливих наслідків), у задачах математичного програмування ризик – це кількісна оцінка можливості появи події, визначається як частота однієї події у разі настання іншої.

Симплекс-метод – універсальний метод розв'язання ЗЛП, який полягає у застуванні перетворень за методом Жордана – Гаусса (повного виключення) для переходу від одного опорного плану до іншого, унаслідок чого відбувається послідовне зменшення значення цільової функції під час її дослідження на мінімум.

Система – сукупність елементів, які знаходяться у взаємодії і утворюють певну цілісність.

Спряжена пара двоїстих задач – пряма і двоїста задачі, математичні моделі яких побудовані таким чином, що оптимальні плани обох задач дають однакові значення функцій цілі і розв'язок однієї з них можна знайти за розв'язком спряженої.

Стандартна форма ЗЛП – математична модель задачі лінійного програмування, яка містить в основній системі обмежень нерівності одного знаку і цей знак відповідає виду екстремуму функції цілі.

Стохастична модель – модель задачі, яка передбачає наявність випадкових впливів на досліджувані показники.

Стійкість оптимального плану – властивість математичних моделей, що мають форму задачі лінійного програмування, яка полягає в незмінності двоїстих оцінок обмежень під час змін вільних членів обмежень в певних межах і в незмінності значень змінних під час змін параметрів функції цілі в певних межах.

Теореми двоїстості – система теорем, які дозволяють визначити розв'язок однієї із задач спряженої пари задач за вже визначеним розв'язком іншої.

Тіньові (***внутрішні***, або ***маргінальні***) ***ціни*** – змінні задачі лінійного програмування, що є двоїстою до задачі про оптимальне використання сировини; вони відповідають певним ресурсам і свідчать про їх дефіцит; крім того, вони показують, на скільки зміниться цільова функція (дохід або прибуток від реалізації готової продукції) у разі збільшення ресурсу відповідного виду на одну одиницю.

Транспортна задача – класична задача, яка передбачає визначення оптимального плану перевезень однорідної продукції від декількох постачальників кільком споживачам з найменшими сумарними витратами на перевезення.

Умовний екстремум – мінімальне (або максимальне) значення функції, яке вона досягає за умови, що її аргументи задовольняють певним обмеженням, які подано у вигляді системи рівнянь та/або нерівностей.

Фіктивні змінні – змінні, які вводяться в основну систему обмежень, що надана у вигляді рівнянь, для створення базису; ці змінні є тотожними нулями і входять до складу цільової функції, що досліджується на мінімум, з нескінченно великими коефіцієнтами.

Формалізація (у моделюванні) – опис осмислених припущень про досліджувану систему з використанням математичних символів, побудова математичної моделі.

Цілочисельне програмування – розділ математичного програмування, об'єктом дослідження якого є задачі, що містять вимогу цілочисельності щодо керованих змінних, або тільки деякі із змінних задачі повинні бути цілочисельними.

Цільова функція – критерій ефективності, за яким здійснюється порівняння допустимих розв'язків многокутника планів.

Штучний базис – базис, до складу якого входить одна або кілька фіктивних змінних.

Рекомендована література

Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1986. – 320 с.

Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Крамера – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 408 с.

Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман. – М. : Высшая школа, 1975. – 270 с.

Красс М. С. Математические методы и модели для магистров экономики : учеб. пособ. / М. С. Красс, Б. П. Чупринов. – СПб. : Питер, 2006. – 496 с.

Кузнецов А. В. Высшая математика : Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн. : Вышейшая школа, 2001. – 552 с.

Кузнецов А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособ. / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич – Мн. : Вышейшая школа, 2001. – 448 с.

Лебедєва І. Л. Економіко-математичні моделі на базі транспортної задачі : навч. посіб. / І. Л. Лебедєва, Г. К. Снурнікова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2007. – 160 с.

Малярец Л. М. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособ. для иностранных студентов / Л. М. Малярец. – Х. : Изд. ХНЭУ, 2013. – 288 с.

Методические рекомендации к решению индивидуальных заданий по дисциплине "Экономико-математические методы и модели" для иностранных студентов отрасли знаний 0305 "Экономика и предпринимательство" всех форм обучения / Э. Ю. Железнякова, Л. А. Норик. – Х. : ХНЭУ, 2012. – 80 с.

Символоков Л. В. Решение бизнес-задач в Microsoft Office / Л. В. Символоков. – М. : ЗАО "Издательство БИНОМ", 2001. – 512 с.

Сингаевская Г. И. Функции в Microsoft Office Excel: 2010 / Г. И. Сингаевская. – М. : Диалектика, 2010. – 672 с.

Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха ; пер. с англ. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2001. – 912 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Лебедєва Ірина Леонідівна
Норік Лариса Олексіївна

Розв'язання завдань з навчальної дисципліни "ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ" у середовищі MS Excel-2010

Навчально-практичний посібник для іноземних студентів

Відповідальний за випуск *Малярець Л. М.*

Відповідальний редактор *Оленич М. М.*

Редактор *Ковальчук М. А.*

Коректор *Маркова Т. А.*

План 2015 р. Поз. № 20-П.
Підп. до друку 03.07.2015 р. Формат 60 × 90 1/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 13,75. Обл.-вид. арк. 17,19. Тираж 400 пр. Зам. № 79.

Видавець і виготівник – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Леніна, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.