

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Гоков А.М., Жидко Е.А.

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Гоков А.М.

Жидко Е.А.

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ
ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие
Часть 1

Харьков, Изд. ХНЭУ, 2006

ББК31.2я7
Г59
УДК621.3(075)

Рецензенты: докт. техн. наук, профессор кафедры экспериментальной физики Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина Лойда В. П.; канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики Харьковского национального университета радиоспектроники Лазоренко О. В.; канд. техн. наук, доцент кафедры технологий и управления качеством машиностроения Украинской инженерно-педагогической академии Бороженко В. И.

Рекомендовано к изданию решением ученого совета Харьковского национального экономического университета.
Протокол №3 от 28.11.2005 г.

Гоков А. М.

Г59

Основы электротехники и электроники. Элементы общей теории электротехники. Учебное пособие. Ч. 1 / А. М. Гоков, Е. А. Жидко. — Харьков: Изд. ХНЭУ, 2006. — 268 с. (Русск. яз.)

ISBN 966-676-141-6

Приведены основные сведения из общей теории электротехники, фундаментальные идеи, термины и определения, а также уточнены отдельные формулировки. Сформулированы понятия, термины временного и векторного представлений гармонических и импульсных колебаний, определения параметров, позволяющих описывать и оценивать электрические сигналы. Изучаются входящие в электрическую цепь объекты, фундаментальные соотношения, связывающие в систему ток и напряжение. Доведены до сведения обучающихся основы общей теории спектральных представлений сигналов и основы вейвлет-преобразований сигналов. Рассматривается широкий круг характерных практических примеров.

Рекомендовано для студентов, обучающихся по профилю компьютеризованных технологий и систем издательско-полиграфических производств, а также для изучающих одноименную дисциплину по другим профилям подготовки.

Наведені основні відомості з загальної теорії електротехніки, фундаментальні ідеї, терміни і визначення, а також уточнені окремі формулювання. Сформуовані поняття, терміни часового і векторного представлення гармонічних та імпульсних коливань, визначення параметрів, що дозволяють описувати й оцінювати електричні сигнали. Вивчаються об'єкти, що входять в електричний ланцюг, фундаментальні співвідношення, які зв'язують у систему потік і напругу. Доведені до відома тих, хто навчається, основи загальної теорії спектральних представлень сигналів і основи вейвлет-перетворень сигналів. Розглядається широке коло характерних практичних прикладів.

Рекомендовано для студентів, які навчаються за профілем комп'ютеризованих технологій і систем видавничо-поліграфічних виробництв, а також для тих, хто вивчає одноименну дисципліну за іншими профілями підготовки.

ISBN 966-676-141-6

© Харьковский национальный
экономический университет, 2006

© Гоков А. М.
Жидко Е. А.
2006

ББК 31.2я7

Введение

В последние годы интенсивно развиваются многие научные направления. Среди них заметное место занимают электротехника и электроника. Связано это, в первую очередь, с массовой компьютеризацией и автоматизацией современной жизни. При решении многих практических задач приходится иметь дело с различными электротехническими и электронными устройствами, подавляющая часть которых в настоящее время построена с применением последних достижений теоретической науки и новых технологий. Практическая работа (не говоря уже о разработке новых устройств, их модернизации или банальном ремонте) с такими устройствами невозможна без знания основ теории и практической реализации этих устройств.

Основой учебного пособия стал курс лекций «Основы электротехники и электроники», который читается в Харьковском национальном экономическом университете студентам, обучающимся по специальности 7.092704 «Комп'ютеризовані технології та системи видавничо-поліграфічних виробництв». Логически он состоит из двух частей: «Элементы общей теории электротехники и электроники» и «Реализация изделий электротехники и электроники». В этом учебном пособии приведен основной теоретический материал по первой части курса «Элементы общей теории электротехники». Этот курс кроме лекций состоит из практических занятий и лабораторных работ, материал которых излагается в отдельном издании.

Без сомнений, этот курс не в состоянии охватить широкий круг вопросов, который принадлежит общей теории электротехники и общей теории электроники. Основная цель авторов – четко, строго и логично изложить материал курса в соответствии с современными стандартами высшего образования в Украине. Пособие написано в самодостаточной форме и таким образом, чтобы у студента не возникало необходимости обращаться к дополнительным литературным источникам, широкий список которых рекомендован нами для самоподготовки, расширения и углубления знаний. Кроме того, в пособии в каждом разделе приводятся ряд простых и наглядных примеров и моделей, которые помогают при усвоении материала и развитии навыков самостоятельной работы (мышления) у студентов.

В первом разделе пособия характеризуются основные понятия электротехники. Материал является связующим звеном между курсом физики (раздел «Электричество и магнетизм») и общей теорией электротехники. Мы посчитали целесообразным уточнить отдельные известные формулировки, привести фундаментальные идеи, термины и определения, наиболее важные для изложения материала.

С целью более глубокого усвоения материала приведены понятия, специальные термины из области временного и векторного представления гармонических и импульсных колебаний, а также определения параметров, позволяющих оценивать конкретные электрические сигналы. Мы постарались ответить на возможно большее число вопросов, возникающих у тех, кто впервые сталкивается с электротехникой.

Второй раздел посвящен изучению входящих в электрическую цепь объектов, с помощью которых осуществляется введение в цепь электрической энергии, преобразование энергии из одного вида в другой и ее потребление. Каждый компонент электрической цепи, исходя из принятой в теории электрических цепей абстракции, представляется как объект, реализующий некоторое математическое соотношение между напряжением и током, и рассматривается как математическая модель, которая связывает ток и напряжение и поясняет суть физических процессов в компоненте. Кроме задания компонента в виде математических символов, каждому компоненту ставится в соответствие графический символ. Определено понятие электрической цепи и что применительно к ней означает термин «взаимосвязанные элементы», каковы бывают виды соединений элементов, какими понятиями эти соединения характеризуются, как соединения элементов отражаются визуально, графически с помощью схемы электрической цепи.

В этом разделе анализируется, как в результате коммутации подключаются или отключаются компоненты, варьируются их значения, изменяется структура цепи. Цель этого раздела состоит в том, чтобы помочь студенту изучить основные компоненты электрической цепи, освоить работу с их математическими моделями, понять физические процессы, происходящие в них, научиться представлять внешний вид реального изделия и расшифровывать графический значок, применяемый для обозначения элементов на схеме.

В третьем разделе полученные для отдельных компонентов электрической цепи соотношения для токов и напряжений распространены

на цепь любой сложности. Рассмотрены фундаментальные соотношения (их еще называют законами электрической цепи), связывающие в систему токи и напряжения в любой цепи. Также обсуждаются типичные задачи анализа цепей, формальные алгоритмы их решения, которые позволяют по заданной топологии цепи определить ток и напряжение на отдельном элементе электрической цепи или проанализировать общее «поведение» всей цепи.

В электротехнике постоянно приходится выяснять, для чего электрическая цепь предназначена, как функционирует и ведет себя при различных воздействиях. Поэтому в этом разделе показано как характеризуют двухполюсную цепь при изменении частоты входного воздействия. Для четырехполюсных цепей, имеющих вход и выход, как правило, приходится выяснять, что произойдет с цепью, когда на ее вход будет подано заранее известное тестовое воздействие. Важно также каким будет «отклик» такой цепи (сигнал на выходе, реакция цепи) на заданное воздействие. На конкретных примерах показывается как определяют «отклик» на наиболее типичные виды воздействий.

При гармонических входных воздействиях изучаются амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики цепи, отражающие зависимости амплитуды и начальной фазы «отклика» от частоты.

В этом разделе показано, как определяются токи и напряжения, возникающие на элементах цепи при коммутации, рассматривается, что представляет процесс перехода электрической цепи из одного состояния в другое (переходный процесс). Проанализировано, что будут представлять собой «отклик» электрической цепи на тестовые импульсные воздействия: на функцию Хевисайда – переходная характеристика; на импульс Дирака – импульсная характеристика.

Отдельно рассмотрены основные методы анализа трехфазных и магнитных цепей.

Отметим, что приведенные в разделе описания и методы анализа электрических цепей имеют широкое применение. Поэтому глубокое изучение этого материала позволит студенту научиться решать типовые задачи электротехники и электроники.

В электрических цепях часто встречаются токи и напряжения сложной формы. Эта сложность временной зависимости затрудняет не только расчеты, но и визуальное восприятие самого сигнала, понимание характера процессов, протекающих в элементах цепи. Для решения та-

ких задач применяется математический аппарат, который позволяет раскладывать сложное явление на составные части и, благодаря этому, давать характеристику изучаемому процессу в наиболее важном отношении, наиболее рациональным способом описывать его нужные свойства. Таким аппаратом являются спектральный анализ, основанный на преобразованиях Фурье (ПФ), и вейвлет анализ.

В настоящее время применение методов спектрального анализа многообразно. В различных областях электротехники и электроники возникают особые, специфические вопросы, при решении которых применяются ПФ. В частности, при обработке изображений вычисление ПФ является одной из наиболее часто встречающихся операций. Однако для решения задач анализа нестационарных и сложных с локальными особенностями сигналов, свойства которых меняются во времени или пространстве, спектральный анализ малоэффективен. Для решения таких задач весьма эффективен новый математический аппарат, – вейвлет анализ, – теория и практические приложения которого бурно развиваются в последние годы. Поэтому в четвертом разделе мы достаточно подробно рассмотрели основы и главные практические применения как спектрального анализа, так и вейвлет анализа. Изучение этого материала позволит студенту овладеть самым современным математическим аппаратом для решения любых задач анализа нестационарных и сложных сигналов.

Следует отметить, что по электротехнике написано много хороших книг, которые, по мнению авторов, обычно имеют два существенных недостатка: 1) их объем не соответствует времени, отводимому на изучение материала; 2) в них отсутствует материал (в том числе и справочный) по последним достижениям науки. В первую очередь это касается применения передовых компьютерных технологий.

Авторы при написании учебного пособия постарались устранить указанные недостатки, широко используя современные компьютерные методы представления и анализа электрических сигналов и цепей: системы моделирования аппаратуры Matlab, Electronics Workbench и вейвлет-анализ.

Данная книга может быть полезна студентам, обучающимся по другим направлениям и специальностям, а также для изучающих одноименную дисциплину по другим профилям подготовки.

Авторы благодарны за оказанную помощь в улучшении содержания учебного пособия сотрудникам кафедры физики и электроники Харьковского национального экономического университета (зав. кафедрой кандидат технических наук, доцент О.И. Медведь).

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам – доктору технических наук, профессору кафедры экспериментальной физики

Харьковского национального университета им.В.Н. Каразина В.П. Пойде; кандидату физико-математических наук, доценту кафедры физики Харьковского национального университета радиоэлектроники О.В. Лазоренко; кандидату технических наук, доценту кафедры технологии и управления качеством машиностроения Украинской инженерно-педагогической академии В.И. Борзенко за внимательное прочтение рукописи и высказанные полезные замечания.

1. Основы представления токов и напряжений в электротехнике

Этот раздел посвящен изучению «словаря» электротехники. В начале материал раздела является связующим звеном между курсом физики (раздел «Электричество и магнетизм») и собственно теорией электротехники и электроники. По этой причине читатель обнаружит здесь некоторые сведения уже известные ему. Мы посчитали целесообразным, несмотря на это, уточнить отдельные формулировки, привести фундаментальные идеи, термины и определения, наиболее важные для последующего изложения материала.

Затем приведены понятия, специальные термины из области временного и векторного представления гармонических и импульсных колебаний, определения параметров, позволяющих оценивать конкретные электрические сигналы. Мы постарались ответить на возможно большее число вопросов, возникающих у тех, кто впервые сталкивается с электротехникой.

1.1. Неизменные во времени токи и напряжения в электрической цепи. Термины и определения

Электрической цепью называют систему элементов (электротехнических устройств), предназначенных для передачи, распределения и взаимного преобразования электрической и других видов энергии. При этом предполагают, что электромагнитное состояние элементов, все процессы в них допустимо и целесообразно характеризовать, описывать с помощью понятий об электрическом токе, напряжении и электродвижущей силе.

В начале, чтобы не углубляться в тонкости физических процессов, постулируем наличие в проводящем твердом теле определенного количества электронов, способных передвигаться. Заряд электрона дискретен, отрицателен и обозначается символом q . Этот заряд равен примерно $q \cong 1,6 \times 10^{-19}$ Кл.

Можно предположить далее, по аналогии с неким газом, что в состоянии теплового равновесия в твердом проводящем теле так называемые свободные электроны хаотически мечутся в межатомном пространстве. Хаотическое движение не создает направленных потоков частиц, несущих заряд, и считается, что через это тело ток не протекает.

Если вместо хаоса, каким-то образом, удастся придать электронам упорядоченное, направленное движение, например за счет электрического поля, то говорят, что такое движение частиц, переносящих заряды, образует *электрический ток* (ток проводимости).

Пусть через рассматриваемую поверхность какого либо тела за промежуток времени Δt переносится количество электричества Δq . Тогда мгновенное значение тока (величина тока, сила тока в рассматриваемый момент времени) равно

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta q / \Delta t).$$

Иными словами, *электрический ток*, как явление, есть направленное движение электрических зарядов. Количественная характеристика этого явления - сила тока (или просто ток). Ток - скорость изменения заряда, проходящего через сечение S тела, проводящего заряды. В СИ сила тока измеряется в амперах (А).

Если считать, что электроны движутся с одинаковой скоростью, которая не меняется во времени, то число электронов, пересекающих за одну секунду площадку единичной площади равно произведению скорости движения V на концентрацию электронов N (количества электронов в единице объема) (рис. 1.1). Умножив на заряд q , получим величину плотности тока J , протекающего через твердое проводящее тело

$$J = N \cdot q \cdot V. \tag{1.1}$$

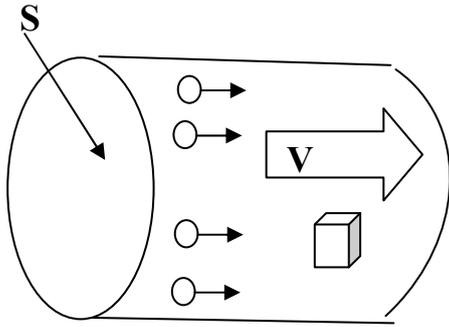


Рис. 1.1. Модель для расчета плотности тока

Обратим внимание на два факта, вытекающих из формулы (1.1).

Ток хаотического движения (обычно присущий тепловым переносам переноса заряда) равен нулю, так как значение средней скорости хаотического движения равно нулю.

Во-вторых, большую величину ток может приобрести либо из за высокой концентрации подвижных носителей заряда (это присуще металлам), либо за счет их большой скорости движения (высокая скорость движения носителей заряда, или говорят подвижность, присуща полупроводникам).

Если поток носителей заряда остается неизменным во времени, то говорят, что протекает постоянный ток $i_0 = const$. Постоянный ток равен количеству электрического заряда, перенесенного через поверхность S за время t

$$i_0 = q/t.$$

В общем случае поток носителей заряда может с течением времени меняться и ток i будет являться функцией времени $i = F(t)$. Переменный ток в различные моменты времени может иметь различные величину и знак.

Прохождение электрического тока (перенос зарядов в цепи) всегда связано с преобразованием или потреблением энергии. Для определения энергии, затрачиваемой при перемещении заряда между двумя рассматриваемыми точками проводящего тела, вводят скалярную физическую величину – напряжение.

Для переноса элементарного заряда dq через какой либо участок цепи (от точки 1 к точке 2) необходимо затратить энергию

$$dW = u dq.$$

Отсюда, мгновенное значение напряжения u равно

$$u = dW / dq. \quad (1.2)$$

Напряжение-это скалярная величина, которая определяется как предел отношения элементарной работы сил электрического поля при переносе заряда через заданный участок цепи к величине этого заряда, когда величина последнего стремится к нулю.

Как известно из физики энергетической характеристикой электрического поля также является скалярная физическая величина - электрический потенциал φ .

Электрический потенциал φ данной точки электрического поля (точки участка цепи) равен отношению работы, совершаемой при перемещении точечного положительного электрического заряда из данной точки поля в бесконечность, к величине этого заряда. Это также потенциальная энергия, которой обладает положительный заряд в 1 Кл, помещенный в данную точку. (Потенциал 1В это состояние, при котором заряд в 1 Кл, помещенный в данную точку, обладает потенциальной энергией 1 Дж.) (1 Дж - работа силы 1 Н на пути в 1 метр).

Электрический потенциал, как известно, определен с точностью до константы. Если нужно устранить эту неопределенность, то задаются условным значением потенциала в некоторой точке пространства. Обычно принимается равным нулю потенциал точек, связанных с Землей и потенциал бесконечно удаленных точек. Эти точки обычно имеют специальное обозначение.

Физическая величина U , характеризующая изменение электрического потенциала φ при переходе из одной точки электрического поля (электрической цепи) в другую, и равная разности потенциалов в этих точках поля $U = \varphi_2 - \varphi_1$ называется *разностью потенциалов*. Эту величину также часто называют напряжением между точками 2 и 1 электрической цепи U_{21} .

При этом, если потенциал определяется лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной, то разность потенциалов, взятых в различных точках, не зависит от этой постоянной.

Чтобы характеризовать энергию, внесенную в цепь извне и связанную с работой сил неэлектрического происхождения (так называемых сторонних сил), используют понятие *электродвижущей силы (ЭДС)*.

ЭДС, по аналогии с напряжением, это скалярная величина, которая определяется как предел отношения элементарной работы сторонних сил электрического поля при переносе заряда через источник к величине этого заряда, когда величина последнего стремится к нулю.

Элементы электрической цепи, создающие ЭДС, являются *активными элементами цепи*.

При измерении энергии в джоулях (Дж) и заряда в кулонах (Кл) напряжение, потенциал, разность потенциалов и ЭДС, измеряются в вольтах (В).

Из определения напряжения (1.2) получаем выражение энергии W , затраченной на перемещение заряда q на участке цепи с напряжением u к моменту времени t

$$W = \int_0^q u dq = \int_{-\infty}^t u i dt \quad (1.3)$$

Здесь суммируются все энергетические процессы, возникающие при протекании тока и при действии напряжения, начиная от $t = -\infty$, где энергия принимается равной нулю, до рассматриваемого момента t .

Дифференцирование (1.3) по времени дает скорость изменения энергии во времени, т.е. мощность, выражаемую в ваттах (Вт)

$$p = dw/dt = ui. \quad (1.4)$$

Мощность электрической цепи, равная произведению напряжения на ток, также является алгебраической величиной. Знак ее определяется знаками напряжения и тока:

– при совпадении этих знаков *мощность положительна*, что соответствует потреблению энергии в рассматриваемом участке цепи;

– при несовпадении знаков напряжения и тока *мощность отрицательна*, что означает отдачу ее из участка цепи (такой участок является источником энергии).

Свойства элемента электрической цепи существенным образом зависят от того какой функциональной зависимостью $u = F(i)$ связаны у элемента ток и напряжение. Немецкий физик Георг Симон Ом (1787 – 1854 гг.), изучая зависимость между током и напряжением, ввел понятие электрического сопротивления элемента как коэффициента пропорциональности между этими величинами, имеющими линейную зависимость.

В настоящее время имеется большое количество элементов, у которых функциональная связь – *вольт-амперная характеристика* $u = F(i)$ существенно отличается от линейной. Она такова, что ее, за отсутствием лучшего определения, называют *нелинейной*. Для таких элементов определения сопротивления, введенного Омом, уже недостаточно.

Поэтому для полного определения понятия электрического сопротивления нелинейного элемента (у которого вольт-амперная характеристика $Y = F(x)$ отличается от линейной зависимости вида $Y = kx$) вводят понятие статического и динамического сопротивления.

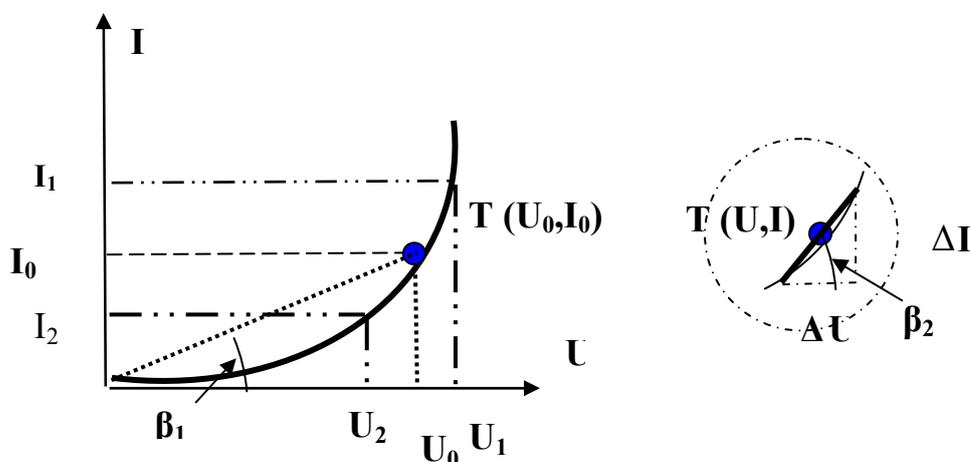


Рис. 1.2. Определение понятия электрического сопротивления для элемента электрической цепи, имеющего нелинейную вольт-амперную характеристику

Статическим сопротивлением (сопротивлением по постоянному току) называют имеющее всегда положительное значение отношение напряжения U_0 в выбранной точке $T(U_0, I_0)$ характеристики (в кон-

кретной точке вольт-амперной характеристики) к току I_0 , , изменяющееся от точки к точке.

$$R = U_0 / I_0. \quad (1.5)$$

Геометрически это определение означает следующее. Если из начала координат в заданную точку $T(U_0, I_0)$ на вольт-амперной характеристике провести прямую OT , то сопротивление по постоянному току будет представлять, с учетом масштабов по осям графиков, не что иное как котангенс угла наклона β_1 прямой OT

$$R_0 = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{ctg} \beta_1, \quad (1.6)$$

где m_u – масштаб по оси напряжений;
 m_i – масштаб по оси токов.

Из рисунка видно, что при перемещении точки T по вольт-амперной характеристике угол наклона β_1 изменяется, следовательно, меняется и статическое сопротивление

Под *дифференциальным (динамическим) сопротивлением* понимают отношение малого приращения напряжения в выбранной точке $T(U_0, I_0)$ к соответствующему приращению тока

$$r = \frac{dU}{dI} = \frac{U_1 - U_2}{J_1 - J_2} = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (1.7)$$

Идею введения понятия «дифференциальное сопротивление» можно пояснить следующим образом. Предположим, что в качестве рабочего участка вольт-амперной характеристики используется ее такой участок, который с достаточной степенью точности можно считать линейным. В этом случае, взяв малые приращения токов и напряжений можно вычислить отношение приращений, аналогично тому, как делалось для сопротивления по постоянному току. В пределе, как это делается в дифференциальном анализе, получим, что это отношение есть не что иное, как производная от зависимости $U=F(I)$ в точке $T(U_0, I_0)$.

Дифференциальное сопротивление, как видно из правой части рис.1.2, геометрически можно толковать как котангенс угла наклона касательной β_2 к вольт-амперной характеристике с учетом масштабов по осям в заданной точке

$$r = \frac{m u}{m i} \operatorname{ctg} \beta_2. \quad (1.8)$$

Обратим внимание на то, что использование двух понятий сопротивления нелинейного элемента электрической цепи отражает одну из часто используемых идей – разбиение сложной анализируемой зависимости на две компоненты – грубую и детализирующую. В самом деле, для нелинейного элемента статическое сопротивление является весьма грубым приближением, что наглядно видно из сравнения наклона графика и линии, проведенной из начала координат в точку Т. Дифференциальное сопротивление позволяет более точно приблизиться к понятию сопротивления, введенному Д. Омом.

1.2. Положительные направления токов, напряжений и ЭДС в элементах электрической цепи

В электрических цепях чаще всего практический интерес представляют не только количественные значения напряжений и токов на зажимах (выводах, клеммах) элементов (электротехнических устройств), составляющих электрическую цепь, но и направления их изменений.

Как отношение двух скалярных величин ток, напряжение, ЭДС являются скалярными алгебраическими величинами. Для такой величины, характеризуемой одним числом со знаком вроде бы нет необходимости указывать направление (это ведь не вектор). Однако, оказалось удобным в электротехнике знак этих величин характеризовать при помощи условных направлений и условных стрелок. В этой связи исходной операцией практически при любом анализе электрической цепи является выбор положительных направлений токов, напряжений, ЭДС.

Для однозначного определения знака тока направление тока вводят следующим образом. За *положительное направление тока* принимают направление движения положительных зарядов. Это положитель-

ное направление отмечается стрелкой (рис.1.3). Движение носителей, обладающих отрицательным зарядом (электронов), происходит в направлении, противоположном тому, куда указывает стрелка.

Для однозначного определения знака напряжения между двумя выводами рассматриваемого участка цепи напряжению также приписывают условно положительное направление. Прежде всего, выводы помечают знаками «+» и «-». Знаком «+» помечается тот вывод элемента (зажим цепи) потенциал которого выше (больше) и, в случае определения напряжения, из потенциала которого будет вычитаться потенциал другого вывода элемента (зажима цепи). Знаком «-» помечается тот вывод элемента (зажима цепи) потенциал которого ниже (меньше). *Положительное направление напряжения* (направление убывания, уменьшения потенциала) обычно отмечают линией со стрелкой на конце рядом с изображением рассматриваемого элемента. Стрелка направлена от «+» к «-». Знак «-» на рисунках и схемах иногда опускается, что несколько упрощает изображение.

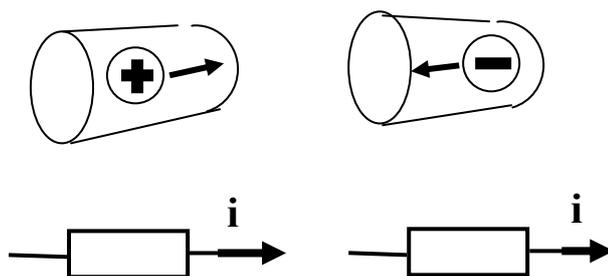


Рис. 1.3. Условные направления токов

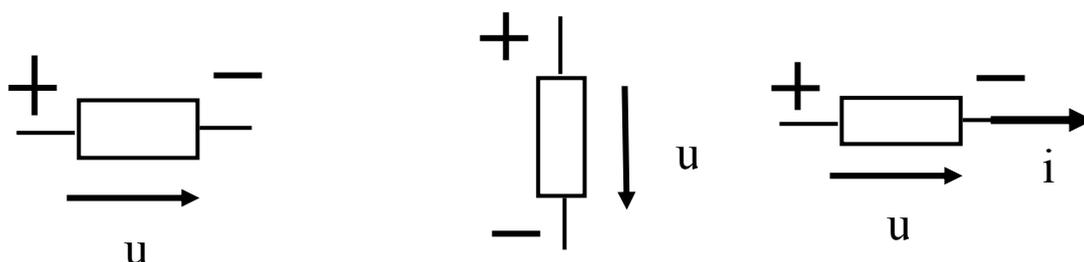


Рис. 1.4. Условные направления напряжений

В пассивных двухполюсниках используют *согласный выбор напряжений и токов*: положительное направление напряжения принимают

совпадающим с положительным направлением тока (знак «+» полярности напряжения находится в хвосте стрелки, обозначающей положительное направление тока), так как заряды внутри такого двухполюсника перемещаются силами внутреннего электромагнитного поля. При согласованном выборе полярности, очевидно, можно ограничиться указанием только одной стрелки положительного направления. В активных двухполюсниках используют *встречный* выбор напряжений и токов: положительное направление напряжения принимают противоположным положительному направлению тока, так как заряды внутри такого двухполюсника перемещаются сторонними силами.

Для однозначного определения знака ЭДС между двумя выводами рассматриваемого активного элемента цепи также приписывают условно положительное направление. *За положительное направление ЭДС* принимается направление действия сторонних сил на положительные заряды. При этом стрелка направлена от знаков «-» к «+», определенных для напряжения, но совпадает со стрелкой для направления тока. Так как в источниках ЭДС движение зарядов обусловлено сторонними силами, то для таких источников положительное направление ЭДС и напряжения противоположно.

Рассмотрим рис. 1.5, на котором изображен участок цепи и, сверху, как распределены потенциалы и напряжения в нем.

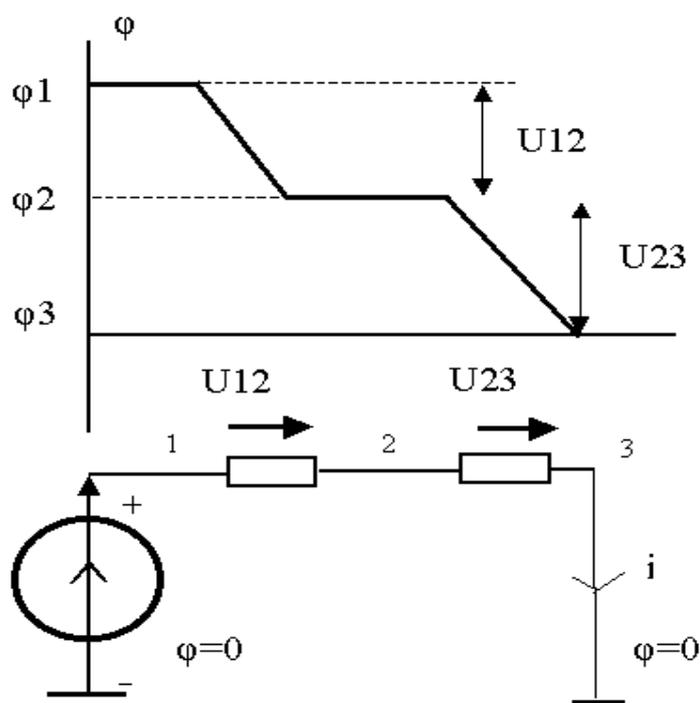


Рис. 1.5. Изменение потенциала на участке электрической цепи

Нижняя точка источника ЭДС, помеченная специальным символом, обозначающим точку нулевого потенциала, имеет потенциал равный нулю. За счет работы сторонних сил потенциал верхнего конца источника увеличивается и становится равным φ_1 . Говорят, что источник ЭДС повышает потенциал и точка 1 имеет самый высокий потенциал. Точку 1 помечают знаком «+». Направление тока и напряжения в источнике ЭДС не совпадает. Несовпадение знаков тока и напряжения означает, что источник ЭДС является источником энергии и отдает ее в электрическую цепь. При прохождении тока от точки 1 к точке 2 через элемент происходит уменьшение потенциала до величины φ_2 или, если использовать широко распространенный термин, происходит падение напряжения на элементе. Величина напряжения на элементе U_{12} или величина падения напряжения на элементе U_{12} определяется разностью потенциалов. При согласном выборе напряжения и тока условные направления их совпадают, что свидетельствует о том, что на этом участке цепи элемент потребляет энергию. Аналогично при прохождении тока от точки 2 к точке 3 через элемент происходит уменьшение потенциала до нуля и падение напряжения на элементе на величину U_{23} . Второй элемент также потребляет энергию.

Чтобы понимать, что происходит в изображенной цепи можно использовать следующую аналогию.

Источник ЭДС подобен насосу, который может набирать воду из нижнего сосуда и поднимать ее в верхний сосуд, то есть заставлять воду передвигаться снизу вверх. Для работы такого насоса, и это важно понимать, необходим внешний источник энергии, приводящий насос в движение. Чтобы заряды в источнике ЭДС перемещались от точки низкого потенциала к высокому, необходима внешняя энергия (энергия химической реакции, механическая энергия вращения генератора и т. п.).

Ток через резистор тогда всегда будет протекать от точки более высокого потенциала к точке более низкого потенциала подобно тому, как по трубе, соединяющей два сосуда, вода течет из сосуда в котором уровень воды выше в сосуд в котором уровень воды ниже. Отсюда и термин «падение потенциала». Диаметр трубы определяет «сопротивление» току. Кроме того, надо иметь в виду, что электрическая цепь это замкнутая система: ток во всей изображенной электрической одинаков.

1.3. Гармонические токи и напряжения в электрической цепи

Мгновенным значением тока (напряжения, ЭДС) называют его величину в данный момент времени t и обозначают малой буквой i (u, e). Мгновенные значения можно выразить в виде функции времени: $i = f(t)$.

В зависимости от того, как мгновенные значения меняются от величины t , токи и напряжения в электрической цепи могут быть неизменными во времени (постоянными) $\{i=F(t)=const =I_0, u=F(t)=const =U_0\}$ или изменяющимися во времени по какому то закону $i=F(t)$ (переменными).

Простейшим из переменных токов является *периодический ток*, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени T . В общем случае, для произвольного момента времени, условие периодичности имеет вид

$$i = f(t) \quad i = f(t + kT), \quad (1.9)$$

где k - любое целое число, а T - *период тока*, т.е. наименьший промежуток времени, по истечении которого мгновенные значения периодического тока повторяются.

Период T имеет размерность сек и измеряется в сек. Заметим, что в электротехнике и электронике применяются и дробные доли секунды- мс, мкс, нс.

Величина обратная периоду называется *частотой* тока и равна числу периодов в единицу времени: $f = 1/T$.

Частота измеряется в герцах (Гц). В электрических цепях промышленного назначения стран СНГ и Европы принята стандартная частота 50 Гц, а в США и Японии- 60 Гц, т.е. соответственно 50 и 60 периодов в секунду.

Особое место в электротехнике, как в теории, так и на практике, занимают *гармонические процессы*, меняющиеся во времени по синусоидальному или косинусоидальному закону. Такие процессы характерны для многих физических объектов. На особое их значение и своеобразную гармонию еще обращали внимание ученые отец и сын Бернули, Эйлер и другие. Ввиду неизменности их параметров во времени, симметрии, гладкости (не содержат разрывов как самих функций, так и их

производных) косинусоидальные и синусоидальные колебания получили название гармонических.

В частности, на практике такие токи и напряжения обычно создаются специальными генераторами. Например, для электроэнергетики их получают с помощью электромагнитных генераторов переменного тока, расположенных на гидро-, тепловых- и атомных электростанциях. Одной из форм представления гармонического тока является синусоидальный (косинусоидальный) ток.

Представление гармонического тока (напряжения, ЭДС) в виде синусоидальной или косинусоидальной функции зависит от того, какое предпочтение отдается при выборе начала наблюдения за изменением сигнала генератора. Наблюдение за изменением ЭДС простейшего генератора можно начать либо в момент времени, когда ЭДС была равна нулю (представление синусоидальной функцией), либо в момент времени, когда ЭДС положительна и имеет максимальную величину (представление косинусоидальной функцией). Поскольку гармоническое напряжение можно записывать и в косинусной и в синусной форме

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_1) = U_m \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (1.10)$$

где $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$, то в дальнейшем будем использовать обе эти формы представления гармонического процесса.

Косинусоидальным (синусоидальным) называется ток, мгновенные значения которого изменяются по косинусоидальному (синусоидальному) закону. Уравнение косинусоидального тока имеет вид

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_1) = I_m \cos \theta, \quad (1.11)$$

Здесь I_m - амплитуда косинусоидального тока;

$\theta = \omega t + \psi_1$ - полная фаза; ψ_1 - начальная фаза;

$\omega = d\theta/dt$ - угловая частота (скорость изменения полной фазы).

За аргумент функции (1.6) обычно принимают время. Аргументу t соответствует период T . Величина обратная периоду называется частотой $f = 1/T$.

На рис.1.6 приведены временные диаграммы косинусоидального процесса (график процесса). Используя их, определим основные параметры гармонического процесса (тока, напряжения, ЭДС).

Максимумы (экстремумы) функции имеют место при $\theta = \omega t + \psi_1 = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Амплитуда A_m (I_m, U_m) процесса (тока, напряжения) - это максимальное положительное мгновенное значение процесса (тока, напряжения) (положительный экстремум функции).

Начальная точка (Н.Т.) - это ближайшее к оси ординат графика максимальное положительное значение графика процесса (ближайший к оси ординат положительный экстремум функции).

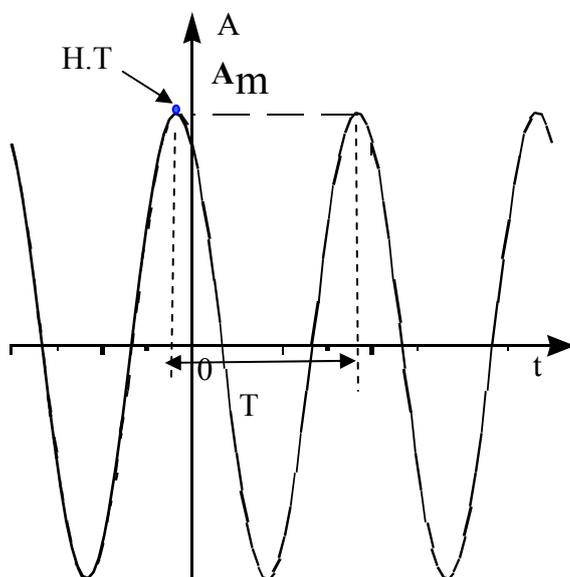


Рис. 1.6. Временные диаграммы косинусоидального тока

Полная фаза $\theta = \omega t + \psi_1$ является аргументом функции (1.11). Она выражается в угловых единицах (радианах или градусах). Полная фаза растет во времени по линейному закону с угловой скоростью ω (рад/сек).

Начальная фаза - ψ_1 - равна величине полной фазы в момент времени $t = 0$. Начальная фаза, либо соответствующий ей временной интервал, отсчитывается от проекции начальной точки (НТ) диаграммы тока (напряжения) на ось аргумента (ось абсцисс) к началу координат (от положительного максимума до оси ординат).

При этом, если направление отсчета начальной фазы совпадает с положительным направлением оси аргумента (t) (оси абсцисс), то начальная фаза считается *положительной*. И наоборот, если направление отсчета начальной фазы противоположно, начальная фаза *отрицательна*.

Начальная фаза при использовании синусной формы представления тока или напряжения отсчитывается *от нулевого значения* графика (на нарастающем участке) до начала координат

Для сравнения двух токов, напряжений и токов и напряжений с одинаковыми частотами в рассмотрение вводят еще один параметр — *сдвиг по фазе (фазовый сдвиг)* одного процесса относительно другого. Фазовый сдвиг численно равен разности начальных фаз сравниваемых процессов и характеризует запаздывание одного процесса относительно другого.

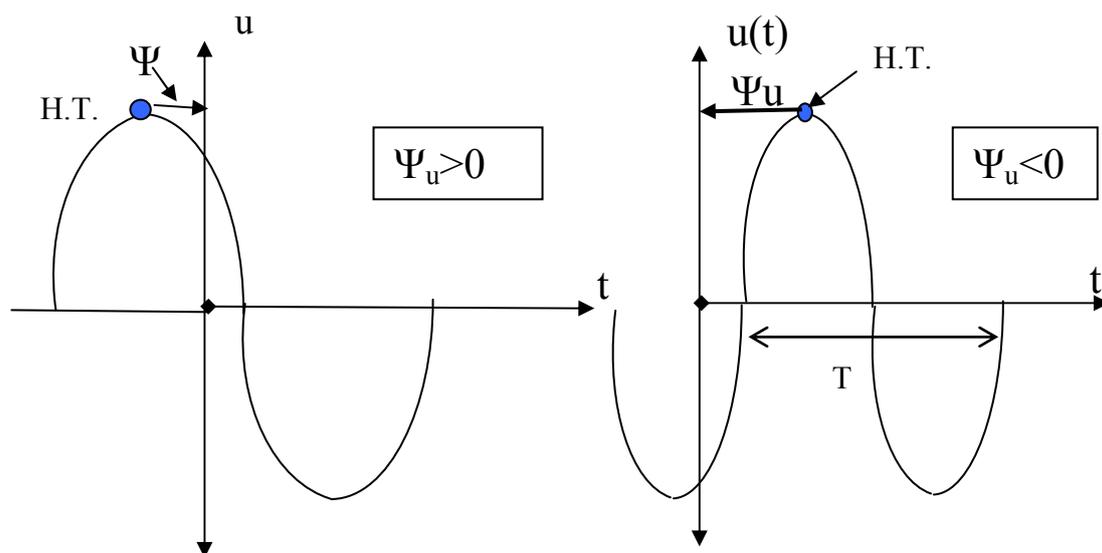


Рис.1.7. **Определение величины и знака начальной фазы**

Угол сдвига фаз напряжения $u(t) = U_m \cos(\omega t + \Psi_u)$ относительно тока $i(t) = I_m \cos(\omega t + \Psi_i)$ равен $\varphi = \Psi_u - \Psi_i$.

На временных диаграммах (рис.1.8) сдвиг по фазе отсчитывается от проекции НТ процесса, положение которого нас интересует (напряжения) (НТ1), к проекции НТ другого процесса, относительно которого определяется сдвиг по фазе (НТ2) (тока). Сдвиг по фазе *положителен*, если направление отсчета совпадает с положительным направлением оси аргумента. Говорят, *напряжение по фазе опережает ток*. Если на-

правление отсчета противоположно, сдвиг по фазе отрицателен. Это свидетельствует о том, что *напряжение отстает от тока*.

Рассмотренные функции гармонического процесса (тока, напряжения, ЭДС) можно наблюдать на экране осциллографа. Такие изображения обычно называют осциллограммами.

Помимо рассмотренных выше параметров косинусоидального тока для характеристики энергетического действия тока вводят понятие среднеквадратического (действующего) значения.

Среднеквадратическое (действующее) значение косинусоидального (синусоидального) тока (напряжения) равно

$$I = 0.707I_m, \quad U = 0.707U_m .$$

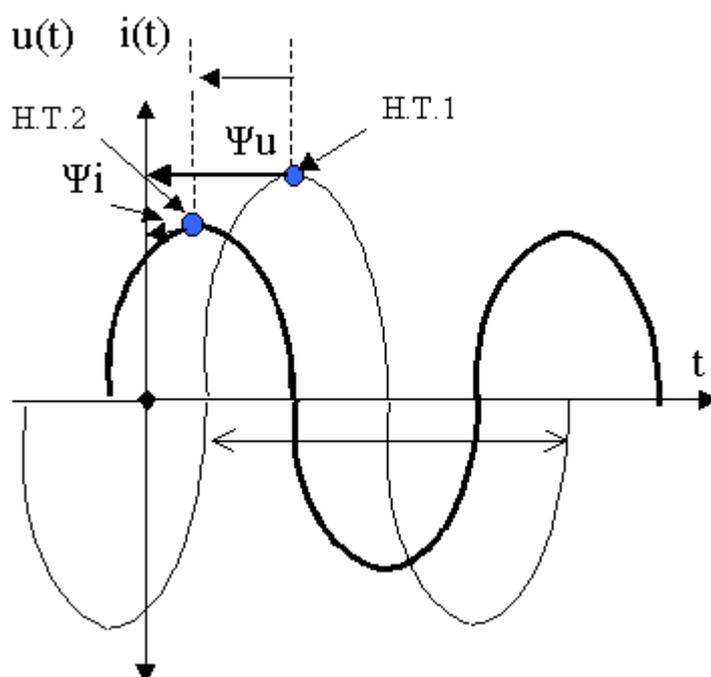


Рис. 1.8. **Определение величины и знака сдвига фаз**

Среднеквадратическое (действующее) значения косинусоидального (синусоидального) тока I равно такому постоянному току, который, проходя через сопротивление R за время T , выделил бы такое количество тепла, что косинусоидальный (синусоидальный) ток за период.

Параметр «среднеквадратическое значение» широко используется в повседневной жизни и в практике работы. Так, например, электриче-

ская силовая сеть 50 Гц имеет, напряжение 220 В. Это действующее значение напряжения U . Амплитуда напряжения в такой сети равна

$$U_m = \sqrt{2} U = \sqrt{2} \cdot 220 = 310 \text{ В.}$$

Большинство приборов для измерения токов и напряжений в цепях косинусоидального тока (электродинамической, электромагнитной, индукционной, термоэлектрической и др. систем), проградуировано в среднеквадратических значениях токов и напряжений.

1.4. Символический метод комплексных амплитуд

При проведении электрических расчетов необходимо определять суммы токов, напряжений косинусоидальной формы с одинаковыми частотами, но с разными амплитудами и начальными фазами, различные их произведения. Выполнять практически даже эти простейшие алгебраические операции, используя тригонометрические функции, проводить геометрическую интерпретацию полученных результатов, получается очень громоздко и трудоемко. Появление громоздких выкладок вызывается тем, что частота, время и начальная фаза входят в соотношения под знаком тригонометрических функций.

Анализ электрических цепей значительно облегчается и становится наглядным, если для представления косинусоидальных токов и напряжений использовать векторы на комплексной плоскости и, соответственно, их представление в виде комплексной формы записи. В этом случае косинусоидальные токи и напряжения преобразуются в некие комплексные числа (комплексные амплитуды), содержащие полную информацию о параметрах этих токов и напряжений, и весь анализ выполняется с такими комплексными амплитудами. Применяя различные формы представления комплексных чисел можно относительно просто выполнять алгебраические операции, необходимые для проведения электрических расчетов. Как оказалось такой подход оказывается весьма удобным также при дифференцировании, интегрировании гармонических процессов, в ряде других приложений. Важно и то, что использование комплексных амплитуд позволяет обобщить понятие сопротивле-

ния, ввести понятие *комплексного сопротивления* для электрической цепи в которой протекают гармонические токи.

Метод комплексных амплитуд основан на представлении косинусоидальных (синусоидальных) функций через экспоненты с мнимым аргументом.

Гармонический процесс, при таком подходе, представляется (рис.1.9) неким вектором \vec{U} , вращающимся на комплексной плоскости с угловой частотой ω против хода часовой стрелки, длина которого равна амплитуде колебаний U_m .

Движение такого вектора описывается уравнением мгновенного комплекса, показывающим, как меняется комплексное число, характеризующее положение конца вектора на комплексной плоскости,

$$u_k(t) = U_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (1.12)$$

Множитель $e^{j(\omega t + \psi)}$ в уравнении (1.12) является оператором вращения мгновенного комплекса (любая комплексная величина, будучи умножена на него, получает свойства вращения). Он выполняет поворот вектора длиной U_m на угол ωt против хода часовой стрелки.

На основании формулы Эйлера

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta.$$

Тогда (1.12) можно привести к виду

$$u_k(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi) = u_{re} + j u_{im}. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13) означает, что мгновенный комплекс, у которого каждому мгновенному значению соответствует свое положение вектора в комплексной плоскости, представляется двумя проекциями (рис.1.10):

$$\text{на ось абсцисс } u(t) = u_{re} = U_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$\text{и на ось ординат } u(t) = u_{im} = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

При этом, косинусоидальной форме представления напряжения, соответствует проекция вектора длиной U_m , вращающегося с угловой

скоростью ωt против хода часовой стрелки, на ось вещественных чисел комплексной плоскости; синусоидальной форме представления – на ось мнимых чисел.

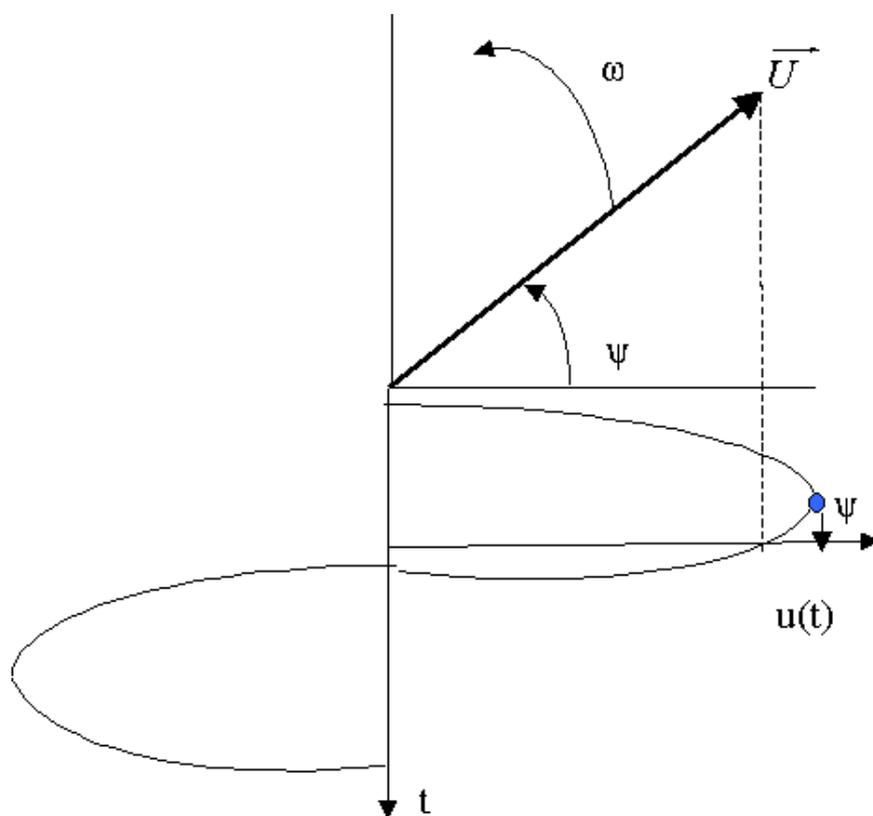


Рис. 1.9. Представление гармонического процесса с помощью мгновенного комплекса

Чтобы еще в большей степени упростить анализ и сделать его наглядным, вектор на комплексной плоскости, рассматривается (изображается) в момент времени $t = 0$ (т.е. как бы фотографируется в начальный момент или, по другому, наблюдается с положения, находящегося на вращающейся плоскости). В этом случае вектор как бы останавливается и его можно характеризовать всего лишь двумя числами - амплитудой и начальной фазой .

Но тогда, получается, что гармоническое колебание с заранее известной частотой ω , описываемое временной зависимостью $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$ или $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, преобразуется в одно комплексное число, которое графически на комплексной плоскости можно представить в виде точки или вектора - комплексной амплитуды. При

таким символическим представлением косинусоидальной функции в виде вектора - комплексной амплитуды получаем

$$\dot{U} = U_m e^{j\psi}. \quad (1.14)$$

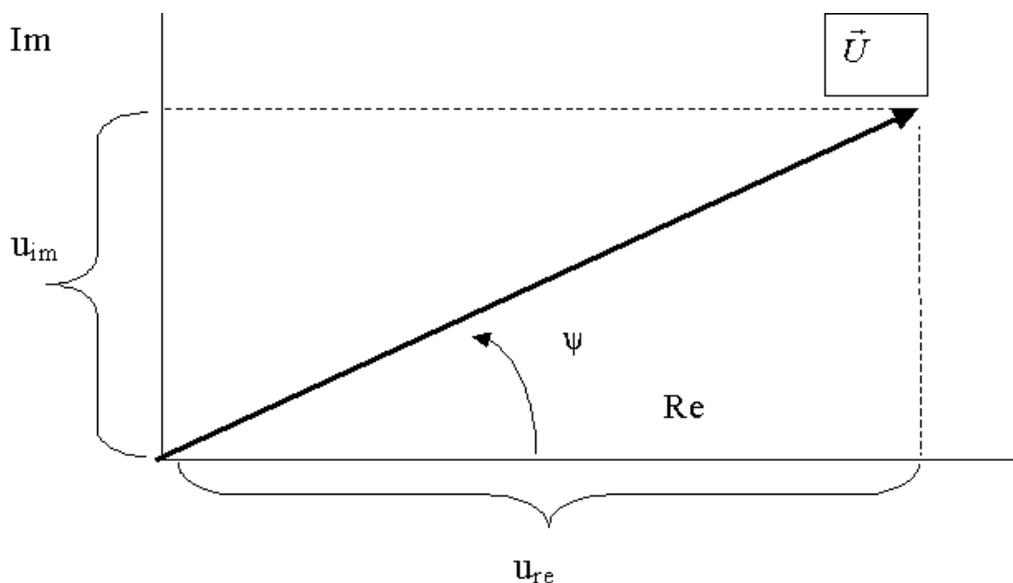


Рис. 1.10. Представление мгновенного комплекса проекциями

Условимся комплексное число ($\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$, $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_u}$), модуль которого равен амплитуде, а аргумент - начальной фазе функции, описывающей гармоническое колебание, называть *комплексной амплитудой* колебания (напряжения, тока). Такой термин принят не только потому, что это число является комплексным, но и потому, что оно в совокупности, комплексно определяет амплитуду и начальную фазу гармонического колебания.

Комплексная амплитуда колебания, с другой стороны, определяет положение вектора на комплексной плоскости (плоскости комплексных амплитуд), исходящего из начала координат и направленного в точку, характеризуемую комплексным числом ($\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$, $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_u}$), и соответствующую рассматриваемому гармоническому колебанию (напряжению, току) в момент $t = 0$. Следовательно, использование комплексных амплитуд позволяет сопровождать аналитические расчеты наглядными графическими построениями – векторными диаграммами.

При этом начальной точке косинусоиды соответствует совмещение вектора с осью вещественных в правой полуплоскости. Начальная фаза

отражает угловое положение этого вектора на комплексной плоскости. Начальная фаза отсчитывается от оси вещественных к вектору в ближайшем направлении. Начальная фаза положительна, если направление отсчета совпадает с направлением вращения вектора (против хода часовой стрелки). Если направление отсчета противоположно, начальная фаза отрицательна. На рис.1.10 начальная фаза положительна.

Как определяется угол сдвига фаз напряжения относительно тока показано на рис.1.11

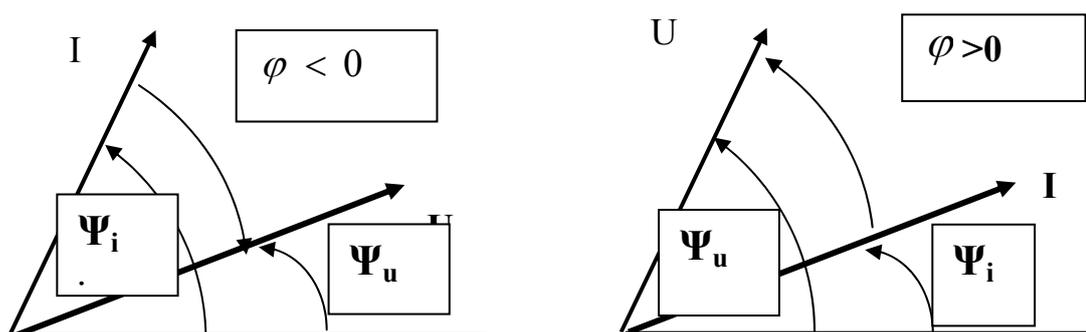


Рис. 1.11. Отсчет угла сдвига фаз напряжения относительно тока

Таким образом, если соблюдать правила отсчета начальных фаз (и сдвига фаз), то можно утверждать, что между косинусоидальной функцией времени (1.11) и комплексной амплитудой тока (напряжения) существует взаимно однозначное соответствие. Т.е. комплексную амплитуду можно рассматривать как преобразование в комплексную (частотную) область косинусоидальной функции времени заданной частоты.

Используя комплексные амплитуды тока и напряжения можно, обобщая понятие сопротивления, ввести понятие комплексного сопротивления. *Комплексное сопротивление (импеданс, Impedance) $Z(j\omega)$* – это комплексная величина, равная отношению комплексной амплитуды напряжения на зажимах элемента цепи к комплексной амплитуде тока в этом элементе

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}. \quad (1.15)$$

Переходя к показательной форме записи каждого параметра в (1.10). находим

$$Z(j\omega) = \tilde{z}e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_m \cdot e^{j\psi_u}}{\dot{I}_m \cdot e^{j\psi_i}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)}, \quad (1.16)$$

где $\tilde{z} = |Z|$ - модуль комплексного сопротивления элемента;

φ - аргумент комплексного сопротивления численно равный разности начальных фаз напряжения и тока.

Итак, метод анализа гармонических колебаний, в котором операции над функциями, описывающими колебания во временной области, заменяются операциями над их символическими изображениями (комплексными числами), получил название *символического метода анализа гармонических колебаний или метода комплексных амплитуд*.

1.5. Импульсные токи и напряжения электрической цепи

Наряду с удобными периодическими, гладкими, стационарными (в какой бы интервал времени в прошлом или будущем мы не рассматривали косинусоиду, она всегда будет представлять кривую одного и того же вида с неизменными во времени параметрами) гармоническими функциями в электротехнике и электронике широко используются и другие виды колебаний. В частности, очень важный класс колебаний представляют импульсные электрические сигналы или, коротко, импульсы.

Импульсные колебания существуют лишь в пределах конечного отрезка времени (математики говорят-имеют конечный носитель). Они имеют специфическую форму, локальные особенности (быстро убывают или нарастают, имеют пики (всплески), претерпевают резкие изменения в своем поведении во времени, а зачастую, как говорят математики, имеют разрывы). Для импульсов, чтобы знать их поведение в любой момент времени, необходимо располагать информацией о каждом мгновенном значении сигнала в каждый момент времени.

Чтобы сделать импульсные сигналы объектом теоретического изучения и практического использования, следует указать способ их ма-

тематического описания или, говоря языком современной науки, создать математическую модель такого сигнала.

Как известно, математическая модель может быть задана в виде аналитического выражения, графиков, таблиц. Наиболее часто используется для изучения реальных импульсных сигналов их представление в виде математических зависимостей, аргументом которых является время.

Математическую модель импульсного сигнала в электротехнике и электронике обычно записывают двумя способами:

а) выражением, представляющим сигнал на временных интервалах (отрезках) в виде системы функций, описывающих зависимость сигнала от времени;

б) формулой, представляющей сигнал в виде комбинаций функций Хевисайда.

Рассмотрим представление типовых импульсных сигналов по первому способу, на временных интервалах.

Прямоугольный (П-образный) импульс, показанный на рис.1.12, можно представить следующей математической моделью.

Его аналитическая зависимость $u(t)$ на временных интервалах описывается следующей системой

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_m & 0 \leq t \leq t_u \\ 0 & t > t_u \end{cases} \quad (1.17)$$

Заметим, что для характеристики П-импульса часто, вместо полной математической модели, характеризующей «тонкую структуру» импульса, пользуются параметрами импульса: *амплитудой* – U_m ; *длительностью импульса* – t_u .

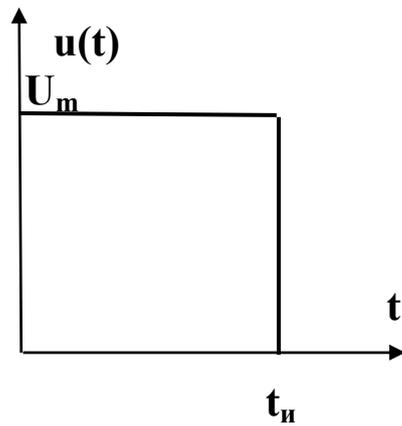


Рис. 1.12 Прямоугольный импульс

Импульс трапециидальной формы (рис.1.13) описывается аналитической зависимостью в виде системы равенств

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > 0, \\ Um \frac{t}{t_2}, & 0 \leq t \leq t_2, \\ Um, & t_2 < t < t_3, \\ Um \frac{t-t_4}{t_3-t_4}, & t_3 \leq t \leq t_4. \end{cases} \quad (1.18)$$

Обратим внимание, что для описания линейно нарастающих (линейно убывающих) участков импульсов пользуются зависимостями, получающимися из уравнения прямой, проходящей через две точки.

Для нарастающего участка, называемого *фронтом импульса*, получаем

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (X - X_1) \Rightarrow u(t) - 0 = \frac{Um - 0}{t_2 - t_1} (t - t_1) \Rightarrow$$

$$u(t) = \frac{Um \cdot t}{t_2}. \quad (1.19)$$

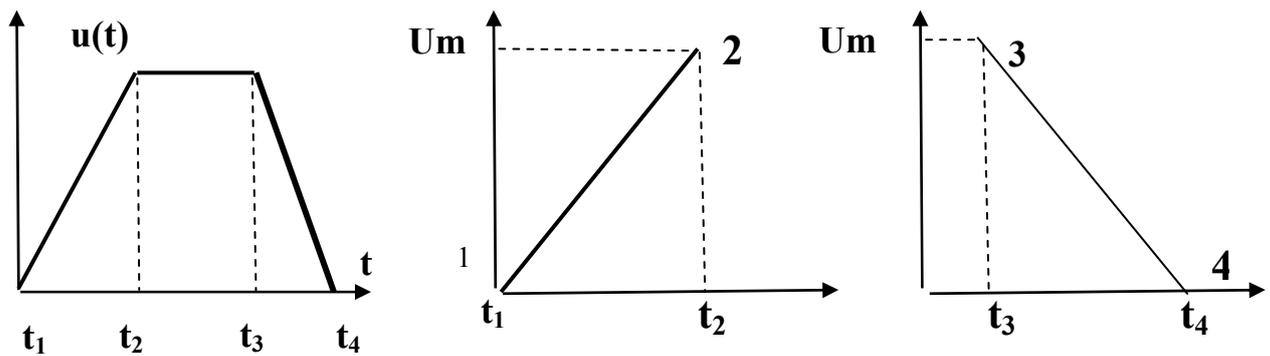


Рис. 1.13. Трапецидальный импульс и представление его фронта и спада отрезками

Для спадающего участка, именуемого *спадом (срезом) импульса*, находим

$$Y - Y_3 = \frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} (X - X_3) \Rightarrow u(t) - u(t_3) = \frac{u(t_4) - u(t_3)}{t_4 - t_3} (t - t_3) \Rightarrow u(t) = Um \frac{t - t_4}{t_3 - t_4}.$$

Симметричный и несимметричный (пилообразный) треугольные импульсы, показанные на рис.1.14, можно представить следующими математическими моделями

$$u_{\text{сим}}(t) \begin{cases} Um \left(1 - \frac{|t|}{(t_u/2)}\right), & \text{при } |t| \leq \frac{t_u}{2}, \\ 0, & \text{при } |t| > \frac{t_u}{2}, \end{cases} \quad (1.20)$$

$$u_{\text{несим}}(t) \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > 0, \\ Um \frac{t}{t_2}, & 0 \leq t \leq t_2, \\ Um, & t = t_2, \\ Um \frac{t - t_3}{t_2 - t_3}, & t_2 < t < t_3. \end{cases} \quad (1.21)$$

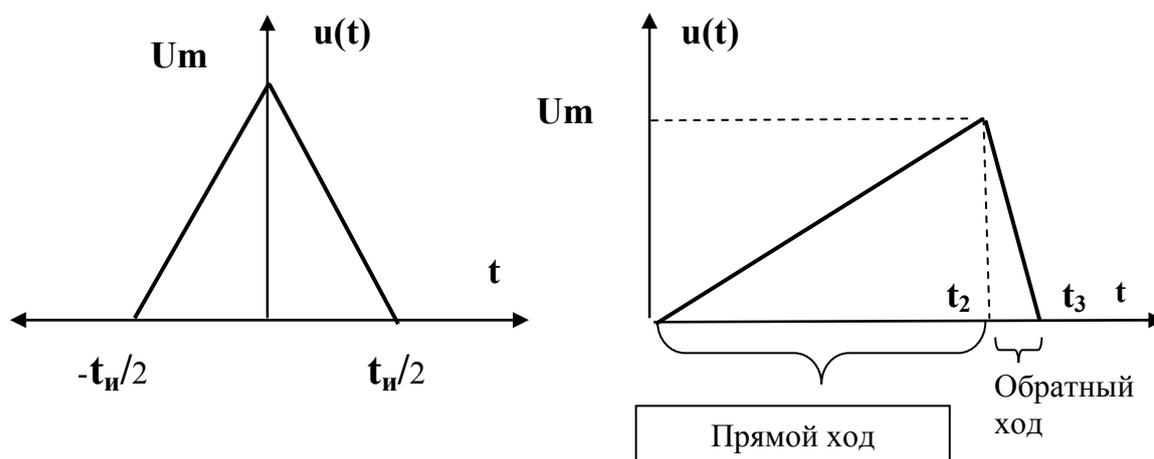


Рис. 1.14. Треугольные импульсы

Напряжение (1.21) создается устройствами развертки, поэтому участок на котором напряжение нарастает называют прямым ходом развертки, а где убывает- обратным ходом развертки.

Рассмотренные математические модели сигналов отражают изменение уровня напряжения во времени. На экране осциллографа их можно наблюдать реально, поэтому показанные графики часто еще называют *осциллограммами* импульсных сигналов.

В электротехнике также используют импульсный сигнал $u(t)$, показанный на рис.1.15, математическая модель которого задается системой

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ 0.5\left(\frac{t}{t_1} + 1\right), & -t_1 \leq t \leq t_1 \\ 1, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.22)$$

Функция $u(t)$ такого сигнала описывает процесс перехода некоторого физического объекта из «нулевого», или, как говорят, выключенного состояния, в «единичное»-включенное состояние. Переход совершается плавно, по линейному закону $u(t) = (1/2t_1) (t + t_1)$ за время $t_{перех} = t_1 - (-t_1) = 2t_1$.

Если параметр t_1 устремить к нулю, то в пределе, переход из одного состояния в другое будет совершаться мгновенно.

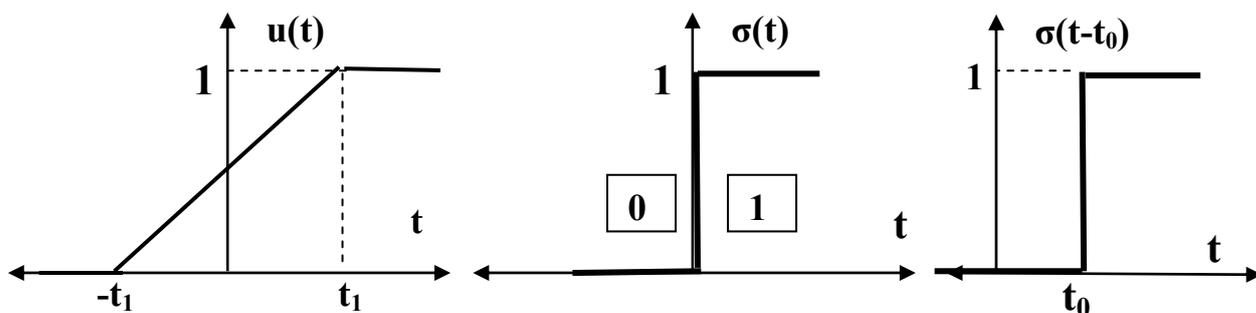


Рис. 1.15. Функции включения

Математическая модель этого предельного сигнала получила название функции включения (единичной функции, единичного скачка) или функции Хевисайда:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчета на величину времени t_0 (имеет место запаздывание момента включения)

$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \frac{1}{2}, & t = t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Функция Хевисайда обладает важным свойством: умножение любого электрического сигнала $u_1(t)$ на функцию $\sigma(t-t_0)$ { $\sigma(t)$ } равносильно включению этого сигнала в момент t_0 { $t=0$ }

$$u(t) = \sigma(t) \cdot u_1(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Прием, связанный с умножением электрического сигнала на единичную функцию включения, как мы увидим в дальнейшем, широко используется для создания математических моделей импульсных сигналов, у которых необходимо описывать функциональную зависимость с разрывом первого рода или скачком производной функции.

Как уже отмечалось, для представления импульсных сигналов используют два способа его математического описания. Второй способ аналитической записи математической модели как раз и представляет электрический сигнал с помощью комбинаций (суммы и произведения) функций Хевисайда.

Рассмотрим теперь представление тех же типовых импульсных сигналов по второму способу, с помощью комбинаций функций Хевисайда.

Импульсный сигнал прямоугольной формы с амплитудой Um и длительностью t_u , у которого фронт импульса совпадает с началом отсчета времени (рис), можно записать в виде разности двух функций

$$u(t) = F_1 - F_2 = Um \cdot \sigma(t) - Um \cdot \sigma(t - t_u).$$

Эффект скачка напряжения при $t = 0$ описывается функцией $F_1 = Um \sigma(t)$. Чтобы импульс окончился при $t = t_u$, необходимо вычесть такой же скачек напряжения, но запаздывающий по времени на величину $t = t_u$, т.е. вычесть $F_2 = Um \sigma(t - t_u)$.

Прямоугольный импульс, сдвинутый на время t_0 относительно начала отсчета (запаздывающий на время t_0), запишется так

$$u(t) = Um \cdot \sigma(t - t_0) - Um \cdot \sigma(t - t_u - t_0).$$

Треугольный симметричный импульс $u(t)$ можно представить в виде суммы трех линейно изменяющихся функций, умноженных на функции Хевисайда и сдвинутых на соответствующее время (рис.1.16)

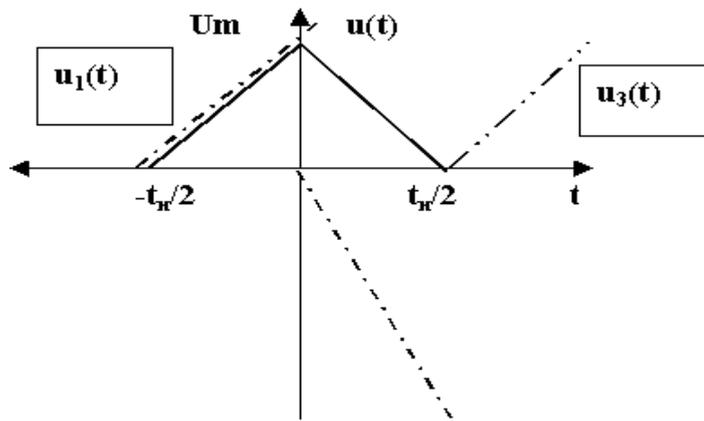


Рис. 1.16. Представление треугольного импульса с помощью комбинаций функций Хевисайда

$$u_1(t) = 2 \frac{Um}{t_u} (t + t_u / 2) \sigma(t + t_u / 2), \quad (1.26)$$

$$u_2(t) = 2 \frac{Um}{t_u} (t) \sigma(t), \quad (1.27)$$

$$u_3(t) = 2 \frac{Um}{t_u} (t - t_u / 2) \sigma(t - t_u / 2), \quad (1.28)$$

Импульс в форме трапеции (рис.1.17) можно представить последовательностью четырех линейно-ломаных функций

Для описания линейно нарастающих (линейно убывающих) участков импульса, в отличие от ранее использованных зависимостей, получающихся из уравнения прямой, проходящей через две точки, здесь применим прием описания, когда прямые задаются угловыми коэффициентами K_1, K_2, K_3, K_4 .

Напомним, что угол β_1 наклона прямой относительно оси абсцисс может быть выражен через угловой коэффициент K_1 следующим образом: $K_1 = \text{tg } \beta_1$. Тогда, фронт трапециидального импульса может быть представлен уравнением прямой с угловым коэффициентом $K_1 = \frac{Um}{t_2 - t_1}$, умноженным на функцию Хевисайда $\sigma(t)$

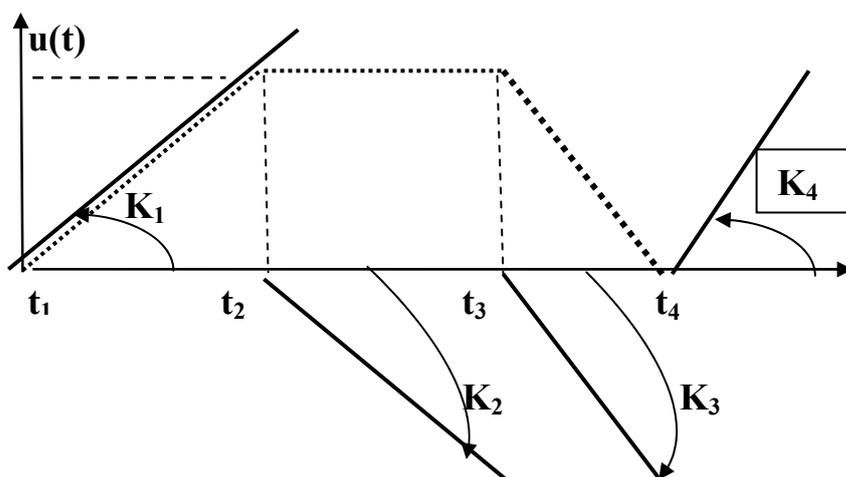


Рис. 1.17. Представление трапециидального импульса прямыми с заданными угловыми коэффициентами

$$u_1(t) = K_1 \cdot t \cdot \sigma(t) = \frac{U_m}{t_2 - t_1} \cdot t \cdot \sigma(t) = \frac{U_m}{t_2} \cdot t \cdot \sigma(t). \quad (1.29)$$

С момента времени \$t_2\$ величина напряжения должна оставаться неизменной. Для этого необходимо, чтобы после времени \$t_2\$ к первой функции была добавлена вторая функция, описывающая прямую, у которой угловой коэффициент \$K_2\$ должен быть равным по величине \$K_1\$, но быть отрицательным

$$u_2(t) = K_2 \cdot (t - t_2) \cdot \sigma(t - t_2) = -\frac{U_m}{t_2} \cdot (t - t_2) \cdot \sigma(t - t_2). \quad (1.30)$$

При \$t_2 \leq t \leq t_3\$ и \$t > t_3\$

$$u_1(t) = K_1 \cdot t \cdot u_2(t) = K_2 \cdot (t - t_2) \Rightarrow u_{23}(t) = K_1 \cdot t - K_1 \cdot (t - t_2) = K_1 \cdot t_2 = \frac{U_m}{t_2} \cdot t_2 = U_m$$

Для описания спада импульса необходимо в описание добавить еще одну функцию с отрицательным угловым коэффициентом \$K_3\$

$$u_3(t) = K_3 \cdot (t - t_3) \sigma(t - t_3) = -\frac{U_m}{(t_4 - t_3)} (t - t_3) \sigma(t - t_3). \quad (1.31)$$

Наконец, после окончания импульса, когда напряжение становится равным нулю, добавим функцию с угловым коэффициентом $K_4 = K_3$, но положительным

$$u_4(t) = K_4 \cdot (t - t_4) \sigma(t - t_4) = \frac{Um}{(t_4 - t_3)} (t - t_4) \sigma(t - t_4). \quad (1.32)$$

При $t > t_4$

$$\begin{aligned} u_{23}(t) &= Um, \quad u_3(t) = K_3 \cdot (t - t_3), \quad u_4(t) = K_4 \cdot (t - t_4) = -K_3(t - t_4) \Rightarrow \\ u(t) &= u_{23}(t) + u_3(t) + u_4(t) = Um + K_3 \cdot (t - t_3) - K_3 \cdot (t - t_4) = Um + K_3 \cdot (t_4 - t_3) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, математическая модель трапециидального импульса выражается на непрерывной оси времени с помощью комбинаций (суммы и произведений) функций Хевисайда

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t).$$

После того, как мы научились представлять импульсные сигналы математическими зависимостями, возникает ряд резонных вопросов.

Во-первых, в каком смысле можно сравнивать импульсные сигналы? Как оценивать насколько два неодинаковых импульса «похожи» друг на друга или, наоборот, «удалены» друг от друга? Что служит мерой «расстояния» между ними? Наконец, в каком смысле можно говорить о «величине» импульса, утверждая, например, что один импульс «больше» другого.

Очевидно, что использовать для получения ответов на вопросы метод комплексных амплитуд, хорошо зарекомендовавший себя для гармонических сигналов, не представляется возможным. Однако, использованный при этом подход, заключающийся в представлении гармонических функций (в общем случае характеризуемых бесконечным, несчетным множеством точек) счетной системой комплексных чисел, векторами на комплексной плоскости является весьма привлекательным и вполне наглядным. Хотелось нечто подобное иметь и для импульсных сигналов.

В XX веке был создан функциональный анализ - раздел математики, обобщающий представления о функциях как о неких «векторах» в многомерных пространствах. Оказалось, что идеи функционального анализа дают возможность создать стройную теорию импульсных сигналов и получить ответы на поставленные вопросы. В основе такой теории лежит концепция импульсного сигнала как элемента, как вектора в специальном образом сконструированном бесконечномерном пространстве. Элементами такого пространства являются не только различные числа, но и функции, функционалы, операторы.

Понятно, что использование функционального анализа в наше время связано с большим числом фундаментальных понятий из самых различных разделов современной математики. Понятия эти зачастую таковы, что попытки пояснить их суть доходчиво, аргументировано и достаточно коротко, наталкиваются на серьезные затруднения. Поэтому, принося в жертву математическую строгость и полноту, мы будем использовать лишь фрагменты этой теории, ведущие нас по кратчайшему пути к выяснению «физического смысла» геометрических методов в теории сигналов, к получению неких «наглядных представлений» об анализируемом объекте.

Не описывая такие понятия, как линейное векторное пространство, его структура, метрическое, Евклидово, Гильбертово пространства и прочее, перейдем к понятиям, характеризующим геометрическое представление сигналов.

Будем считать, что мы имеем дело с импульсными сигналами, имеющими конечную длительность и ограниченную по величине мгновенную мощность. Энергия таких сигналов конечна. Множество таких сигналов (как неких точек, точек концов векторов) располагается в пространстве в котором введен способ определения расстояния между его двумя точками, а также расстояние между началом координат и какой либо точкой этого пространства.

Назовем *нормой* такого пространства сигналов некое расстояние между началом координат и какой либо точкой пространства. Тогда, для вещественного аналогового импульсного сигнала $u(t)$, отличного от нуля на интервале времени $[-T, T]$ (финитного сигнала), норму сигнала можно записать

$$\|u(t)\| = \sqrt{\int_{-T}^T u^2(t) dt} . \quad (1.33)$$

Помимо нормы, как аналога длины вектора в геометрии, введем понятие *нормированного сигнала*, подобно вектору единичной длины

$$\frac{u(t)}{\|u(t)\|} = \frac{u(t)}{\sqrt{\int_{-T}^T u^2(t) dt}} . \quad (1.34)$$

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*

$$E_u = \|u(t)\|^2 = \int_{-T}^T u^2(t) dt . \quad (1.35)$$

Введенную таким образом норму (как аналог длины вектора) часто называют энергетической. Это обусловлено тем, что о величине импульсного сигнала удобно судить по тому какой энергетический эффект он производит (например, какое количество теплоты он выделяет). В резисторе с сопротивлением 1 Ом, если на его зажимах действует напряжение $u(t)$, действительно выделяется энергия равная $E_u = \|u(t)\|^2$. Кроме того, такая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, происходящим очень быстро, на коротких отрезках времени.

Введем еще одно фундаментальное понятие, которое обобщало бы наше обычное представление о расстоянии между точками пространства (расстояние между точками концов векторов, разность векторов).

Метрика (расстояние) между сигналами $u_1(t)$ и $u_2(t)$ определяется как норма разности двух сигналов

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| = \sqrt{\int_{-T}^T [u_1(t) - u_2(t)]^2 dt} . \quad (1.36)$$

Зная метрику можно судить о том насколько один сигнал «близок» к другому или насколько хорошо один сигнал аппроксимирует (приближает) другой.

Энергию взаимодействия двух сигналов (взаимную энергию сигналов, работу сил поля при перемещении в пространстве от одного сигнала к другому) характеризует скалярное произведение

$$(u_1(t), u_2(t)) = \int_{-T}^T u_1(t)u_2(t)dt = E_{u,u} \quad (1.37)$$

Аналог угла между векторами (угол между импульсными сигналами) позволяет определить следующее соотношение между скалярным произведением и нормами сигналов

$$\cos \psi = \frac{(u_1(t), u_2(t))}{\|u_1(t)\| \|u_2(t)\|}. \quad (1.38)$$

Если сигналы одинаковой формы и имеют одинаковые нормы, угол ψ характеризует запаздывание одного сигнала относительно другого.

Два сигнала $u_1(t)$ и $u_2(t)$ называются *ортгоналными*, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю

$$(u_1(t), u_2(t)) = \int_{-T}^T u_1(t)u_2(t)dt = 0. \quad (1.39)$$

При этом угол ψ равен 90° .

В заключение отметим, что векторное отображение импульсных сигналов нашло широкое распространение в электротехнике и электронике, так как оно позволяет наглядно представить взаимодействия сигналов, их меру подобия и различия, степень искажения под действием помехи и т.п..

Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрического потенциала данной точки электрического поля
2. Приведите определение понятий напряжения, разности потенциалов, электродвижущей силы.

3. Что означает понятие: активные элементы электрической цепи ?
4. Приведите определение мощности электрической цепи и как определяется ее знак?
5. Что такое вольт-амперная характеристика элемента цепи?
6. Охарактеризуйте понятия: статическое и дифференциальное (динамическое) сопротивления
7. Как определено положительное направление тока в электрической цепи?
8. Как определено положительное направление напряжения в электрической цепи
9. Охарактеризуйте согласный и встречный выбор напряжений и токов в пассивных двухполюсниках.
10. Что называют мгновенным значением тока (напряжения, ЭДС)?
11. Что такое частота и период электрического тока? Как они связаны между собой?
12. В каких единицах измеряются частота и период электрического тока?
13. Кратко охарактеризуйте понятие гармонические процессы. Приведите их математические записи.
14. Охарактеризуйте понятия синусоидального (косинусоидального) тока (напряжения): начальная фаза, полная фаза, амплитуда, угловая частота.
15. Чему равно среднеквадратическое (действующее) значение косинусоидального (синусоидального) тока (напряжения)?
16. Охарактеризуйте понятие комплексного сопротивления для электрической цепи.
17. На чем основан символический метод анализа гармонических колебаний или метод комплексных амплитуд ?
18. Приведите определение комплексной амплитуды колебания (напряжения, тока).
19. Выполните представление гармонического процесса с помощью мгновенного комплекса.
20. Определите понятие и назначение единичной функции или функции Хевисайда.
21. Что такое векторная диаграмма? Для чего она используется ?
22. Как определяется угол сдвига фаз напряжения относительно тока ?
23. Определите понятие комплексное сопротивление (импеданс, Impedance).

24. Что такое импульсные колебания ? Основное отличие их от периодических?
25. Какие существуют 2 математические модели импульсного сигнала в электротехнике и электронике ?
26. Приведите аналитические выражения, описывающие прямоугольные и треугольные импульсы.
27. Охарактеризуйте понятия: фронт, спад (срез) импульса.
28. Что такое прямой и обратный ход пилообразного импульса ? Приведите примеры применения таких импульсных сигналов в электротехнике и электронике.
29. Что такое осциллограмма сигнала ? Как ее наблюдают ?
30. В каком смысле можно сравнивать импульсные сигналы? Как оценивать насколько два импульса «похожи» ? Что служит мерой «расстояния» между ними? В каком смысле можно говорить о «величине» импульса ? Какой раздел математики для этого используется?
31. Приведите основные понятия, характеризующие геометрическое представление сигналов.
32. Дайте определение нормы пространства сигналов.
33. Как определена энергия сигнала?
34. Приведите определение метрики (расстояния) между сигналами $u_1(t)$ и $u_2(t)$.
35. Охарактеризуйте понятие энергии взаимодействия двух сигналов.
36. Дайте определение электрической цепи.

2. ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ И ИХ СВОЙСТВА

Материал этого раздела посвящен изучению входящих в электрическую цепь объектов, с помощью которых осуществляется введение в цепь электрической энергии, преобразование энергии из одного вида в другой и ее потребление. Идеализированные объекты, обладающие лишь каким-либо одним из перечисленных выше свойств, мы будем называть *компонентами (элементами) электрической цепи*. В начале рассматриваются *активные* компоненты, которые вносят в цепь электрическую энергию. Затем изучаются *пассивные* компоненты, которые потребляют вносимую электрическую энергию, их разновидности с точ-

ки зрения того, куда главным образом идет потребленное. Потребление энергии может быть связано с необратимым процессом отвода ее из цепи, или, как говорят, с рассеянием электрической энергии за счет потерь на теплообразование, излучение и т. п. Потребление электрической энергии может быть связано также с ее накоплением в компонентах цепи. При этом энергия может запасаться как в магнитном, так и в электрическом полях компонентов цепи. Каждый компонент, исходя из принятой в теории электрических цепей абстракции, будет представляться как объект, реализующий некоторое математическое соотношение между напряжением и током. Он будет рассматриваться как математическая модель, связующая ток и напряжение и поясняющая суть физических процессов в компоненте. Для удобства, кроме задания компонента в виде математических символов, каждому компоненту мы будем ставить в соответствие графический символ. При наличии в электрической цепи нескольких компонентов будем изображать цепь в виде соединения таких графических символов. Такое изображение будем называть *схемой электрической цепи*. Для понимания языка схем мы будем изучать их «азбуку» - условные графические изображения (УГО) компонентов. Компоненты электрической цепи при определенных обстоятельствах могут включаться в цепь или, наоборот, отключаться. Выполнение этого действия осуществляется с помощью замыкания или размыкания *идеального электрического ключа*, обладающего тем свойством, что его сопротивление в момент замыкания мгновенно с бесконечно большого значения падает до нуля. Процесс переключений в цепи, производимый с помощью ключа путем его замыкания и размыкания называют *коммутацией*.

В материале лекции мы будем анализировать, как в результате коммутации подключаются или отключаются компоненты, варьируют их значения, изменяется структура цепи. Таким образом, цель этой лекции состоит в том, чтобы помочь изучить основные компоненты электрической цепи, освоить работу с их математическими моделями, понять физические процессы, происходящие в них, научиться представлять внешний вид реального изделия и расшифровывать графический значок, применяемый для обозначения элементов на схеме.

2.1. Классификация компонентов (элементов) электрической цепи

Уточним, что под термином «компонент» мы будем понимать объект электрической цепи, выполняющий определенную функцию, и представляющий самостоятельное изделие, которое можно «отделить» от цепи и отдельно исследовать. В состав компонента могут входить несколько элементов, но при этом элемент нельзя отделить от компонента как самостоятельный объект и отдельно исследовать. *Элемент* далее неразложимый объект, входящий в состав компонента.

В компоненте электрической цепи всегда различают некое «тело» и выводы. *Вывод* – проводник, которым данный компонент соединяется с другими компонентами цепи. Вывод также именуют терминал, зажим, клемма, полюс, токосъемный вывод и т.п. В зависимости от того, сколько компонент имеет выводов (полюсов) различают двухполюсники, трехполюсники, четырехполюсники, многополюсники, в частности, N-полюсники.

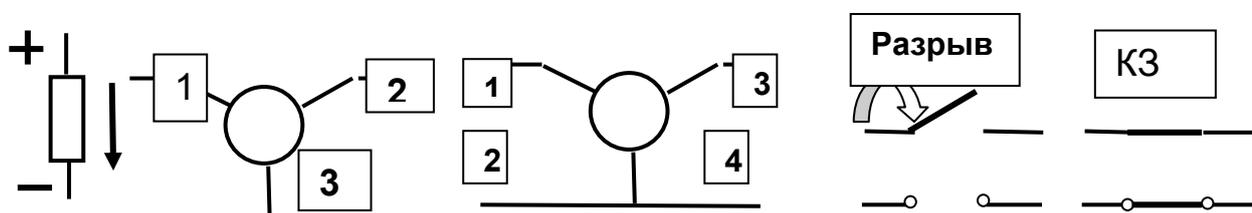


Рис. 2.1. Модели N-полюсников электрической цепи

У двухполюсника токи через выводы (противоположные полюса) равны по величине и противоположны по направлению. Его поведение описывается функциональной связью тока, протекающего через выводы, с напряжением на его выводах, именуемой вольт-амперной характеристикой (ВАХ).

В электротехнике используют следующие разновидности двухполюсников.

Разрыв в цепи - двухполюсник, сила тока в выводах которого равна нулю при любом значении напряжения. Электрическое сопротивление разрыва считается равным бесконечности.

Короткозамкнутая перемычка или, коротко, короткое замыкание (КЗ) – двухполюсник, напряжение между выводами которого равно нулю при любом значении силы тока. Электрическое сопротивление КЗ считается равным нулю.

Ключ (электрический) – двухполюсник, осуществляющий под воздействием управляющего сигнала, мгновенный переход от состояния разрыва цепи к состоянию, когда его выводы замкнуты накоротко, к КЗ. При коммутации ключа его сопротивление меняется с нуля на бесконечность или наоборот.

О других широко распространенных двухполюсниках, таких как резистивный, индуктивный и емкостной компоненты подробно поговорим несколько позже.

При описании двухполюсников, а также электрических цепей, у которых доступ к схеме возможен через два вывода и соединения компонентов организованы в них так, чтобы выводы были парными (т. е. токи через выводы равны по величине и противоположны по направлению), иногда употребляют термин *порт* (не строго - пара выводов, клемм, полюсов). В этом смысле двухполюсная схема (двухполюсник) является однопортовой, поскольку вне зависимости от ее подсоединения токи двух выводов (полюсов) являются парными. Пару выводов вольтметра, амперметра, осциллографа можно назвать портом.

Последовательное соединение двухполюсников, при котором в любой момент времени втекающие и вытекающие через выводы двухполюсников токи одинаковы, и через компоненты протекает один и тот же ток называется *ветвью*.

Место соединения ветвей или полюсов многополюсных компонент называют *узлом*.

К многополюсникам применяют понятия «вход» и «выход».

Входом многополюсника называют пару его выводов, к которым подключается источник, осуществляющий «воздействие» на многополюсник. *Выходом* многополюсника называют пару его выводов, к которым подключен двухполюсник, регистрирующий «отклик» (результат, реакцию на воздействие). Отметим, что воздействия в электрических цепях характеризуются заданными законами изменения во времени напряжений и (или) токов, действующих в цепи.

Понятие «вход» и «выход» широко применяют к четырехполюснику, как некому «черному ящику». Суть такого подхода состоит в том, что,

с одной стороны (к «входу» четырехполюсника), подключен двухполюсник, содержащий «источник сигнала», а, с другой стороны (к «выходу» четырехполюсника), – двухполюсник, содержащий «нагрузку» (потребителя).

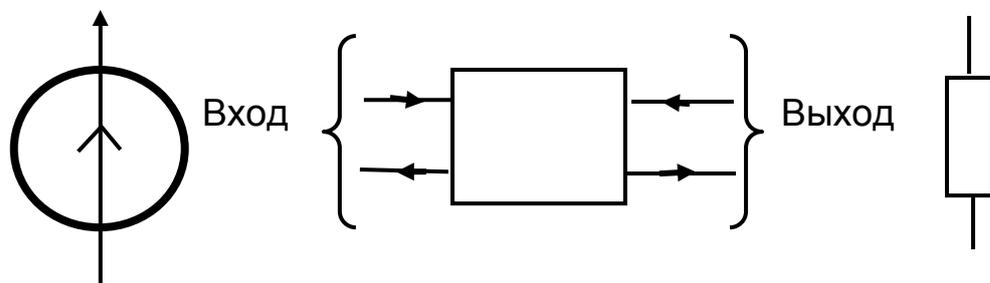


Рис. 2.2. Модель четырехпольсника в виде «черного ящика»

Четырехполюсная схема является двухпортовой, т.е. имеет порт «входа» и «выхода». Если один вывод трехполюсника разделить на два, сделав как бы общим, то трехполюсник становится четырехполюсником с входом и выходом. Поэтому без потери общности трехполюсную схему можно представлять в виде двухпортовой.

Компоненты электрической цепи по отношению к энергии можно поделить на следующие группы.

Источники (генераторы), компоненты которые вносят энергию в электрическую цепь.

Резистивные сопротивления, компоненты которые рассеивают энергию.

Индуктивности, компоненты которые запасают ее в виде энергии магнитного поля

Электрические емкости, компоненты которые запасают ее в виде энергии электрического поля.

Коммутаторы, компоненты которые переводят энергетическое состояние цепи в новое качество.

Различают *активные и пассивные электрические цепи*. К первым относятся источники, а ко вторым – резистивные сопротивления коммутаторы, индуктивности и емкости. Индуктивности и емкости часто называют реактивными компонентами электрических цепей.

2.2. Источники энергии (генераторы) электрической цепи

2.2.1. Общие вопросы характеристики источников энергии

Под *источником энергии (генератором)* в теории электротехники понимают компонент, питающий цепь электромагнитной энергией. Источник является активным элементом и у него, как отмечалось в лекции 1, мощность отрицательна. Это означает, что его ВАХ лежит во втором и четвертом квадрантах.

Для анализа электрических цепей удобно вводить и использовать идеализированные источники двух видов: источник напряжения и источник тока. Они учитывают главные свойства реальных источников. При соответствующем дополнении идеализированных источников моделями пассивных элементов, как увидим дальше, можно передать все свойства реальных источников по отношению к их внешним выводам.

Под *идеализированным источником напряжения (ИИН)* понимают такой компонент электрической цепи с двумя выводами (двухполюсник), напряжение (ЭДС) которого задано в виде некоторой функции времени не зависящей от величины тока, отдаваемого во внешнюю цепь.

Источникам постоянной ЭДС, у которых напряжение есть величина постоянная $U_0 = const$, независящая от времени, соответствует ВАХ, представленная на рис. 2.3. Такой вид графика ВАХ означает, что ИИН possui следующие свойства.

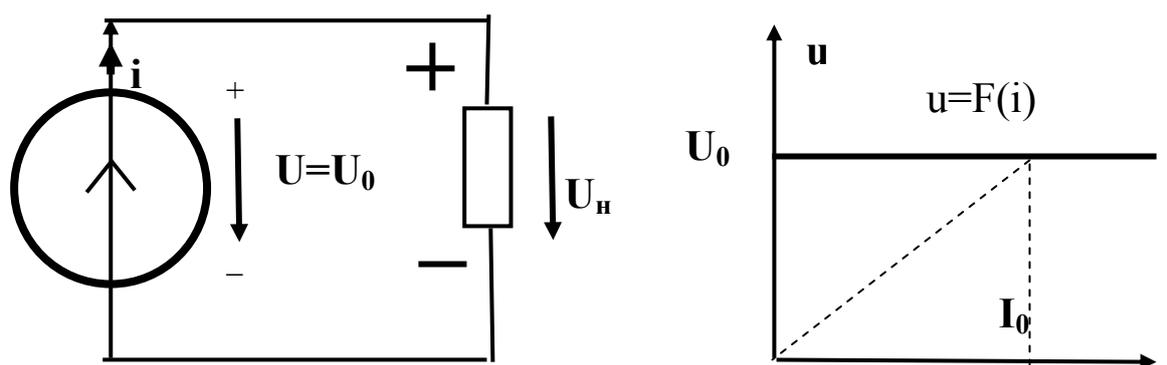


Рис. 2.3. Модель ИИН с нагрузкой и его ВАХ

1. Величина напряжения на выводах ИИН U_0 не зависит от свойств подключенной к нему цепи (нагрузки). Каково бы не было сопротивление нагрузки, как бы оно не менялось по величине и с течением времени на-

пряжение на выводах будет одним и тем же неизменным, стабильным. Предполагается, что у ИИН ЭДС также не зависит от условий окружающей среды, в первую очередь от температуры (говорят, что ИИН термостабилен), и от всякого рода дестабилизирующих факторов (старения элементов, из которых он изготовлен, и т.п.).

Напомним, что ЭДС источника E определяет работу, затрачиваемую на перемещение положительного заряда от отрицательного вывода источника к положительному (рис. 1.5). Эта работа совершается за счет сторонних сил, возникающих в результате затраты другого вида энергии в источнике.

2. ИИН характеризуется двумя внутренними сопротивлениями: статическим R_0 и дифференциальным r

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0}, \quad r = \frac{dU}{dI} = 0. \quad (2.1)$$

Следует иметь в виду, что величины этих сопротивлений различаются. Дифференциальное внутреннее сопротивление, являясь производной от постоянной величины, равно нулю. Статическое сопротивление, хотя и мало, но все же конечно.

3. Такой идеализированный источник способен отдавать неограниченную мощность. Это несложно определить при величине нагрузки стремящейся к нулю. Следует отметить, что режим короткого замыкания источника, напряжение которого не равно нулю, противоречит определениям источника напряжения и короткого замыкания и поэтому не должен рассматриваться.

Условное графическое обозначения ИИН (Рис.2.3), где принята положительная полярность ЭДС источника указывается стрелкой внутри кружочка, а линия внутри является сплошной, без разрыва, как у КЗ перемычки, подчеркивает также тот факт, что дифференциальное внутреннее сопротивление ИИН равно нулю. Такие же обозначения применяют и для источников синусоидальных напряжений.

Под *идеальным источником тока (ИИТ)* понимают такой компонент электрической цепи с двумя выводами (двухполюсник), через выводы которого протекает ток с заданным законом изменения во времени независимо от напряжения, появляющегося между выводами.

Источникам постоянного тока, у которых ток есть величина постоянная $I_0 = const$, независимая от времени, соответствует ВАХ, представленная на рис.2.4.

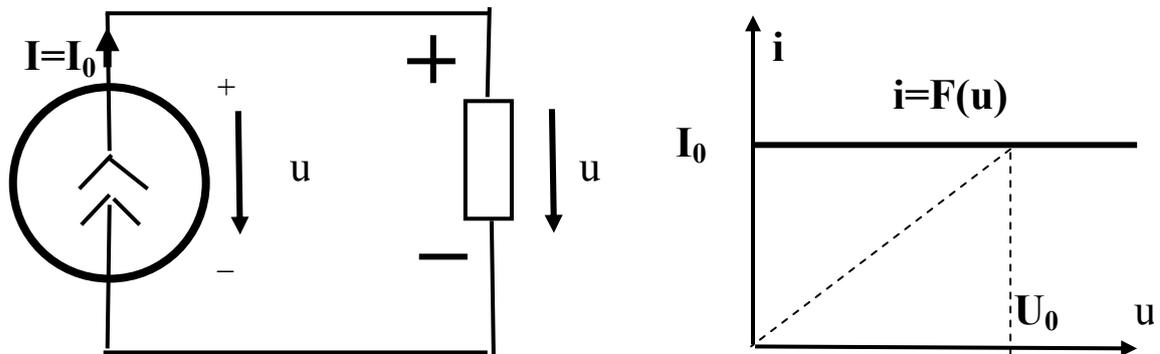


Рис. 2.4. Модель ИИТ с нагрузкой и его ВАХ

Такой вид графика означает, что ИИТ присущи следующие свойства.

1. Величина тока I_0 на выводах ИИТ не зависит от свойств подключенной к нему цепи (нагрузки). Каково бы не было сопротивление нагрузки, как бы оно не менялось по величине и с течением времени напряжение на выводах будет одним и тем же неизменным, стабильным. ИИТ термостабилен. Предполагается, что ИИТ не зависим от всякого рода дестабилизирующих факторов.

2. ИИТ характеризуется двумя внутренними сопротивлениями: *статическим и дифференциальным*

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0}, \quad r = \frac{dU}{dI} = 1 / \frac{dI}{dU} = \frac{1}{0} = \infty. \quad (2.2)$$

Очень важно, что величины этих сопротивлений существенно различаются. Дифференциальное внутреннее сопротивление, являясь величиной обратной от производной постоянной величины, равно бесконечности. Статическое сопротивление конечно и может быть малой величины. Свойство ИИТ, проявляющееся в существенной разнице сопротивлений, в настоящее время широко используется при создании устройств электроники.

3. Такой идеализированный источник способен отдавать неограниченную мощность, что проявляется при нагрузках стремящихся к бесконечности. Разрыв выводов источника тока, ток которого не равен нулю, противоречит определению источника тока и разрыва и должен быть исключен из рассмотрения.

Условное графическое обозначения ИИТ (Рис. 2.4), где двойная стрелка внутри кружочка указывает на принятое положительное направление тока источника, а линия внутри изображена с разрывом, как у разрыва цепи, подчеркивает также тот факт, что дифференциальное внутреннее сопротивление ИИТ равно бесконечности. Такие же обозначения применяют и для источников синусоидальных напряжений.

Реальные источники напряжения и тока имеют ограниченную мощность. Поэтому ток, вытекающий через выводы, и напряжения на выводах реальных источников зависят от сопротивления нагрузки. С увеличением тока через выводы напряжение на выводах реального источника энергии уменьшается. Это обусловлено наличием потерь энергии внутри источника. Из-за этого в модели реальных источников энергии, по сравнению с ИИН или ИИТ, вводят дополнительный компонент, учитывающий потери энергии и ограничивающий мощность источника.

Принято реальный источник энергии заменять некоторой эквивалентной схемой, состоящей из идеального источника и сопротивления (комплексного сопротивления). Поэтому реальный источник может быть замещен либо реальным источником напряжения, либо реальным источником тока.

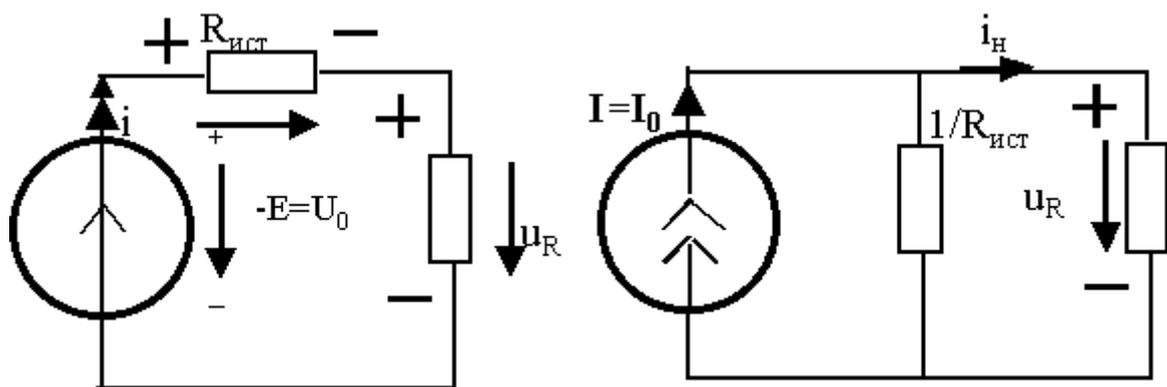


Рис. 2.5. Модели замещения реального источника энергии

Напряжение u_R на выходе реального источника, представленного в виде ИИН с ЭДС E и внутреннего сопротивления $R_{уст}$, уже зависит от тока i , который потребляется от источника через токосъемные выводы:

$$u_R = -E - u = U_0 - iR_{уст} \quad (2.3)$$

Ток на выходе реального источника i_H (токе цепи нагрузки), представленного в виде ИИТ и внутреннего сопротивления $R_{уст}$, уже не совпадает с током I_0 и зависит от величины нагрузки. Соответственно, напряжение на зажимах реального источника тока u_R с внутренней проводимостью $1/R_{уст}$ определяется разностью токов

$$u_R = R_{уст}(I_0 - i_H) = R_{уст}I_0 - i_H R_{уст}. \quad (2.4)$$

Сравнивая (2.3) и (2.4), можно определить, что источники напряжения и тока по отношению к внешней цепи будут идентичны при выполнении условий

$$i = i_H, \quad I_0 = -E / R_{уст}, \quad R_{уст.тока} = R_{уст.напр}. \quad (2.5)$$

Это означает, что реальный источник энергии всегда можно заменить на эквивалентный источник либо тока, либо напряжения лишь бы модели их имели следующие параметры:

$$R_{уст.тока} = R_{уст.напр}, \quad I_0 = -E / R_{уст}. \quad (2.6)$$

Несложно заметить, что внутреннее сопротивление источника $R_{уст}$ является одним из важнейших параметров. Чем оно меньше, тем лучше по своим свойствам реальный источник приближается к идеальному.

ВАХ реального источника, как зависимость тока, отдаваемого реальным источником, от напряжения на его выводах (от величины нагрузки) называется внешней или нагрузочной характеристикой.

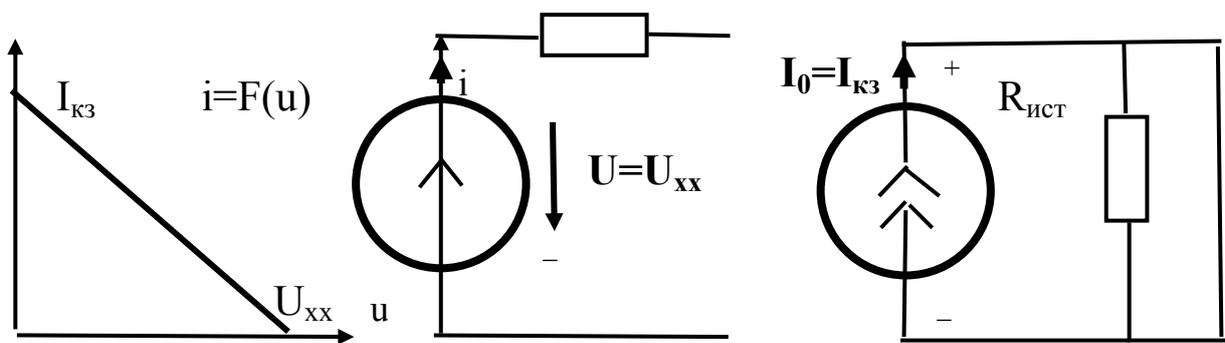


Рис. 2.6. Нагрузочная характеристика источника и его представление при «холостом ходе» и КЗ

Идеализированная нагрузочная характеристика реального источника постоянного тока имеет вид прямой, проходящей через две точки с координатами $(0, U_{xx})$ и $(I_{кз}, 0)$. Первой точке принятой идеализации $(0, U_{xx})$ соответствует режим холостого хода источника и соответствующая ему моделирующая эквивалентная схема работающего без нагрузки реального источника напряжения с внутренним сопротивлением $R_{ист.}$. Второй точке $(I_{кз}, 0)$ – режим КЗ и эквивалентная схема реального источника тока с внутренним сопротивлением $R_{ист.}$, у которого выводы закорочены.

Надо иметь в виду, что режим короткого замыкания является очень опасным для реального источника и, как правило, приводит к выходу его из строя. По этой причине в реальных условиях эксплуатации не допускается работа реального источника энергии в режимах, для которых ток нагрузки $I_H > 0.6 I_{кз.}$

Следует иметь в виду, что в общем случае нагрузочная характеристика $u=F(i)$ реального источника энергии является нелинейной и его внутреннее сопротивление в каждой точке характеристики имеет различное значение (рис. 2.7).

Если нагрузка является линейным сопротивлением, то зависимость напряжения от тока для нее будет иметь вид прямой линии с наклоном, определяемым сопротивлением R_H . Точка пересечения А характеристик позволяет графически определить напряжение u_H и ток i_H на нагрузке для данной величины R_H . Мощность, отдаваемая источником в нагрузку, характеризуется площадью прямоугольника с вершиной, лежащей в точка А. Имея в своем распоряжении график нагрузочной характеристики и, произведя несколько последовательных построений для различных значений R_H , можно найти как оптимальное для данного источника сопро-

тивление нагрузки, так и максимальную мощность, отдаваемую источником в нагрузку. Следует запомнить, что в оптимально подобранную нагрузку отдается максимальная мощность

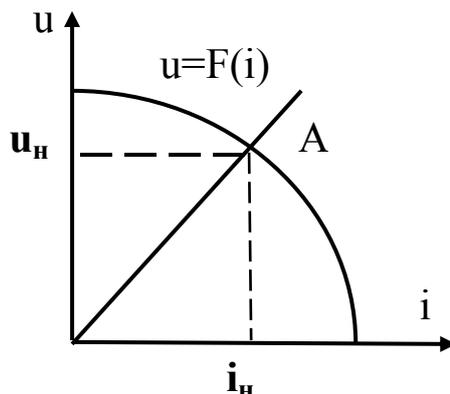


Рис. 2.7. **Нелинейная ВАХ источника электрической энергии**

Представляет практический интерес задача, позволяющая аналитически, с помощью формул определить при каких условиях в нагрузку передается от активного двухполюсника максимальная мощность. Так как источник энергии может быть замещен любой из эквивалентных схем, то решение задачи можно свести к анализу цепи, схема которой изображена на рис.2.8.

В общем случае реальный источник напряжения может иметь комплексное внутреннее сопротивление $Z_{ист} = R_{ист} + jX_{ист}$. Определим, как необходимо выбрать комплексное сопротивление нагрузки $Z_H = R_H + jX_H$ при заданном внутреннем сопротивлении $Z_{ист}$, чтобы активное сопротивление нагрузки R_H поглощало максимум активной мощности.

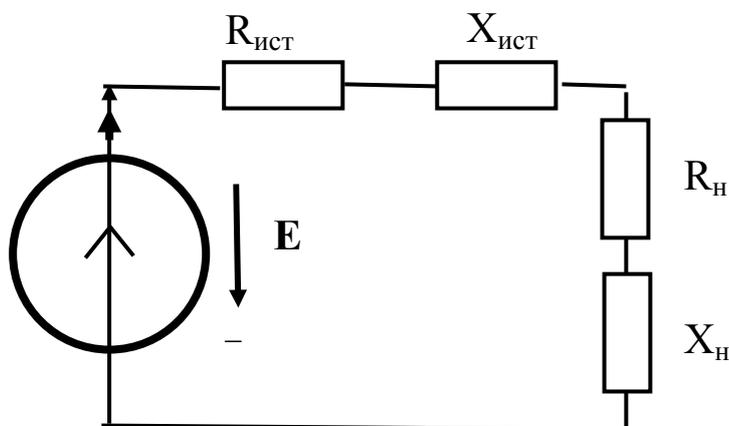


Рис. 2.8. **Схема для определения максимальной мощности, отдаваемой в нагрузку**

Комплексная амплитуда тока, протекающего через нагрузку, равна

$$\dot{I}_H = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{уст} + \dot{Z}_H} = \frac{\dot{E}}{R_{уст} + R_H + j(X_{уст} + X_H)}. \quad (2.7)$$

Мощность, передаваемая в нагрузку, равна мощности, выделяемой в вещественной составляющей R_H комплексного сопротивления нагрузки $Z_H = R_H + jX_H$, т.е.

$$P = I_H^2 R_H = \frac{E^2 R_H}{(R_{уст} + R_H)^2 + (X_{уст} + X_H)^2}. \quad (2.8)$$

Очевидно, что для достижения максимума мощности необходимо, чтобы $X_{уст}$ и X_H имели противоположный характер и были равны по абсолютной величине. После этого допущения экстремум функции соответствует выполнению условия

$$\frac{dP}{dR_H} = \frac{E^2 (R_{уст} - R_H)}{(R_{уст} + R_H)^3} = 0. \quad (2.9)$$

Из (2.9) находим, что мощность, передаваемая активным двухполюсником в нагрузку максимальна при выполнении условий

$$\begin{cases} R_{уст} = R_H; \\ X_{уст} = -X_H. \end{cases} \quad (2.10)$$

Итак, в режиме гармонических колебаний источник (генератор) развивает в нагрузке максимальную мощность, если сопротивление нагрузки комплексно сопряжено с внутренним сопротивлением источника. В этом случае говорят, что генератор согласован с нагрузкой. В цепях постоянного тока для согласования необходимо лишь равенство R_H и $R_{уст}$.

Максимально возможная мощность, которую может развить источник энергии в нагрузке, определяется формулой

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_{\text{уст}}}. \quad (2.11)$$

Величина максимальной мощности зависит не только от ЭДС источника, но и от значения активной составляющей внутреннего сопротивления генератора. При этом следует иметь в виду, что коэффициент полезного действия (КПД) источника при сопряженной нагрузке составляет всего 50%, поскольку на внутреннем сопротивлении генератора рассеивается та же мощность, что и в нагрузке. С увеличением R_n средняя мощность падает, но КПД растет. Поэтому в ряде случаев, когда очень важно получить высокий КПД, используют режим повышенного КПД без согласования. Следует обратить внимание на то, что при таком режиме использования источника, близком к холостому ходу, повышенная мощность расходуется в самом генераторе.

Рассмотренные активные элементы электрических цепей - источники напряжения и источники тока - могут быть названы независимыми, поскольку как напряжение U_0 источника напряжения, так и задающий ток I_0 источника тока определялись только внутренними свойствами самих источников и не зависели от внешних управляющих воздействий. Наряду с независимыми в теории электротехники и электроники рассматриваются и зависимые, или управляемые источники. Они представляют собой результат идеализации свойств реальных электронных компонент используемых в линейном режиме.

Зависимый источник напряжения представляет собой идеализированную четырехполюсную электрическую цепь с двумя парами выводов (двухпортовый компонент). В зависимости от управляющего фактора, подаваемого на порт входа, различают источники, управляемые напряжением и током. Выходные цепи идеальных управляемых источников (выходные порты) обладают свойствами ИИН или ИИТ. Таким образом, в зависимости от свойств выходной цепи и управляющего фактора, различают четыре типа зависимых источников, а именно: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН); источник напряжения, управляемый током (ИНУТ); источник тока, управляемый напряжением (ИТУН), и источник тока, управляемый током (ИТУТ). Условные графи-

ческие изображения соответствующих источников с внутренними сопротивлениями в выходной цепи приведены ниже.

Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), показан на рис. 2.9.

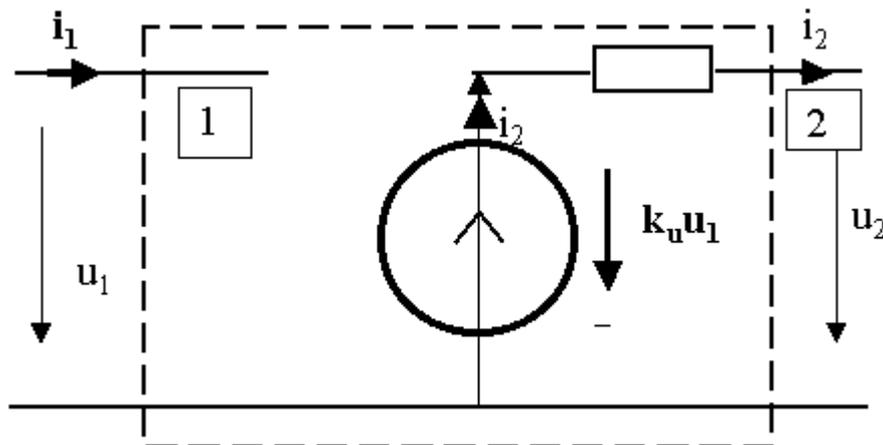


Рис. 2.9. Модель ИНУН

Выходное напряжение u_2 ИНУН управляется напряжением на входе u_1 и имеет значение

$$u_2 = k_u u_1, \quad (2.12)$$

где k_u - безразмерный коэффициент передачи напряжения от входа 1 к выходу 2.

Входная цепь ИНУН имеет бесконечно большое входное сопротивление и первичный ток управления $i_1 = 0$. При этом мощность управления $p_1 = u_1 i_1 = 0$. Выходное дифференциальное сопротивление ИНУН, как и у ИИН, равно нулю.

Если $k_u = 1$, то ИНУН называют повторителем напряжения.

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) показан на рис. 2.10).

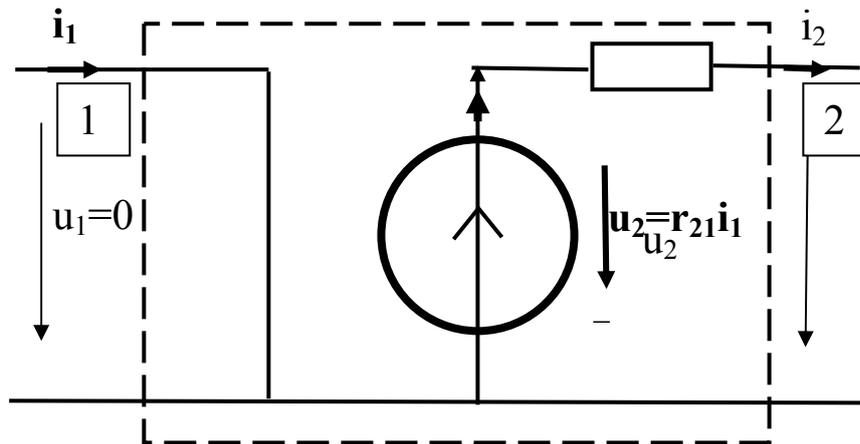


Рис. 2.10. Модель ИНУТ

Выходное напряжение u_2 ИНУТ управляется током входной цепи i_1 и имеет значение

$$u_2 = r_{21}i_1, \quad (2.13)$$

где r_{21} - коэффициент передачи источника, имеющий размерность сопротивления или сопротивление передачи от входа 1 к выходу 2.

Входная цепь ИНУТ замкнута накоротко. Входное сопротивление и напряжение u_2 а следовательно, и мощность управления p_1 равны нулю.

Источник тока, управляемый током (ИТУТ) приведен на рис. 2.11.

Выходной ток ИТУТ i_2 пропорционален току во входной цепи i_1 :

$$i_2 = k_i i_1,$$

где k_i - безразмерный коэффициент передачи по току от входа 1 к выходу 2.

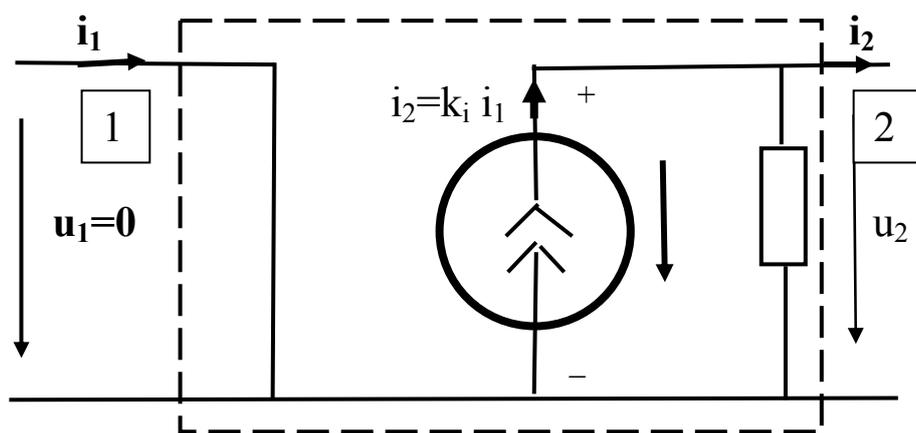


Рис. 2.11. Модель ИТУТ

Входная цепь ИТУТ имеет нулевое входное сопротивление, поэтому $u_1=0$ и r_1 равны нулю. Выходное сопротивление ИТУТ бесконечно велико.

При $k_i=1$ ИТУТ называют повторителем тока, а при $k_i=-1$ – отражателем тока или еще токовым зеркалом.

Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) показан на рис. 2.12. Выходной ток i_2 ИТУН пропорционален входному напряжению u_1 :

$$i_2 = g_{21} u_1, \quad (2.14)$$

где g_{21} - коэффициент, имеющий размерность проводимости или проводимость передачи от входа 1 к выходу 2.

Входное сопротивление ИТУН равно бесконечности, входной ток $i_1=0$ и $r_1=0$. Выходное сопротивление ИТУН, как и идеального источника тока, равно бесконечности.

Таким образом, все идеальные управляемые источники являются элементами однонаправленного (от входа к выходу) действия и обладают следующими свойствами:

- 1) входные и выходные сопротивления их равны нулю или бесконечности;
- 2) мощность на входе (мощность управления) равна нулю;
- 3) выходная величина (ток или напряжение) пропорциональна соответствующей входной величине;

4) управляемые источники являются компонентами, у которых выходной отклик $y(t)$ имеет ту же форму, что и входное воздействие $x(t)$.

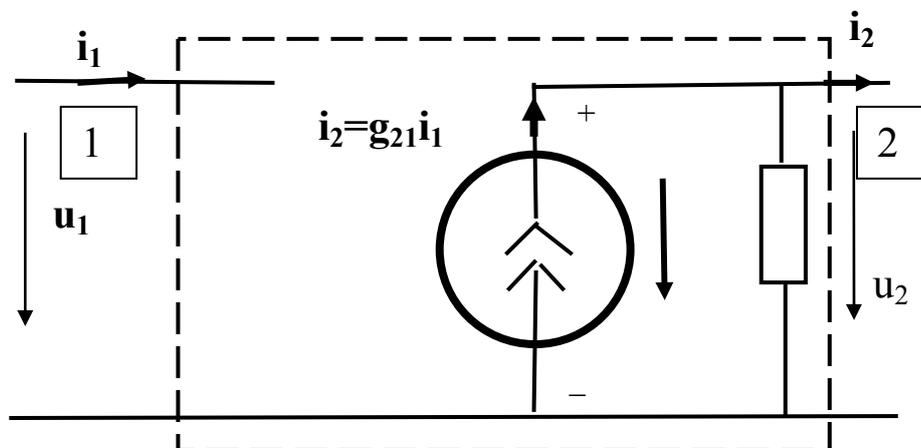


Рис. 2.12. Модель ИТУН

Реальные управляемые источники энергии имеют входные и выходные сопротивления, отличные от нуля и бесконечности. Варианты их мы рассмотрим при изучении основ электроники.

После изложения общих вопросов, важных для понимания того, что вообще представляет собой источники электрической энергии, рассмотрим теперь вопросы касающихся конструктивного исполнения серийно выпускаемых промышленностью источников, системы параметров, которой они характеризуются, обозначения источников на схемах, наиболее типичных рациональных условий их эксплуатации.

2.2.2. Химические источники электрической энергии

Наиболее распространены химические источники ЭДС (ХИЭ) в которых химическая энергия исходных материалов преобразуется непосредственно в электрическую энергию. К подобным источникам относятся гальванические элементы, активные материалы которых (электроды и электролиты) используются однократно. Применяются также аккумуляторы, которые в отличие от гальванических элементов, могут использоваться многократно за счет восстановления химической энергии вещества путем подзарядки, т.е. за счет пропускания электрического тока в направлении, обратном направлению тока при разряде Галь-

ванические элементы и аккумуляторы могут объединяться в один компонент, называемый батареей.

Основными параметрами химических источников тока являются.

1. ЭДС источника. ЭДС источника равна напряжению источника в режиме холостого хода и определяется химическими свойствами активных материалов (электродов и электролита).

2. Начальное напряжение ХИЭ – напряжение источника в начале процесса разряда.

3. Конечное напряжение ХИЭ – заданное напряжение, ниже которого ХИЭ считается разряженным. Начальное и конечное напряжение ХИЭ измеряются под определенной «нагрузкой», при внешней цепи замкнутой на определенное сопротивление.

4. Внутреннее сопротивление ХИЭ - сумма омического и поляризационного сопротивления его электродов. Чем меньше внутреннее сопротивление, тем может быть больше ток разряда в режиме, близком к короткому замыканию.

5. Энергоемкость ХИЭ – величина, соответствующая количеству электричества в ампер-часах, которое ХИЭ может отдать при разряде от начального до конечного напряжения. Энергоемкость измеряется в ампер-часах и определяется произведением тока, при котором разряжался ХИЭ на время, за которое произошла разрядка до конечного напряжения. Емкость ХИЭ указывается вместе с условиями разряда.

6. Саморазряд ХИЭ – потеря энергии ХИЭ, обусловленная протеканием в нем самопроизвольных процессов. При повышенной температуре окружающей среды саморазряд ускоряется.

7. Сохранность (срок хранения) ХИЭ – время, на протяжении которого ХИЭ сохраняет определенную часть номинальной емкости.

Наиболее распространенными сухими элементами являются марганцево-цинковые гальванические элементы (МЦГЭ). Положительным электродом МЦГЭ служит диоксид марганца, отрицательным - металлический цинк. Электролит состоит из раствора хлорида аммония или щелочи - едкого кали. Для уменьшения саморазряда в электролит вводят различные добавки, которые загущают его.

В МЦГЭ ЭДС находится в пределах 1,5 – 1,8 В. МЦГЭ работают в широком диапазоне температур и имеют малое внутреннее сопротивление, которое в зависимости от степени разряда и объема элемента

находится в диапазоне 01 – 10 Ом. Они также характеризуются низкой стоимостью.

Разновидностью МЦГЭ являются воздушные МЦГЭ, в которых активным веществом положительного электрода служит как диоксид марганца, так и кислород воздуха.

Внешний вид типичных МЦГЭ и их условные обозначения на схемах показаны на рис. 2.13.

На схемах гальванический элемент, как, впрочем, и аккумулятор, обозначают двумя черточками: одна длинная – «плюс»; другая – короткая, полужирная «минус». Батарею можно обозначать двумя элементами, разделенными тремя штрихами или одним элементом, как показано на рис.2.13.

Параметры сухих гальванических элементов можно найти в справочниках. Однако на этикетках, придаваемых к гальваническому элементу, или на корпусе элемента обычно указывают ряд параметров (ЭДС, внутреннее сопротивление, габаритные размеры, код обозначения). Значения некоторых параметров элементов представлены в таблице 2.1. Следует иметь в виду, что на корпусе элемента приведено начальное напряжение и внутреннее сопротивление. К примеру, R6 обозначает внутреннее сопротивление источника $R_{всм} = 6$ Ом, 1,5V – напряжение.



Рис. 2.13. Внешний вид и обозначения на схемах гальванических элементов

Если к гальваническому элементу подсоединить вольтметр, то последний покажет ЭДС. Напряжение на элементе без нагрузки, в режиме «холостого хода», не дает достоверной информации о «годности» элемента. Для проверки элемента используют специальные измерительные устройства, которые определяют напряжение на элементе при разрядке на нагрузку током, равным $I_{раз} = 0,1 Q$ (Q – энергоемкость элемента), а также неизменность напряжения при разрядке на нагрузку кратковременным (1,5 с) током короткого замыкания $I_{кз}$. В первом случае напряжение должно быть примерно равным ЭДС (напряжению «холостого хода»). Во втором случае резкое уменьшение напряжения или выраженная тенденция к его уменьшению ниже порога 1 В свидетельствует о плохом качестве элемента. Такой элемент долго работать не будет.

Используются и ртутно-цинковые гальванические элементы, которые изготавливаются герметичными. Положительный электрод состоит из оксида ртути и графита. Отрицательный электрод изготавливается из порошка цинка и ртути. Электролит – раствор едкого кали и оксида цинка. Отличительной особенностью таких элементов является то, что ЭДС их стабильна и составляет 1,34 – 1,37 В (в течение года изменяется всего на 0,2 %). Напряжение этих элементов при малых токах разряда изменяется в процессе разряда незначительно (на несколько процентов).

Таблица 2.1

Параметры гальванических элементов

Международное обозначение	Обозначение в СНГ	Энергоемкость А-час	Символы на корпусе
R6	316	0,45 – 0,85	AA R6 1.5V
LR6	A316	1,00 – 3,70	AA R6 1.5V
R14	343	1,53 – 1,76	C R14 1.5V
LR14	A343	3,00 – 8,20	C R14 1.5V
R20	373	2,00 – 4,00	D R20 4.5V
LR20	A373	5,50 – 16,00	D R20 4.5V

В настоящее время промышленность выпускает большое количество разнообразных аккумуляторов и аккумуляторных батарей.

Можно встретить никель-кадмиевые (Ni-Cd) аккумуляторы (НКА). Активная масса положительного электрода НКА состоит из оксидов кадмия и кобальта и небольшого количества мелкодисперсного графита. Отрицательный электрод выполняется из металлического кадмия и оксида никеля. Электролит – раствор едкого кали.

Стандартные значения емкости подобных разновидностей аккумуляторов (батарей) приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Параметры никель-кадмиевых аккумуляторов

Тип батареи	Обозначение	Энергоемкость, А-час
AA, AAA	PO3H (NiCd)	0,7
C	P14H (P14P-NiMH)	2,5
D	P20H	4,0
F		7,0

ЭДС НКА непосредственно после зарядки составляет 1,4 В. Однако вскоре после включения в цепь начальное напряжение аккумулятора без нагрузки уже составляет 1,25 В. По мере разрядки напряжение снижается. Конечное напряжение НКА – 1 В. Дальнейший разряд приводит к сокращению срока службы аккумулятора. Никель-кадмиевые батареи могут перезаряжаться и обычно выдерживают 1000 циклов перезарядки до выхода из строя. Как правило, согласно спецификациям, батарея считается вышедшей из строя, когда ее энергоемкость падает ниже 80% номинальной.

НКА, выполненный в виде батареи из двух и более аккумуляторов, обладают «эффектом памяти». Если батарею разряжать не полностью, не до конечного напряжения, а, например, до уровня 80 % от конечного, то НКА «запомнит» этот уровень в качестве полностью разряженного. Через некоторое время, аккумулятор окажется «разряженным» после непродолжительного времени работы. Может сложиться впечатление, что он вышел из строя, из за малой емкости.

Физический смысл этого явления заключается в том, что отдельные аккумуляторы, составляющие батарею, неодинаковы, имеют разную энергоемкость и разряжаются не одинаково. У наиболее разряжен-

ного аккумулятора, отдавшего свой накопленный заряд, резко увеличивается внутреннее сопротивление. Из-за этого разряд остальных элементов в батарее, а они включены последовательно, в необходимом режиме становится невозможен. С другой стороны, при заряде, как только аккумулятор с меньшей емкостью наберет «свое», нормальный процесс заряда остальных элементов батареи замедляется.

Кроме того, нельзя оставлять НКА надолго в разряженном состоянии. Это может привести к образованию внутриэлементных замыканий вследствие "прорастания" так называемых дендритов, имеющих вид тонких усиков. Разность потенциалов между электродами НКА падает до нуля или почти до нуля, что препятствует зарядке элемента. В некоторых случаях такой элемент подлежит замене как испорченный, но иногда его можно спасти. Поэтому очень важно уметь правильно эксплуатировать аккумулятор, заряжать и разряжать его, о чем мы поговорим несколько позже.

В настоящее время в качестве перезаряжаемых аккумуляторных батарей для портативной аппаратуры НКА стараются не использовать. Это обусловлено высокой токсичностью кадмия, а также тем, что появились никель-металлогидридные (Ni-MH) аккумуляторы (НМГА). Никель-металлогидрид удовлетворяет в большей степени все возрастающими требованиями к плотности запасённой энергии. Он представляет собой экологически безопасный и более лёгкий материал, являющийся электрическим аналогом никель-кадмия. При производстве НМГА используется по сути та же самая технология и производственное оборудование. Кроме того, НМГА также способен выдерживать чрезмерный заряд.

Значительное увеличение плотности запасённой энергии могли бы дать литиевые (Li) аккумуляторы (рис. 2.14). Это следует из того, что литий представляет собой самый лёгкий металл, плотность которого в 14 раз ниже плотности цинка. Они, по расчетам, обещали 4-кратный прирост энергоёмкости при напряжении вдвое большем. Как оказалось на практике литий является чрезвычайно активным химическим элементом, а значит требующим соответствующей защиты от влаги, особенно во время сборки и во время хранения, а также при использовании аккумулятора. Выяснилось, что такие аккумуляторы способны взрываться.



Рис. 2.14. Литиевый аккумулятор

Большинство производителей сейчас выпускают ионно-литиевые (Li-Ion) аккумуляторы. Принцип работы этих батарей основан на движении положительно заряженных ионов лития Li^+ между положительными и отрицательными электродами в процессе разрядки и зарядки. Металлический литий в этих процессах участия не принимает, поэтому не возникает никаких проблем с восстановлением электродов, что делает поведение батарей намного более безопасным и стабильным. Имеется широкий выбор материалов, пригодных для реализации электродов и способных обеспечивать разность потенциалов между электродами до 3 В. До этого ни один аккумуляторов не был так стабилен при многократно повторяющихся циклах разрядки-зарядки и не был столь привлекателен по стоимости. Вместе с тем не следует забывать о том, что литий на отрицательном электроде и в металлическом виде и в виде ионов остается весьма огнеопасным, как и некоторые гелеобразные электролиты. Кроме того, литиевые батареи хуже работают при низких температурах, чем их никель-кадмиевые собратья, а длительное хранение при повышенной температуре может пагубно сказаться на их параметрах в целом.

В течение последних лет широкое распространение в недорогой аппаратуре получили аккумуляторы на основе цинка и марганца – *алкалиновые батареи* типа «Duracell» Хотя по своим характеристикам эти устройства всё ещё далеки от ионно-литиевых батарей, они стали весьма популярными.

В качестве источников электрической энергии широко используются *свинцово-кислотные аккумуляторы*. Условно их можно разделить на 2 группы: стационарные и стартерные. Первые используются для обес-

печения энергией в аварийных ситуациях устройств, отключение которых может повлечь серьезные последствия. Эти аккумуляторы резервного питания устройств надежны, имеют значительную энергоемкость, однако обладают при этом большой массой. Они опасны вследствие наличия кислоты. Краткие сведения о таких источниках электрической энергии приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Параметры стационарных свинцово-кислотных аккумуляторов

Тип батареи	Энергоемкость, Ач	Масса, кг
СК-2	72	17,5
СК-8	288	52
СК-20	720	36
СК-56	2016	377
СК-120	4320	756
СК-132	4752	829

Свинцовые кислотные стартерные батареи применяются для обеспечения пуска двигателей внутреннего сгорания. По условиям применения они должны работать в режиме, близком к КЗ, и обеспечивать большой пусковой ток. Краткие сведения о таких источниках электрической энергии приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Параметры стационарных свинцово-кислотных аккумуляторов

Тип батареи	Энергоемкость, Ач	Ток разряда, А	Масса, кг
6СТ-55А	55	270	16
6СТ-66А1	60	300	18,5
6СТ-110А1	110	470	32
6СТ-182ЭМ	182	560	42
6СТС-140М	140	840	55

Мы уже отмечали важность того, что надо уметь правильно обеспечить отбор электрической энергии и заряжать аккумулятор.

Во-первых, аккумуляторы должны работать на заданную для них нагрузку. Кроме того, как следует из данных, приведенных в таблицах, аккумуляторы в режиме КЗ могут создавать токи значительно превышающие «рабочие», при разрядке на стандартную нагрузку. По этой причине аккумуляторы всегда следует подключать с предохранителями (об этих компонентах речь пойдет в п.2.2.4) для защиты от «выгорания» электрической цепи.

Во-вторых, надо помнить, что одной из важнейших характеристик аккумулятора является его энергоемкость. Именно энергоемкость определяет величину тока заряда. Правила зарядки гласят:

- Ток зарядки должен быть примерно равным одной десятой численного значения энергоемкости

-

$$I_{зар} = \frac{Q}{10}. \quad (2.15)$$

- Полный заряд должен составлять 140 % емкости батареи, что соответствует при $I_{зар}$ времени зарядки 14 часов. Т.е. время заряда

-

$$t_{зар} = \frac{1,4Q}{I_{зар}}. \quad (2.16)$$

В настоящее время промышленностью выпускается большое разнообразие автоматических зарядных устройств, которые обеспечивают лучший, как говорят, оптимальный режим заряда. Такие устройства в начале цикла заряда работают в режиме ИИТ, обеспечивая заданный ток заряда. Величина тока заряда может задаваться программно («медленный», «быстрый» заряд) в зависимости от состояния аккумулятора. В конце цикла заряда, когда напряжение аккумулятора достигнет требуемой величины (например, для ионно-литиевого элемента 4,2 В) осуществляется переход из режима стабилизации тока в режим стабилизации напряжения. При этом зарядное устройство вырабатывает сигнал об окончании процесса заряда и минимизирует ток разряда аккумулятора. Чтобы избежать «эффекта памяти» в зарядном устройстве может осу-

ществляться коммутация выводов, чтобы каждый элемент батареи заряжался отдельно или по очереди.

Зарядка гальванических элементов и аккумуляторов может производиться не только постоянным током, но и асимметричным импульсным током. Для кислотно - свинцовых аккумуляторов такой режим заряда позволяет произвести десульфатацию свинцовых пластин и тем самым продлить срок службы аккумулятора. Заряд осуществляется периодической последовательностью импульсов тока с амплитудой примерно 10 А. По окончании импульса следует разряд, причем время протекания разрядного тока в два раза превышает длительность зарядного импульса. Амплитуда разрядного импульса меньше и равна такой величине, чтобы был получен средний ток заряда, определяемый формулой (2.15). Например, для 6СТ-55А такой ток – 5,5 А.

Запрограммировать и осуществить требуемый процесс заряда никель-кадмиевых, ионно-литиевых и свинцово-кислотных батарей, провести контроль их состояния, выдать сигнал предупреждения о разряде позволяют программируемые контроллеры заряда и состояния батарей.

Рассмотрим далее основные правила и методы заряда литий-ионных (Li-ion) аккумулятора.

Зарядное устройство для Li-ion аккумуляторов подобно зарядному устройству для свинцово-кислотных аккумуляторов (SLA) в части ограничения напряжения на аккумуляторе. Основные различия заключаются в том, что у зарядного устройства для Li-ion аккумуляторов выше напряжение на элемент (номинальное напряжение элемента 3.6 В против 2 В для SLA), более жесткий допуск на это напряжение и отсутствие тонкоструйного или плавающего подзаряда по окончании полного заряда. Для SLA аккумуляторов допустима некоторая гибкость в установке значения напряжения прекращения заряда, а для Li-ion аккумуляторов изготовители строго подходят к выбору этого напряжения. Порог напряжения прекращения заряда для Li-ion аккумуляторов с графитовым электродом – 4,10 В, с коксовым электродом – 4,20 В, допуск на установку для обоих типов ± 0.05 В на элемент. Для вновь разрабатываемых Li-ion аккумуляторов, вероятно, будут другие значения этого напряжения. Следовательно, зарядные устройства для них должны быть адаптированы к требуемому напряжению заряда. Более высокое значение порога напряжения обеспечивает большее значение емкости, поэтому в интересах изготовителя выбрать максимально возможный порог напряжения без нару-

шения безопасности. Однако на величину этого порога влияет температура аккумулятора, и его устанавливают достаточно низким для того, чтобы допустить повышенную температуру при заряде.

В зарядных устройствах и анализаторах аккумуляторов, которые позволяют изменять порог напряжения, правильная установка порога должна соблюдаться при обслуживании любых аккумуляторов Li-ion типа. Однако большинство изготовителей не обозначают тип Li-ion аккумулятора. И если напряжение установлено неправильно, то коксовый аккумулятор выдаст более низкое значение емкости, а графитовый будет немного перезаряжен. При умеренной температуре, повреждения не происходит, и более низкое напряжение разряда не повредит графитовому аккумулятору. Ниже приведена таблица, позволяющая сравнить варианты исполнения элементов аккумуляторов с коксовым и графитовым электродами.

Таблица 2.5

Сравнение вариантов исполнения элементов аккумуляторов с коксовым и графитовым электродами.

Параметры	Технология изготовления		
	Коксовая	Графитовая-1	Графитовая -2
Максимальное напряжение заряда	4,20 В	4,10 В	4,20 В
Напряжение окончания разряда	2,50 В	3,00 В	2,50 В
Рекомендуемый ток заряда	0,2 С	0,2 С – 0,5 С	0,2 С – 0,5 С
Повышение температуры при заряде	на 5°–8° С	от 2° до 3° С	от 2° до 3° С
Основные изготовители	Sony, Asahi-Toshiba	Sanyo, Panasonic, Hitachi, Maxell, Saft	Asahi-Toshiba, Panasonic, Moli, Sony

Время заряда Li-ion аккумуляторов приблизительно 3 часа и аккумулятор остается прохладным во время заряда. Полный заряд достигается после того, как напряжение достигнет верхнего порога напряжения, и (and the current has dropped and leveled off to a low plateau) ток умень-

шится до некоторого низкого уровня. Увеличение зарядного тока в Li-ion зарядном устройстве не намного сокращает время заряда, особенно для коксового исполнения. Хотя и пик напряжения достигается быстрее, все же лучше более длительный заряд. При основном методе заряд оканчивается, как только уровень напряжения достигнут. Такое зарядное устройство более быстрое и простое, чем зарядное устройство с двумя стадиями, но оно может зарядить аккумулятор только до 70 % емкости.

Тонкоструйный заряд не применяется, потому что Li-ion аккумулятор не терпит перезаряда. Тонкоструйный заряд может вызвать металлизацию лития, что приводит к нестабильности элемента. Вместо этого, время от времени для компенсации маленького саморазряда аккумулятора из-за небольшого тока потребления устройством защиты, может применяться кратковременный заряд.

Коммерческие Li-ion аккумуляторы содержат несколько встроенных устройств защиты. Обычно, плавкий предохранитель срабатывает, если напряжение заряда любого элемента достигает 4.30 В или температура элемента достигает 100° С (212° F). Переключатель давления в каждом элементе прекращает заряд, если превышен некоторый порог давления; а внутренняя схема управления отключает аккумулятор в нижней и верхней точках напряжения.

Большинство изготовителей продают Li-ion элементы только в составе аккумулятора вместе с устройством защиты. Эта предупредительная процедура вызвана возможной опасностью взрыва и воспламенения в случае, если аккумулятор заряжается и разряжается вне безопасных ограничений.

Потенциально может возникнуть проблема, если корпуса аккумуляторов, зарезервированные для NiCd и NiMH аккумуляторов, приспособлены к Li-ion элементам. Такие аккумуляторы могут заряжаться на не предназначенных для них зарядных устройствах и могут быть причиной опасности, если нет защиты против заряда на таком зарядном устройстве. Рекомендуется изготавливать выводы Li-ion аккумуляторов несовместимыми с выводами NiCd и NiMH аккумуляторов.

Незаряжаемые литиевые аккумуляторы занимают значительную долю рынка среди таких приложений как видеокамеры, часы и маленькие электронные устройства. Из-за их длительного периода работоспособности и высокой плотности энергии, литиевые аккумуляторы также используются для военных приложений и аварийных устройств.

Меры предосторожности: Не пытайтесь заряжать незаряжаемый литиевый аккумулятор! Попытка зарядить их может вызвать взрыв и воспламенение, которые распространяют ядовитые вещества и могут причинить повреждения оборудованию.

Меры безопасности: В случае разрушения, утечки электролита и попадания его на кожу или глаза, немедленно промойте эти места проточной водой. Если электролит попал в глаза, промойте их проточной водой в течение 15 минут и обратитесь к врачу.

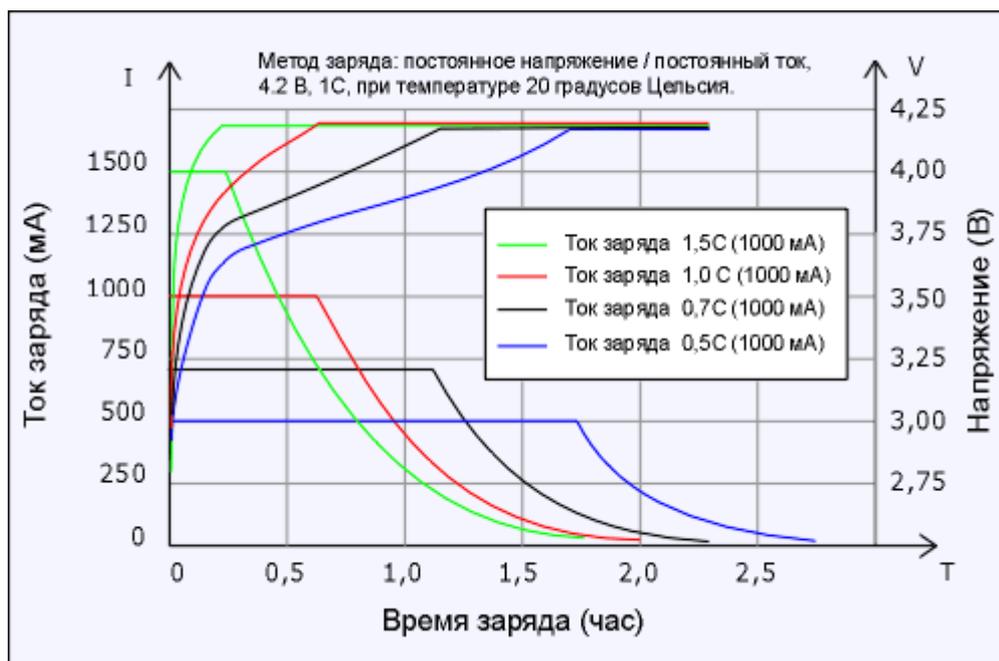


Рис. 2.15. Типовые характеристики быстрого заряда Li-ion (Li-polymer) аккумуляторов

Дополнительная информация: Заряд Li-ion (Li-polymer) аккумуляторов первоначально осуществляется постоянным током до момента достижения напряжения на аккумуляторе 4.2 В, а затем при постоянном напряжении до момента уменьшения тока до величины, равной 0.05С. После этого заряд полностью прекращается. Типовые характеристики быстрого заряда Li-ion и Li-polymer аккумуляторов в зависимости от тока заряда приведены на рисунке.

2.3. Резистивные элементы и резисторы электрической цепи

2.3.1. Идеализированный резистивный элемент

Под резистивным элементом (РЭ) понимают такой идеализированный двухполюсный элемент электрической цепи, который оказывает протекающему через него току заранее известное сопротивление R (resisto - сопротивление) и который диссипирует (dissipate - рассеивание в окружающее пространство) энергию. Он преобразовывает электромагнитную энергию в тепло. В нем отсутствует запасание энергии электрического и магнитного полей.

ВАХ РЭ, как его математическая модель, определяется законом Ома. Графически ВАХ можно представить в виде прямой, проходящей через начало координат (рис.2.16), с угловым коэффициентом, равным значению сопротивления.

РЭ присущи следующие свойства.

1. Напряжение и ток в РЭ пропорциональны или, как говорят, связаны между собой линейной зависимостью.

Коэффициент пропорциональности, равный отношению напряжения и тока, называется электрическим сопротивлением по постоянному току

$$U = RI. \quad (2.17)$$

Значение сопротивления измеряется в омах (Ом). Обратная величина - отношение тока к напряжению представляет собой электрическую проводимость

$$G = 1/R. \quad (2.18)$$

2. Соотношение (2.17) между напряжением и током позволяет считать РЭ масштабно – преобразующим элементом. Формы тока и напряжения на РЭ всегда совпадают (с точностью до масштаба).

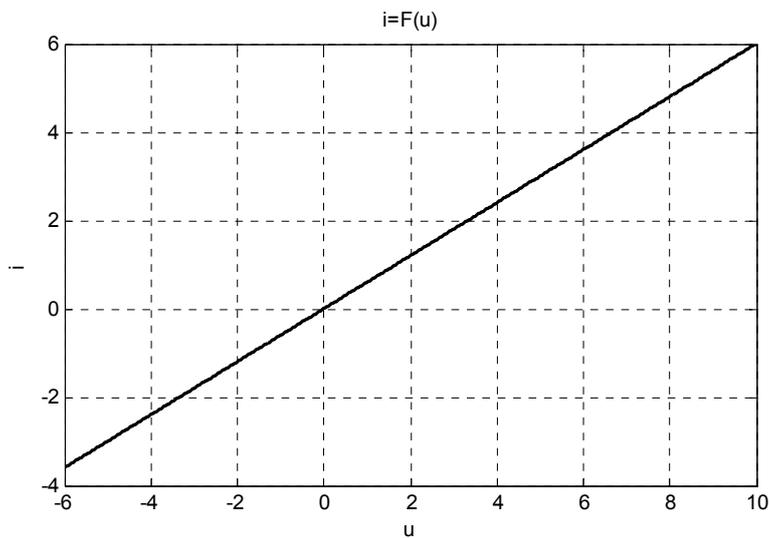


Рис. 2.16. **ВАХ** резистивного элемента

Если напряжение на РЭ меняется во времени по какому то закону, то в точности по такому же закону будет изменяться и ток в нем.

3. РЭ в электрической цепи всегда только потребляет энергию от источника и, затем, рассеивает ее.

Это свойство подтверждает то, что ВАХ РЭ располагается в первом и третьем квадрантах, а следовательно, ток и напряжение в элементе в любой момент времени имеют одинаковый знак. Мощность не может принимать отрицательных значений в РЭ, поскольку она является квадратичной функцией тока или напряжения. Это свидетельствует только о потреблении энергии РЭ.

Потребленная мощность, выделяемая в РЭ в виде тепла. Количество выделенной теплоты, определяется законом Джоуля Ленца:

$$P = \frac{dW}{dt} = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}. \quad (2.19)$$

Если через резистор протекает косинусоидальный ток, то на основании (2.17) имеем

$$u = Ri = RI_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad (2.20)$$

где $U_m = I_m R$ - амплитуда напряжения на РЭ,

$\psi_u = \psi_i$ - начальная фаза.

Фазовый сдвиг между напряжением и током в РЭ

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0, \quad (2.21)$$

что свидетельствует о синфазности тока и напряжения в РЭ.

Мощность РЭ, как скорость поступления энергии в РЭ, равна

$$\begin{aligned} P_R = iu &= I_m \cos(\omega t + \psi_i) \cdot U_m \cos(\omega t + \psi_u) = \\ &= \frac{1}{2} R I_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

На рис приведены временные диаграммы напряжения, тока и мощности в РЭ.

Синфазность тока и напряжения в РЭ означает, что ток и напряжение одновременно достигают своих экстремумов. Мощность в РЭ изменяется во времени с удвоенной частотой тока, причем максимальному значению мощности ($P_m = I_m U_m$) соответствует максимальные по абсолютному значению величины тока и напряжения. Как и следовало ожидать, мощность в РЭ всегда положительна.

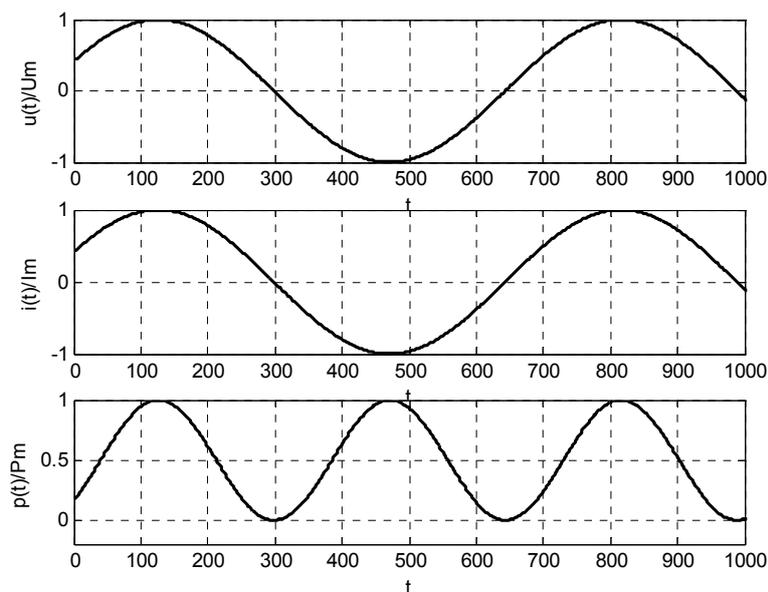


Рис. 2.17. Графики изменения напряжения, тока и мощности во времени на РЭ при гармоническом воздействии

Тепловые потери на РЭ характеризуют средней мощностью за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P_R dt = \frac{1}{2} U_m I_m. \quad (2.23)$$

Комплексное сопротивление РЭ чисто вещественно и равно сопротивлению по постоянному току

$$Z_R = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = R. \quad (2.24)$$

При воздействии на РЭ импульсных сигналов временные диаграммы напряжения, тока и мощности в РЭ будут иметь вид, показанный на рис.2.18.

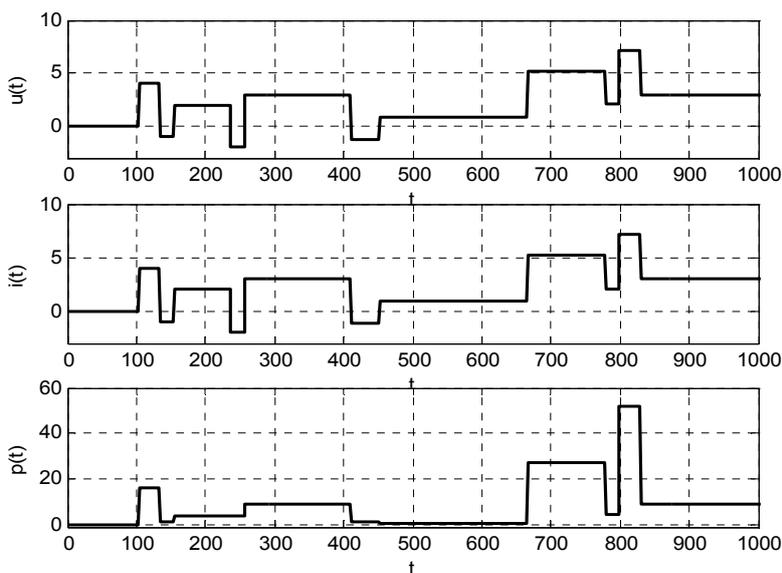


Рис. 2.18. Временные диаграммы напряжения, тока и мощности на РЭ при импульсном воздействии

Как видно из рисунка при импульсных токах, протекающих через РЭ, мощность в определенные промежутки времени может достигать существенных значений, превышающих среднее значение в десятки раз.

2.3.2. Резисторы, выпускаемые промышленностью

В электрических цепях вместо идеализированных РЭ используют реальные резисторы, выпускаемые промышленностью.

Резистор – это компонент электрической цепи, который, выполняя свое предназначение в заданном интервале изменений напряжения и тока, в требуемом частотном диапазоне, в необходимом интервале изменения температуры окружающей среды с определенной точностью воспроизводит свойства идеализированного РЭ известного номинала.

Для того, чтобы можно было реальный резистор характеризовать количественно, оценивать степень его отличия от идеала используют систему параметров. Основными параметрами резисторов являются.

1. *Номинальное сопротивление* или просто номинал - значение сопротивления, которое должен воспроизводить резистор, указанное определенным образом на «теле» резистора или в сопровождающей его документации. Номинал соответствует определенным значениям, выбираемым из рядов номинальных значений.

2. *Допускаемое отклонение сопротивления от номинала* или просто допуск – выраженная в процентах по отношению к номиналу разница между номинальным и действительным сопротивлением.

Ряд допускаемых отклонений также нормализован. Допуски указываются в процентах в соответствии с рядом $\pm 0,001$; $\pm 0,002$; $\pm 0,005$; $\pm 0,02$; $\pm 0,05$; $\pm 0,1$; $\pm 0,25$; $\pm 0,5$; $\pm 1,0$; $\pm 2,0$; $\pm 5,0$; ± 10 ; ± 20 ; ± 30 .

3. *Номинальная мощность рассеивания* - максимальная мощность, которую резистор может рассеивать в течение гарантированного срока службы без изменения своих параметров свыше значений, указанных в технической документации, при непрерывной электрической нагрузке и определенной температуре окружающей среды.

4. *Предельное рабочее напряжение* - напряжение, которое может быть приложено к резистору без нарушения его работоспособности.

5. *Температурный коэффициент сопротивления* – величина, характеризующая изменение сопротивления резистора при изменении температуры на один градус Цельсия.

Резисторы, как наиболее распространенные компоненты, с помощью которых осуществляется регулирование и распределение элек-

трической энергии между цепями и элементами схем, условно можно разделить на следующие группы.

Постоянные и переменные. В свою очередь постоянные резисторы, в зависимости от назначения могут подразделяются на две группы: общего назначения (диапазоны номиналов 1 Ом - 10 МОм, номинальные мощности рассеивания 0,062 - 100 Вт) и специального назначения. Постоянные резисторы применяются для работы в электрических цепях постоянного, пульсирующего токов а также в импульсном режиме. Примеры исполнения таких резисторов и их условные обозначения показаны на рис.2.19.

Переменные резисторы подразделяются на подстроечные и регулировочные (Рис.2.20).

Подстроечные резисторы рассчитаны на проведение подстройки электрических режимов и имеют небольшую износоустойчивость (до 1000 циклов перемещения подвижной части), а регулировочные - для проведения многократных регулировок. Они отличаются большей износоустойчивостью (более 5000 циклов).

В зависимости от материала, использованного для создания проводящего элемента, резисторы подразделяют на непроволочные и проволочные. У проволочных резисторов (рис. 2.21) в качестве проводящего материала используют манганин и нихром. Они характеризуются высокой теплоотдачей и нагрузочной способностью

Для монтажа на поверхность печатных плат, как говорят в SMD – исполнении, промышленность выпускает широкую гамму микроминиатюрных бескорпусных ЧИП (CHIP) резисторов (смотри пример на рис. 2.22). Они применяются везде, где требуется высокая плотность монтажа и низкая стоимость, улучшенные частотные характеристики.

Типовые габаритные размеры компонентов для монтажа на поверхность таковы: $L = (1 - 3)$ мм; $W = (0,5 - 3)$ мм; $T = (0,5 - 1)$ мм. Так как пайку ЧИП резисторов на поверхность производят с помощью автоматических устройств, то промышленность выпускает их помещенными в полиэтиленовые или бумажные ленты, намотанные на катушки.

Маркировку резисторов, полное или кодированное обозначение их номинальных сопротивлений, допускаемых отклонений, систему условных обозначений резисторов и другую полезную информацию о параметрах резисторов можно найти в справочниках и на WEB-

сайтах фирм, выпускающих компоненты электрических цепей.

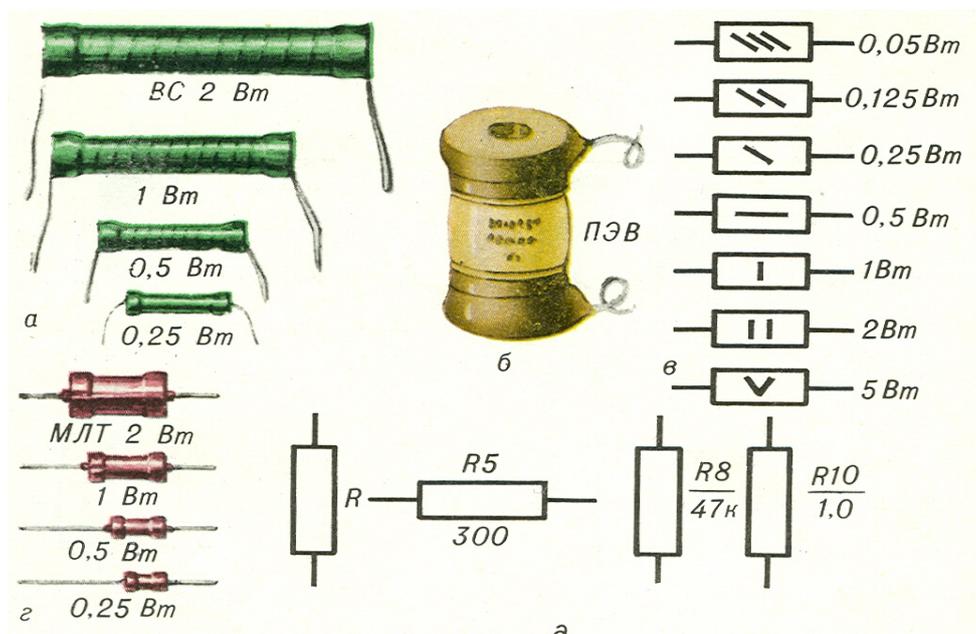


Рис. 2.19. Постоянные резисторы и их условные обозначения на схемах

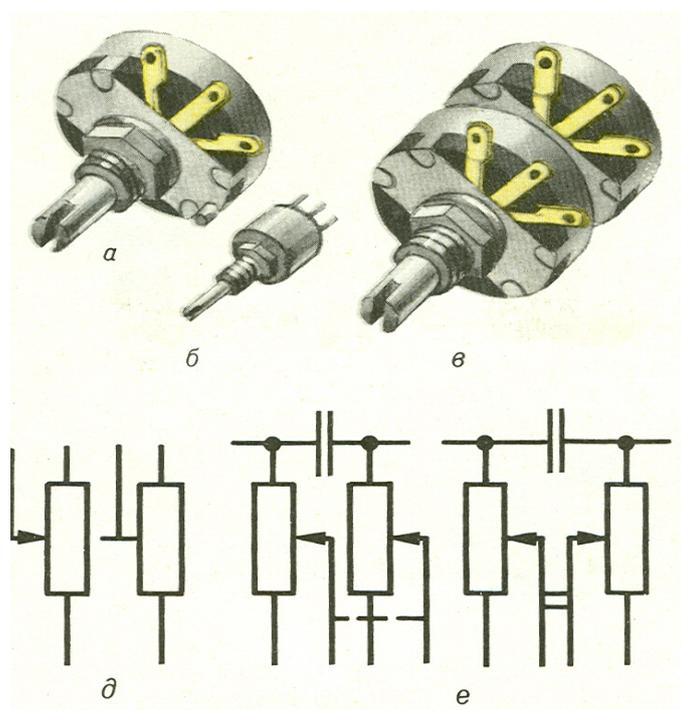


Рис. 2.20. Регулировочные и подстроечные переменные резисторы и их условные обозначения на схемах

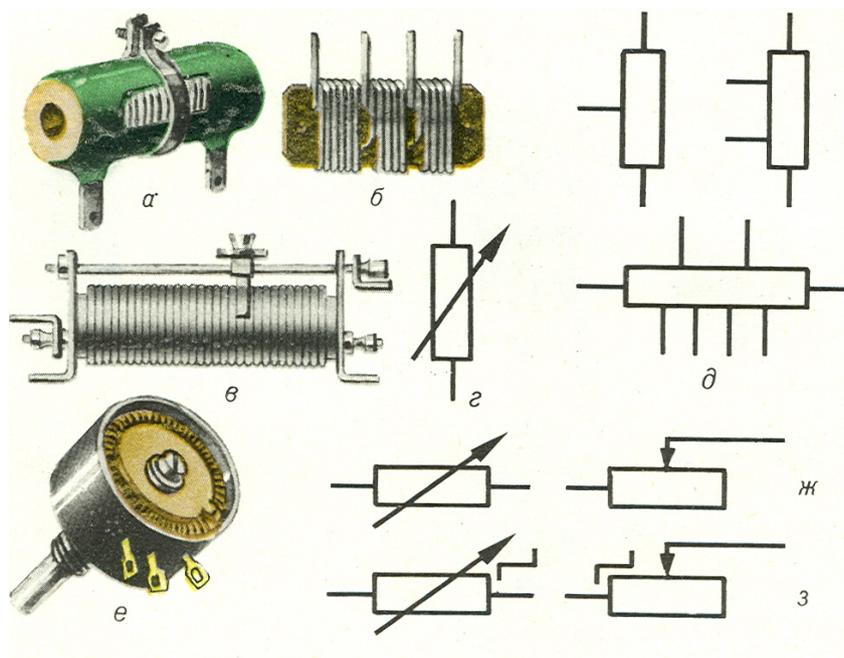


Рис. 2.21. Проволочные резисторы

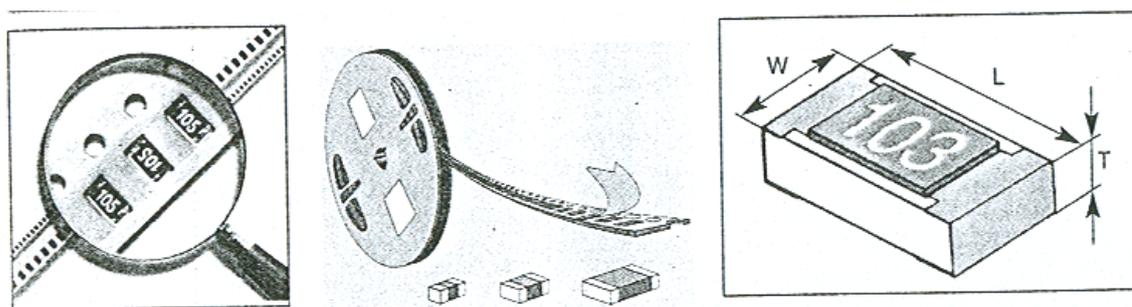


Рис. 2.22. ЧИП резисторы в SMD – исполнении

2.3.3. Термисторы

В электрических и электронных цепях, кроме линейных резисторов общего применения, используются также нелинейные специальные резисторы величина сопротивления которых существенно зависит от их температуры и температуры окружающей среды. Их называют терморезисторами или термисторами. Для этой группы резисторов основной характеристикой является температурная.

Терморезисторы выполняют или из материала, сопротивление которого меняется при изменениях температуры. В зависимости от того, как изменяется сопротивление при варьировании температуры различают NTC и PTC термисторы.

PTC (Positive Temperature Coefficient) термисторы уменьшают свое сопротивление с увеличением температуры T . Они используются в качестве датчиков температуры и бесконтактных управляемых сопротивлений в цепях термостабилизации, ограничения пускового тока электрических двигателей и т.п.

NTC (Negative Temperature Coefficient) термисторы при достижении некоторой температуры резко увеличивают свое сопротивление. По этой причине PTC термисторы применяются для защиты электрического оборудования от повреждений при резком увеличении тока, как говорят, от бросков тока. В этом смысле они подобны самовосстанавливающимся предохранителям. Типовые зависимости сопротивления термистора для двух температурных коэффициентов имеют вид, показанный на рис. 2.23.

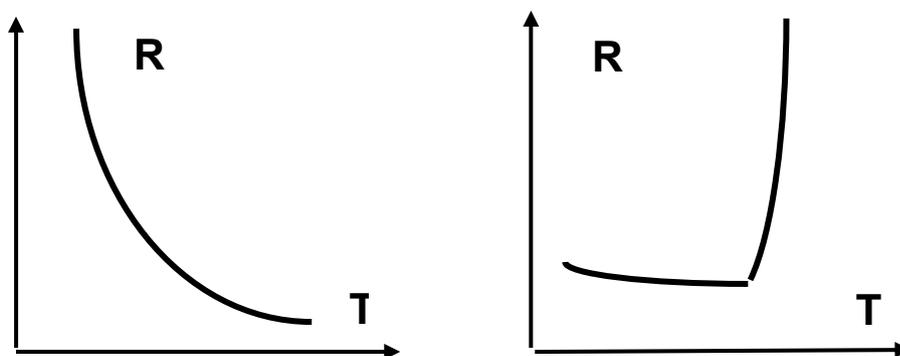


Рис. 2.23. Температурные характеристики NTC и PTC термисторов

Промышленность выпускает широкую гамму терморезисторов как в обычном так и ЧИП исполнении.

2.3.4. Варисторы и супрессоры импульсных перепадов напряжения

Варисторами называют нелинейные резисторы, сопротивление которых зависит от величины напряжения, приложенного к его выводам. Как правило, их изготавливают из карбида кремния. Нелинейность появляется из-за явлений, наблюдаемых на поверхностях зерен кристалла, из которого спрессован варистор.

ВАХ варистора и его условное обозначение приведены на рис.2.24.

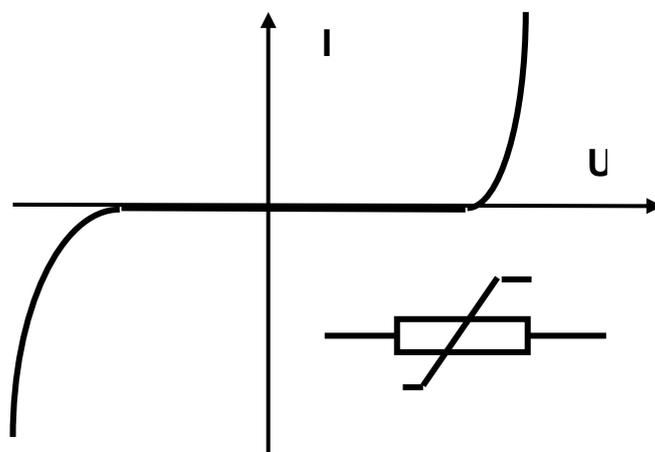


Рис. 2.24. ВАХ варистора

Такой вид ВАХ варистора позволяет ему ограничивать резкие повышения напряжения и, тем самым защищать оборудование от повреждений. Такие скачки напряжения могут происходить по причине удара молнии, при перехлесте мощных токоведущих проводов с проводами линий связи, при генерировании высоковольтных выбросов плохо работающим оборудованием, случайной подаче на оборудование нештатного напряжения и т.п..

Для защиты оборудования от повреждений, вызванных резким и кратковременным увеличением напряжения, поступающего на вход аппаратуры, применяют также такие двухполюсные компоненты, как супрессоры.

Супрессор (от англ. to suppress – подавлять) выбросов напряжения – двухполюсный компонент электрической цепи, который в нормальном режиме обладает очень высоким сопротивлением, но при превышении напряжения на его выводах больше некоторой величины уменьшает свое сопротивление почти до нуля, пропускает через себя очень большой пиковый ток и тем самым отводит энергию от защищаемого оборудования.

Через супрессор может протекать импульсный ток до 500 А, он может выдерживать импульсную мощность до 10 кВт. Время срабатывания меньше 1 мкс.

2.3.5. Предохранители

Предохранитель - двухполюсный компонент электрической цепи, который при достижении предельного тока переходит в состояние с очень высоким сопротивлением и перестает проводить ток. Переход в непроводящее состояние происходит за счет нагревания и последующего расплавления «тела» предохранителя, поэтому такие предохранители называют плавкими. «Тело» предохранителя изготавливают из легкоплавкого материала. Сечение его определяет предельно проводимый ток. Корпус предохранителя изготавливается из фарфора или стекла в виде полый трубки или полого параллелепипеда. Используют также плавкие вставки. В них внутри трубки может быть кварцевый песок для локализации электрической дуги, возникающей при сгорании плавкой вставки.

Предохранители предназначены для защиты оборудования от коротких замыканий. После расплавления предохранитель следует заменить.

Примеры исполнения предохранителей на токи до 15 А показаны на рис.2.25.

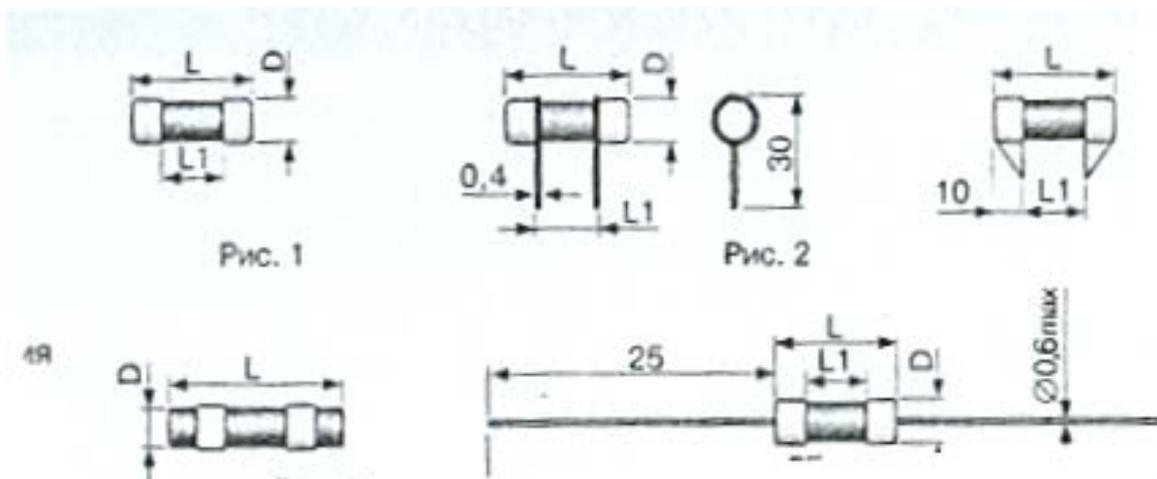


Рис. 2.25. Плавкие предохранители

Для защиты электронных устройств от перегрузки по току или от перегрева промышленность выпускает самовосстанавливающиеся предохранители (multifuse). Принцип их работы, как и у всех предохранителей, также основан на свойстве резко увеличивать свое сопротивление под воздействием проходящего тока, однако они автоматически восстанавливают свои первоначальные свойства после устранения причин

увеличения тока. Максимальное время срабатывания, в зависимости от протекающего тока, составляет от 0,1 до 10 секунд. В портативных устройствах и в оборудовании, где требуется высокая плотность монтажа, используются предохранители в SMD исполнении.

2.4. Коммутационные изделия и разъемные соединители

Идеализированное коммутационное изделие (КИ) это компонент электрической цепи, состоящий из системы контактов и приводного элемента (устройства), который при определенном (пороговом) управляющем воздействии на приводной элемент, скачкообразно меняет значения своих параметров. При помощи приводного элемента система контактов мгновенно переходит из одного состояния в другое.

Простейшим идеализированным двухполюсным КИ является электрический ключ (см.п.2.1), реализующий разрыв в цепи или короткое замыкание какого либо ее участка. Математическая модель ключа по отношению к току определяется функцией Хевисайда (см.п.1.5).

На электрических схемах (рис.2.26, г, ж) показывают только контакты КИ. Замыкающий контакт электрического ключа изображают наклонной линией такой же толщины, как и линии, показывающей выводы ключа. Ключ может иметь нормально замкнутые контакты и разрывать цепь.

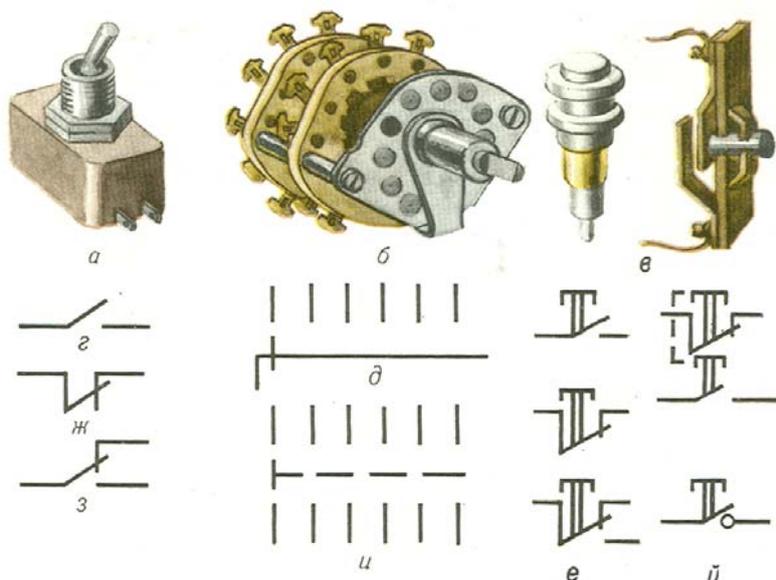


Рис. 2.26. Коммутационные изделия и их условные обозначения на схемах

КИ может выполнять функцию переключателя в электрической цепи. В этом случае (рис. 2.26, з) у него один контакт размыкает одну и замыкает другую цепь.

Если КИ является многополюсником (рис.2.26, д), то с его помощью можно реализовать функции либо мультиплексора либо демультимплексора. Назначение *мультиплексора* (от англ. multiplex – многократный) – подключать к одному выходу в желаемом порядке сигналы источников, поступающие на N входов. *Демультимплексоры* в функциональном отношении противоположны мультиплексорам. В нем сигналы от одного источника с одного входа распределяются в желаемой последовательности по нескольким выходам.

Такие КИ изображают на схеме прямой линией, на которой условно показан скользящий контакт в виде черточки. Многополюсное КИ может представлять выполненную в виде единого устройства систему электрических ключей, применяемых для последовательного переключения независимых участков цепи (рис. 2.26, и).

В электрических цепях вместо идеализированных используют реальные КИ, выпускаемые промышленностью.

Реальное КИ – это компонент электрической цепи, который выполняя свое предназначение в заданном интервале изменений напряжения и тока, в требуемом диапазоне быстродействия, в необходимом интервале изменения температуры окружающей среды с определенной точностью воспроизводит свойства и функции идеализированного коммутационного изделия.

Для характеристики реальных КИ используют следующую систему параметров.

1. Сопротивление коммутирующих контактов в замкнутом состоянии (переходное сопротивление).

Переходное сопротивление зависит от материала из которого изготовлены контакты, от состояния их поверхности и степени соприкосновения между ними (от давления друг на друга). Соприкасающиеся поверхности контактов могут иметь шероховатости, оксидные пленки металлов и прочее из-за чего реальный перешеек контакта может иметь электрическое сопротивление отличное от случая идеального взаимодействия контактов. Обычно сопротивление коммутирующих контактов в замкнутом состоянии составляет несколько десятков миллиом.

2. Время срабатывания.

Этот параметр характеризует быстродействие КИ и отсчитывается с момента управляющего воздействия до появления номинального значения тока через контакты.

3. Число произведенных переключений исправно работающим КИ за время службы.

4. Максимальное значение коммутируемой мощности.

Этот параметр определяет максимально допустимое произведение тока и напряжения на КИ в момент коммутации.

5. Сопротивление между токоведущими частями и корпусом.

Этот параметр характеризует электрическую прочность изоляции

Следует иметь в виду, что при сближении контактов и при их соприкосновении могут происходить весьма сложные физические процессы. При относительно больших напряжениях между контактами может происходить электрический пробой среды, окружающей контакты, в результате чего возникает электрическая дуга (нечто подобное используют в электросварке), расплавление металла на определенном участке контакта и перенос материала одного контакта на другой. В результате нештатной работы КИ, возникающей из-за превышения максимального значения коммутируемой мощности, длительного времени срабатывания, контакты КИ могут «выгорать» или «привариваться».

КИ условно можно разделить на следующие группы.

1. *Перекидные* (сдвиговые) КИ, которые часто называют переключателями или тумблерами.

На рис. 2.26а и рис. 2.27 показаны примеры исполнения и условное обозначение перекидных КИ.

Тумблеры бывают двух- и трехпозиционными, имеют различное число коммутируемых контактов. Тумблеры работают по принципу «разомкнут – замкнут», что значит, что подвижный контакт никогда не замыкает оба вывода одновременно. Трехпозиционные тумблеры имеют среднее положение, которое соответствует состоянию «выключено».

Разновидностями перекидных КИ являются переключатели сдвиговые, микропереключатели и *дip* – переключатели.

2. *Нажимные* КИ. Они бывают кнопочными и клавишными.

Кнопочные переключатели с ручным и самовозвратом работают по принципу «разомкнут-замкнут». На рис. 2.26 в,й показано условное обо-

значение кнопки, самостоятельно возвращающейся в первоначальное положение. При этом посредине показана кнопка, работающая на размыкание, а ниже- на замыкание. На рис.2.26е вверху изображено условное изображение кнопки с самовозвратом, а внизу кнопки с ручным возвратом.

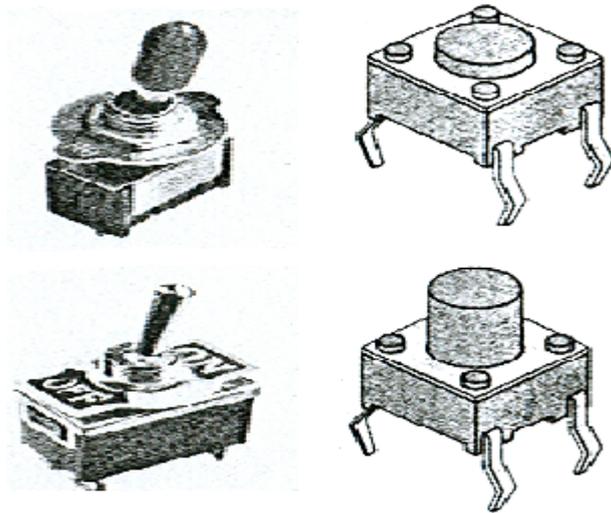


Рис. 2.27. Тумблеры и кнопки с фиксацией порожения

Разновидностями нажимных КИ являются переключатели сетевые с подсветкой и без подсветки, кнопочные выключатели, кнопки тактовые, микропереключатели, кнопочные переключатели с фиксатором.

3. Клавишные и модульные КИ.

Клавишные КИ являются многополюсными. Модульные КИ выполнены в виде отдельных модулей, состоящих из корпуса с контактами и штока с замыкающими выступами, перемещающегося внутри корпуса. Такая конструкция обеспечивает соединение определенных выводов при нажатой или отжатой кнопке. Модуль обеспечивает возможность одновременного и раздельного включения различных участков электрической цепи в работу.

4. Поворотные (галетные) КИ.

Такие КИ также являются многополюсными и позволяют при повороте ротора переключателя одновременно соединять несколько функционально связанных участков цепи (рис.2.26б и 2.28). В галетном переключателе имеется специальный элемент, позволяющий надежно фиксировать угол поворота ротора галетного КИ.

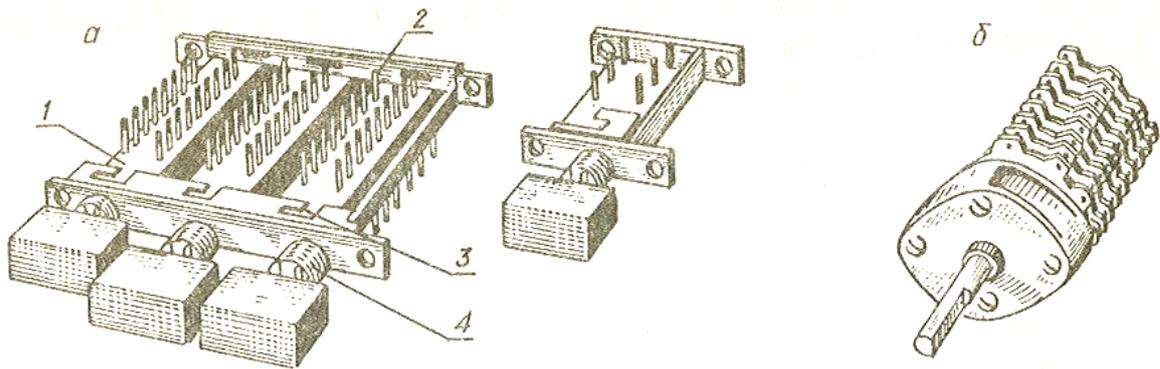


Рис. 2.28. Клавишные и галетные КИ

5. Рубильники и пакетные выключатели.

Такие КИ используются для отключения и подключения мощных, как говорят, силовых цепей. Диапазон токов, которые им приходится коммутировать от нескольких десятков до нескольких тысяч ампер.

Для соединения отдельных электрических устройств, блоков, субблоков, модулей друг с другом с помощью проводников, кабелей, печатных проводников используют электрические соединители или, как еще говорят, электрические разъемы. Наиболее распространенные электрические соединители показаны на рис. 2.29.

Простейший разъемный соединитель состоит из двух частей штыря и гнезда в корпусе из пластмассы. На жаргоне, распространенном среди специалистов, такие контактные пары называют «папа» и «мама». Соединители выполняются с круглыми или гладкими плоскими штырями (ножевой тип) и соответствующей формы пружинными гнездами.

Если штыри и, соответственно, гнезда размещены в одном корпусе, например из пластмассы, то говорят, что электрический соединитель состоит из вилки (male) и розетки (female). В них для надежного соединения пар контактов штырям и гнездам придают специальную форму.

Разновидностью подобных соединителей являются широко используемые в компьютерной технике миниатюрные разъемы - розетки для подключения к «материнской плате» клавиатуры, мыши и джамперы (jumper – перемычка) для задания конфигурации системы. Их различные конструкции которых показаны на рис.2.30.

Многоштырьевые вилки и многоконтактные гнезда могут впаиваться непосредственно на плату. Примеры конструктивного исполнения таких вилок показаны на рис.2.31.

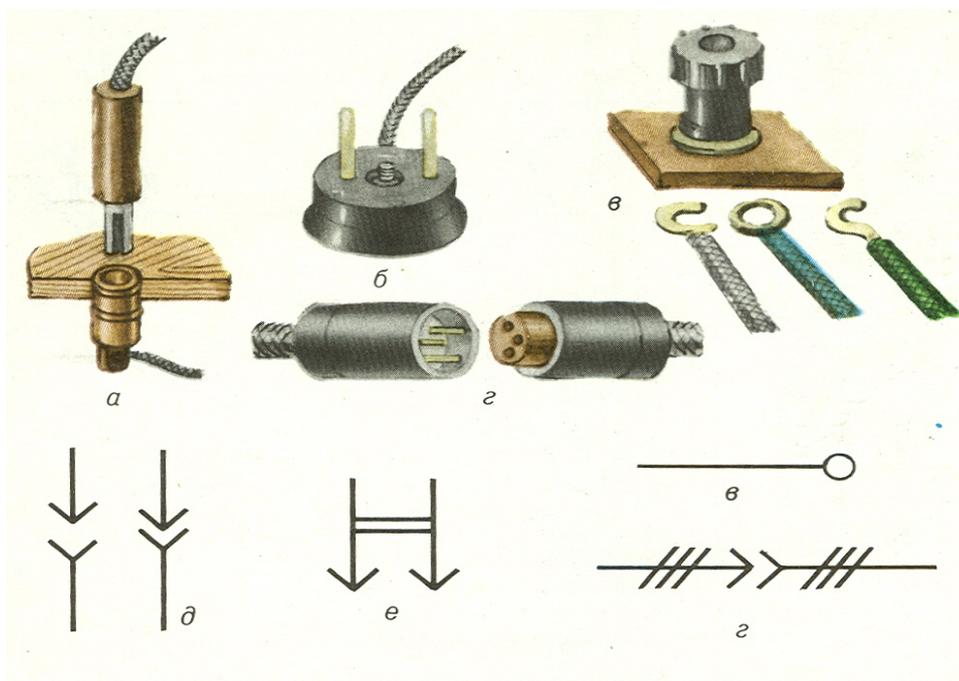


Рис. 2.29. Электрические соединители и их условные обозначения на схемах

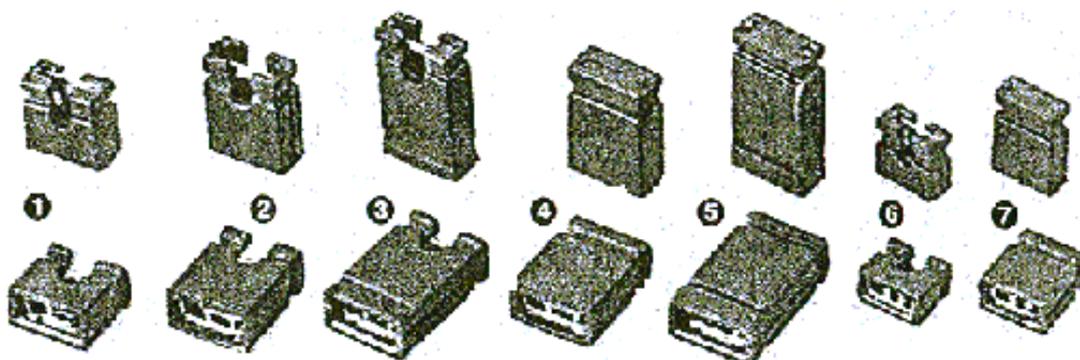


Рис. 2.30. Джемперы

Разновидностями электрических соединителей являются панельки для установки микросхем, сокет (chip socket), слоты для подключения к шинам и 72 контактные разъемы ножевого типа для установки модулей памяти.

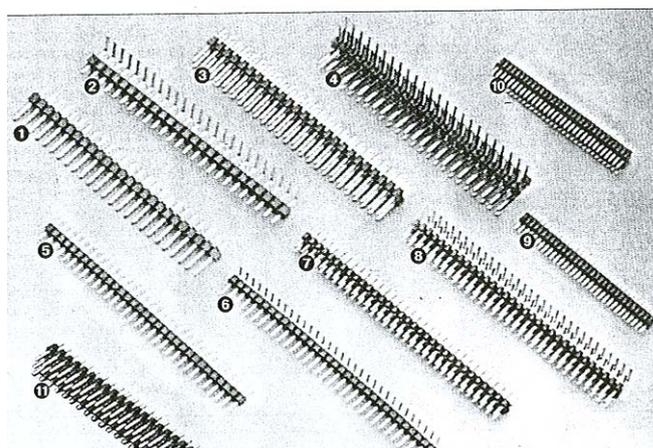


Рис. 2.31. Многоштырьевые вилки

Варианты исполнения многоконтактных унифицированных разъемов показаны на рис. 2.32 и рис. 2.33.

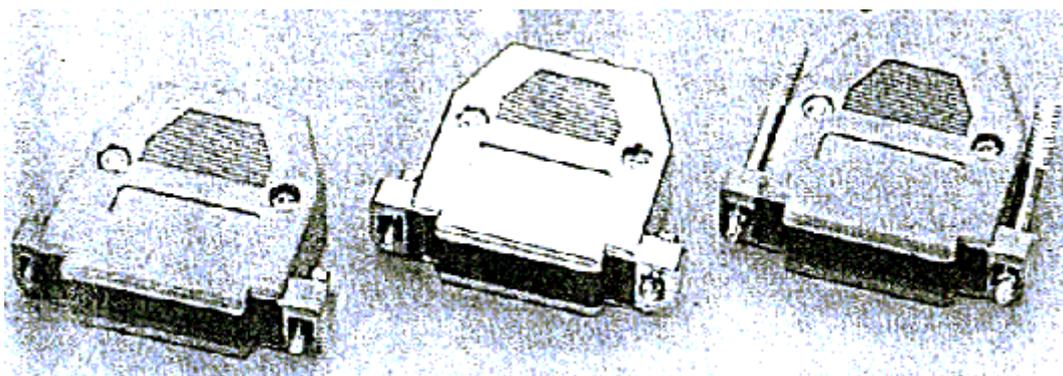


Рис.2.32. Унифицированные многоконтактные разъемы

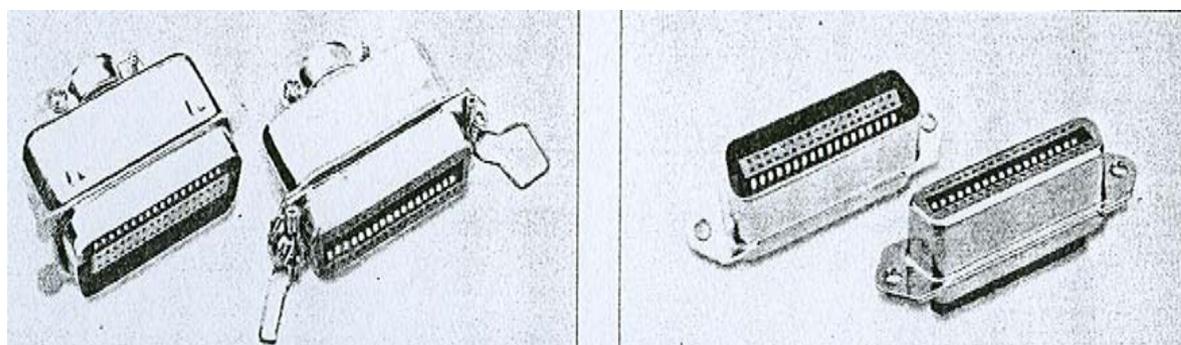


Рис.2.33. Унифицированные многоконтактные разъемы

2.5. Емкостные элементы и конденсаторы электрической цепи

2.5.1. Идеализированный емкостной элемент

Под емкостным элементом (ЕЭ) понимают такой идеализированный двухполюсный элемент электрической цепи, характеризуемый таким параметром как емкость C , в котором накапливается энергия электрического поля, отсутствует диссипация энергии и у которого напряжение на зажимах элемента u и ток i , проходящий через его выводы, связаны между собой линейным соотношением

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (2.25)$$

Здесь предполагается, что производная от функции $u(t)$ по переменному t (времени) существует, значение C положительно, не изменяется во времени и не зависит ни от значений, ни от знака изменения напряжения, подведенного к элементу.

Условно ЕЭ изображают в виде двух коротких параллельных линий, перпендикулярно которым расположены выводы.

Отметим, что в отличие от резистивного элемента, ток пропорционален не просто напряжению, а скорости изменения напряжения. Пропорционален напряжению заряд q ЕЭ: $q=Cu$. Не может принимать отрицательных значений не мощность, как у РЭ, а энергия электрического поля, запасенная в ЕЭ. Энергия пропорциональна квадрату мгновенного значения напряжения. Действительно, интегрируя мощность ЕЭ в пределах от $-\infty$ до t получим

$$W_c = \int_{-\infty}^t Cu \frac{du}{dt} dt = \int_0^u Cudu = \frac{Cu^2}{2}. \quad (2.26)$$

«Поведение» ЕЭ существенно зависит от того, какой зависимостью от времени описывается напряжение на ЕЭ $u(t)$.

Если величина напряжения остается неизменной во времени $u(t) = U_0 = \text{const}$, то, согласно (2.25) ток через конденсатор, как производная от постоянной величины, равен нулю. В ЕЭ в этом случае образуется электрическое поле, обладающее энергией, определяемой (2.26). Поле создается зарядами на его обкладках ЕЭ.

В случае гармонического напряжения, описываемого косинусоидальной зависимостью, будем иметь следующее.

Ток, протекающий через конденсатор, выражается следующими соотношениями

$$\begin{aligned} i &= C \frac{d}{dt} [U_m \cos(\omega t + \psi_u)] = -\omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \\ &= \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \psi_i), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $I_m = \omega C U_m$ – амплитуда тока в ЕЭ;

$\psi_i = \psi_u + \pi/2$ – начальная фаза тока в ЕЭ.

Фазовый сдвиг между напряжением и током в ЕЭ

$$\varphi_C = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}, \quad (2.28)$$

т.е. напряжение на ЕЭ отстает по фазе от тока на угол $\pi/2$.

Энергия и мощность электрического поля ЕЭ соответственно равны

$$W_C = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} C U_m^2 \cos^2(\omega t + \psi_u) = \frac{1}{4} C U_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_u)]; \quad (2.29)$$

$$P_C = \frac{dW_C}{dt} = u(t)i(t) = -\frac{1}{2} \omega C U_m^2 \sin 2(\omega t + \psi_u). \quad (2.30)$$

Временные диаграммы напряжения, тока, мощности и энергии ЕЭ приведены на рис. 2.34. На графике имеет место наличие временных интервалов, в пределах которых напряжение и ток имеют разные знаки, а мощность – величина отрицательная. Это характерно, как отмечалось

ранее, для активного элемента, т. е. для элемента, который отдает энергию в электрическую цепь. Это свидетельствует о том, что (см. п. 1) на этом временном интервале ЕЭ выступает в роли источника и отдает ранее накопленную энергию цепи. Уменьшение энергии на таких временных интервалах отражает и график энергии.

Также на графике имеет место наличие временных интервалов, в пределах которых напряжение и ток имеют одинаковые знаки, а мощность - величина положительная. Это характерно для пассивного элемента и свидетельствует о том, что ЕЭ отбирает энергию от электрической цепи и накапливает ее в своем электрическом поле. Это показывает и рост величины энергии на ЕЭ.

То есть, знакопеременный характер графика мощности свидетельствует о том, что ЕЭ то забирает энергию из электрической цепи, то возвращает ее обратно в цепь. Нетрудно показать, что среднее значение мощности при этом будет равно нулю.

В электротехнике элемент, обладающий свойством обмениваться энергией с электрической цепью, точнее с источником энергии, без необратимых потерь (например, на диссипацию) и средней мощностью при этом равной нулю, называют реактивным.

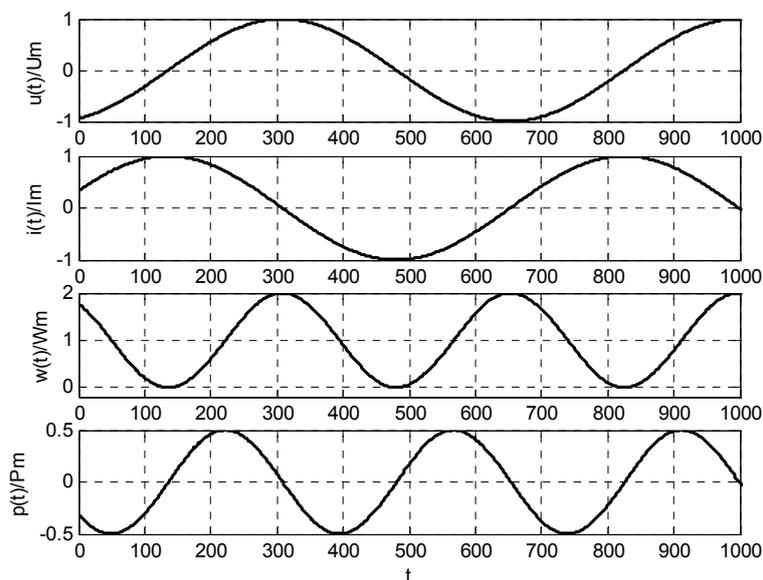


Рис.2.34. Графики зависимости напряжения, тока, мощности и энергии от времени при гармоническом воздействии на ЕЭ

Таким образом, ЕЭ это реактивный элемент, который то отдает, то принимает энергию, работая с «реактивной» мощностью, т.е. мощностью не производящей в среднем никакой работы.

Реактивная мощность ЕЭ равна максимальной мощности электрического поля ЕЭ.

Комплексное сопротивление ЕЭ будет равно

$$Z_C = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{\omega C U_m e^{j(\psi_u + \pi/2)}} = -j \frac{1}{\omega C}. \quad (2.31)$$

Оно, как видно, не имеет вещественной части, а является чисто мнимой величиной. Соответственно, емкостное сопротивление равно

$$x_C = |Z_C| = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.32)$$

Импеданс конденсатора уменьшается с ростом частоты.

Графики изменения напряжения, тока и мощности, построенные в определенном масштабе, на ЕЭ при импульсных токах показаны на рис.2.35.

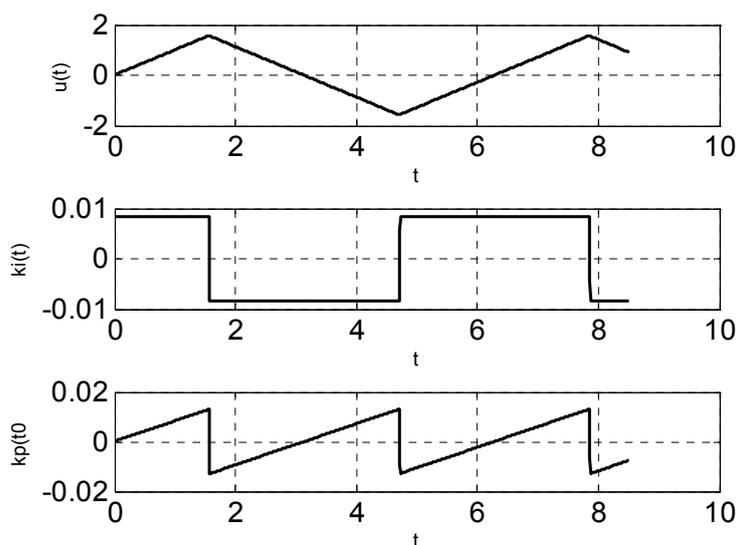


Рис. 2.35. Графики изменения напряжения, тока и мощности во времени при импульсном воздействии на ЕЭ

Как видно из графиков при импульсном воздействии на ЕЭ формы тока и напряжения на нем существенно различаются. Мощность остается знакопеременной величиной, подтверждая тот факт, что ЕЭ является реактивным элементом.

На основании сказанного можно утверждать, что ЕЭ обладает следующими свойствами.

1. Ток через выводы ЕЭ протекает только тогда, когда меняется напряжение на его выводах. При приложении к ЕЭ постоянного (неизменного во времени) напряжения ток через его выводы протекать не будет и ЕЭ будет подобен разрыву цепи (см. п. 2.1).

2. Так как величина тока через ЕЭ пропорциональна скорости изменения напряжения, то ЕЭ может служить дифференцирующим устройством. С другой стороны, если задавать ток, то напряжение будет определяться интегралом. По этой причине ЕЭ может выступать в роли интегрирующего устройства. Зная, что интеграл от постоянной величины есть линейная зависимость, можно предположить, что при подключении ЕЭ к идеальному источнику тока он может, с этой точки зрения, использоваться для формирования линейно – изменяющегося напряжения (см. п.1.).

3. ЕЭ обладает заградительно - шунтирующим свойством, т.е. свойством одновременно не пропускать постоянный ток (блокировать прохождение движущих зарядов, служить преградой прохождению тока, выступать в качестве заграждения на пути зарядов) и, в тоже время, сохранять возможность для протекания через его выводы переменных токов высокой частоты, представляя собой двухполюсник с очень малым сопротивлением (импедансом) или КЗ (как говорят, некий шунт. Точнее см. лек.3 п.).

Это свойство легко понять и запомнить, если представить такие логические цепочки из формул.

$$\text{Постоянный ток} \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow Z_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \Rightarrow \text{разрыв цепи.}$$

$$\text{Переменный ток высокой частоты} \Rightarrow \omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_C \rightarrow 0 \Rightarrow \text{КЗ, шунт.}$$

4. ЕЭ обеспечивает заранее известный сдвиг фаз между напряжением и током (на $-\pi/2$). Это используют в различных устройствах сдвига фаз.

5. ЕЭ обладает способностью накапливать энергию между своими обкладками. С этой точки зрения он является неким «резервуаром» энергии и, при больших величинах C , соответственно, при большой энергоемкости, он может быть использован подобно химическим гальваническим элементам и аккумуляторам.

6. ЕЭ имеет свойство некоторое время сохранять неизменным напряжение на своих выводах при подключении или отключении (при коммутации) к его зажимам внешней цепи см. п. 2.1.

В природе энергия скачком измениться не может, поэтому Мандельштам Л.И. (1879 –1994 гг.) и Папалекси выдвинули постулат, утверждающий, что напряжение на емкости не может изменяться скачком и в момент коммутации остается равным тому значению, которое оно имело в момент, непосредственно предшествующий коммутации $U_c(t_{0-})=U_c(t_{0+})$. Отсюда, в момент коммутации t_0 ЕЭ может быть представлен либо КЗ либо идеальным источником ЭДС.

Представим следующие логические цепочки рассуждений:

Если на ЕЭ до и после коммутации напряжение равно нулю $U_0=0$, то по определению это есть КЗ перемычка,

$$U_c(t_{0-})=U_c(t_{0+})=0 \Rightarrow \text{ЕЭ есть КЗ перемычка};$$

Если на ЕЭ до и после коммутации напряжение остается неизменным $U_0=const$, то по определению это есть идеальный источник ЭДС с напряжением U_0

$$U_c(t_{0-})=U_c(t_{0+})=U_0 \Rightarrow \text{ЕЭ есть идеальный источник ЭДС.}$$

2.5.2. Конденсаторы, выпускаемые промышленностью

В электрических цепях вместо идеализированных ЕЭ используют реальные конденсаторы. Они бывают *постоянной и переменной емкости*.

Конденсатор (от лат. *condenso* – уплотнять, собирать) это реактивный компонент электрической цепи, который, выполняя свое предназначение в заданном интервале изменений напряжения и тока, в требуемом частотном диапазоне, в необходимом интервале изменения температуры окружающей среды, с определенной точностью воспроизводит свойства идеализированного ЕЭ известного номинала.

Для того, чтобы можно было реальный конденсатор постоянной емкости характеризовать количественно, оценивать степень его отличия

от идеала используют систему параметров. Основными параметрами конденсаторов постоянной емкости являются.

1. *Номинальное значение емкости* конденсатора – это емкость, значение которой обозначено на конденсаторе или указано в сопровождающей его документации. Номинальные емкости стандартизованы и выбираются из специальных рядов.

2. *Допускаемое отклонение* действительной емкости от номинального значения (в %) или, коротко, допуск.

Допуск – выраженная в процентах по отношению к номинальной емкости разница между номинальной и действительной емкостью.

3. *Номинальное напряжение* – напряжение, значение которого обозначено на конденсаторе или указано в сопровождающей его документации, при котором он может работать в течение срока службы с сохранением параметров в допустимых пределах. Это напряжение устанавливают исходя из электрической прочности диэлектрика конденсатора.

4. *Тангенс угла потерь или добротность*.

В отличие от ЕЭ в конденсаторе через выводы может протекать постоянный ток. Это обусловлено неидеальностью диэлектрика, токами утечки и другими причинами, которые, в общем, называют потерями. Чтобы характеризовать потери, конденсатор представляют в виде последовательного соединения ЕЭ и РЭ, характеризующего потери. Чем меньше потери, тем меньше величина РЭ, тем меньше мощность, отражающая диссипацию энергии из-за потерь. Тангенс угла потерь - величина, характеризующая потери в конденсаторе и определяемая отношением активной мощности P_a к реактивной P_r при гармоническом напряжении определенной частоты. Чем больше $\operatorname{tg}\delta$ тем более значительная доля энергии рассеивается в виде тепла при протекании тока. Величина, обратная тангенсу угла потерь называется добротностью конденсатора.

5. *Температурный коэффициент емкости* – величина, равная относительному изменению емкости при изменении температуры окружающей среды на один градус.

6. *Коэффициент абсорбции* – величина, показывающая в какой степени появляется напряжение на выводах конденсатора после его разряда.

Электрические характеристики, конструкция конденсаторов постоянной емкости и область их применения существенно зависят от типа диэлектрика между его обкладками. По виду диэлектрика кон-

денсаторы постоянной емкости можно условно разделить на четыре группы:

- 1) с газообразным диэлектриком (воздушные, вакуумные);
- 2) с твердым неорганическим диэлектриком (керамические, стеклокерамические, стеклокерамические, стеклокерамические, стеклокерамические, тонкослойные из неорганических пленок, слюдяные);
- 3) с твердым органическим диэлектриком (бумажные, металлобумажные, фторопластовые, полиэтиленфталатные);
- 4) с оксидным диэлектриком (электролитические, оксидно-полупроводниковые, оксидно-металлические), выполняемые с использованием алюминия, титана, ниобия, сплавов тантала и ниобия.

Примеры исполнения конденсаторов постоянной емкости второй и третьей группы и их условные обозначения показаны на рис. 2.36.

Примеры исполнения конденсаторов постоянной емкости с оксидным диэлектриком и их условные обозначения показаны на рис. 2.37.

Для монтажа на поверхность печатных плат, как говорят в SMD-исполнении, промышленность выпускает микроминиатюрные бескорпусные ЧИП (CHIP) конденсаторы, показанные на рис.2.38. Они применяются везде, где требуется высокая плотность монтажа и высокие частотные характеристики.

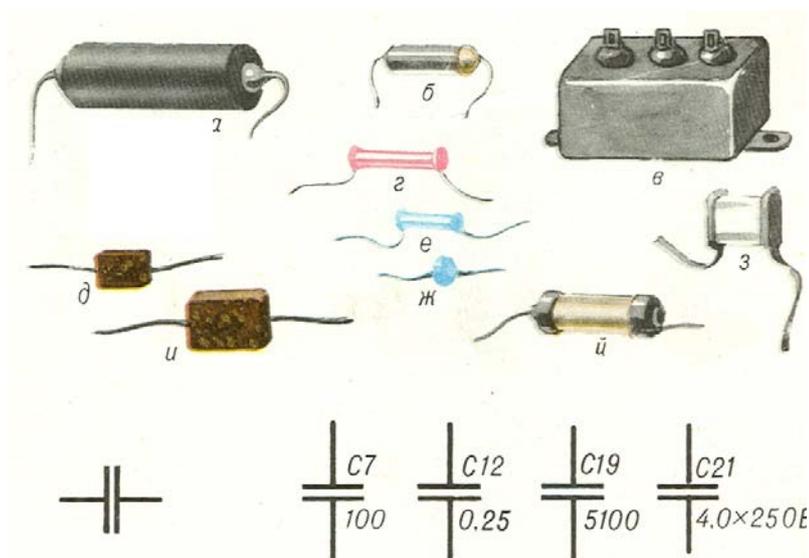


Рис. 2.36. Конденсаторы постоянной емкости и их условные обозначения на схемах

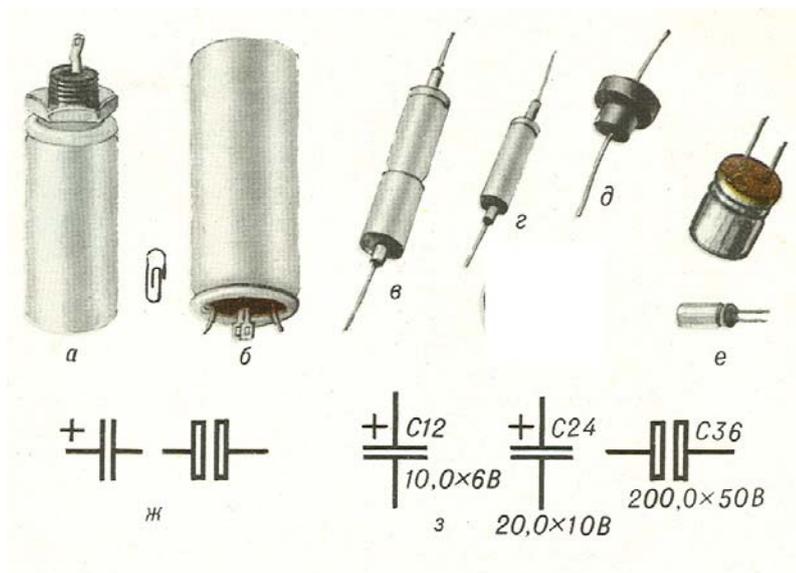


Рис. 2.37. Конденсаторы постоянной емкости с оксидным диэлектриком и их условные обозначения на схемах



Рис. 2.38. ЧИП (CHIP) конденсаторы

В последнее время для накопления значительных запасов электрической энергии, формирования мощных и кратковременных импульсов тока (необходимых для ламп – вспышек, для запуска электропривода), для использования в качестве источников ЭДС резервного энергоснабжения (работают в устройствах с непрерывным режимом работы при пропадании энергии основного источника), используют электролитические конденсаторы с двойным слоем, известные также как ультраконденсаторы, суперконденсаторы или ионисторы. Емкость таких конденса-

торов может составлять несколько тысяч фарад. Их недостаток пока – малое рабочее напряжение. Как источники электрической энергии, по энергоемкости, максимальному току разряда, количеству циклов заряда – разряда ионисторы приближаются к кислотным аккумуляторам.

Переменные и подстроечные конденсаторы выполняются с механически изменяемой емкостью. Примеры исполнения конденсаторов переменной емкости и их условные обозначения показаны на рис. 2.39.

Переменные конденсаторы имеют ручку, с помощью которой вращается подвижная часть и пластины перемещаются относительно других пластин, составляющих обкладки конденсатора. Их конструкция рассчитана на долговременную работу в режиме вращения ротора.

Максимальные значения емкости, которые можно получить у переменных конденсаторов, как правило, не превышают значений 600—5000 пФ.

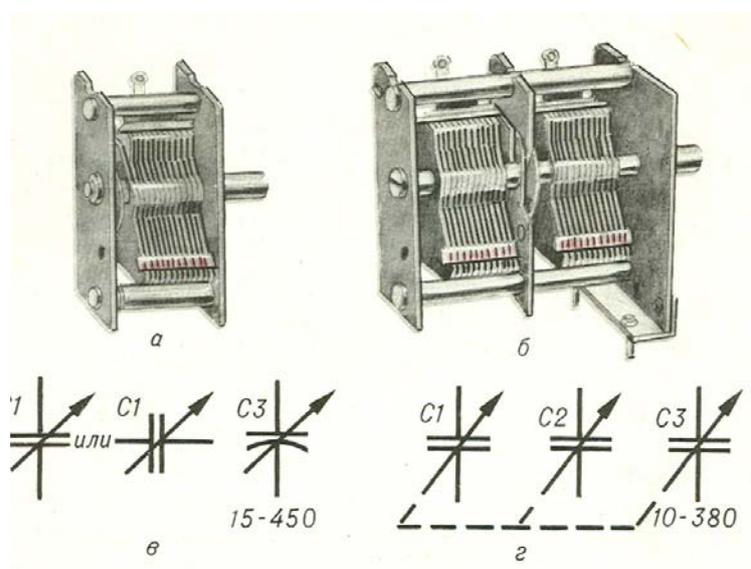


Рис. 2.39. Переменные конденсаторы с воздушным диэлектриком

У подстроенных конденсаторов подвижная часть, как правило, имеет шлиц для ее вращения отверткой и конструкция подвижной части упрощена. Она не рассчитана на долговременную работу в режиме вращения.

Промышленность выпускает переменные и подстроенные конденсаторы с воздушным, твердыми неорганическими (керамическими,

слюдяными) и органическими (полистироловыми, полиэтиленовыми и т. д.) диэлектриками. При введении диэлектриков в зазор между подвижными и неподвижными обкладками конденсатора существенно увеличивается емкость и снижаются габаритные размеры (рис. 2.40).

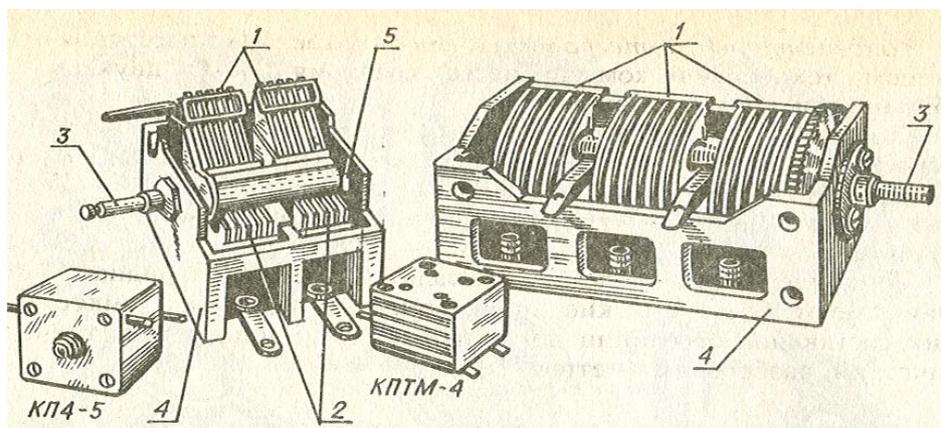


Рис. 2.40. Сравнение переменных конденсаторов с воздушным и твердым диэлектриком

Для переменных и подстроенных конденсаторов важны максимальная C_{max} и минимальная C_{min} емкости, коэффициент перекрытия по емкости $K_c \sim C_{max}/C_{min}$, и закон изменения емкости.

2.6. Индуктивные элементы и индуктивности электрической цепи

2.6.1. Идеализированный индуктивный элемент

Под индуктивным элементом (ИЭ) понимают такой идеализированный двухполюсный элемент электрической цепи, характеризующийся таким параметром как индуктивность L , в котором накапливается энергия магнитного поля, отсутствует диссипация энергии и у которого напряжение на зажимах элемента u и ток i , проходящий через его выводы, связаны между собой линейным соотношением

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (2.33)$$

Здесь предполагается, что производная от функции $i(t)$ по переменному t (времени) существует, значение L положительно, не изменяется во времени и не зависит ни от величины, ни от знака изменения тока, проходящего через элемент.

Условно ИЭ изображают в виде нескольких витков провода.

Отметим, что в отличие от резистивного элемента, напряжение не просто пропорционально току, а скорости изменения тока. Пропорционально току ИЭ потокосцепление: $\Psi=Li$. Пропорциональна квадрату мгновенного значения тока не мощность, а энергия магнитного поля, запасенная в ИЭ. Действительно, интегрируя мощность ИЭ в пределах от $-\infty$ до t получим

$$W_L = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{dt} dt = \int_0^i Lid i = \frac{Li^2}{2}. \quad (2.34)$$

Полученное выражение показывает, что энергия ИЭ не может принимать отрицательных значений, а также, что запас энергии в ИЭ определяется мгновенным значением тока в нем и не зависит от того, по какому закону он изменялся в предшествующее время.

Из сказанного следует, что «поведение» ИЭ существенно зависит от того, какой зависимостью от времени описывается ток на ИЭ $i(t)$.

Если величина тока остается неизменной во времени $i(t) = I_0 = \text{const}$, то, согласно (2.33) напряжение на выводах ИЭ, как производная от постоянной величины, равно нулю.

При протекании постоянного тока через индуктивность в ней образуется связанное с этим током и обладающее энергией магнитное поле, магнитный поток которого не изменяется. Напряжение на выводах ИЭ равно нулю, что равносильно короткому замыканию выводов элемента.

В случае гармонического напряжения, описываемого косинусоидальной зависимостью, будем иметь следующее.

Напряжение на выводах ИЭ выражается следующими соотношениями

$$u = L \frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t + \psi_i)] = -\omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad (2.35)$$

где $U_m = \omega L I_m$ – амплитуда напряжения в ЕЭ;

$\psi_u = \psi_i + \pi/2$ – начальная фаза тока в ЕЭ.

Фазовый сдвиг между напряжением и током в ИЭ

$$\varphi_L = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}, \quad (2.36)$$

т.е. напряжение на ИЭ опережает по фазе ток на угол $\pi/2$.

Энергия и мощность электрического поля ИЭ, соответственно, равны

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2(\omega t + \psi_i) = \frac{1}{4} L I_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]; \quad (2.37)$$

$$P_L = \frac{dW_L}{dt} = u(t)i(t) = -\frac{1}{2} \omega L I_m^2 \sin 2(\omega t + \psi_i). \quad (2.38)$$

Временные диаграммы напряжения, тока, мощности и энергии ИЭ приведены на рис. 2.41.

На графике имеет место наличие временных интервалов, в пределах которых напряжение и ток имеют разные знаки, а мощность – величина отрицательная. Это характерно, как отмечалось ранее, для активного элемента, т. е. для элемента, который отдает энергию в электрическую цепь. Это свидетельствует о том, что на этом временном интервале ИЭ выступает в роли источника и отдает ранее накопленную энергию цепи. Уменьшение энергии на таких временных интервалах подтверждает и график энергии.

Также на графике имеет место наличие временных интервалов, в пределах которых напряжение и ток имеют одинаковые знаки, а мощность – величина положительная. Это характерно для пассивного элемента и свидетельствует о том, что ИЭ отбирает энергию от электриче-

ской цепи и накапливает ее в своем электрическом поле. Это подтверждает и рост величины энергии на ИЭ.

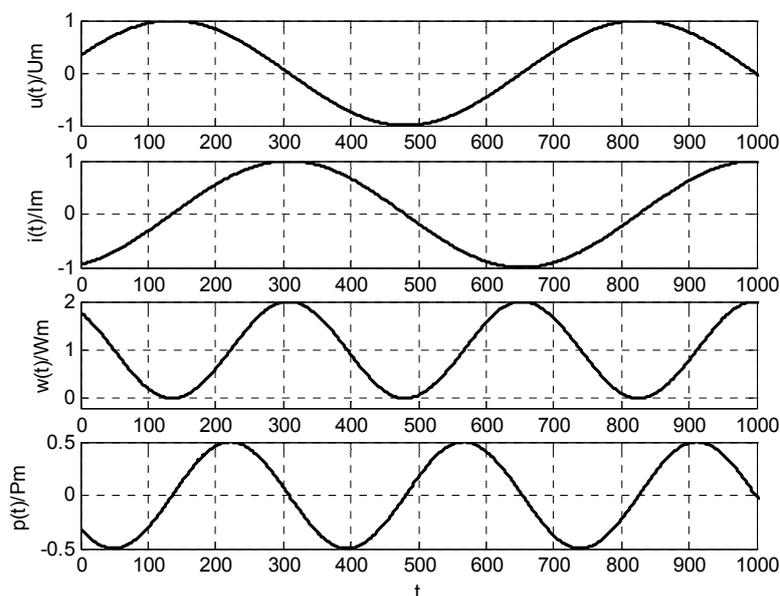


Рис. 2.41. Графики зависимости напряжения, тока, мощности и энергии от времени при гармоническом воздействии на ИЭ

То есть, знакопеременный характер графика мощности свидетельствует о том, что ИЭ то забирает энергию из электрической цепи, то возвращает ее обратно в цепь. Нетрудно показать, что среднее значение мощности при этом будет равно нулю.

В электротехнике элемент, обладающий свойством обмениваться энергией с источником энергии, без тепловых потерь и средней мощностью при этом равной нулю, как отмечалось ранее, называют реактивным. Таким образом, ИЭ это реактивный элемент, который то отдает, то принимает энергию, работая с «реактивной» мощностью, т.е. мощностью не производящей в среднем никакой работы.

Реактивная мощность ИЭ равна максимальной мощности магнитного поля ИЭ.

Комплексное сопротивление ИЭ будет равно

$$Z_L = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\omega L I_m \ell^{j\psi_u}}{I_m \ell^{j(\psi_u + \pi/2)}} = j\omega L. \quad (2.39)$$

Оно, как видно, не имеет вещественной части, а является чисто мнимой величиной. Соответственно, индуктивное сопротивление равно

$$x_L = |Z_L| = \omega L. \quad (2.40)$$

Импеданс ИЭ линейно увеличивается с ростом частоты.

Графики изменения напряжения, тока и мощности, построенные в определенном масштабе, на ИЭ при импульсных токах показаны на рис. 2.42.

Как видно из графиков при импульсном воздействии на индуктивность формы тока и напряжения на ИЭ существенно различаются. Мощность остается знакопеременной величиной, подтверждая тот факт, что ИЭ является реактивным элементом.

На основании сказанного можно утверждать, что ИЭ обладает следующими свойствами.

1. Напряжение на его выводах ИЭ существует только тогда, когда меняется ток через выводы ИЭ. При протекании через выводы ИЭ постоянного (неизменного во времени) тока напряжение на ИЭ будет равно нулю и ИЭ будет подобен КЗ цепи.

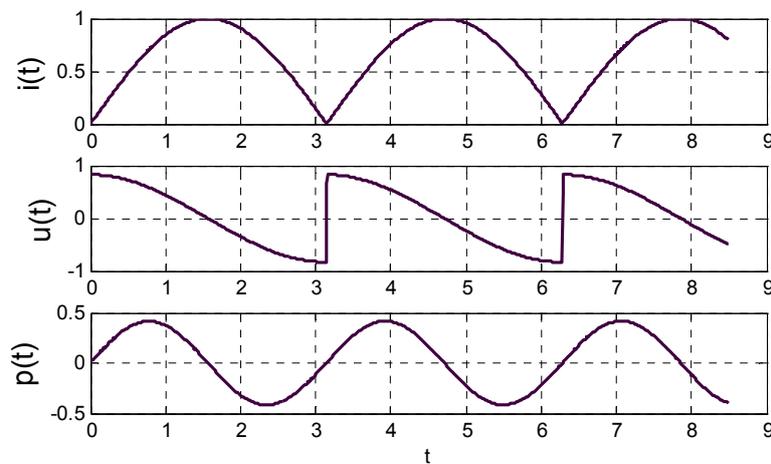


Рис. 2.42. Графики зависимости тока, напряжения, мощности от времени при импульсном воздействии на ИЭ

2. Так как величина напряжения на ИЭ пропорциональна скорости изменения тока, протекающего через ИЭ, то ИЭ может служить дифференцирующим устройством. С другой стороны, если задавать напряжение, то ток будет определяться интегралом. По этой причине ИЭ может выступать и в роли интегрирующего устройства. Зная, что интеграл от постоянной величины есть линейная зависимость, можно предположить, что при подключении ИЭ к идеальному источнику напряжения он может, с этой точки зрения, использоваться для формирования линейно-изменяющегося напряжения.

3. ИЭ обладает шунтирующе-заградительным свойством, т. е. свойством одновременно, как двухполюсник с очень малым сопротивлением (импедансом) или КЗ перемычка (как некий шунт), пропускать постоянный ток и, в тоже время, не предоставлять возможности (блокировать прохождение движущих зарядов, служить преградой прохождению тока, выступать в качестве заграждения на пути зарядов) для протекания через его выводы переменного тока высокой частоты.

Это свойство легко понять и запомнить, если представить такие логические цепочки из формул.

Постоянный ток $\Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow Z_L = \omega L \rightarrow 0 \Rightarrow$ КЗ, шунт.

Переменный ток высокой частоты $\Rightarrow \omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_L \rightarrow \infty \Rightarrow$ разрыв цепи.

4. ИЭ обеспечивает заранее известный сдвиг фаз между напряжением и током (на $\pi/2$). Это используют в различных устройствах сдвига фаз.

5. ИЭ имеет свойство некоторое время сохранять неизменным ток, протекающий через его выводы при подключении или отключении (при коммутации) подсоединенной к его выводам внешней цепи.

Согласно постулату Мандельштама и Папалекси ток через ИЭ не может изменяться скачком и в момент коммутации остается равным тому значению, которое он имел в момент, непосредственно предшествующий коммутации $I_L(t_{0-}) = I_L(t_{0+})$. Отсюда, в момент коммутации t_0 ИЭ может быть представлен либо разрывом электрической цепи, либо идеальным источником тока.

Представим следующие логические цепочки рассуждений:

Если на ИЭ до и после коммутации ток равен нулю $I_L = 0$, то по определению это есть разрыв цепи

$$I_L(t_{0-}) = I_L(t_{0+}) = 0 \Rightarrow \text{ИЭ есть разрыв цепи;}$$

Если на ИЭ до и после коммутации ток остается неизменным $I_L = I_0 = \text{const}$, то по определению это есть идеальный источник тока с током I_0

$$I_L(t_{0-}) = I_L(t_{0+}) = I_0 \Rightarrow \text{ИЭ есть идеальный источник тока.}$$

6. ИЭ обладает способностью накапливать магнитную энергию между витками. С этой точки зрения он является неким «резервуаром» энергии. Эту энергию можно извлечь из ИЭ, если прервать протекающий ток. В дальнейшем мы увидим много примеров полезного использования этого свойства.

Обратим внимание на следующее важное, но не совсем приятное обстоятельство. Что произойдет, если с помощью коммутирующего элемента, например ключа, разорвать участок цепи по которому протекает ток ИЭ? Как отмечалось в свойстве 5, ток моментально измениться не может, поэтому ИЭ «будет стремиться» обеспечить прежний ток. Напряжение на ИЭ начнет резко возрастать и будет продолжать увеличиваться до тех пор, пока «не появится ток». В нашем случае ток может появиться за счет электрического пробоя участка цепи между контактами. Следовательно, между контактами ключа возникнет электрическая дуга, отдаленно напоминающая электросварку, которая замкнет цепь и обеспечит ток. Нетрудно понять, что либо из-за «приваривания» либо из-за «выгорания» контактов такой ключ долго работать не будет. Но, вероятнее всего, раньше «погибнут» другие компоненты этой электрической цепи, не рассчитанные на работу с высокими напряжениями.

Это свойство всегда следует помнить, чтобы избегать всевозможных неприятностей, связанных с использованием ИЭ в электрической цепи или «нагрузок», имеющих индуктивный характер (реле, электромагниты, двигатели и т.п.). Чтобы не было подобных неприятностей необходимо параллельно ИЭ включать некий «демпфер» индуктивного броска напряжения, супрессор или, в простейшем случае, диод.

2.6.2. Катушки индуктивности и дроссели

В электрических цепях вместо идеализированных ИЭ используют катушки индуктивности и дроссели.

Катушка индуктивности это реактивный компонент электрической цепи, который, выполняя свое предназначение в заданном интервале изменений напряжения и тока, в требуемом частотном диапазоне, в необходимом интервале изменения температуры окружающей среды с определенной точностью воспроизводит свойства идеализированного ИЭ известного номинала.

Для того, чтобы можно было катушки индуктивности и дроссели характеризовать количественно, оценивать степень его отличия от идеала используют систему параметров. Основными параметрами катушек индуктивности являются.

1. *Номинальная индуктивность* катушки L (значение индуктивности, являющееся исходным для отсчета отклонений) – величина, которую стремятся получить при изготовлении катушки индуктивности.

Индуктивность катушки определяется ее геометрическими размерами, числом витков и магнитной проницаемостью среды, в которой существует ее магнитное поле (материала сердечника, экрана). Индуктивность катушки с магнитодиэлектрическим сердечником увеличивается, в первом приближении, в μK_ϕ раз, где μ – магнитная проницаемость материала сердечника, а K_ϕ – коэффициент, зависящий от формы сердечника. Индуктивности высокочастотных катушек -0,01 мкГн – 10 мГн, дросселей - десятки миллигенри – единицы генри.

2. *Допускаемое отклонение индуктивности* катушки (коротко – допуск) – выраженная в процентах разность между действительным и номинальным значениями индуктивности.

3. *Номинальная добротность* катушки индуктивности (значение добротности при номинальном значении индуктивности) – отношение реактивного сопротивления катушки X_L к активному сопротивлению потерь r :

$$Q = \frac{\omega L}{r}. \quad (2.41)$$

4. *Температурный коэффициент индуктивности* катушки (ТКИ) – величина, равная относительному изменению индуктивности при изменении температуры окружающей среды на один градус.

Для увеличения температурной стабильности применяют специальные меры: каркас делают из керамики, обеспечивая «горячую» намотку провода, и т.п.

5. *Собственная емкость катушки* индуктивности (электрическая емкость) – величина, составляющая с ее индуктивностью резонансный контур, измеренная на частоте собственного резонанса.

Примеры исполнения высокочастотных катушек индуктивности без сердечников и с сердечниками, их условные обозначения на схемах показаны на рис.2.43 и 2.44, соответственно.

Катушка индуктивности наматывается медным проводом на цилиндрический каркас плотно виток к витку. Чаще применяют катушки специальной конструкции с многослойной намоткой. Точка на условном графическом изображении указывает начало обмотки.

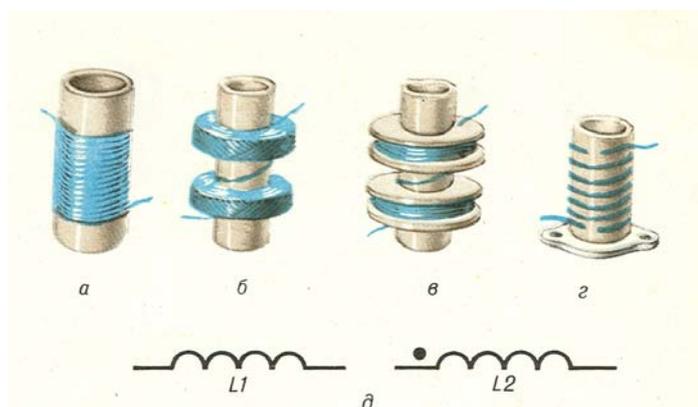


Рис. 2.43. Катушки индуктивности без сердечников и их условные обозначения на схемах

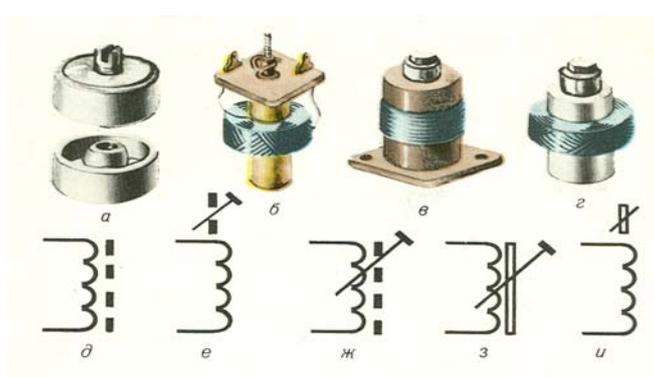


Рис. 2.44. Катушки индуктивности с сердечниками и их условные обозначения на схемах

Для изменения индуктивности применяют различные виды сердечников. Магнитодиэлектрический сердечник (из карбонильного железа) уменьшает сопротивление магнитному потоку и повышает добротность катушки индуктивности. Используют также ферритовые сердечники. Сердечники из немагнитного материала – меди или алюминия – уменьшают индуктивность катушки индуктивности.

Сердечники могут быть неподвижными (рис.2.44. д) или же могут перемещаться. Для точной подгонки индуктивности катушки (ее подстройки) сердечник делают с резьбой, что дает возможность вращать их в каркасе катушки и этим изменять индуктивность в определенных пределах.

На схемах сердечники из магнитодиэлектрика обозначаются полужирной штриховой линией, из немагнитного материала – в виде незатушеванного прямоугольника.

Дроссели высокой частоты обычно выполняют функции заградительного элемента. Их используют в высокочастотных электронных цепях, где требуется пропускать только токи относительно низких частот. Они представляют собой катушки индуктивности, намотанные внавал или с определенным шагом на диэлектрический каркас. При этом стремятся, чтобы их емкость была минимально возможной, а индуктивность – не менее требуемой.

Дроссели низкой частоты используются в выпрямительных устройствах для создания фильтров, сглаживающих пульсации в источниках питания. Их применяют тогда, когда источник питания должен отдавать большой ток (амперы - сотни ампер) и требуется получить малые пульсации постоянного напряжения. Дроссель низкой частоты наматывается с использованием специальных сердечников – магнитопроводов, изготавливаемых из таких материалов как пермаллой, молибденовый (Мо-) пермаллой, альсифер, карбонильное железо. В магнитной цепи магнитопровода делается воздушный зазор длиной 0,05 - 0,1мм.

Катушки индуктивности специальной конструкции используют в качестве магнитных головок магнитофонов, отклоняющих катушек электронно-лучевых трубок видеомониторов (дисплеев) и датчиков угла поворота вала.

Модель индуктивного датчика углового положения вала показана на рис. 2.45.

Как видно из рисунка, основным элементом датчика является катушка индуктивности L с сердечником из магнитного материала, полюса которого обозначены $N - S$. На вал помещен зубчатый диск ФД, зубцы Z которого выполнены из ферромагнитного материала. Принцип действия индуктивного датчика основан на том, что всякое изменение (уменьшение или увеличение) магнитного потока Φ через витки W катушки индуктивности вызывает возникновение на выводах катушки индуктивности ЭДС $E = Wd\Phi/dt$.

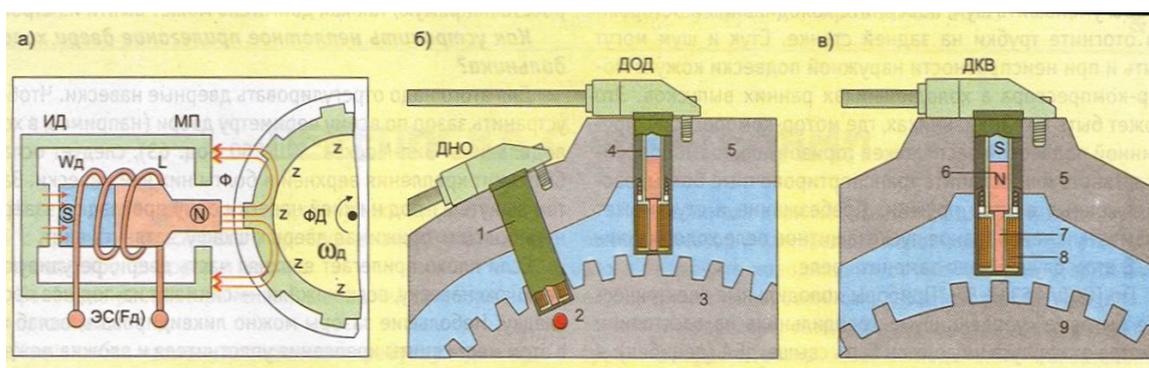


Рис. 2.45. Датчик углового положения вала

Катушка намотана на постоянный стержневой магнит. Один полюс магнита (например, северный N) выступает в сторону зубцов ферромагнитного диска ФД, а другой (южный S) упирается в цилиндрический магнитопровод МП. Магнитопровод МП, выступающий торец постоянного магнита, зубцы Z диска ФД образуют рабочий воздушный зазор датчика. При вращении вала, а соответственно и диска ФД, величина магнитного потока Φ через витки W катушки будет меняться. Когда зубец будет находиться под торцом постоянного магнита поток будет максимальным и, наоборот, когда под торец попадает впадина между зубцами – минимальным. Все это приведет к появлению знакопеременной ЭДС, точка перемены знака которой соответствует центру зуба. Путем обработки зависимости ЭДС от времени с помощью специальных устройств (они будут изучаться позже) можно зафиксировать момент прохождения центра зуба и достаточно точно определить угловое положение каждого зуба относительно точки начала отсчета.

Подсчитывая количество импульсов за определенное время можно определить частоту вращения вала, например двигателя. С этой точки

зрения такой датчик можно назвать датчиком оборотов двигателя (ДОД). Для точного измерения угла поворота вала относительно выбранной системы координат устанавливают второй индуктивный датчик – датчик начала отсчета (ДНО), реагирующий на специальный элемент (2) начала отсчета. Для начала отсчета можно использовать и сам зубчатый диск ФД, если в нем будет пропуск одного или двух зубцов в том месте, где в предыдущем случае был установлен элемент начала отсчета (2).

2.7. Частотные свойства пассивных компонентов электрической цепи

Частотные характеристики реальных двухполюсных компонентов: резистора, конденсатора, катушки индуктивности отличаются от полученных характеристик идеализированных элементов. Происходит это из-за потерь в проводниках, пластинах, диэлектрике конденсатора, магнитопроводе катушки, а также из-за других факторов, так называемых паразитных реактивностей. Все эти факторы учитываются в схемах замещения компонентов для высоких частот введением дополнительных идеализированных элементов. Величина введенного элемента отражает степень влияния того или иного паразитного фактора. Для учета тепловых потерь, в частности, вводят $RЭ$; реактивные потери, связанные с дополнительным возникновением магнитных и электрических полей, отражают введением в схему замещения дополнительных $ИЭ$ и $ЕЭ$. Реальные резисторы на схеме замещения, помимо $RЭ$ с величиной R , имеют паразитную индуктивность и емкость. Схема замещения конденсатора, кроме $ЕЭ$ с величиной C , включает в себя резистивные, индуктивные и емкостные элементы, учитывающие потери в пластинах, диэлектрике, индуктивности и емкости выводов. Катушки индуктивности имеют сопротивление потерь в обмотке, сердечнике, межвитковую паразитную емкость. Параметры элементов, необходимые для составления схем замещения реальных компонентов, приводятся в справочниках.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение компонента(элемента) электрической цепи.

2. Определите понятие схемы электрической цепи.
3. Что означает понятие коммутация цепи ?
4. Что описывает вольт-амперная характеристика (ВАХ) двухполюсника ?
5. Назовите основные разновидности двухполюсников, используемые в электротехнике.
6. Определите понятия: разрыв в цепи, короткозамкнутая перемычка, ключ.
7. Определите понятие двухполюсника и многополюсника.
8. Охарактеризуйте понятия: порт, ветвь, узел, вход и выход.
9. На какие группы разделяют компоненты электрической цепи по отношению к энергии ?
10. Определите понятия: источники (генераторы), резистивные сопротивления, индуктивности, электрические емкости, коммутаторы.
11. Активные и пассивные электрические цепи, элементы. Охарактеризуйте их.
12. Раскройте содержание понятия идеализированный источник напряжения (ИИН).
13. Какие свойства присущи ИИН ?
14. Дайте определение понятиям статическое и дифференциальное сопротивление ИИН.
15. Раскройте содержание понятия идеальный источник тока (ИИТ).
16. Перечислите свойства, присущие ИИТ.
17. Дайте определение понятиям статическое и дифференциальное сопротивление ИИТ.
18. Приведите модели замещения реального источника энергии.
19. Охарактеризуйте понятия: ток нарузки, внутреннее сопротивление источника.
20. Определите понятие внешней или нагрузочной вольт-амперной характеристики.
21. Охарактеризуйте режим короткого замыкания в электрической цепи.
22. Что означает понятие нагрузочная характеристика реального источника энергии ?
23. Что означают понятия оптимальное для данного источника сопротивление нагрузки и максимальная мощность, отдаваемая источником в нагрузку?
24. В каком случае в режиме гармонических колебаний источник (генератор) развивает в нагрузке максимальную мощность?

26. Как определяется максимально возможная мощность, которую может развить источник энергии в нагрузке? От чего она зависит?
27. Что означает понятие: коэффициент полезного действия (КПД) источника?
28. Что представляет собой зависимый источник напряжения?
29. Охарактеризуйте понятия: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН); источник напряжения, управляемый током (ИНУТ); источник тока, управляемый напряжением (ИТУН), и источник тока, управляемый током (ИТУТ). Нарисуйте условные графические изображения соответствующих источников с внутренними сопротивлениями в выходной цепи.
30. Какой ИНУН называют повторителем напряжения?
31. Нарисуйте схему источник напряжения, управляемого током (ИНУТ).
32. Какие схемы ИТУТ называют повторителем тока и отражателем тока (токовым зеркалом)?
33. Чему равно выходное сопротивление ИТУТ ?
34. Перечислите основные свойства идеальных управляемых источников.
35. Назовите основные параметры химических источников тока.
36. На основе каких металлов изготавливаются наиболее распространенные сухие элементы химических источников тока? Как обозначаются на схемах гальванические источники тока ?
37. Объясните понятие «эффект памяти» аккумулятора. Какому типу аккумуляторов он присущ?
38. Поясните почему и как нужно правильно обеспечивать отбор электрической энергии и заряжать аккумулятор.
39. Назовите 2 основных правила зарядки аккумуляторов.
40. Охарактеризуйте понятие резистивный элемент (РЭ). Перечислите его свойства. Нарисуйте вольт-амперную характеристику.
41. Назовите и охарактеризуйте основные параметры резисторов, выпускаемых промышленностью.
42. Основные типы переменных резисторов.
43. Постоянные резисторы их маркировка и условные обозначения на схемах.
44. Поясните что означает термин резисторы в SMD – исполнении.

45. Терморезисторы (термисторами). PTC (Positive Temperature Coefficient) и NTC (Negative Temperature Coefficient) термисторы. Их свойства, применение.
46. Назначение и типы варисторов и супрессоров импульсных перепадов напряжения. Нарисуйте их ВАХ.
47. Предохранители. Объясните его устройство и назначение. Назовите основные типы.
48. Назовите назначение коммутационных изделий (КИ) и разъемных соединителей и приведите их обозначения на схемах.
49. Перечислите основные типы и параметры КИ.
50. Дайте определение емкостного элемента и его изображение в схемах. Укажите связь между током и напряжением.
51. Запишите и проанализируйте выражения для тока, протекающего через ЕЭ и энергии электрического поля, запасенной в нем.
52. Энергия и мощность электрического поля ЕЭ. Приведите и проанализируйте выражения, описывающие их.
53. Охарактеризуйте комплексное сопротивление ЕЭ.
54. Перечислите основные свойства ЕЭ.
55. Охарактеризуйте основные параметры конденсаторов постоянной емкости.
56. Переменные и подстроечные конденсаторы. Их назначение, конструктивные исполнения и обозначения в схемах.
57. Дайте определение индуктивного элемента и его изображение в схемах. Укажите связь между током и напряжением.
58. Охарактеризуйте понятия энергия и мощность электрического поля ИЭ. Приведите и проанализируйте выражения, описывающие их.
59. Перечислите основные свойства ИЭ и раскройте их содержание.
60. Охарактеризуйте комплексное сопротивление ИЭ
61. Катушки индуктивности и дроссели. Перечислите и охарактеризуйте основные типы и их свойства.
62. Какие виды сердечников применяют для изменения индуктивности катушек?

3. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Первый раздел был посвящен изучению абстракций, касающихся того, как можно моделировать токи и напряжения или, коротко, сигналы электрической цепи. Во втором разделе мы рассмотрели двухполюсные и четырехполюсные компоненты электрической цепи. Для каждого изученного компонента мы получили уравнение или, как еще говорят, математическое соотношение, связующее для компонента его токи и напряжения. При этом сигналы нами рассматривались для одного компонента, а сами компоненты были не связаны друг с другом.

Но слово «цепь» означает некоторую систему, в которой компоненты как-то связаны друг с другом с помощью проводников (как говорят, цепь имеет топологию). Соответственно токи и напряжения в цепи связаны друг с другом и представляют то, что на языке математики означает систему уравнений. Поэтому следующим этапом в изучении электротехники и электроники будет переход к «всеобъемлющему» рассмотрению цепи, как некоторой системы элементов, соединенных и взаимодействующих друг с другом, со своими токами и напряжениями.

Так как всякая система характеризуется совокупностью устойчивых связей элементов друг с другом, то мы начнем с определения того, что применительно к электрической цепи означает термин «взаимосвязанные элементы», каковы бывают виды соединений элементов и какими понятиями соединения характеризуются. Кроме того, мы познакомимся с тем, как соединения элементов отражаются визуально, графически с помощью схемы электрической цепи.

Затем мы распространим полученные для отдельных компонентов соотношения для токов и напряжений на цепь любой сложности. Мы рассмотрим фундаментальные соотношения (их еще называют законами электрической цепи), связывающие в систему токи и напряжения в любой цепи. Также обсудим типичные задачи анализа цепей, формальные алгоритмы их решения, которые позволяют по заданной топологии цепи определить ток и напряжение на отдельном элементе электрической цепи или проанализировать общее «поведение» всей цепи.

В электротехнике постоянно приходится выяснять, для чего электрическая цепь предназначена, как функционирует и ведет себя при различных воздействиях. В этой связи постоянно приходится обращаться к функциональным описаниям цепи, когда всю цепь или какой-то ее

фрагмент представляют в виде «двухполюсника» или «четырёхполюсника», как «черного ящика с входом и выходом. Мы остановимся на том, как характеризуют двухполюсную цепь при изменении частоты входного воздействия. Это важно для случая, когда участок цепи представляет некую нагрузку для источника (генератора) сигнала, а сопротивление нагрузки (импеданс) зависит от частоты.

Для четырёхполюсных цепей, имеющих вход и выход, как правило, приходится выяснять, что произойдет с цепью, когда на ее вход будет подано заранее известное, как говорят, тестовое воздействие. Также важно для такой цепи, что будет представлять собой «отклик» цепи (сигнал на выходе, реакция цепи) на заданное воздействие. Мы покажем, как определяют «отклик» на наиболее типичные виды воздействий.

При гармонических входных воздействиях сигнал на выходе четырёхполюсной электрической цепи, как, впрочем, и на отдельных ее элементах, будет той же формы, что и на входе. Будет различной амплитуда и начальная фаза. Поэтому для оценки «отклика» в этом случае важно установить, как меняются амплитуды и начальные фазы по отношению к входному воздействию. Мы изучим амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики цепи, отражающие зависимости амплитуды и начальной фазы «отклика» от частоты при неизменном гармоническом воздействии на вход.

В том случае, когда осуществляется подключение или отключение (коммутация) источника сигнала, либо какого-нибудь элемента цепи, важно получить соотношение, описывающее «отклик» со всей полнотой. Мы изучим, как определять токи и напряжения, возникающие на элементах цепи при коммутации, рассмотрим, что представляет процесс перехода электрической цепи из одного состояния в другое или, коротко, переходный процесс. Мы покажем, что использование введенного маркизом Пьером Симоном де Лапласом (1749 – 1827 гг) преобразования позволяет получить формальную и относительно простую последовательность действий для нахождения отклика электрической цепи на входной сигнал, имеющий весьма сложную форму. Мы проанализируем также, что будут представлять собой «отклик» электрической цепи на тестовые импульсные воздействия: на функцию Хевисайда – переходная характеристика; на импульс Дирака – импульсная характеристика. В конце раздела мы рассмотрим, как анализируют трехфазные и магнитные цепи.

Отметим, резюмируя сказанное, что область применения описаний и анализа электрических цепей чрезвычайно широка и многообразна. Это делает «язык», используемый в ней, исключительно ценным для понимания того, что происходит в электрических цепях, для их анализа. Таким образом, цель этой лекции состоит в том, чтобы помочь вам научиться «говорить» на этом языке и решать типовые задачи электротехники и электроники.

3.1. Понятия топологии и законы электрической цепи

3.1.1. Понятия, характеризующие соединения элементов цепи

Одной из многих абстракций, используемых в электротехнике, является схема.

Схема электрической цепи – графическое изображение электрической цепи, показывающее с помощью условных графических обозначений состав элементов цепи и соответствующие соединения ее элементов. Схема обычно представляет выполненный на плоскости по определенным правилам чертеж (эскиз). Реальные элементы на схеме изображаются с помощью условных графических обозначений (УГО). Все соединения элементов на схеме или, как говорят электрические связи, показываются с помощью линий - идеальных проводников электрического тока. Схеме всегда присуща определенная структура и геометрическая конфигурация (порядок соединения между собой элементов, графический образ, показывающий расположение элементов).

Основными понятиями, характеризующими структуру и геометрическую конфигурацию цепи, являются участок (фрагмент цепи), ветвь, узел, контур.

Участок (фрагмент) электрической цепи – соединение друг с другом некоторого числа элементов цепи.

Ветвь электрической цепи – это двухполюсный фрагмент (участок) электрической цепи, в котором втекающие и вытекающие токи одинаковы. Ветвь может быть образована одним или несколькими последовательно включенными двухполюсными компонентами.

Узел электрической цепи это точка на схеме, в которой сходятся (соединяются) более двух ветвей или полюсов многополюсных компо-

нентов. Соединение только двух ветвей также считается узлом. Такой узел называется простым.

Контур электрической цепи - это замкнутая цепочка ветвей, которая объединяет узлы. При этом предполагается, что каждая ветвь и каждый узел могут войти в контур только один раз. Для того, чтобы выделить контур визуально проводят замкнутую линию, проходящую рядом с ветвями и узлами, составляющими контур. Контур, который содержит хотя бы одну ветвь, не входящую в другие контуры, называют независимыми.

В качестве примера рассмотрим схему электрической цепи, показанную на рис.3.1. Ветви схемы представлены двухполюсными компонентами R_0 , R_1 , L_0 , C_0 , C_1 , V_0 . Схема содержит пять узлов, номера которых обведены рамочкой (узел 5, имеющий нулевой потенциал, не показан). Узел 4 составляют два вывода двухполюсных компонента L_0 , C_1 и вывод трехполюсного компонента Q_0 . Аналогично, в состав узлов 2 и 3 входит вывод многополюсного компонента Q_0 . Схему можно охарактеризовать четырьмя независимыми контурами, составленными замкнутыми цепочками ветвей. Эти контура выделены штриховыми и штрихпунктирными линиями. Например, контур 1 составляют двухполюсные компоненты L_0 , C_0 , C_1 .

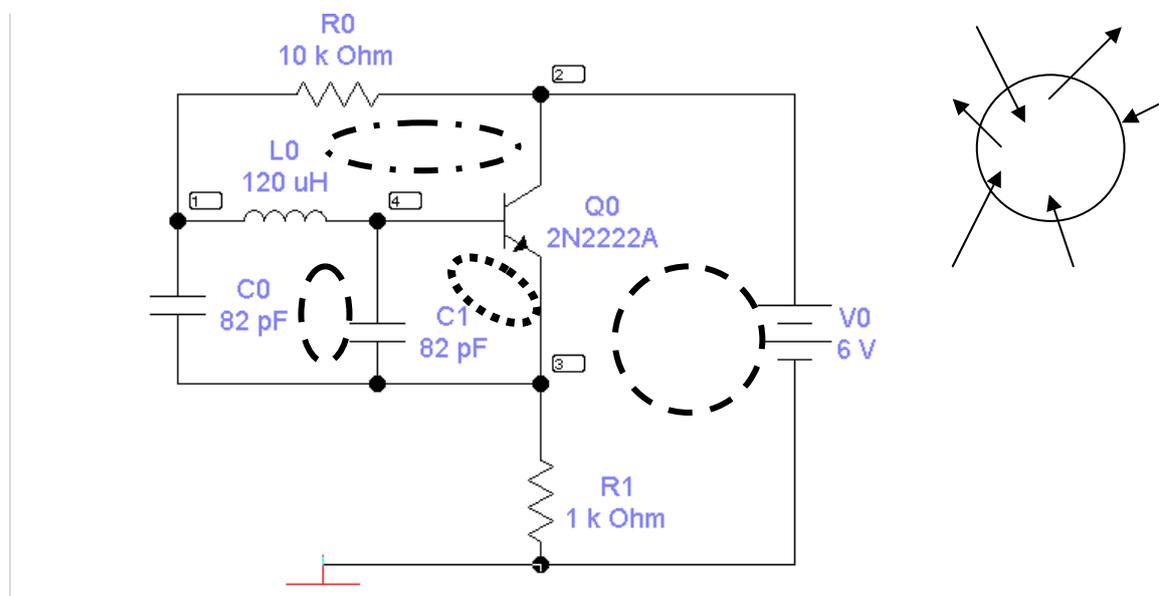


Рис. 3.1. Пример электрической цепи

3.1.2. Основные законы электрической цепи

В 1847 году немецкий естествоиспытатель Кирхгоф Г.Р. (1824 – 1887 гг.) экспериментально установил законы, которые лежат в основе анализа электрических цепей (более верно было бы их называть аксиомами).

В теории электротехники обычно принята следующая формулировка *первого закона Кирхгофа*.

Алгебраическая сумма токов, сходящихся к любому узлу электрической цепи, тождественно равна нулю в любой момент времени

$$\sum_{\nu=1}^{N_B} I_{\nu} = 0. \quad (3.1)$$

Токи, направленные к узлу, записывают в уравнение (3.1) со знаком «плюс», а токи, направленные от узла, – со знаком «минус».

Заметим, что классическая формулировка первого закона Кирхгофа вызывает затруднения при определении токов многополюсных компонентов. В трехполюсном компоненте $Q0$, например, нет узла, поэтому нельзя судить о том, как связаны токи выводов этого компонента.

Приведем другую формулировку первого закона Кирхгофа в большей степени отражающий его суть – сохранение заряда.

Отделим замкнутой поверхностью произвольный участок цепи, как это показано на рис. 3.1 справа. Эта поверхность разделит цепь на два фрагмента: на участок цепи который лежит внутри поверхности и вне ее. Выводы и направления токов через эту поверхность показаны стрелкой.

Первый закон Кирхгофа в новой формулировке будет таким.

Алгебраическая сумма токов, протекающих через замкнутую поверхность, разделяющую произвольную цепь на два фрагмента, внутренний и внешний, будет равна нулю в любой момент времени.

Теперь, если выводы трехполюсного компонента $Q0$ мысленно окружить замкнутой поверхностью, то тогда на основании первого закона Кирхгофа в последней формулировке можно утверждать, что в любой момент времени алгебраическая сумма токов, протекающих через выводы, будет равна нулю.

Классическая формулировка *второго закона Кирхгофа* звучит следующим образом.

Алгебраическая сумма напряжений на всех элементах, находящихся в цепочках ветвей контура, тождественно равна нулю в любой момент времени.

Такая формулировка не учитывает тот факт, что в ветвях могут находиться идеальные источники тока, у которых напряжение на выводах неизвестно. Представляется более строгой формулировка второго закона Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС источников, включенных в ветвях любого контура электрической цепи, равна алгебраической сумме напряжений на всех остальных элементах того же контура в любой момент времени

$$\sum_{n=1}^m E_n = \sum_{\nu=1}^k U_{\nu}. \quad (3.2)$$

При записи уравнения (3.2) знаки ЭДС и напряжений определяются выбранным направлением обхода контура. ЭДС и напряжение записывается в уравнение со знаком «плюс», если их направления совпадают с выбранным направлением обхода контура.

Заметим, что контур не обязательно должен быть простым. Если взять произвольные точки электрической цепи (это важно для многополюсных компонентов) и считать их вершинами многоугольника, то второй закон Кирхгофа будет выполняться для любого замкнутого контура, проведенного по вершинам многоугольника. Для цепи, показанной на рис.3.1, вершинами многоугольника можно взять узлы 2, 4, 3, 5. Тогда при направлении обхода против часовой стрелки можем записать

$$U_{24} + U_{43} + U_{35} = E_{V0}.$$

3.2. Соединения элементов цепи и их свойства

3.2.1. Последовательное соединение элементов цепи

Последовательным называют такое соединение фрагментов (участков) цепи или отдельных ее элементов, в котором ток через все участки цепи и элементы одинаков по величине и направлению.

Представим последовательное соединение элементов цепи в виде эквивалентного двухполюсника. Схема последовательного соединения трех элементов, включенных в одну ветвь, и эквивалентный двухполюсник, которым мы хотим заменить цепь, показаны на рис. 3.2.

На основании второго закона Кирхгофа для цепи имеем

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_K - \dot{U}_{BX} = 0, \quad (3.3)$$

или, в общем случае

$$\dot{I}Z_1 + \dot{I}Z_2 + \dot{I}Z_K - \dot{U}_{BX} = \dot{I} \sum_{k=1}^n Z_K - \dot{U}_{BX} \Rightarrow \dot{U}_{BX} = \dot{I}_{BX} \sum_{k=1}^n Z_K. \quad (3.4)$$

Напряжение и ток на выводах эквивалентного двухполюсника, которым мы хотим заменить цепь, связаны законом Ома

$$\dot{U}_{BXЭ} = \dot{I}Z_{Э}. \quad (3.5)$$

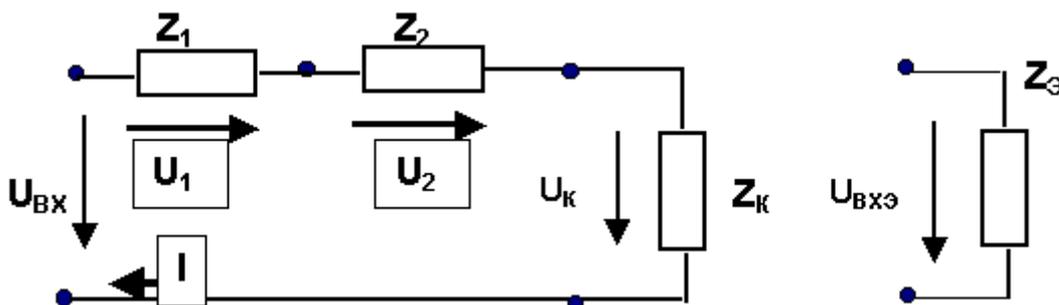


Рис. 3.2. Последовательное соединение элементов цепи

Сравнивая (3.4) и (3.5) находим

$$Z_{Э} = \sum_{k=1}^n Z_K = Z_1 + Z_2 + Z_K. \quad (3.6)$$

Таким образом, *комплексное сопротивление* последовательного соединения элементов равно сумме комплексных сопротивлений всех элементов, образующих соединение. Из (3.3) несложно заметить, что по-

следовательное соединение «делит» входное напряжение между элементами цепи. Два последовательно соединенных элемента образуют *простейший делитель напряжения* (рис. 3.3). Говорят, что он состоит из двух «плеч»: нижнего и верхнего. При этом напряжение на зажимах всей цепи рассматривают как входное, а на нижнем плече делителя, как выходное. Для анализируемой цепи при гармоническом входном сигнале амплитуда напряжения на нижнем плече делителя равна

$$\dot{U}_{m2} = \frac{\dot{U}_{mBX} Z_2}{Z_1 + Z_2} = K_d \dot{U}_{mBX}. \quad (3.7)$$

Соотношение (3.7) определяет важное *свойство простейшего делителя напряжения*, которое следует запомнить:

амплитуда напряжения на интересующем нас плече делителя напряжения равна амплитуде входного напряжения, умноженной на сопротивление интересующего плеча делителя и деленной на сумму сопротивлений плеч делителя. Отношение сопротивлений определяет коэффициент деления K_d , показывающий во сколько раз амплитуда напряжения на выходе будет меньше чем на входе

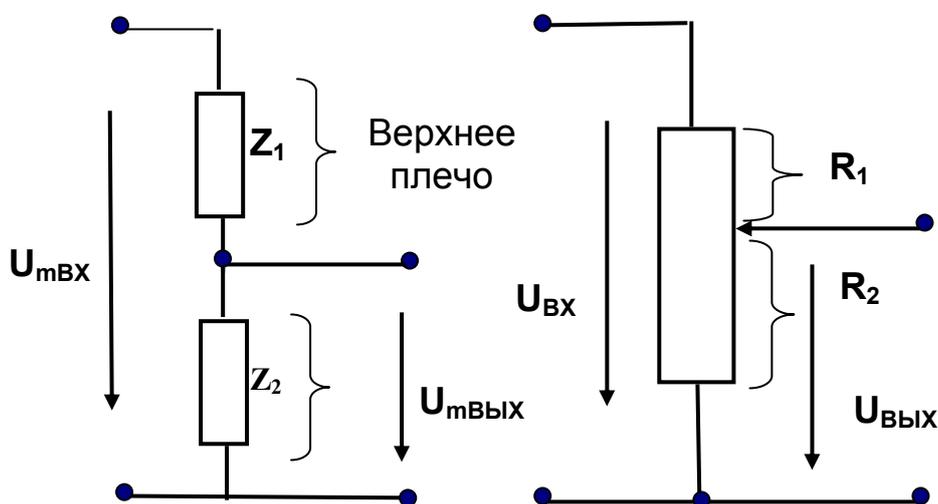


Рис. 3.3. Простейший делитель напряжения и его реализация с помощью переменного резистора

В цепях постоянного тока, где плечи уменьшают потенциал (рис. 3.3), делители напряжения называют потенциометрами.

Переменный резистор может выполнять функцию делителя напряжения с переменным коэффициентом деления $K_d(\alpha)$. Величина $K_d(\alpha)$ зависит от угла поворота α ручки резистора.

Рассмотрим случай, когда переменный резистор (рис. 2.19), состоящий из резистивного элемента (на рис. 3.3 условно показан прямоугольником) и перемещающейся по нему контактной щетки (на рис. 3.3 условно показана стрелкой) «делит» постоянное напряжение U_{BX} . При расположении контактной щетки, показанном на рис. 3.3, переменный резистор состоит как бы из двух плеч. Верхнее плечо определяется сопротивлением участка резистивного элемента R_1 нижнее плечо – R_2 . В соответствии с (3.7) для переменного резистора можно записать

$$U_{ВЫХ} = \frac{U_{BX} R_2}{R_1 + R_2} = K_d(\alpha) U_{BX}. \quad (3.8)$$

Вращая ручку переменного резистора и перемещая, тем самым, положение контактной щетки, можно добиться, чтобы $K_d(\alpha) = 1$ и напряжение с входа полностью передавалось на выход, и, наоборот, $K_d(\alpha) = 0$, чтобы напряжение на выход не поступало. Действительно, в самом верхнем положении контактной щетки

$$R_1 = 0 \Rightarrow U_{ВЫХ} = U_{ВХ}.$$

В нижнем положении контактной щетки

$$R_2 = 0 \Rightarrow U_{ВЫХ} = 0.$$

3.2.2. Параллельное соединение элементов цепи

Параллельным называют такое соединение фрагментов (участков) цепи или отдельных ее элементов, в котором напряжение на всех участках цепи или элементах одинаково по величине и направлению.

Представим параллельное соединение элементов цепи в виде эквивалентного двухполюсника. Схема параллельного соединения трех элементов, подсоединенных к двум узлам, и эквивалентный двухполюсник, которым мы хотим заменить цепь, показаны на рис.3.2.

Для гармонического сигнала на основании первого закона Кирхгофа имеем

$$\dot{I}_{BX} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_K = 0, \quad (3.9)$$

или в общем случае

$$\dot{I}_{BX} = \sum_{K=1}^n \dot{I}_K = \dot{U}_{BX} \sum_{K=1}^n Y_K. \quad (3.10)$$

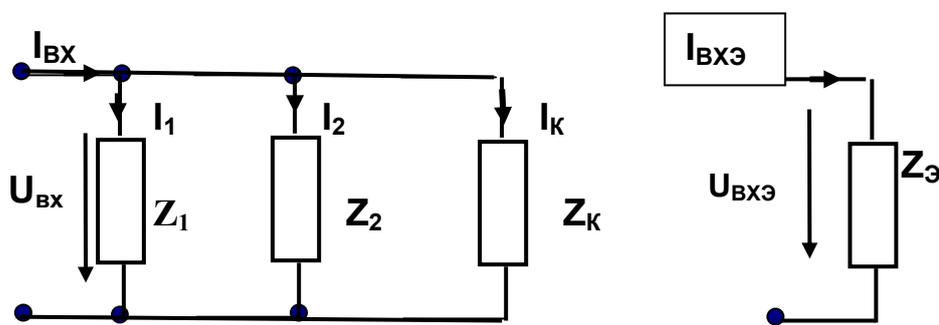


Рис. 3.4. Параллельное соединение элементов цепи

Напряжение и ток на выводах эквивалентного двухполюсника, которым мы хотим заменить цепь, связаны Законом Ома

$$\dot{I}_{BXЭ} = \frac{\dot{U}_{BXЭ}}{Z_Э} = \dot{U}_{BXЭ} Y_Э. \quad (3.11)$$

Сравнивая (3.10) и (3.11) находим

$$Y_Э = \sum_{k=1}^n Y_K = Y_1 + Y_2 + Y_K. \quad (3.12)$$

То есть, комплексная проводимость параллельного соединения элементов электрической цепи равна сумме комплексных проводимостей всех элементов, образующих соединение.

Комплексное сопротивление двух параллельно соединенных элементов определяется следующей формулой

$$Z_{\mathcal{E}} = \frac{1}{Y_{\mathcal{E}}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.13)$$

То есть, комплексное сопротивление двух параллельно соединенных элементов электрической цепи равно произведению комплексных сопротивлений этих элементов, деленному на сумму их комплексных сопротивлений

Из (3.9) несложно заметить, что параллельное соединение «делит» входной ток между элементами цепи.

Два параллельно соединенных элемента образуют *простейший делитель тока* (рис. 3.5). Он состоит из двух ветвей.

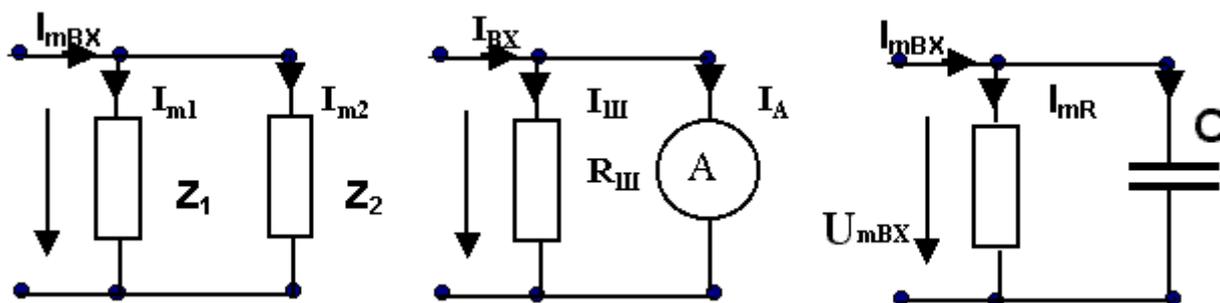


Рис. 3.5. Простейший делитель тока и его реализация в приборах измерения тока и для шунтирования резистора

Амплитуды токов в ветвях простейшего делителя соответственно равны

$$\dot{i}_{m1} = \frac{\dot{U}_{mBX}}{Z_1} = \frac{\dot{i}_{mBX}}{Z_1 Y_{\mathcal{E}}} = \frac{\dot{i}_{mBX}}{Z_1} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} = \frac{\dot{i}_{mBX} Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (3.14)$$

$$\dot{i}_{m2} = \frac{\dot{U}_{mBX}}{Z_2} = \frac{\dot{i}_{mBX}}{Z_2 Y_{\mathcal{E}}} = \frac{\dot{i}_{mBX}}{Z_2} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} = \frac{\dot{i}_{mBX} Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.15)$$

Соотношения (3.14) и (3.15) определяют следующее важное свойство простейшего делителя тока, которое следует запомнить: амплитуда тока в интересующей нас ветви делителя определяется амплитудой входного тока, умноженной на сопротивление другой ветви и деленной на сумму сопротивлений плеч делителя.

Это свойство свидетельствует о том, что большая часть тока всегда протекает по той ветви сопротивление которой меньше. В частности, если одна ветвь представляет собой КЗ перемычку, то по ней протекает весь ток.

$$\dot{I}_{K3} = \frac{\dot{I}_{mBX} Z_2}{Z_2 + 0} = \dot{I}_{mBX};$$

Если требуется уменьшить ток в элементе электрической цепи, то параллельно ему включается элемент, который называется шунтом.

Шунтом принято называть одну из двух параллельно соединенных ветвей, которая подключается для уменьшения тока в другой ветви.

Шунт применяют для расширения пределов измерения тока амперметрами (рис.3.5). Параллельно амперметру с сопротивлением R_A включают специальный резистор с малым сопротивлением $R_{ш}$. В этом случае амперметр вместо реально протекающего тока I_{BX} будет показывать ток

$$I_A = \frac{I_{BX} R_{ш}}{R_{ш} + R_A}. \quad (3.16)$$

Делитель тока используют часто в электронике для шунтирования резисторов по переменному току (рис. 3.5).

$$\dot{I}_{mR} = \frac{\dot{I}_{mBX} Z_C}{R + Z_C}. \quad (3.17)$$

Представим такие цепочки из формул.

Постоянный ток $\Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow Z_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{I}_{mR} = \dot{I}_{mBX}$.

Следовательно, весь постоянный ток протекает через резистор.

Переменный ток высокой частоты $\Rightarrow \omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_C \rightarrow 0 \Rightarrow I_{mR} = 0$.

Т.е. в этом случае переменный ток высокой частоты через резистор не протекает.

3.2.3. Смешанное соединение элементов цепи

Смешанным называют соединение, образованное параллельным или последовательным соединением участков цепи, в пределах которых отдельные элементы, в свою очередь, соединены только последовательно или параллельно.

Типичным примером такого соединения является схема двухполюсника, показанная на рис.3.6.

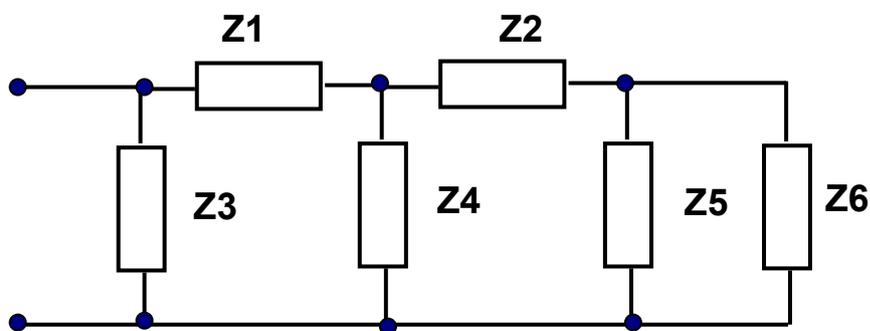


Рис. 3.6. Пример смешанного соединения элементов цепи

На этой схеме имеется группа элементов Z_5, Z_6 , соединенных параллельно. Эта группа с элементом Z_2 соединена последовательно. Отмеченное последовательно-параллельное соединение, в свою очередь, является участком цепи, включенным параллельно элементу Z_4 . Эта группа элементов включена последовательно с элементом Z_1 . Наконец, отмеченная выше цепь включена последовательно с элементом Z_2 .

Словесная формулировка имеющихся разновидностей соединения выделенных групп последовательных и параллельных элементов называется формулой соединения. Зная формулу соединения можно существенно упростить электрическую цепь, заменив ее эквивалентным двухполюсником с комплексным сопротивлением $Z_{эке}$.

Формула смешанного соединения элементов электрической цепи, показанной на рис.3.6 следующая.

Электрическая цепь представляет собой параллельное соединение двух ветвей. В первую ветвь входит элемент с комплексным сопротивлением Z_3 . Вторая ветвь образована последовательным соединением элемента Z_1 и параллельно включенных элемента Z_4 и ветви, которая образована последовательным соединением элемента Z_2 и участка цепи с параллельным соединением элементов Z_5 , Z_6 .

На основании соотношений по формуле соединения можем записать

$$Z_{\text{ЭКВ}} = \frac{Z_3 \left[Z_1 + \frac{Z_4 \left(Z_2 + \frac{Z_5 Z_6}{Z_5 + Z_6} \right)}{Z_4 + \left(Z_2 + \frac{Z_5 Z_6}{Z_5 + Z_6} \right)} \right]}{Z_3 + \left[Z_1 + \frac{Z_4 \left(Z_2 + \frac{Z_5 Z_6}{Z_5 + Z_6} \right)}{Z_4 + \left(Z_2 + \frac{Z_5 Z_6}{Z_5 + Z_6} \right)} \right]}. \quad (3.18)$$

3.2.4. Соединение элементов цепи «звездой» и «треугольником»

В ряде случаев не удается осуществить преобразование некоторой части цепи, опираясь на схемы последовательного и параллельного соединения элементов. Для упрощения не представляющих собой смешанное соединение электрических цепей, в электротехнике используют соединения элементов цепи «треугольником» и «звездой» (рис. 3.7).

Преобразования конфигурации цепи в эквивалентное соединение осуществляются таким образом, чтобы после преобразования режимы остальной, не преобразованной части цепи оставались неизменными. При равенстве комплексных амплитуд токов и напряжений между соответствующими парами полюсов (выводов) в исходной и преобразованной цепях будут равны и комплексные сопротивления обоих трехполюсников между рассматриваемыми парами полюсов.

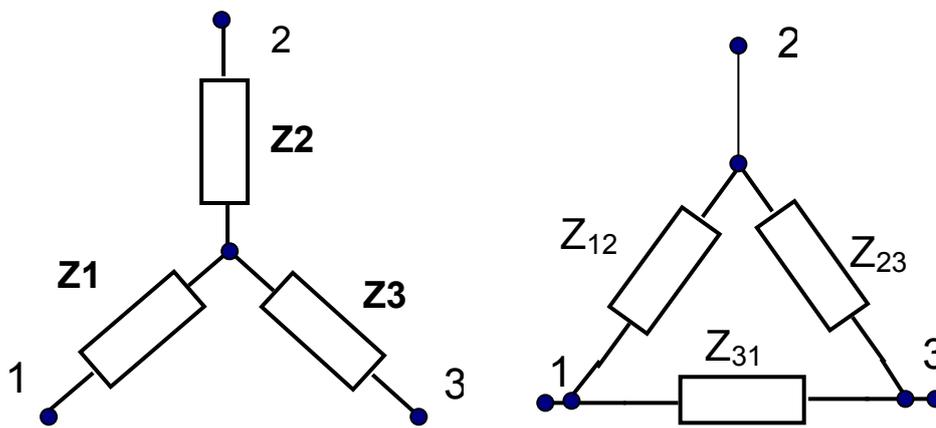


Рис. 3.7. Пример соединения элементов цепи «звездой» и «треугольником»

Опираясь на это условие эквивалентности, без вывода запишем формулы, позволяющие рассчитывать комплексные сопротивления одного типа соединения по известным величинам сопротивлений другого.

Если заданы комплексные сопротивления «треугольника» и отыскиваются сопротивления эквивалентной ему «звезды», то следует пользоваться формулами:

$$Z_1^Y = \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad (3.19)$$

$$Z_2^Y = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad (3.20)$$

$$Z_3^Y = \frac{Z_{23}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \quad (3.21)$$

Правило преобразования «треугольника» в «звезду»: комплексное сопротивление луча «звезды» равно произведению двух комплексных сопротивлений «треугольника», присоединенных в нем к одноименному (подобному) узлу, деленному на сумму всех сопротивлений «треугольника».

Если заданы комплексные сопротивления «звезды» и отыскиваются сопротивления эквивалентного ему «треугольника», то следует пользоваться формулами:

$$Z_{12}^{\Delta} = \frac{D}{Z_3}; Z_{23}^{\Delta} = \frac{D}{Z_1}; Z_{31}^{\Delta} = \frac{D}{Z_2}; D = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1. \quad (3.22)$$

Правило преобразования «звезды» в «треугольник»: комплексное сопротивление ветви треугольника равно сумме попарных произведений комплексных сопротивлений лучей звезды, деленной на комплексное сопротивление луча, не подсоединенного к одноименным узлам.

3.2.5. Последовательный колебательный контур и его свойства

Последовательным колебательным контуром называется двухполюсная электрическая цепь, подключенная к источнику гармонического сигнала и содержащая в своем составе резистор, конденсатор и индуктивность, соединенные последовательно (рис. 3.8).

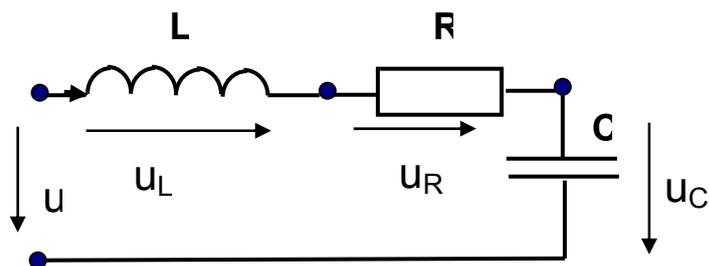


Рис. 3.8. Последовательный колебательный контур

Резистор может в контур может специально не включаться, но в контуре он всегда будет присутствовать, отражая потери, имеющие место в реальных реактивных элементах.

Комплексное сопротивление последовательного контура определяется следующими соотношениями

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX. \quad (3.23)$$

Изобразим для последовательного колебательного контура график зависимости реактивного сопротивления X от частоты (рис.3.9), учитывая, что

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L - x_C. \quad (3.24)$$

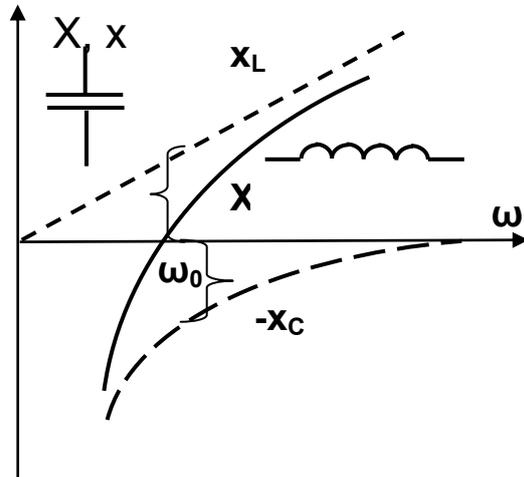


Рис. 3.9. График зависимости реактивного сопротивления от частоты

Анализ графика показывает, что на частоте ω_0 реактивное сопротивление контура X становится равным нулю. Это свидетельствует о том, что сопротивление цепи становится чисто резистивным (активным) и сдвиг фаз между напряжением и током в контуре равен нулю.

Явление в электрической цепи, содержащей индуктивность и емкость, при котором сдвиг фаз между напряжением и током равен нулю, называется электрическим резонансом.

Частота, на которой наблюдается данное явление, получило название резонансной частоты.

Резонансную угловую частоту ω_0 , как скорость изменения полной фазы, можно определить из (3.25)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.25)$$

Соответственно, резонансная частота f_0 равна

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.26)$$

В диапазоне частот, когда частота источника сигнала меньше резонансной частоты $f < f_0$, преобладает реактивное сопротивление емкости, сопротивление контура имеет активно-емкостной характер и фазовый сдвиг между напряжением и током есть величина отрицательная.

В области частот $f > f_0$ преобладает реактивное сопротивление индуктивности, сопротивление контура активно-индуктивное, напряжение на выводах цепи опережает по фазе ток.

Для более детальной характеристики явления резонанса рассмотрим процессы обмена энергией, которые происходят в последовательном контуре.

Если исходить из (2.29) и (2.37) а также из того, что через реактивные элементы протекает ток одинаковой амплитуды, то можно показать, что на резонансной частоте средние значения энергий емкости и индуктивности одинаковы, а их сумма является величиной постоянной, не зависящей от времени. Это свидетельствует о том, что энергия, которую первоначально (при подключении) накопили емкость и индуктивность в своих электрических и магнитных полях в последующем только перераспределяется между ними или, другими словами, перекачивается из емкости в индуктивность и обратно, причем уже без участия в этом процессе источника энергии. В идеале, если бы при этом исключить резистор и потери в реактивных элементах, то источник можно было бы вообще отключить и, несмотря на это, в последовательном колебательном контуре все равно бы протекал непрерывный периодический процесс обмена энергией между электрическим полем емкости и магнитным полем индуктивности.

В реальном последовательном контуре из-за сопротивления часть энергии обменных процессов превращается в тепло, поэтому источник энергии все время восполняет необратимые потери энергии в сопротивлении.

Отношение величин энергий, накапливаемых на резонансной частоте в реактивных элементах последовательного контура к энергии, расходуемой в цепи в виде необратимых потерь, за период, называется добротностью контура. Обычно при оценке величины добротности указанное отношение умножают на множитель 2π .

$$Q = \frac{2\pi W_P}{W_R(T_0)} = \frac{2\pi/2 LI_m^2}{\pi/\omega_0 RI_m^2} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{x_L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}; \quad (3.27)$$

$$Q = \frac{2\pi W_P}{W_R(T_0)} = \frac{2\pi/2 \frac{1}{\omega_0^2 C} I_m^2}{\pi/\omega_0 RI_m^2} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{x_C}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}. \quad (3.28)$$

Из формул следует, что величина добротности помимо того, что характеризует соотношение энергий, отражает также во сколько раз реактивные сопротивления элементов контура больше активного сопротивления R .

Отметим, что величина добротности последовательных контуров в зависимости от качества конденсатора и катушки индуктивности составляет $Q = 50 - 120$.

Поскольку реактивные сопротивления на резонансной частоте равны и через них протекает один и тот же ток, то амплитуды напряжений на реактивных элементах контура равны $U_{mL} = U_{mC}$. К тому же,

$$U_{mL} = x_L I_m = \omega_0 L \frac{U_m}{R} = QU_m, \quad (3.29)$$

$$U_{mC} = x_C I_m = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{U_m}{R} = QU_m. \quad (3.30)$$

Следовательно, на резонансной частоте амплитуды напряжений на реактивных элементах в Q раз превышают амплитуду напряжения, поданного на контур от источника.

Комплексное сопротивление последовательного контура (3.23) можно выразить через добротность

$$Z = R \left[1 + jQ \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]. \quad (3.31)$$

Тогда полное сопротивление цепи равно

$$z = |Z| = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}. \quad (3.32)$$

График зависимости полного сопротивления последовательного контура от частоты показан на рис. 3.10.

Полное сопротивление контура на резонансной частоте минимально и равно сопротивлению R . Если последовательный контур подключить к реальному источнику гармонической ЭДС, то, исходя из правила простейшего делителя напряжения, можно утверждать, что последовательный контур подавляет («вырезает», осуществляет режекцию) напряжения резонансной частоты. Т. о. последовательный колебательный контур обладает следующими свойствами. 1. В контуре наблюдается явление электрического резонанса. Поскольку напряжения на реактивных элементах увеличиваются в Q раз по сравнению с напряжением источника, то правильнее говорить, что в контуре имеет место явление электрического резонанса напряжений. 2. В случае высокой добротности контура явление резонанса характеризуется тем, что контур мало энергии потребляет от источника, а внутри него идет непрерывно периодический процесс обмена энергиями реактивных элементов. Контур как бы становится генератором гармонической ЭДС.

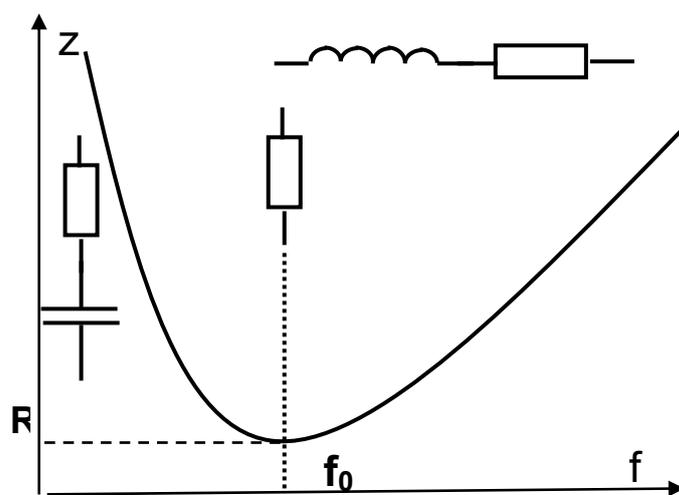


Рис. 3.10. График зависимости полного сопротивления последовательного контура от частоты

3. Напряжение на реактивных элементах может почти в 100 раз (точнее в Q раз) превышать напряжение источника.

4. Сопротивление контура на резонансной частоте минимально и практически равно нулю. Если источник гармонической ЭДС вырабатывает сигналы с несколькими частотами, то последовательный контур подавляет сигнал, частота которого совпадает с резонансной частотой. Режекция будет тем лучше, чем больше величина добротности контура. Это свойство можно использовать для подавления сигналов – помех.

5. Для обеспечения передачи энергии от источника в нагрузку контур, при работе на резонансной частоте, должен подключаться к реальному источнику ЭДС, обладающему малым внутренним сопротивлением.

3.2.6. Параллельный колебательный контур и его свойства

Параллельным колебательным контуром называется двухполюсная электрическая цепь, подключенная к источнику гармонического сигнала и содержащая в своем составе резистор, конденсатор и индуктивность, соединенные параллельно (рис. 3.11).

Резистор в контур может специально не включаться, но в контуре он всегда будет присутствовать, отражая потери, имеющие место в реальных реактивных элементах.

Комплексная проводимость параллельного контура определяется следующими соотношениями

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB. \quad (3.33)$$

Изобразим для параллельного колебательного контура график зависимости реактивной проводимости Y от частоты (рис. 3.12), учитывая, что

$$Y(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L} = y_C - y_L. \quad (3.34)$$

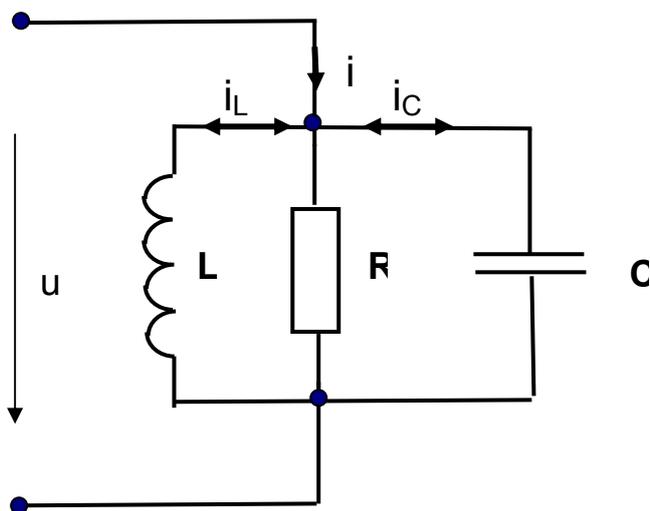


Рис. 3.11. Параллельный колебательный контур

Анализ графика показывает, что на частоте ω_0 реактивная проводимость контура становится равной нулю. Это свидетельствует о том, что сопротивление цепи становится чисто резистивным (активным) и сдвиг фаз между напряжением и током в контуре равен нулю. Следовательно, в параллельном контуре также имеет место явление электрического резонанса.

Резонансная частота параллельного контура определяется той же формулой что и резонансная частота последовательного контура

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.35)$$

В диапазоне частот, когда частота источника сигнала меньше резонансной частоты $f < f_0$, преобладает реактивное сопротивление индуктивности, сопротивление контура имеет активно - индуктивный характер и фазовый сдвиг между напряжением и током есть величина положительная.

В области частот $f > f_0$ преобладает реактивное сопротивление конденсатора, сопротивление контура активно – емкостное, ток источника опережает по фазе напряжение на выводах.

Если рассмотреть, что происходит в параллельном контуре с энергией, то можно установить, что и при параллельном соединении реактивных элементов на резонансной частоте происходит непрерывный периодический процесс обмена энергиями между электрическим полем

конденсатора и магнитным полем индуктивности, который сопровождается необратимыми потерями части энергии на резисторе. Энергия, поступающая от источника электрической энергии в контур, компенсирует тепловые потери на сопротивлении контура.

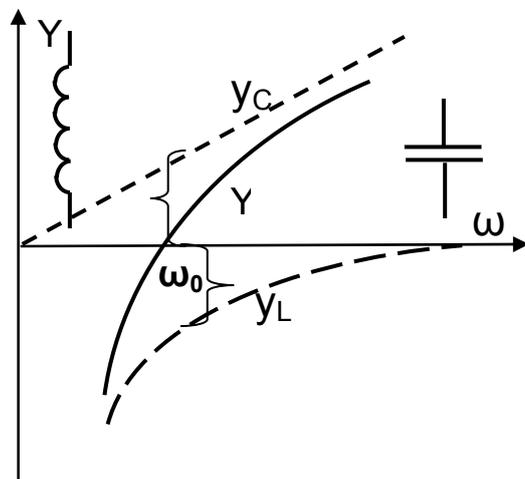


Рис. 3.12. График зависимости реактивной проводимости параллельного контура от частоты

Контур оценивается добротностью, показывающей отношение (с учетом 2π) величин энергий, накапливаемых на резонансной частоте в реактивных элементах параллельного контура к энергии, расходуемой в цепи в виде необратимых потерь, за период. Добротность параллельного контура определяется формулой

$$Q = \frac{2\pi W_P}{W_R(T_0)} = \frac{2\pi \frac{1}{2} \omega_0 C U_m^2}{\pi / R U_m^2} = \omega_0 C R = \frac{R}{\sqrt{L/C}} = \frac{R}{\rho}. \quad (3.36)$$

Следует иметь в виду, что, величины R , входящие в формулу добротности в параллельном (3.36) и последовательном (3.27, 3.28) контуре, существенно различны. Если не включать в контур дополнительный резистор, а учитывать только потери реактивных элементов, величины R в формулах добротности последовательного и параллельного контуров будут различаться на несколько порядков. При последовательном соединении L и C величина $R = r$, определяясь сопротивлением провода катушки r , будет составлять несколько десятков Ом. В параллельном

контуре потери на тепловыделение за счет нагревания провода пересчитывают по формуле $R = \rho^2 / r$, поэтому его величина десятки кОм.

Отметим, что величина добротности параллельных контуров в зависимости от качества конденсатора и катушки индуктивности составляет $Q = 50 - 120$.

Поскольку реактивные проводимости на резонансной частоте равны и на них одно и то же напряжение, то амплитуды токов на реактивных элементах контура равны $I_{mL} = I_{mC}$. К тому же,

$$I_{mL} = y_L U_m = \frac{U_m}{\omega_0 L} = \frac{I_m R}{\sqrt{L/C}} = Q I_m, \quad (3.37)$$

$$I_{mL} = y_L U_m = U_m \omega_0 C = \frac{I_m R}{\sqrt{L/C}} = Q I_m. \quad (3.38)$$

Следовательно, на резонансной частоте амплитуды токов на реактивных элементах в Q раз превышают амплитуду тока, поданного на контур от источника.

Комплексное сопротивление параллельного контура, если его выразить через добротность, равно

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}. \quad (3.39)$$

Тогда полное сопротивление цепи равно

$$Z = |z| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}. \quad (3.40)$$

График зависимости полного сопротивления параллельного контура от частоты показан на рис.3.13.

Полное сопротивление контура на резонансной частоте максимально и равно сопротивлению R . С отклонением от резонансной частоты (с увеличением расстройки относительно резонансной частоты) полное сопротивление контура уменьшается.

Если параллельный контур подключить к реальному источнику гармонического тока, то можно утверждать, что параллельный контур «выделяет» напряжение резонансной частоты, а также сигналы, частоты которых находятся в полосе (диапазоне) частот примыкающей к резонансной частоте. Этот диапазон частот называют полосой пропускания контура. Границы полосы пропускания определяют частоты f_1 и f_2 . Полоса пропускания контура определяется формулой

$$\Pi = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}. \quad (3.41)$$

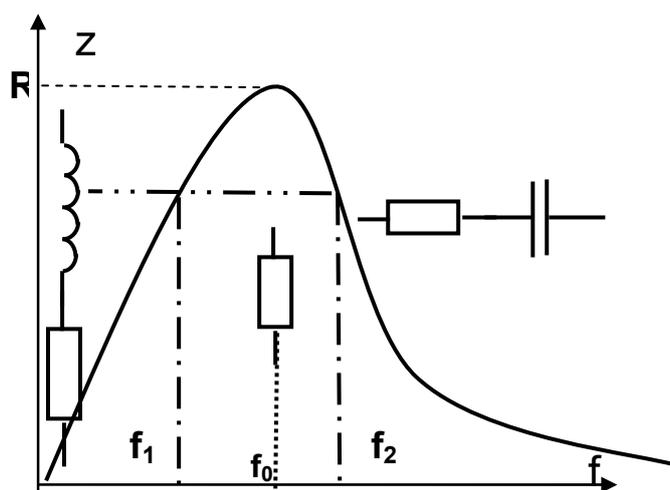


Рис. 3.13. График зависимости полного сопротивления параллельного контура от частоты

Резюмируя сказанное отметим, что параллельный колебательный контур обладает следующими свойствами.

1. В контуре наблюдается явление электрического резонанса. Поскольку ток на реактивных элементах увеличиваются в Q раз по сравнению с током источника, то правильнее говорить, что в контуре имеет место явление электрического резонанса токов.

2. В случае высокой добротности контура явление резонанса характеризуется тем, что контур мало энергии потребляет от источника, а

внутри него идет непрерывно периодический процесс обмена энергиями реактивных элементов. Контур как бы становится генератором гармонической ЭДС.

3. Ток на реактивных элементах может почти в 100 раз (точнее в Q раз) превышать ток источника.

4. Если источник гармонического тока вырабатывает сигналы с несколькими частотами, то параллельный контур выделяет сигналы, частоты которых лежат в его полосе пропускания. Выделение сигналов будет тем лучше, чем больше величина добротности контура. Это свойство можно использовать для выделения полезных сигналов, например в радиовещательном приемнике.

5. Сопротивление параллельного контура на резонансной частоте максимально. Для обеспечения передачи энергии от источника в нагрузку параллельный контур, при работе на резонансной частоте, должен подключаться к реальному источнику тока, обладающему большим внутренним сопротивлением. При малых величинах внутренних сопротивлений источника добротность контура существенно уменьшается.

3.2.7. Пьезоэлектрический элемент и его свойства

В электронике крайне необходимы устройства, способные генерировать сигналы с очень стабильными параметрами или точно выделять их из большой совокупности (фильтровать). Чтобы реализовать такие устройства, необходимы контура имеющие очень высокую добротность. Добиться этого от контуров, выполненных из реальных конденсаторов и катушек индуктивности, не представляется возможным, даже, несмотря на то, что предпринимаются ряд специальных конструктивных мер.

Добиться высокой добротности от резонансной системы, как оказалось, можно применяя *пьезоэлектрические резонаторы*.

Термин «пьезо» происходит от греческого слова «piezo» - давлению. Ряд материалов при давлении на них создают на внешней поверхности электрический заряд, как говорят, пьезоэлектричество. Существует и обратный пьезоэффект, который сводится к тому, что приложенное к материалу электрическое напряжение приводит к возникновению механических деформаций, которые меняют форму и размеры материала. Возможными видами механических колебаний являются сжатия – растяжения, изгиба, кручения, сдвига. В 1920 году проф. У. Кэди предложил

пьезоэлектрический резонатор - устройство, в котором кварц был зажат между электродами. Идея такого решения состояла в следующем. При воздействии на кварц переменным напряжением материал начинает «вибрировать». Если выбрать частоту переменного напряжения равной частоте внутренних механических колебаний (она определяется геометрическими размерами пластинки кварца, видом среза, способом ее крепления и т.п.) то в такой системе возникает механо - электрическое явление, подобное электрическому резонансу, но обладающее при этом очень высокой добротностью. Это устройство назвали пьезоэлектрическим резонатором.

Пьезоэлектрический резонатор это способный совершать резонансные колебания под действием электрического напряжения соответствующей частоты компонент электрической цепи с электромеханической связью, содержащий в своем составе заключенные в специальный корпус пьезоэлемент и электроды, которые поддерживают пьезоэлемент.

Электрические характеристики пьезоэлектрического резонатора в области резонансных частот достаточно полно описывается эквивалентной схемой, показанной на рис. 3.14.

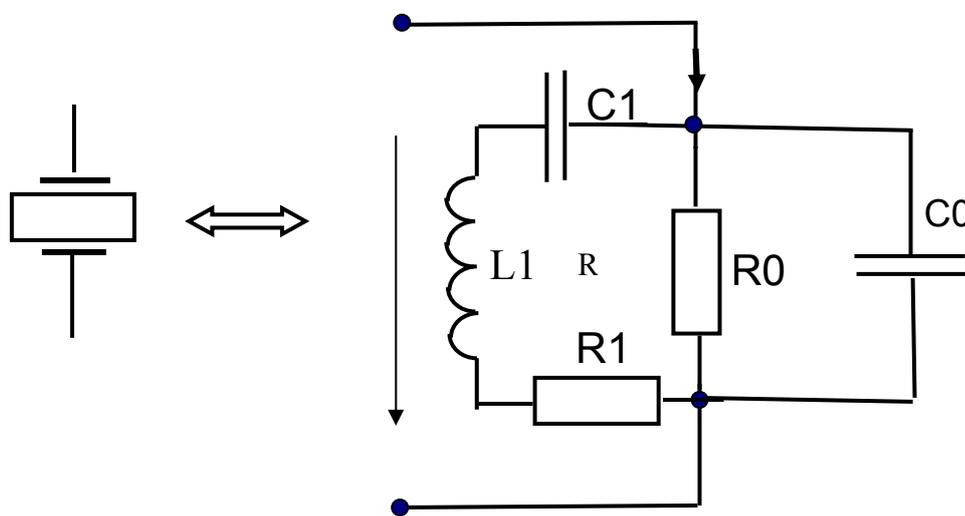


Рис. 3.14. Эквивалентная схема пьезоэлектрического резонатора

Цепочка виртуальных элементов $L1$, $C1$, $R1$ относится к ветви последовательного резонанса. Данные элементы физически не существуют, но они достаточно точно отражают механические характеристики

пьезорезонатора: массу ($L1$), упругие свойства пьезоматериала и электродов ($C1$), потери энергии ($R1$). Емкостной элемент $C0$, резистивный $R0$ и элемент $L1$ составляют ветвь параллельного резонанса. Элемент $C0$ характеризует емкостные свойства материала и его держателей. $R0$ отражает способность материала проводить через себя электрический ток.

Следует помнить, что любой пьезорезонатор может «работать в резонансе» на нескольких частотах, что и используется на практике. При этом его характеристики будут существенно отличаться. При настройке на частоту последовательного резонанса пьезорезонатор представляет собой двухполюсник обладающий очень малым сопротивлением, фактически – КЗ перемычку. При настройке на частоту параллельного резонанса – разрыв цепи. Указанные свойства пьезорезонаторов используют в фильтровых устройствах.

Если пьезорезонатор используется для генерации колебаний, то следует иметь в виду, что частота последовательного резонанса существенно зависит от малостабильной межэлектродной емкости $C0$. Такие резонаторы, исходя из назначения, называют генераторными.

Следует иметь в виду, что резонансная частота пьезорезонатора зависит от температуры окружающей среды. По этой причине кварцевые резонаторы термостабилизируют.

Номинальное значение частоты, на которой рекомендуется использовать пьезорезонатор, обычно записано на корпусе компонента. Вся система параметров пьезорезонатора, а также информация о том, на каком виде резонанса его предпочтительнее использовать, обычно приводится в сопровождающей его документации.

Длительное время в качестве материала пьезорезонатора используется природный кварц. В пятидесятых годах прошлого столетия научились изготавливать искусственный кварц, который по некоторым показателям даже превосходит природный аналог. Добротность кварцевых резонаторов составляет $10^4 - 10^6$. Применение кварцевых резонаторов в генераторных устройствах позволяет обеспечить относительное изменение частоты не превышающее $10^{-6} - 10^{-9}$.

В последние годы стали широко использовать пьезоэлектрический эффект у керамических материалов на основе смеси титаната – цирконата свинца $Pb(Zr,Ti)O_3$. В литературе этот материал еще называют PZT – или ЦТС – керамикой. Добротность ($Q = 600 - 4000$) и температурная

стабильность у таких пьезорезонаторов хуже, чем у кварцевых. Однако они обладают и рядом достоинств: существенно более низкой стоимостью; более высокой устойчивостью к механическим воздействиям; меньшими габаритами. Керамические пьезорезонаторы применяют в тех случаях, когда требуется низкая стоимость и не очень высокая стабильность. Кроме того, они больше подходят для устройств при эксплуатации которых характерны узкий температурный диапазон работы, подверженность непредсказуемым механическим воздействиям (падения, удары). Основная область их применения – в качестве компонентов пультов управления, не очень высокоточных приборов отсчета времени и, наконец, встроенных в аппаратуру микроконтроллеров различных устройств.

3.3. Методы расчета и анализа электрических цепей с гармоническими источниками

3.3.1. Метод контурных токов

В электротехнике и электронике необходимо проводить анализ электрической цепи, т. е. вычислять токи и напряжения для всех элементов цепи. Если цепь простая, то анализ можно провести, используя изложенные выше приемы. Однако в ряде случаев электрические цепи бывают весьма сложными и для их анализа уже недостаточно простых и наглядных приемов.

Имеют универсальный характер и пригодны при любых видах воздействий системы уравнений, составленные на основании первого и второго законов Г.К. Кирхгофа. Однако, общее количество уравнений, которые необходимо составить и затем решить весьма велико.

В 1873 году Д. К. Максвелл предложил способы понижения порядка системы уравнений при сохранении количества неизвестных. Первый способ получил название метода контурных токов, второй – метод узловых напряжений.

Метод контурных токов (МКТ), по сути, сводится к составлению и решению системы уравнений только на основании второго закона Кирхгофа. Количество уравнений, которое приходится решать определяется количеством простых независимых контуров в цепи.

МКТ формализован и для его реализации необходимо выполнить следующую последовательность действий.

1. Для анализируемой электрической цепи определить независимые контура. Эти контура пометить пунктирными линиями и задать для них направления протекания контурных токов (по часовой стрелке или против часовой стрелки). Стрелками отметить положительное направление ЭДС.

2. Составить и записать характерную для МКТ систему уравнений в виде

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \dots + Z_{1n}\dot{I}_n = \dot{E}_1 \\ Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + \dots + Z_{2n}\dot{I}_n = \dot{E}_2 \\ Z_{n1}\dot{I}_1 + Z_{n2}\dot{I}_2 + \dots + Z_{nn}\dot{I}_n = \dot{E}_n \end{cases} \quad (3.42)$$

Диагональные элементы матрицы $Z_{11}, Z_{22}, \dots, Z_{nn}$ получили название контурных комплексных сопротивлений. Элементы Z матрицы, индексы которых различны, называются взаимными комплексными сопротивлениями.

\dot{I}_n, \dot{E}_n это комплексные контурные токи и ЭДС, соответственно.

3. Определить, обходя все контуры, в соответствии с направлениями контурных токов, все контурные комплексные сопротивления.

Комплексное контурное сопротивление контура (номер контура соответствует совпадающим цифрам индекса элемента Z) равно алгебраической сумме комплексных сопротивлений, образующих рассматриваемый контур. При этом сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю.

4. Определить все взаимные комплексные сопротивления.

Комплексное взаимное сопротивление (цифры индекса Z указывают на то, между какими рассматриваемыми контурами должны выбираться элементы) равно записанной в соответствии с правилом знаков сумме комплексных сопротивлений элементов, образующих ветвь, смежную между рассматриваемыми контурами.

Правило знаков:

- взаимные сопротивления записываются в систему со знаком «+», когда контурные токи смежных (взаимных) контуров на элементах совпадают по направлению;

- со знаком «-» - когда контурные токи смежных (взаимных) контуров на элементах противоположны по направлению.

Взаимные сопротивления $Z_{\mu\xi}$, отличающиеся порядком чередования индексов μ и ξ равны между собой.

Взаимные сопротивления равны нулю, если рассматриваемые контуры не имеют смежных ветвей.

5. Определить все контурные ЭДС

Контурная ЭДС (номер контура соответствует номеру уравнения) равна алгебраической сумме ЭДС источников, действующих в рассматриваемом контуре. ЭДС записывается в сумму со знаком «+», если ее направление совпадает с направлением рассматриваемого контурного тока. При несовпадении направлений - со знаком «-».

6. Решается полученная система уравнений относительно неизвестных контурных токов.

7. Вычисляются, с учетом направлений, по известным значениям контурных токов токи в элементах и напряжения на них.

3.3.2. Метод узловых напряжений (потенциалов)

Метод узловых напряжений (МУН), по сути, сводится к составлению и решению системы уравнений только на основании первого закона Кирхгофа. Количество уравнений, которое приходится решать определяется количеством узлов цепи без одного.

МУН формализован и для его реализации необходимо выполнить следующую последовательность действий.

1. Для анализируемой электрической цепи выбирается базисный узел. Ему приписывают нулевой номер.

Это может, в принципе, быть любой узел цепи, однако удобно выбирать в качестве базисного узел, к которому подключено максимальное количество ветвей или тот узел, который соединен с точкой нулевого потенциала.

2. Нумеруются все оставшиеся узлы и обозначаются направления всех узловых напряжений.

Узловое напряжение - это напряжение рассматриваемого узла относительно базисного. На схеме оно обозначается в виде стрелки от рассматриваемого узла к базисному.

3. Составить и записать характерную для МУН систему уравнений в виде

$$\begin{cases} Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + \dots + Y_{1n}\dot{U}_n = \dot{I}_{y1} \\ Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + \dots + Y_{2n}\dot{U}_n = \dot{I}_{y2} \\ Y_{n1}\dot{U}_1 + Y_{n2}\dot{U}_2 + \dots + Y_{nn}\dot{U}_n = \dot{I}_{yn} \end{cases} \quad (3.43)$$

Диагональные элементы матрицы $Y_{11}, Y_{22}, \dots, Y_{nn}$ получили название комплексных узловых проводимостей.

Элементы Y матрицы, индексы которых различны, называются взаимными узловыми проводимостями.

\dot{U}_n, \dot{I}_n это комплексные узловые напряжения и токи, соответственно.

4. Определить комплексные узловые проводимости.

Комплексная узловая проводимость (номер узла соответствует совпадающим цифрам индекса элемента Y) равна сумме комплексных проводимостей ветвей, подключенных к рассматриваемому узлу. Она в уравнение всегда записывается со знаком «+».

5. Определить комплексные взаимные проводимости.

Комплексная взаимная проводимость (цифры индекса Y указывают на то, между какими рассматриваемыми узлами должны выбираться ветви) равна сумме проводимостей ветвей, включенных между рассматриваемыми узлами. Эта проводимость всегда записывается в уравнение со знаком «-».

Взаимные проводимости $Y_{\mu\xi}$, отличающиеся порядком чередования индексов μ и ξ равны между собой.

Взаимные сопротивления равны нулю, если между рассматриваемыми узлами нет ветвей.

6. Определить комплексные узловые токи.

Комплексный узловой ток (номер узла соответствует номеру уравнения) равен алгебраической (в соответствии с правилом знаков) сумме токов КЗ ветвей, подключенных к рассматриваемому узлу.

Если в ветви включен идеальный источник тока (ИИТ), то ток КЗ равен току ИИТ. Если в ветви включен идеальный источник напряжения (ИИН) и несколько других элементов, то ток КЗ равен отношению ЭДС

ИИН к сумме комплексных сопротивлений элементов, входящих в ветвь. Цепь с одним ИИН в ветви не рассматривается.

Правило знаков:

- если ЭДС ИИН или ток ИИТ направлены к узлу, то ток КЗ записывается со знаком «+»;

- если от узла - со знаком «-».

7. Решается полученная система уравнений относительно неизвестных узловых напряжений.

8. Вычисляются по известным значениям узловых напряжений токи в ветвях и напряжения на элементах.

3.3.3. Энергетические соотношения в электрической цепи

Опыт любого человека свидетельствует о том, что очень многое в жизни основано на потреблении электрической энергии. Это некий универсальный вид энергии, который относительно просто преобразуется в тепло, свет, механическую энергию перемещения и прочее. Его можно передавать на значительные расстояния не вызывая практически при этом никаких загрязнений окружающей среды.

Естественно, что огромное потребление электроэнергии выдвигает задачу экономного расходования энергоресурсов. Поэтому все стремятся к уменьшению ненужных потерь электрической энергии. Электротехника показывает, что нужно делать в этом направлении.

Уже отмечалось, что пользу для человека приносит так называемая «активная» энергия. Скорость поступления и, соответственно, потребления такой энергии характеризует активная мощность электрической цепи – среднее значение мощности за полный период

$$P_{АКТ} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (3.44)$$

Только эта мощность может выполнять нужную человеку «работу»: создавать тепло, приводить в движение электродвигатели и т. п.. На примере резистивного элемента мы показали, что $P \geq 0$ и для гармонических токов и напряжений определяется формулой (2.23). С другой стороны, мы установили, что существуют реактивные элементы, кото-

рые то забирает энергию из электрической цепи, то возвращает ее обратно в цепь, не потребляя активной мощности и, следовательно, не производя полезной работы. Они характеризуются реактивной мощностью: амплитудой скорости изменения запаса энергии в цепи. Реактивные мощности показывают максимальные значения мощностей на реактивных элементах. Для гармонического тока и напряжения реактивная мощность на реактивном элементе определяется формулой

$$P_{PEAK} = \frac{1}{2} U_m I_m. \quad (3.45)$$

Реальные приемники электрической энергии по своим свойствам являются активно-реактивными. То есть они представляют устройства, у которых на выводах ток и напряжение имеют фазовый сдвиг φ .

При наличии фазового сдвига φ активная и реактивная мощность будут определяться соотношениями

$$P_{AKT} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi, \quad P_{PEAK} = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi.$$

Множитель $\cos \varphi$ называют коэффициентом мощности. Если рассматривать передачу и потребление энергии, то $\cos \varphi$ имеет важное практическое значение. Если он равен единице, то реактивной энергии нет, и вся энергия источника расходуется на полезную работу. Если $\cos \varphi \neq 1$, то нет эффективного использования энергии ни у генерирующих устройств, ни у потребителей. Поставщики электроэнергии, чтобы обеспечить заданную мощность в точке потребления при стандартном напряжении должны обеспечить больший ток

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}. \quad (3.46)$$

Чем меньше коэффициент мощности, тем больший ток должен протекать по линии передачи электроэнергии, тем больше у энергетиков будут потери на бессмысленное «нагревание проводов».

В настоящее время существуют стандарты, не позволяющие уменьшать $\cos \varphi$ ниже определенной величины. Поэтому все промышленные потребители в настоящее время вносят дополнительную плату за несоответствие $\cos \varphi$ единице. Чтобы уменьшить эти затраты потребители стремятся рационально организовать работу оборудования и используют различные конструктивные решения, позволяющие увеличивать коэффициент мощности. В частности, поскольку электрические двигатели уменьшают $\cos \varphi$, особенно при работе без нагрузки на вращающемся валу, стараются их максимально загрузить. Поскольку двигатели это индуктивная нагрузка, то на предприятиях используют специальные конденсаторы, компенсирующие индуктивный характер нагрузки. В дальнейшем мы рассмотрим также специальные устройства – корректоры коэффициента мощности, используемые в источниках питания, в лампах дневного света и т.п.

Отметим, что активная мощность измеряется в ваттах (Вт), реактивная – ВАРх (вольт-ампер реактивных).

В электротехнике используют также понятия полной и комплексной мощности.

Полная (или ее еще называют кажущаяся) мощность это та максимальная мощность, которая может быть отдана в электрическую цепь, с изменяющимся $\cos \varphi$, в идеальном случае, когда пропадет реактивность цепи.

Комплексная мощность это сумма активной и реактивной мощности, определенная следующим образом

$$S = P_{AKT} + jP_{PEAK}. \quad (3.47)$$

Введение параметра «комплексная мощность» упрощает расчеты электрических цепей с гармоническими токами и напряжениями и позволяет выполнять проверку этих расчетов (проверять баланс мощностей).

3.3.4. Частотные свойства электрической цепи

Все электрические цепи независимо от своего назначения, принципов внутреннего устройства и уровня сложности представляют собой систему, т. е. совокупность физических объектов, между которыми су-

ществует определенное взаимодействие. В структуре системы, как отмечалось ранее, можно выделить вход, на который подается исходный электрический сигнал, и выход, на котором возникает полезный сигнал (отклик).

В ряде случаев, чтобы можно было сравнивать и классифицировать электрические цепи, не описывая процессы внутри них, систему представляют в виде «черного ящика» (ящика с неизвестным внутренним содержанием из которого «торчат» четыре провода), для которого интересна и важна лишь связь между сигналами на входе и на выходе.

При таком подходе электрическую цепь характеризуют так называемыми системными функциями, связывающими входное воздействие и отклик цепи на него. Одной из важнейших системных функций четырехполюсной электрической цепи (цепи класса SISO: single inputs – один вход – single outputs – один выход) является *комплексный коэффициент передачи*. Его используют для оценки отклика цепи на входной гармонический сигнал. Поскольку в этом случае отклик также гармонический, то выходной сигнал будет отличаться от входного лишь амплитудой и начальной фазой.

Комплексный коэффициент передачи двухпортовой четырехполюсной цепи SISO по напряжению это отношение комплексной амплитуды напряжения на выходе цепи на частоте ω к комплексной амплитуде входного гармонического воздействия

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m_{ВЫХ}}(j\omega)}{\dot{U}_{m_{ВХ}}(j\omega)}. \quad (3.48)$$

При изменении частоты подводимого сигнала коэффициент передачи не остается постоянным. Это происходит потому, что величины сопротивлений элементов цепи, входящих в состав электрической схемы и определяющих коэффициент передачи зависят от частоты

Безразмерная, зависящая от частоты, в общем случае комплекснозначная функция $\dot{K}(j\omega)$ является исчерпывающей характеристикой цепи в частотной области. Для специалистов эта функция относится к числу фундаментальных профессиональных понятий

Функция $\dot{K}(j\omega)$ имеет простую интерпретацию: если на вход цепи поступает гармонический сигнал с известной частотой ω и комплексной амплитудой $\dot{U}_{mBX}(j\omega)$, то комплексная амплитуда выходного сигнала равна произведению сигнала на входе на коэффициент передачи

$$\dot{U}_{mBIX} = \dot{K}(j\omega)\dot{U}_{mBX}. \quad (3.49)$$

Т.е. в сущности, комплексный коэффициент передачи по напряжению $\dot{K}(j\omega)$, как обобщенная характеристика электрической цепи, описывающая ее свойства, определяет отклик электрической цепи на гармонический сигнал единичной амплитуды и нулевой начальной фазы $\dot{U}_{mBIX} = \dot{K}(j\omega) \cdot 1$.

Комплексный коэффициент передачи, как отношение двух комплексных величин, сам является комплексной величиной. Поэтому часто удобно представлять его в показательной форме описания комплексных чисел

$$\dot{K}(j\omega) = K(\omega)\ell^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.50)$$

Модуль комплексного коэффициента передачи $K(\omega)$ называют *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) четырехполюсной цепи. Аргумент комплекснозначной функции $\varphi(\omega)$ называют *фазо-частотной характеристикой* четырехполюсной цепи.

Следует иметь в виду, что АЧХ и ФЧХ электрической цепи не зависят от амплитуды входного воздействия, а определяются данными самой цепи: числом, характером, номиналами, порядком соединения друг с другом элементов. АЧХ и ФЧХ относительно просто можно получить экспериментально.

АЧХ и ФЧХ являются функциями вещественной частоты и могут быть изображены в виде графиков. Эти функции часто называются кратко частотными характеристиками цепи.

Форма АЧХ позволяет судить о способности электрической цепи либо осуществлять «предпочтительный выбор», «избирательный вы-

бор» сигналов определенного диапазона частот, либо, наоборот, - «блокировать их», «заграждать им путь».

Форма ФЧХ позволяет судить о способности электрической цепи задерживать на время сигналы определенного диапазона, осуществлять их «запаздывание».

При изображении частотных характеристик той или иной электрической цепи обычно строят отдельные графики АЧХ и ФЧХ. Однако кроме указанной пары характеристик, изображаемых в вещественной декартовой системе координат, применяют и так называемую амплитудно-фазовую характеристику, которую строят на комплексной плоскости Z в виде одного графика. Подобная возможность основана на том, что каждому значению частоты соответствует определенное значение $\dot{K}(j\omega)$ в виде некоторого комплексного числа. В комплексной плоскости Z этому комплексному числу соответствует определенная точка плоскости или, что тоже, вектор, соединяющий начало координат плоскости с указанной точкой. С изменением ω конец указанного вектора описывает на комплексной плоскости некоторую кривую. Ее называют годографом комплексного коэффициента передачи по напряжению. Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика представляет собой геометрическое место концов векторов, изображающих $\dot{K}(j\omega)$. Каждая точка этой характеристики, для которой известна частота, дает значения обеих составляющих: модуля и фазы или вещественной и мнимой частей.

Рассмотрим определение АЧХ и ФЧХ для типичных электрических цепей.

Пусть требуется определить $\dot{K}(j\omega)$ для электрической цепи, показанной на рис. 3.15.

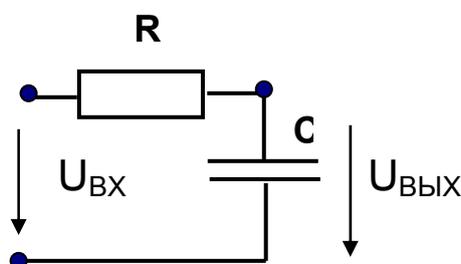


Рис. 3.15. Пример 1 для определения АЧХ и ФЧХ электрической цепи

Вычисление комплексного коэффициента передачи по напряжению начинается с того, что производится определение комплексных сопротивлений элементов цепи. Для этого каждому элементу электрической цепи ставится в соответствие его комплексное сопротивление. В нашем случае $Z_R = R$, $Z_C = 1/j\omega C$.

Затем, предполагая известной комплексную амплитуду напряжения на входе, находят, пользуясь одним из описанных выше методов, комплексную амплитуду напряжения на выходе четырехполюсника.

Для анализируемой простейшей цепи, представляющей делитель напряжения, удобно воспользоваться правилом простейшего делителя напряжения. Записываем

$$\dot{U}_{ВЫХ} = \frac{\dot{U}_{ВХ} Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\dot{U}_{ВХ} \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}_{ВХ}}{1 + jR\omega C}. \quad (3.51)$$

Для того, чтобы построенные частотные характеристики имели более общий вид, а не относились только к частным значениям параметров цепи, величины, откладываемые по осям абсцисс и ординат, удобно выражать в относительных единицах, вводя так называемую нормировку. Нормировка частоты состоит в том, что выбирают некоторую базисную частоту ω_c и определяют относительную (безразмерную) нормированную частоту:

$$\omega_c = 1/RC, \eta = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c}. \quad (3.52)$$

Тогда

$$\dot{K}(j\eta) = \frac{\dot{U}_{ВЫХ}}{\dot{U}_{ВХ}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\eta}. \quad (3.53)$$

Вычисляя модуль и аргумент, находим формулы для АЧХ и ФЧХ

$$\text{АЧХ} \Rightarrow K(\eta) = |\dot{K}(j\eta)| = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \text{ФЧХ} \Rightarrow \varphi(\eta) &= \arg \dot{K}(j\eta) = \arg(\text{числит}) - \arg(\text{знамен}) = \\ &= 0 - \arctg(1 + j\eta) = -\arctg \eta. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Графики АЧХ и ФЧХ, построенные по полученным соотношениям показаны на рис. 3.16.

Показанные на рис. АЧХ и ФЧХ позволяют наглядно судить о том, какие частотные составляющие доминируют на выходе цепи и какие, наоборот, ослабляются.

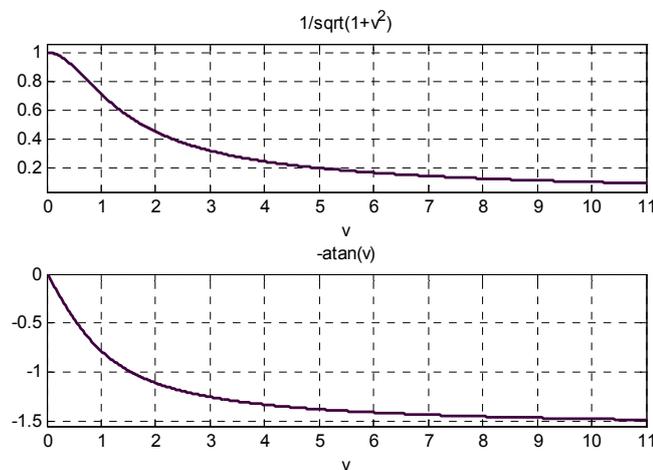


Рис. 3.16. Графики АЧХ и ФЧХ цкпм, показанной на рис. 3.15

На низких частотах выходное напряжение приблизительно равно входному, а с ростом частоты выходное напряжение уменьшается до нуля. Такая электрическая цепь по понятным причинам называется фильтром низких частот: она пропускает (выделяет из всей совокупности сигналов) сигналы низких частот и «подавляет» сигналы высоких частот. На практике ее используют очень широко, например, для удаления высокочастотных сигналов (пульсаций) на выходе источников питания, вырабатывающих постоянное напряжение.

В анализируемой простейшей схеме, показанной на рис. 3.15, частотные свойства цепи можно было предсказать, опираясь на свойства РЭ и ЕЭ. Действительно, при небольших частотах сигнала конденсатор из – за блокирующего свойства ЕЭ представляет собой раз-

рыв цепи. Если его исключить из цепи, то становится очевидным, что на низких частотах вход и выход оказываются соединенными и вполне естественно, что все входное напряжение прикладывается на выход. На высоких частотах конденсатор из – за шунтирующего свойства ЕЭ представляет КЗ перемычку, подключенную параллельно выходу. Понятно, что при этом выходное напряжение будет равно нулю.

$$\text{При } \omega = 0 \Rightarrow K(\omega) = 1.$$

$$\text{При } \omega = \infty \Rightarrow K(\omega) = 0.$$

$$\text{При } \eta = 1, \omega = 1/RC \Rightarrow K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071.$$

Аналогичными свойствами обладает электрическая цепь, показанная на рис.3.17.

Аналогично, как это было сделано ранее (только теперь $\omega_L = R/L$), можно получить АЧХ и ФЧХ для этой цепи. Графики АЧХ совпадают с ранее рассмотренным, поэтому эта цепь также представляет собой *фильтр низких частот*. Благодаря блокирующему действию ИЭ высокочастотные сигналы не проходят на выход.

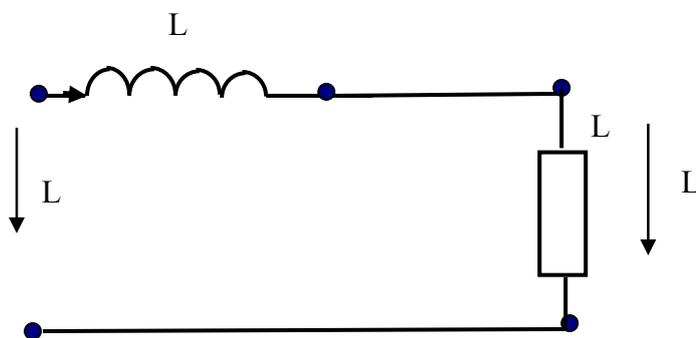


Рис. 3.17. Пример 2 для определения АЧХ и ФЧХ электрической цепи

Заметим, что предназначение обеих схем совпадает, однако, вообще говоря, чаще используют RC-фильтры. Это связано с тем, что выполняемые намоткой индуктивности более громоздки. Исключение из общей рекомендации составляет один особый случай, весьма распространенный на практике. Так называемые «бусинки» (маленькие ферритовые торроидальные сердечники) нанизываются на провод, из-за чего такое соединение становится индуктивным. Благодаря блокирующему свойству ИЭ, высокочастотные помехи из силовой промыш-

ленной сети не проникают на вход, например, источника питания и, наоборот, не вносят свои импульсные помехи в электрическую сеть.

ФЧХ анализируемых цепей различаются знаком. В RC-фильтре на высоких частотах сигнал подавляет емкость, поэтому сдвиг фаз между входным и выходным сигналом равен примерно $-\pi/2$. В RL-цепи высокочастотный сигнал блокирует индуктивность, поэтому фазовый сдвиг между входным и выходным напряжением есть величина положительная и равная примерно $\pi/2$.

Мы рассмотрели цепи, представляющие некие фильтры низких частот. Они имели в АЧХ область частот, в пределах которой цепь пропускала сигналы с минимальным ослаблением. Обычно эту область частот называют *полосой пропускания*. Была в АЧХ и область частот с противоположными свойствами. Область частот, в пределах которой электрическая цепь не пропускает колебания или, по-другому, пропускает с максимальным ослаблением, называется *полосой задерживания (запирания, затухания)*. В зависимости от взаимного расположения областей прозрачности и запирания в электротехнике различают, помимо фильтров низких частот, *фильтры верхних частот, полосовые и заграждающие (режекторные)*.

Частота ω_1 разделяющая полосы прозрачности и запирания, называется *граничной частотой или частотой среза*.

В некоторых цепях, у которых амплитуды и частоты характеристик изменяются в очень широких пределах, удобно применять логарифмический масштаб. Для этого амплитудно - частотную характеристику по оси ординат выражают в логарифмических единицах *децибелах* dB: $K(\omega)_{db} = 20 \log_{10} |K(\omega)|$. По горизонтальной оси абсцисс в логарифмических АЧХ и ФЧХ частоты откладывают в логарифмических единицах декадах: $f_{dec} = \log_{10} f$. В этом случае равные расстояния соответствуют равным отношениям величин. АЧХ и ФЧХ, построенным в логарифмическом масштабе (ЛАЧХ и ЛФЧХ), часто приписывают имя Г. Боде и называют диаграммами Боде.

3.3.5. Нули и полюсы передаточной характеристики

Наряду с комплексной передаточной функцией к числу важнейших понятий электротехники относится *передаточная операторная функция*

электрической цепи. Ее используют для характеристики электрических цепей с точки зрения их отклика на воздействия специальной формы. Несколько позже мы установим, что это за воздействия и каким условиям они должны соответствовать. А сейчас, пока мы не вводили понятия, характерные для преобразований Лапласа, отметим чисто формально, что операторную передаточную функцию можно получить путем простой замены величины $j\omega$ в комплексном коэффициенте передачи на величину s . Соответственно, путем формальной замены получим

$$\begin{cases} j\omega & \Rightarrow & s, \\ \omega^2 & \Rightarrow & -s^2, \\ j\omega^3 & \Rightarrow & -s^3 \rightarrow u, m. \delta. \end{cases} \quad (3.56)$$

Полученное по $\dot{K}(j\omega)$ выражение, обозначаемое как $K(s)$, носит название *передаточной операторной функции*.

Например для (3.53):

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow K(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{1}{1 + sRC}. \quad (3.57)$$

Для сложных электрических цепей $K(s)$ является дробно-рациональной функцией и всегда имеет форму отношения полиномов аргумента s .

$$\begin{aligned} \dot{K}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{b(1)j\omega + b(2)}{a(1)\omega^2 + j\omega a(2) + a(3)} \Rightarrow \\ K(s) &= \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{b(1)s + b(2)}{a(1)(-s^2) + sa(2) + a(3)}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

В соответствии с основной теоремой алгебры любой полином может быть разложен на множители, соответствующие его корням. Поэтому операторная передаточная функция всегда, в общем виде, может быть записана как

$$K(s) = \frac{b(1)s^{nb} + b(2)s^{nb-1} + b(3)s^{nb-2} + \dots + b(nb)s + b(nb+1)}{a(1)s^{ab} + a(2)s^{ab-1} + a(3)s^{ab-2} + \dots + a(na)s + a(na+1)} \quad (3.59)$$

$$= K \frac{(s - sb1)(s - sb2)(s - sb3)(s - sb4) \dots (s - sbnb)}{(s - sa1)(s - sa2)(s - sa3)(s - sa4) \dots (s - sana)}$$

Здесь nb и na - степени полиномов числителя и знаменателя, s - комплексная переменная. Корни полинома числителя $sb1, sb2, \dots, sbnb$ называются нулями операторной передаточной функции или просто *нулями*. Корни полинома знаменателя $sa1, sa2, \dots, sana$ - *полюсами*. Величины $sa1, sa2, \dots, sana$ также называют *собственными частотами* электрической цепи.

Величины корней полиномов, их характер (вещественные или комплексные) обуславливаются тем, какие элементы входят в состав электрической цепи, как эти элементы соединяются. Поэтому расположение нулей и полюсов содержит значительную информацию - как качественного, так и количественного характера - относительно элементов, входящих в состав цепи, способов их соединения свойств электрической цепи, включая, в частности, особенности ее АЧХ и ФЧХ.

Наиболее удобным и наглядным способом охарактеризовать операторную передаточную функцию является графическое изображение расположения ее полюсов и нулей на комплексной s плоскости. Такое изображение называют *диаграммой полюсов-нулей*. Пример такой диаграммы показан на рис.3.18.

Полюсы и нули, к примеру, для передаточной функции второго порядка

$$K(s) = \frac{b(1)s^2 + b(2)s + b(3)}{a(1)s^2 + a(2)s + a(3)} = K \frac{(s - sb1)(s - sb2)}{(s - sa1)(s - sa2)}, \quad (3.60)$$

могут быть либо вещественными ($sa1 = \alpha_{P1}, sa2 = \alpha_{P2}, sb1 = \sigma_{Z1}, sb2 = \sigma_{Z1}$), либо комплексно - сопряженными ($sa1 = \alpha_{P1} + j\sqrt{\alpha_{P1}^2 - \omega_0^2}, sa2 = \alpha_{P1} - j\sqrt{\alpha_{P1}^2 - \omega_0^2}, sb1 = \sigma_{Z1} + j\sqrt{\sigma_{Z1}^2 - \omega_{10}^2}, sb2 = \sigma_{Z1} - j\sqrt{\sigma_{Z1}^2 - \omega_{10}^2}$). В первом случае они располагаются на оси вещественных диаграммы; во втором - симметрично относительно оси вещественных.

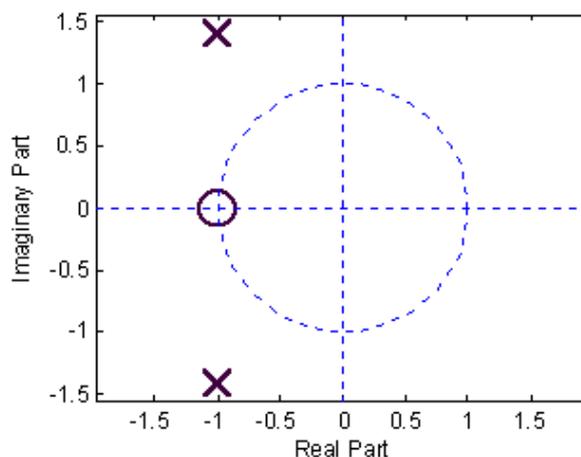


Рис. 3.18. Диаграмма нулей и полюсов электрической цепи

У полюса отклонение влево от оси мнимых $j\omega$ диаграммы определяет величина α_{P1} , вверх от оси вещественных – величина $\sqrt{\alpha_{P1}^2 - \omega_0^2}$. Поведение электрической цепи существенно зависит от соотношений α_{P1} и ω_0 . Обычно различают следующие случаи: *сильное затухание* $\alpha_{P1} \gg \omega_0$, *критическое затухание* $\alpha_{P1} = \omega_0$, *слабое затухание* $\alpha_{P1} < \omega_0$, *отсутствии затухания* $\alpha_{P1} = 0$.

Следует иметь в виду, что полюсы электрических цепей составленных из таких реальных компонент как резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности располагаются либо на оси мнимых, либо в виде комплексно-сопряженных пар симметрично относительно оси вещественных. При этом они лежат в левой S – полуплоскости. Это свидетельствует о том, что электрические цепи, составленные из R, L, C элементов являются *пассивными* и *устойчивыми*. Термин «пассивные» говорит о том, что эти цепи не генерируют энергию, а только диссипируют ее. *Устойчивость* означает, что при воздействии на цепь малых импульсных возмущений цепь даст отклик, который будет уменьшаться и, в конце концов, исчезнет вообще.

Забегая вперед отметим, что если полюсы лежат в правой S – полуплоскости, то это указывает на то, что в случае любого импульсного возмущения, сколь малым бы оно не было, отклик электрической цепи, если его ничем не ограничивать, будет увеличиваться, нарастать до бесконечно большой величины.

Электрическую цепь, у которой полюсы лежат на оси мнимых, называют *цепями без потерь*. Она находится на грани устойчивости.

Нули операторной передаточной функции определяют некие частоты электрической цепи, при которых отсутствует передача сигнала от входа к выходу.

Передаточная функция со своими собственными (полюсными) и нулевыми частотами полностью определяет вид АЧХ.

Если в числителе передаточной функции отсутствует s , и, соответственно, на диаграмме нет нулей, а полюса комплексно-сопряжены, то на нулевой и низких (малой величины) частотах график АЧХ проходит выше оси частот. С ростом частоты значение модуля комплексного коэффициента передачи уменьшается, хотя на собственной частоте и возможен «резонансный» всплеск. То есть, в этом случае цепь представляет собой *фильтр низких частот*.

Если в выражении передаточной функции есть «нуль», определяющий некую частоту, при которой отсутствует передача от входа на выход, то вид АЧХ зависит от совместного расположения нулей и полюсов.

Если нуль расположен в начале координат, а полюса расположены вдали от оси мнимых (случай сильного затухания $\alpha_{P1} \gg \omega_0$), то на нулевой и низких частотах график АЧХ проходит по оси частот, а затем, с ростом частоты значение модуля комплексного коэффициента передачи увеличивается. В этом случае цепь представляет собой *фильтр высоких частот*.

Если в начале координат диаграммы имеется нуль, а полюсы комплексно – сопряжены и расположены вблизи оси мнимых (случай слабого затухания $\alpha_{P1} < \omega_0$), то график АЧХ имеет вид «горба»: от максимума на резонансной частоте спадает при уменьшении и увеличении частоты. Подобная форма АЧХ присуща полосовым фильтрам, обеспечивающим прохождение без ослабления составляющих входного сигнала с частотами, близкими к резонансной частоте и с большим ослаблением составляющих, частоты которых заметно отличаются от резонансной. Величина затухания α_{P1} (или обратная ей величина, называемая добротностью $Q = 1/\alpha_{P1}$) определяет полосу пропускания фильтра и другие параметры резонанса. При $\alpha_{P1} = 0$ или, что тоже $Q \Rightarrow \infty$, полюсы располагаются на оси мнимых, что соответствует резонансной электрической цепи без потерь.

Если цепь имеет комплексно-сопряженные нули и полюсы, то возможны два случая.

Если полюса расположены ближе к оси мнимых, чем нули (говорят, что полюсы доминируют над нулями), то электрическая цепь будет являться *частотно-выделяющей*. Вид АЧХ имеет вид горба, присущий полосовым фильтрам.

Если нули расположены ближе к оси мнимых, чем полюса (говорят, что нули доминируют над полюсами), то такая электрическая цепь подавляет гармонический сигнал в определенной полосе частот. При этом обеспечивается большое ослабление составляющих входного сигнала с частотами, близкими к резонансной частоте и, наоборот, прохождение составляющих без ослабления, частоты которых заметно отличаются от резонансной. Такая электрическая цепь называется *полосно-заграждающей* (полосно-исключающей, частотно-заграждающей).

3.4. Методы расчета и анализа электрических цепей с коммутирующими элементами и импульсными источниками

3.4.1. Общие сведения о переходных процессах

При обсуждении вопросов, касающихся поведения электрических цепей, мы до сих пор считали, что, в идеале, состояние цепи остается неизменным во всем бесконечном интервале времени, от предыдущего до будущего. Т. е. исходили из того, что электрическая цепь пребывала в так называемом стационарном режиме или установившемся состоянии. При этом мы полагали, что если это цепь постоянного тока, то в ней действуют неизменные во времени сигналы. Если в цепи действовали гармонические напряжения и токи или периодические импульсные сигналы, то мы полагали, что во всем рассматриваемом временном интервале остаются неизменными функции, описывающие токи и напряжения и не изменяются средние за период запасы энергии в реактивных элементах цепи.

Однако любой реальный процесс в электрической цепи имеет начало и конец. Поэтому в общем случае цепь переходит из одного состояния в другое. Причем, как мы увидим, переходит из одного стацио-

нарного состояния в другое, не мгновенно, а за некоторое время. Если цепь содержит реактивные элементы, которые, как мы знаем, накапливают энергию, то должно пройти некоторое время, по происшествии которого энергия перераспределится между элементами по-другому, нежели это было ранее. Это связано, как мы отмечали, с инерционными свойствами электрических и магнитных полей, с тем, что энергия на реактивных элементах скачком измениться не может.

Процесс перехода электрической цепи из одного стационарного режима, при котором все процессы перераспределения энергии уже установились, в другой стационарный режим с новым установившимся распределением энергии среди элементов цепи, называется *переходным процессом*.

Время перехода электрической цепи из одного стационарного режима в другой называется *длительностью переходного процесса*.

К образованию переходных процессов приводит *коммутация цепи*. Под коммутацией цепи понимают осуществляемое с помощью электрического ключа включение или выключение ее элементов, а также скачкообразное изменение их параметров. Идеализируя свойства реальных коммутационных устройств, будем считать, что коммутация осуществляется с помощью идеального электрического ключа - двухполюсника, сопротивление которого равно нулю, если ключ замкнут и бесконечно велико, если ключ разомкнут. Время перехода ключа из одного состояния в другое считается бесконечно малым. Общепринято схемы с ключами изображать до момента коммутации.

В частном, но наиболее распространенном случае, включаются или выключаются источники энергии. Но скачкообразно могут быть подсоединены или отсоединены и реактивные элементы, резисторы или даже целые участки цепи. Изменение режима может возникать произвольно, когда в цепи в процессе работы могут происходить обрывы проводов, удары молнии, КЗ из-за случайных попаданий токопроводящих предметов на проводники не соединенные до этого. Естественно, что и в этих случаях, переходный процесс сопровождается изменением общих запасов энергии или запасов в энергоемких элементах.

При анализе переходных процессов различают момент времени до начала переходного процесса (этот миг обозначают $t = (0-)$) и начальный момент времени срабатывания ключа ($t = (0+)$). Момент времени $t = 0$ называют началом переходного процесса.

Для характеристики схемы электрической цепи, токов и напряжений в ней на всех стадиях переходного процесса вводят понятия начальных и конечных условий.

Начальными условиями (НУ) электрической цепи называют величины токов и напряжений на элементах цепи (в предыдущем стационарном режиме) за миг до начала и в момент начала переходного процесса.

НУ определяют начальный запас энергии в электрическом и магнитном полях элементов цепи. Они могут быть нулевыми и ненулевыми.

При нулевых НУ напряжения и токи до момента коммутации равны нулю. Это обычно бывает при подключении цепи к источнику сигнала или в том случае, если в реактивных элементах цепи в стационарном режиме не было запасов энергии.

При ненулевых НУ величины токов и напряжений до начала переходного процесса отличны от нуля. Обычно ненулевыми начальными условиями характеризуют электрические цепи при отключении источника сигнала, а также при изменении параметров величин элементов цепи, если до этого по элементам цепи протекал ток.

В свою очередь НУ можно разделить на главные и дополнительные.

Главные начальные условия (ГНУ) определяются для элементов электрической цепи на которых энергия скачком измениться не может. ГНУ определяют для момента $t = (0-)$ по эквивалентной схеме электрической цепи до коммутации. Считается что ГНУ это значения тока в индуктивности и напряжения на емкости в момент коммутации. Для расчета ГНУ при анализе переходных процессов обычно исходят из двух законов коммутации и схем замещения реактивных элементов.

Опираясь на свойства ИЭ и ЕЭ можем утверждать следующее (рис.3.19).

При определении ГНУ наличие индуктивности с нулевыми НУ в докоммутационной схеме равносильно короткозамкнутой перемычке, по которой протекает ток.

При определении ГНУ наличие емкости с нулевыми НУ в докоммутационной схеме равносильно разрыву цепи. Между точками разрыва возможно наличие напряжения.

При определении ГНУ наличие индуктивности с ненулевыми НУ в докоммутационной схеме равносильно включению идеального источника тока (ИИТ).

При определении ГНУ наличие емкости с ненулевыми НУ в докоммутационной схеме равносильно включению идеального источника напряжения (ИИН).

Значения тока ИИТ и напряжения ИИН в цепях постоянного тока находят из эквивалентных схем для постоянного тока.

Значения тока ИИТ и напряжения ИИН в цепях косинусоидального тока находят из эквивалентных схем предыдущего стационарного режима символическим методом.

Амплитуду косинусоидального тока ИИТ и напряжения ИИН вычисляют следующим образом.

$$i_0 = i_L(0-) = i_L(0+) = I_{mL} \cos(\omega t_{0-} + \psi_{iL}) = I_{mL} \cos(\psi_{iL}) = I_{mL} e^{j\psi_{iL}},$$

$$u_0 = u_C(0-) = u_C(0+) = U_{mC} \cos(\omega t_{0-} + \psi_{uC}) = U_{mC} \cos(\psi_{uC}) = U_{mC} e^{j\psi_{uC}}.$$

Под конечными условиями понимают напряжения и токи в элементах электрической цепи после окончания переходного процесса, т.е. установившиеся величины, присущие новому стационарному режиму в который перешла цепь.

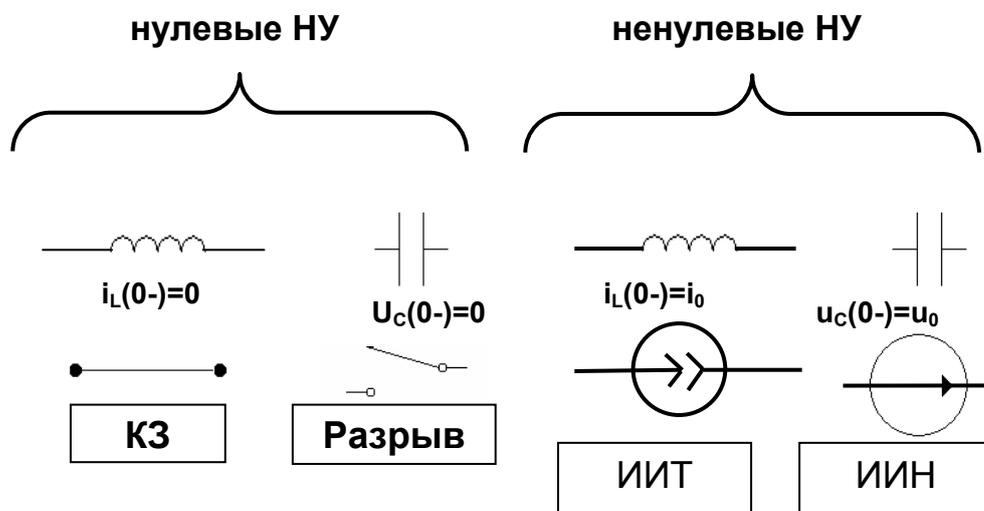


Рис. 3.19. Представление реактивных элементов цепи их эквивалентами в зависимости от ГНУ

3.4.2. Операторный метод расчета переходных процессов

В электротехнике для расчета переходных процессов используют различные методы.

Классический метод опирается на составление по известным начальным условиям системы неоднородных дифференциальных уравнений для токов и напряжений, что дает возможность, решая систему, найти отклик при любом заданном воздействии. Однако этот метод связан с громоздкими преобразованиями и требует умений решения дифференциальных уравнений.

Техника расчета существенно упрощается при использовании операционного исчисления. *Операторный метод* не требует обязательного составления дифференциальных уравнений электрической цепи. Он позволяет, используя операторные сопротивления и вводя операторные функции передачи при воздействии сигналов произвольной формы, решать задачи практически алгебраическими методами.

В основе операторного метода лежит *преобразование Лапласа*, связывающее функцию $f(t)$ [обычно ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (время) с соответствующей функцией комплексного переменного $F(s)$.

Функцию $f(t)$, которая подвергается преобразованию, называют исходной, преобразуемой или чаще всего оригиналом. Функцию $F(s)$, найденную в результате преобразования, – преобразованной по Лапласу функцией, *лапласовым изображением* функции $f(t)$, или просто, *изображением*.

Преобразованием Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$ называют однозначное интегральное преобразование

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s), \quad (3.61)$$

где $s = \sigma + j\omega$ - комплексная величина, имеющая размерность времени. Кратко это преобразование записывается так

$$f(t) \Leftrightarrow F(s).$$

Функция $f(t)$, которая подвергается преобразованию, должна удовлетворять следующим условиям:

1. Функция должна быть тождественно равна нулю при отрицательных значениях t .
2. Функция $f(t)$, и ее производная $f'(t)$ должны быть непрерывными или кусочно - непрерывными функциями переменного t (времени).

3. Функция $f(t)$, должна быть такой, чтобы ее порядок роста был ограничен.

Реальные токи и напряжения электрической цепи удовлетворяют всем перечисленным выше условиям. К примеру, если $f(t)$ характеризует воздействие на электрическую цепь, то первое условие всегда можно выполнить, совмещая начало отсчета времени с началом воздействия.

Для упрощения операций при решении задач прямого и обратного преобразования используют специальные справочные таблицы, которые содержат пары оригинал – изображение. Эти таблицы приводятся в справочниках по операционному исчислению.

При решении задач расчета переходных процессов операторным методом обычно проходят четыре этапа.

1. Проводят анализ или расчет электрической цепи с целью определения того, какими нулевыми или ненулевыми являются ГНУ.

2. Составляют операторную схему замещения электрической цепи.

Для составления операторной схемы замещения необходимо заменить все реактивные элементы цепи их схемами замещения, а все токи, напряжения ЭДС их изображениями по Лапласу.

Резистивный элемент на схеме замещения остается неизменным. Каждый реактивный элемент, в зависимости от того, какими являются ГНУ, заменяется одной из двух возможных схем (рис. 3.20).

При замене всех токов, напряжений, ЭДС их изображениями по Лапласу надо иметь в виду следующее.

Единичная функция включения Хевисайда с амплитудой A , отражающая срабатывание ключа на включение неизменного во времени источника сигнала (рис.1.15) имеет изображение A/S .

Функция в виде прямоугольного импульса (рис. 1.12) может быть представлена в виде двух функций Хевисайда (см.п.1.5) и записана в виде разности операторных функций $\frac{E}{S} - \frac{E}{S - 1/t_u}$. Треугольный импульс

без спада (рис. 1.14), если его предварительно продифференцировать будет представлять прямоугольный импульс, изображение которого известно. То, что было проведено предварительное дифференцирование по времени, учитывают умножением изображения производной на множитель $1/S$. За счет предварительного дифференцирования легко запи-

сываются изображения пилообразного и трапециидального импульса, а также импульсов, составленных из отрезков прямых.

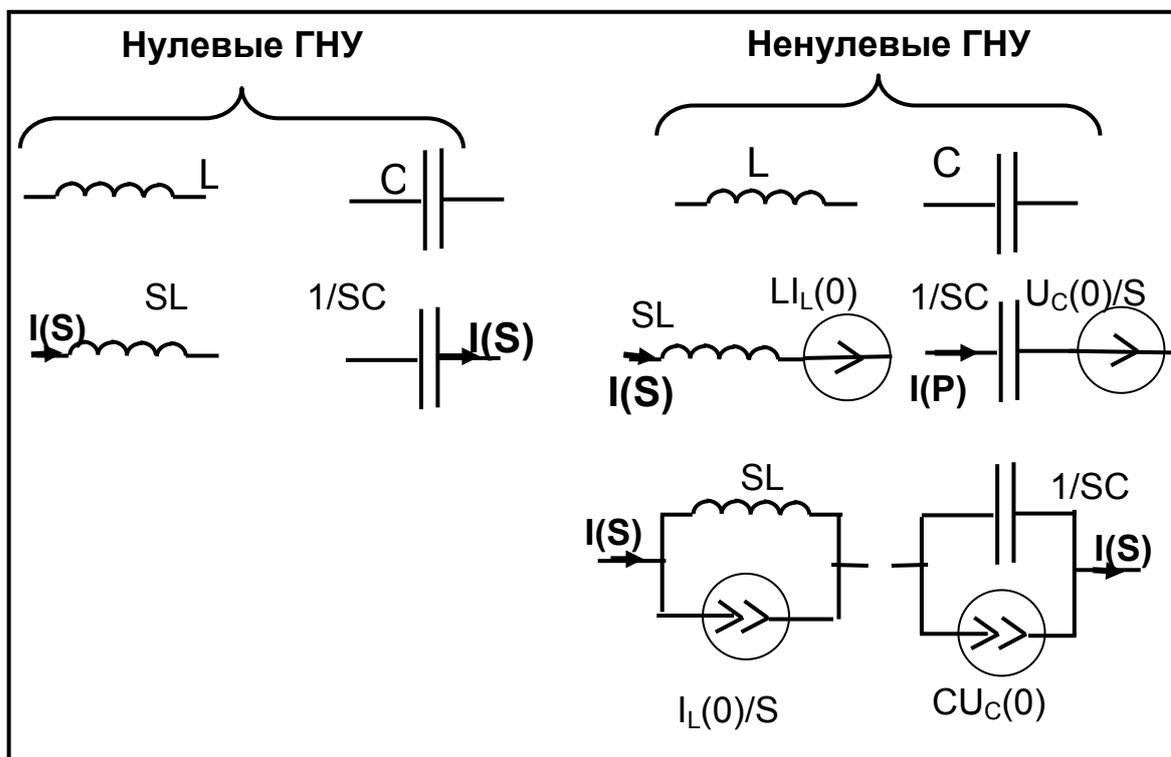


Рис. 3.20. Представление реактивных элементов на операторной схеме замещения

3. Используя операторную схему замещения электрической цепи рассчитывают S -изображения искомых величин. При этом можно использовать любые рассмотренные ранее методы (МУН, МКТ и т.п.).

4. Переходя от изображений к оригиналам, находят искомые токи и напряжения, как функции времени.

Для примера рассмотрим две важные для практики задачи.

Задача 1. К источнику постоянной ЭДС через резистор с помощью ключа, как показано на рис.3.21, подключается конденсатор. Найти ток, протекающий во время переходного процесса и напряжение на нем.

Данную задачу будем решать в соответствии с перечисленными этапами.

1. Ключ находится в таком положении, что на элементах цепи

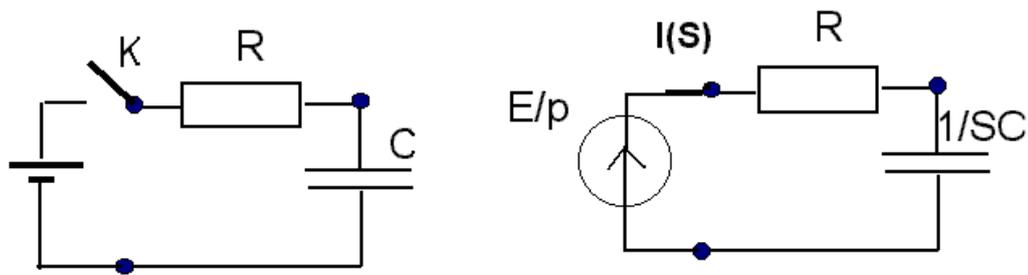


Рис. 3.21. Подключение конденсатора к источнику ЭДС и операторная схема для расчетов

отсутствуют токи и напряжения. Значит, ГНУ нулевые.

2. Заменяя элементы и токи их операторными изображениями, получаем операторную схему замещения цепи (рис. 3.21).

2. Используя закон Ома, по операторной схеме замещения находим S - изображение тока и напряжения на конденсаторе

$$I(s) = \frac{E}{s(R + 1/sC)} = \frac{EC}{1 + sCR} = \frac{E/R}{s + 1/RC}, \quad (3.62)$$

$$U_C(s) = I(s)Z_C(s) = \frac{EC}{sC(1 + sCR)} = \frac{E/RC}{s(s + 1/RC)} = \frac{E\alpha}{s(s + \alpha)}. \quad (3.63)$$

3. Переходя от изображений к оригиналам, находим искомые токи и напряжения, как функции времени

$$i(t) = \frac{E}{R} \ell^{-\frac{t}{\tau}}, u_C(t) = E(1 - \ell^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (3.64)$$

где $\tau = RC$.

Графики тока и напряжения в анализируемой цепи показаны на рис. 3.21.

На основании аналитических соотношений и графиков можно сделать следующие выводы.

1. В момент замыкания ключа и подключения конденсатора к источнику постоянной ЭДС имеет место скачок тока (говорят еще бросок

тока). Это легко объяснить тем, что в момент включения конденсатор фактически представляет собой короткозамкнутую перемычку. Величина этого скачка определяется отношением E/R . Отсюда следует важный практический вывод: *ни в коем случае нельзя допускать, чтобы конденсатор непосредственно, без резистора подключался к источнику ЭДС*. При $R = 0$ бросок тока будет в идеале бесконечно велик, что вызовет в момент включения выход из строя источника ЭДС. Если на практике такие случаи будут иметь место (встретим при изучении источников питания), то обязательно необходимо в цепь включать резистор, ограничивающий ток или, что еще лучше, РТС термистор. Этот элемент, как отмечалось, в момент броска будет иметь очень большое сопротивление, а затем, при уменьшении величины тока, снизит свое сопротивление и сведет к минимуму потери на диссипацию в цепи.

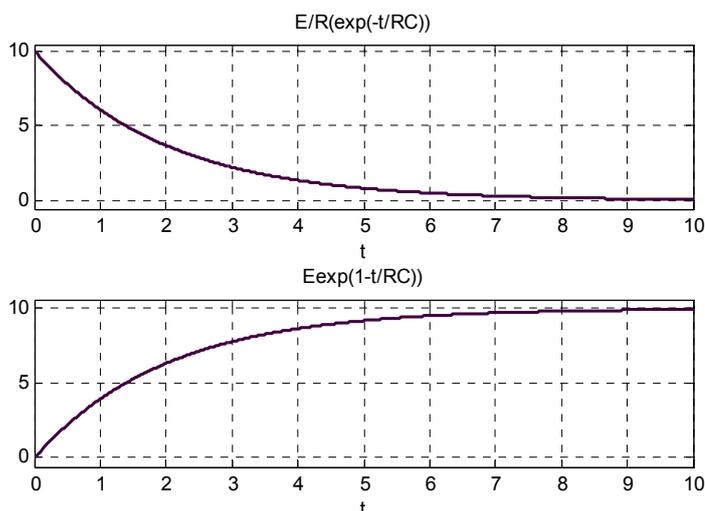


Рис. 3.21. Графики тока и напряжения в RC – цепи при подключении к источнику ЭДС

2. Установившиеся значения напряжения и тока (новый стационарный режим) в общем случае достигаются за бесконечно большое время. Однако, переходный процесс можно считать практически завершившимся в момент времени t_{01} , когда зарядный ток уменьшится в 10 раз по сравнению с максимальным значением, а напряжение на конденсаторе возрастет до значения $0,95 E$.

Время τ , в течение которого ток уменьшается в e раз, называют *постоянной времени цепи*. Считается, что переходный процесс заканчивается по происшествии времени $t_{01} = 3\tau$. В RC цепях постоянной

времени цепи называют имеющую размерность времени величину $\tau = RC$, в RL цепях - $\tau = L/R$.

3. Как уже отмечалось, при помощи конденсатора можно накопить электрическую энергию от слабого маломощного источника тока, а затем быстро выделить ее в нужный момент. Это широко используют в ионисторах. Решение задачи¹ свидетельствует о том, что для осуществления зарядки ионистора необходимо его подключать к источнику посредством резистора достаточно большой величины. При этом процесс зарядки может протекать достаточно длительное время. Например при величинах $R = 1$ кОм, $C = 10$ Ф процесс будет длиться 300 00 с или примерно 8,3 часа.

Так как напряжение на конденсаторе не может превысить ЭДС первичного источника энергии, то конденсатор не может накопить энергии больше величины $W = \frac{1}{2} CE^2$. К примеру, ионистор с $C = 10$ Ф, заряжаемый от источника с напряжением 5 В, не может накопить энергии больше 125 джоулей. Заметим, что конденсатор, отсоединенный от источника ЭДС, может в принципе очень долго (часами и сутками) сохранять запасенную энергию.

Задача 2. К источнику постоянного тока с помощью ключа, как показано на рис. 3.22, подключается катушка индуктивности с сопротивлением потерь проводов R_0 . Затем ключ размыкается. Найти, что покажет вольтметр с величиной внутреннего сопротивления R_V сначала в установившемся состоянии до размыкания ключа и, затем, сразу же после его размыкания.

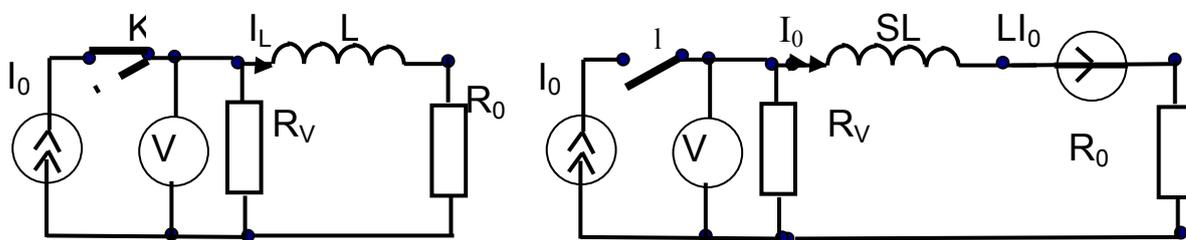


Рис. 3.22. Подключение катушки индуктивности к источнику тока и операторная схема замещения цепи при размыкании ключа

Данную задачу будем также решать в соответствии с перечисленными выше этапами.

1. В исходном состоянии ключ находится в таком положении, что по элементам цепи протекают токи.

Величина внутреннего сопротивления вольтметра R_V , составляющая сотни МОм, значительно больше сопротивления потерь катушки индуктивности R_0 , равного десяткам Ом. Не вычисляя, на основании свойств простейшего делителя тока, сразу можем утверждать, что до размыкания ключа установившееся значение тока через индуктивность равно I_0 . Значит, ГНУ ненулевые. Воспользовавшись правилом простейшего делителя тока и законом Ома, можем вычислить показания вольтметра до размыкания ключа

$$I_{RV} = \frac{I_0 R_0}{R_0 + R_V} \approx \frac{I_0 R_0}{R_V} \approx 0, \Rightarrow U_V = I_{RV} R_V = I_0 R_0 \approx 0. \quad (3.65)$$

2. Считая, что мы дождалась установившегося состояния, разомкнем ключ. Учитывая ненулевые ГНУ и заменяя элементы и токи их операторными изображениями, получаем операторную схему замещения цепи после размыкания ключа (рис. 3.22).

3. Используя второй закон Кирхгофа по операторной схеме замещения, находим S - изображение сначала тока, а затем напряжения на внутреннем сопротивлении вольтметра

$$U_{RV}(s) + U_L(s) + U_{R0}(s) = I_0 L,$$

$$I(s) R_V + I(s) sL + I(s) R_0 = I_0 L,$$

$$I(s) = \frac{I_0 L}{R_V + R_0 + sL} = \frac{I_0 L}{L(s + \frac{L}{R_V + R_0})} = \frac{I_0}{(s + \tau)}, \quad (3.66)$$

$$U(s) = \frac{R I_0}{(s + \tau)}. \quad (3.67)$$

4. Переходя от изображений к оригиналам, находим искомое напряжение, как функцию времени

$$u_V(t) = R_V I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.68)$$

В момент размыкания ключа вольтметр покажет напряжение $u_V(0+) = R_V I_0$. Если учесть, что до размыкания ключа напряжение на вольтметре было равно $u_V(0-) = I_0 R_0$, а после размыкания стало $u_V(0+) = R_V I_0$, то, следовательно, напряжение после коммутации повысится в $\frac{u_V(0+)}{u_V(0-)} = \frac{R_V}{R_0}$ раз.

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. Если к катушке индуктивности с малым сопротивлением потерь R_0 , в витках которой накоплено магнитное поле, подключить вольтметр с большим внутренним сопротивлением R_V , то в момент отключения хотя бы одного вывода катушки от цепи вольтметр зафиксирует возникновение *перенапряжения*: напряжение увеличится в десятки миллионов раз. Если энергия магнитного поля, запасенная в катушке достаточно велика, то вольтметр может быть сожжен.

2. Понятно, что перенапряжение возникает при отрыве одного вывода катушки от цепи в любом случае, несмотря на то, что есть вольтметр или нет.

Поэтому, повторяя сказанное в п. 2.4.1, отметим, что во избежание возникновения больших перенапряжений при отключении электрических цепей, обладающих большой индуктивностью (обычно такие цепи имеют в своем составе дроссели ламп дневного света, электродвигатели без нагрузки, реле, различные соленоиды и т. д.), необходимо эти цепи предварительно замыкать на малое сопротивление. Надо помнить, что в силовых сетях, где имеется много индуктивностей, в момент размыкания рубильника могут возникать перенапряжения, которые могут создавать электрическую «дугу». Как отмечалось, в силовых сетях используются специальные выключатели, снабженные специальными дугогасящими устройствами.

3. Переходный процесс продолжается время, равное $3\tau = 3L / (R_V + R_0)$. Поэтому следует иметь в виду, что большое перенапряжение имеет место в течение малого промежутка времени.

3.4.3. Обобщенные функции. δ - функция Дирака

В электротехнике применяемые для описания реальных сигналов функции обычно имеют скачки (математики говорят разрывы непрерывности). Такие функции в классическом математическом анализе не являются дифференцируемыми. Это обедняет возможности их анализа и порождает ряд неудобств.

В прошлом веке была развита теория обобщенных функций, допускающая дифференцирование некоторых разрывных функций.

Чтобы понять идеи этой теории рассмотрим, например, последовательность функций

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{(1 + e^{-\sigma t})}, \sigma = 0, 1, 2, \dots \quad (3.69)$$

Можно показать, что в пределе они сходятся к единичной функции (функции Дирака)

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_{\sigma}(t) = 1(t).$$

Каждая из этих функций является дифференцируемой. Поэтому

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f'_{\sigma}(t) = 1'(t).$$

То есть получается, что при использовании таких функций уже определена операция дифференцирования единичной ступенчатой функции. В классической математике $1(t)$ – это разрывная функция и она не является дифференцируемой.

Рассмотрим теперь подробнее производную от функции $f_{\sigma}(t)$:

$$f'_{\sigma}(t) = \frac{-\sigma e^{-\sigma t}}{(1 + e^{-\sigma t})^2}. \quad (3.70)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f'_{\sigma}(t) = \frac{-\sigma e^{-\sigma t}}{(1 + e^{-\sigma t})^2} = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Кроме того, эта производная обладает интересным свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'_{\sigma}(t) dt = 1. \quad (3.72)$$

Таким образом, используя два последних соотношения можно определить δ – функцию Дирака как некую обобщенную производную от единичной ступенчатой функции.

3.4.4. Обобщенные характеристики электрических цепей

В ряде случаев при определении отклика цепи удобно использовать обобщенные характеристики цепи, которые являются откликом на некие тестовые входные сигналы того или иного рода.

Мы уже говорили об откликах цепи на тестовый сигнал в виде гармонического сигнала единичной амплитуды и нулевой начальной фазы. Эту обобщенную характеристику мы называли комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(j\omega)$.

Мы чисто формально ввели операторную передаточную функцию, получив ее путем простой замены величины $j\omega$ в комплексном коэффициенте передачи на величину s . Теперь можно уточнить, что передаточной функцией называется отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях в цепи. Т. е. передаточная функция представляет некий отклик электрической цепи на стандартный гармонический сигнал, представленный в операторной форме и полученный для случая комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$.

Важными обобщенными характеристиками электрической цепи являются переходная и импульсная характеристика.

Под *переходной характеристикой* электрической цепи $h(t)$ понимается отклик электрической цепи, которая не имеет начального запаса энергии на реактивных элементах (т.е. с нулевыми начальными условиями) на действие единичной функции включения (функции Хевисайда).

Под *импульсной характеристикой* электрической цепи $h(t)$ понимается отклик электрической цепи, которая не имеет начального запаса

энергии на реактивных элементах (т.е. с нулевыми начальными условиями) на действие δ – импульса Дирака.

Обобщенные характеристики электрической цепи связаны друг с другом, что облегчает их расчет.

Задача нахождения импульсной характеристики сводится к расчету переходного процесса при δ – импульсном воздействии. Проще такой расчет выполнить операторным методом. Так как преобразование Лапласа от δ – импульса Дирака равно единице, то получается замечательный результат: L - изображением импульсной характеристики является операторная передаточная функция, и чтобы найти импульсную характеристику достаточно взять обратное преобразование Лапласа от операторной передаточной функции.

Таким образом, для определения импульсной характеристики необходимо найти: 1) операторную передаточную функцию; 2) обратное преобразование Лапласа от операторной передаточной функции.

Задача расчета переходной характеристики сводится к расчету цепи операторным методом. Учитывая, что L – изображение единичной функции Хевисайда равно $1/s$, то получается, что для того, чтобы найти переходную характеристику достаточно взять обратное преобразование Лапласа от операторной передаточной функции, деленной на s .

Таким образом, для определения переходной характеристики необходимо найти: 1) операторную передаточную функцию; 2) обратное преобразование Лапласа от операторной передаточной функции, деленной на s .

Взаимосвязь обобщенных характеристик можно выразить в виде сводки формул:

$$K(s) = g(s); \quad (3.73)$$

$$H(s) = \frac{K(s)}{s}; \quad (3.74)$$

$$K(s) = sH(s); \quad (3.75)$$

$$\dot{K}(j\omega) = K(s)_{s=j\omega}; \quad (3.76)$$

$$g(t) = h'(t) + h(0)\delta(t). \quad (3.77)$$

Здесь: $h(t)$, $H(s)$ – переходная характеристика и ее операторное изображение;

$g(t)$, $g(s)$ – импульсная характеристика и ее операторное изображение;

$K(s)$ – операторная передаточная функция.

Следует иметь в виду, что существует и взаимосвязь между предельными значениями обобщенных характеристик.

Значение переходной характеристики при $t=0$ равно значению АЧХ на бесконечной частоте

$$h(t)_{t=0} = K(\omega)_{\omega \rightarrow \infty}. \quad (3.78)$$

Значение переходной характеристики после окончания переходного процесса равно значению АЧХ на нулевой частоте

$$h(t)_{t=\infty} = K(\omega)_{\omega \rightarrow 0}. \quad (3.79)$$

3.5. Трехфазные и магнитные цепи

3.5.1. Трехфазные цепи

В настоящее время почти все электроснабжение, включающее производство, передачу и распределение огромного количества электрической энергии, осуществляется с помощью трехфазных цепей. В таких цепях генератор, являющийся преобразователем механической энергии в энергию электрическую, вырабатывает три гармонических напряжения равных амплитуд. Фазы же этих напряжений сдвинуты относительно друг друга на угол 120° ($2\pi/3$), что осуществляется за счет поворота на тот же угол трех обмоток статора генератора (оси обмоток статора смещены в пространстве на 120°). С ротором генератора связано постоянное магнитное поле, вращающееся вместе с ротором с постоянной угловой скоростью. В результате образуются три гармонических напряжения:

$$u_A(t) = U_m \cos(\omega t + \psi);$$

$$u_B(t) = U_m \cos(\omega t + \psi - 2\pi/3); \quad u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \psi - 4\pi/3).$$

Эти функции называют *фазными напряжениями*

Фазные напряжения можно рассматривать как ЭДС трех генераторов гармонических колебаний, внутренние сопротивления которых в рабочих режимах значительно меньше их сопротивлений нагрузок, что необходимо для высокого КПД генератора.

Главное свойство симметричных трехфазных систем состоит в том, что сумма напряжений или токов фаз в любой момент времени равна нулю. Это свойство позволяет электрически связывать (соединять) между собой три фазы генератора и нагрузки.

Основное преимущество связанной трехфазной системы перед возможной в принципе не связанной системой с изолированными друг от друга фазами состоит в том, что здесь отпадает необходимость в обратном проводе и можно, в принципе, обходиться тремя проводами вместо шести. Это дает огромную выгоду при больших расстояниях между местами генерирования и потребления энергии.

Различают два вида соединения трехфазных систем: звездой, использующее равенство нулю токов, и треугольником, использующее равенство нулю напряжений.

Соединение фаз генератора и нагрузки в звезду показано на рис. 3.23. Это соединение также называют трехфазной четырехпроводной схемой.

При соединении звездой начала фазных обмоток источника соединяют в одну нейтральную точку O , а концы обмоток образуют три вывода A , B , C . Аналогично соединяются три нагрузки, образуя трехфазную нагрузку с нейтралью O' . Нейтрали источника и нагрузки соединяются.

Провода, соединяющие начала фаз обмоток генератора и нагрузки называются *линейными*. Провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника – *нейтральным*.

Токи в линейных проводах называются *линейными*, а токи в фазах генератора – *фазными токами*.

Напряжение между началом и концом каждой фазы (или между линейным и нейтральным проводом) называется *фазным напряжением*.

Напряжение между началами фаз (или линейными проводами) называется *линейным напряжением*.

В рассматриваемой схеме фазный и линейный токи равны: $I_L = I_\Phi$. Линейное напряжение между выводами А и В $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B$. Линейное напряжение связано с фазным следующим соотношением $U_L = \sqrt{3}U_\Phi$. Для силовых сетей низкого напряжения $U_L = 380\text{ В}, U_\Phi = 220\text{ В}$.

В симметричном режиме ток через нейтральный провод равен нулю. По этой причине его иногда называют *нулевым проводом*.

В реальных трехфазных цепях строгая симметрия практически исключена. При несимметрии однофазной нагрузки (к примеру, когда к одной фазе подключили электроприемники от 100 квартир, к другой от 200, а к третьей от 50 квартир) ток в нейтральном проводе отличен от нуля, хотя и значительно меньше линейных токов. В ряде случаев нейтральные точки генератора и нагрузки заземляются, и тогда нейтральным проводом частично или целиком является земля.

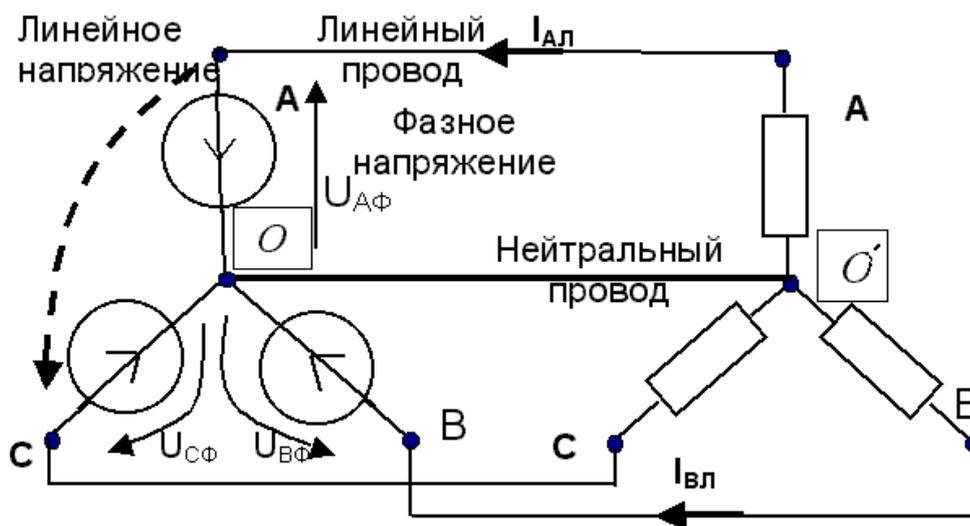


Рис. 3.23. Соединение фаз генератора и нагрузки звездой

Следует помнить, что нейтральный провод обеспечивает постоянство фазного напряжения. При отсутствии нейтрального про-

вода и несимметрии нагрузок фазные напряжения приемников могут стать равными фазным напряжениям генераторов, из-за чего на приемниках могут возникнуть значительные перенапряжения (о случаях обрыва нейтрального провода и массовом выходе из строя бытовых электроприемников - холодильников, телевизоров и пр. - неоднократно писала пресса). Запомните, что ни в коем случае нельзя включать плавкие предохранители в нейтральный провод.

При соединении *треугольником* все фазные обмотки источника или сопротивления нагрузки соединяются последовательно и в качестве выводов берут общие точки соединений.

В такой схеме (трехфазной трехпроводной) фазные и линейные напряжения равны.

Линейный ток равен разности двух смежных фазных токов. Можно показать, что $I_L = \sqrt{3}I_\phi$.

3.5.2. Индуктивные связи в электрических цепях. Трансформаторы

До сих пор предполагалось, что в цепи отсутствуют индуктивные катушки, связанные общими магнитными потоками, или, иначе говоря, отсутствуют индуктивные связи. Между тем на практике встречаются цепи, которые содержат катушки, связанные попарно общими магнитными потоками. В частности, широко используются в качестве компонентов электрических цепей так называемые трансформаторы, представляющие собой две индуктивные катушки, имеющие обычно общий сердечник из ферромагнитного материала. При наличии двух и более индуктивных катушек с общим магнитным потоком напряжение в любой из таких катушек зависит от изменения не только тока, проходящего через катушку, но и от токов, проходящих через другие индуктивно-связанные с ней катушки. Это явление известно как явление *взаимоиндукции*.

В простейшем случае *трансформатор* состоит из двух электрически не соединенных (электрически изолированных друг от друга) и неподвижных относительно друг друга катушек, называемых обмотками трансформатора, связанных между собой потоком взаимной индукции (рис. 3.24).

Если обмотки трансформатора намотаны на ферромагнитный сердечник, то свойства такого трансформатора будут нелинейными.

К зажимам одной обмотки трансформатора, которую называют *первичной*, подключают источник энергии, а к зажимам другой обмотки – *вторичной*, присоединяют приемник энергии (нагрузку).

Переменное напряжение, подведенное к первичной обмотке, создает в ней переменный ток, который возбуждает в катушке переменное магнитное поле. Основная часть линий магнитной индукции замыкается по сердечнику, образуя рабочий магнитный поток Φ . Линии этого поля, сцепленные с витками первичной и вторичной обмоток, образуют потокосцепления ψ_1 и ψ_2 .

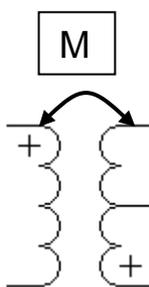


Рис. 3.24. Трансформатор

Пусть через одну из катушек (с индуктивностью L_1) проходит ток i_1 . Часть магнитного потока, создаваемого током i_1 , охватывает витки второй катушки, зажимы которой разомкнуты. Потокосцепление первой катушки, т. е. сумму магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками катушки, обозначим через ψ_1 , а потокосцепление второй катушки ψ_{12} . Значения потокосцеплений пропорциональны ψ_1 и ψ_{12} току i_1 . Коэффициенты пропорциональности L_1 и M в выражениях $\psi_1 = L_1 i_1$ и $\psi_{12} = M i_1$ являются, как известно, индуктивностью катушки L_1 и взаимной индуктивностью между катушками M .

Аналогичные обозначения ψ_2 и ψ_{21} - введем для потокосцеплений в случае, когда через вторую катушку проходит ток i_2 ; а зажимы первой катушки разомкнуты, причем $\psi_2 = L_2 i_2$ и $\psi_{21} = M i_2$.

Значения коэффициента M в выражениях, как известно, одинаковы и не могут превышать среднего геометрического из значений L_1 и L_2 , т.е.

$M = k\sqrt{L_1L_2}$. Коэффициент k , называемый *коэффициентом связи*, характеризует степень магнитной связи между катушками. В случае «жесткой» связи, когда весь магнитный поток, сцепляющийся с витками одной катушки, сцепляется и с витками другой, $k = 1$. Отсутствию связи между катушками соответствует значение $k = 0$.

Пусть далее токи i_1 и i_2 проходят соответственно через обе катушки. Тогда общее *потокосцепление* первой катушки, если считать, что зависимости между токами и потоками в катушках линейны, $\psi_{11} = \psi_1 \pm \psi_{21}$, второй катушки - $\psi_{22} = \psi_2 \pm \psi_{12}$. В других обозначениях

$$\psi_{11} = L_1i_1 \pm Mi_2, \quad \psi_{22} = L_2i_2 \pm Mi_1. \quad (3.80)$$

Здесь знаки слагаемых зависят от направлений магнитных потоков в катушках, а последние — от направлений токов, которые проходят через катушки. В связи с этим при схемном изображении двух катушек индуктивности, связанных общим магнитным потоком, зажимы катушек, через которые положительно заряженные частицы должны проходить в одном и том же направлении (к катушке или от нее) для того, чтобы потокосцепления складывались, помечаются точками или знаками «+». Поскольку при анализе положительные направления токов в каждой из катушек выбираются независимо и произвольно, различают *согласный и встречный выборы положительных направлений токов*. В первом случае потокосцепления складываются, а во втором - вычитаются, если мгновенные значения токов имеют одинаковые знаки. Тогда в (3.80) согласно выбору положительных направлений токов соответствует знак «плюс», а встречному - знак «минус».

Дифференцируя уравнения (3.80) по переменному t находим следующие соотношения между напряжениями и токами на внешних зажимах индуктивностей:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad (3.81)$$

$$u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (3.82)$$

Уравнения (3.81, 3.82) показывают, что если между витками 1-й и 2-й катушек цепи существует связь через взаимную индуктивность M , то в 1-ю катушку вносится напряжение $u_{21} = \pm M \frac{di_2}{dt}$, обусловленное током 2-й катушки. Ток 1-й катушки вносит напряжение $u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt}$ во вторую катушку. Знаки зависят от выбора положительных направлений токов в катушках.

Предположим, что ток во второй катушке равен нулю. Тогда для случая гармонических напряжений отношение напряжения первичной и вторичной обмоток определяется формулой

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} = n. \quad (3.83)$$

Здесь принято, что индуктивности обмоток, расположенные на одном ферромагнитном сердечнике, пропорциональны квадратам чисел витков N .

Отношение чисел витков N_1 и N_2 называют *коэффициентом трансформации трансформатора*.

Таким образом, трансформатор обладает свойством трансформировать (преобразовывать) уровень напряжения гармонического сигнала. Очевидно, что если $n > 1$, то трансформатор повышающий, если $n < 1$, то трансформатор понижающий.

Величина коэффициента трансформации n это и отношение напряжений на первичной и вторичной обмотках при разомкнутой внешней цепи. Например, для трансформаторов, преобразующих напряжение городской кабельной сети 6000 В в напряжение 230 В, $n = 6000/230 = 26$.

Следует иметь в виду, что у реального трансформатора коэффициент трансформации является функцией ряда параметров и, в общем случае, зависит от частоты гармонического напряжения, величины нагрузки и пр.

Можно показать, что для гармонического сигнала токи первичной и вторичной обмоток связаны соотношением

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{M}{L_2} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n}. \quad (3.84)$$

То есть, трансформатор обладает свойством трансформировать токи. Это свойство используют в *трансформаторах тока*.

Поскольку произведение коэффициентов трансформации тока и напряжения дает единицу, то можно определить, что в трансформаторе мощность не трансформируется. Мощность на выходе, как правило, меньше мощности на входе за счет разного рода потерь, в первую очередь на диссипацию.

Входное сопротивление трансформатора, нагруженного на сопротивление R_H можно выразить формулой

$$Z_{BX} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_H}{n^2}. \quad (3.85)$$

Следовательно, трансформатор изменяет модуль сопротивления нагрузки в n^2 раз. Отсюда следует вывод: трансформатор обладает свойством трансформировать сопротивление. При помощи трансформатора можно произвести изменение сопротивления в определенное число раз. Это позволяет использовать трансформатор как согласующий элемент.

Отметим также, что коэффициент трансформации по сопротивлению у реального трансформатора не является постоянной величиной и зависит от ряда факторов.

Говоря о свойствах трансформатора, следует еще раз подчеркнуть, что обмотки трансформатора электрически изолированы друг от друга, что важно в ряде случаев с точки зрения электробезопасности.

Реальные трансформаторы по назначению можно разделить на *силовые, измерительные, импульсные* и др.

Силовые трансформаторы — важнейшие элементы силовых электрических цепей. Они позволяют создать экономически эффек-

тивную, очень гибкую и удобную систему передачи и распределения электрической энергии.

На станциях электрическая энергия вырабатывается генераторами при высоком напряжении (6 – 30 кВ). Для уменьшения мощности потерь в проводах, пропорциональных квадрату тока в линии, необходимо повышать напряжение и соответственно уменьшать ток. Поэтому напряжение в линиях электропередач (ЛЭП) повышается от нескольких сотен до тысяч киловольт (500 кВ и выше).

Номинальное напряжение большинства потребителей колеблется от 127 до 500 В. Поэтому возникает необходимость создания ряда станций, понижающих напряжение до установленной номинальной величины.

Измерительные трансформаторы применяются в качестве элементов измерительных устройств для измерения токов и напряжений, величины которых больше номинальных значений для соответствующих измерительных приборов.

Широкое распространение получили *измерительные трансформаторы тока*. Ток в первичной обмотке трансформатора равен измеряемому току в нагрузке (десятки тысячи ампер). Ток во вторичной обмотке существенно меньше и равен току, протекающему через измерительный прибор. Обычно номинальный ток вторичной обмотки измерительного трансформатора составляет 5 А.

При осуществлении измерений тока с помощью трансформаторов тока следует помнить, что ни в коем случае нельзя оставлять разомкнутой (без штатной нагрузки) вторичную обмотку. В этом случае получается аварийный режим холостого хода, что приводит обычно к выходу из строя трансформатора за счет пробоя его изоляции.

Импульсные трансформаторы включают в себя большую группу трансформаторов, служащих для согласования каскадов, усиления колебаний, преобразования высокочастотных и импульсивных сигналов и др.

В трехфазных электрических цепях используют специальные трехфазные трансформаторы, которые по сравнению с однофазными обладают рядом преимуществ.

Использование реальных трансформаторов связано с неизбежными потерями электрической энергии, которые желательно свести к минимуму. Различают *два вида потерь в трансформаторе*: потери на на-

гревание обмоток при прохождении по ним переменного электрического тока, получившие название потери в меди, и потери в стальном сердечнике, связанные с гистерезисом и вихревыми токами, получившие название потери в стали.

Переменный магнитный поток, созданный намагничивающими силами первичной и вторичной обмоток, вызывает циклическое перемагничивание сердечника. Оно осуществляется по динамической петле перемагничивания (петле гистерезиса). Потери энергии за один цикл перемагничивания пропорциональны площади петли. С увеличением частоты потери энергии при перемагничивании возрастают, и в сердечнике возникают значительные вихревые токи.

Снижение потерь, обусловленных явлением магнитного гистерезиса, достигают применением магнитомягких материалов (малое значение задерживающего поля, большое значение индукции насыщения). Как отмечалось ранее, к таким ферромагнитным материалам относятся электротехнические стали, сплав пермалой и др.

Для снижения потерь от вихревых токов сердечники выполняют из листов электротехнической стали, изолированных друг от друга (лаком, бумагой), и добавлением присадок кремния, увеличивающих удельное электрическое сопротивление пластин. С увеличением частоты толщину пластин сердечника уменьшают. Так, для частоты $f = 50$ Гц толщина пластин $d = 0,35$ мм; для частот звукового диапазона $d = 0,10 - 0,03$ мм. Для уменьшения потерь на вихревые токи в диапазоне высоких частот в качестве сердечников применяют магнитодиэлектрические, аморфные материалы, пермалой, ферриты, карбонильное железо и др. Эти материалы обладают большим удельным сопротивлением.

3.5.3. Основные понятия магнитных цепей. Электромагнитные устройства с притягивающимися элементами

В электротехнике используются устройства создающие и использующие магнитные поля.

Компонент электротехнического устройства, служащий для создания в его рабочем объеме магнитного поля заданной интенсивности и конфигурации называется магнитной цепью. Он обычно состоит из двух элементов.

Первый элемент магнитной цепи возбуждает (создает) магнитное поле. Обычно это либо постоянный магнит, либо катушка, по проводам которой протекает ток, создающий магнитное поле соответствующей напряженности \vec{H} .

Второй элемент, называемый *магнитопроводом*, представляет собой систему тел и сред, образующих замкнутые пути для основной части магнитного поля.

Магнитные цепи, также как и электрические, могут быть с несколькими элементами возбуждения, а магнитопровод может быть простым и сложным (разветвленным).

Напряженность магнитного поля, создаваемого током, протекающим по обмотке катушки, определяется намагничивающей силой.

Намагничивающая сила F равна произведению числа витков катушки или обмотки на величину тока

$$F = iW. \quad (3.86)$$

Напряженность магнитного поля в магнитопроводе определяется с помощью закона полного тока, поэтому для намагничивающей катушки можно записать

$$\oint \vec{H} dl = F \Rightarrow iW = Hl.$$

Если катушка намотана на однородный магнитопровод длиной l_{CP} , у которого значения магнитного потока Φ , магнитной индукции B и напряженности H одни и те же вдоль линий магнитной индукции, то получается *однородная магнитная цепь*, в которой элемент возбуждения создает *намагничивающую силу $F = iW$* . Тогда магнитный поток определяется отношением магнитодвижущей силы к какой то величине

$$Hl_{CP} = iW \Rightarrow B = \mu\mu_0 H, \Rightarrow \Phi = BS \Rightarrow \Phi = \frac{iW}{l_{CP} / (\mu\mu_0 S)}. \quad (3.87)$$

Если проводить аналогии по форме дроби с законом Ома, между магнитным потоком и электрическим током, между намагничивающей

силой и ЭДС, то получается, что неизвестная величина это некое *магнитное сопротивление*

$$R_{mag} = l_{CP} / (\mu\mu_0 S). \quad (3.88)$$

В этой связи в электротехнике пользуются *законом Ома для магнитной цепи*

$$\Phi = \frac{iW}{l_{CP} / (\mu\mu_0 S)} = \frac{F}{R_{mag}}. \quad (3.89)$$

Величину $\Phi R_{mag} = Hl$ по аналогии с электрической цепью можно назвать *магнитным напряжением* в магнитопроводе.

Если магнитопровод не однородный, например, в нем имеется воздушный зазор, то силовые линии, проходя через этот воздушный зазор, испытывают «большее сопротивление», что можно отразить введением дополнительного магнитного сопротивления R_{magZ} .

Обобщая далее, по аналогии с электрическими цепями, можно получить второй закон Кирхгофа для магнитной цепи: сумма падений магнитных напряжений по замкнутому контуру равна алгебраической сумме намагничивающих сил.

С помощью отмеченных аналогий можно рассчитывать сложные, разветвленные магнитные цепи.

Магнитное поле есть носитель энергии. Помимо случаев ее применения в электрических цепях, отмеченных ранее, приведем варианты использования в электротехнике магнитной энергии для выполнения механической работы, точнее, для механического перемещения элементов магнитопровода: втягивания сердечника в катушку, притягивания якоря в реле.

Рассмотрим простейший электромагнит, показанный на рис. 3.25. Конструктивно он состоит из неподвижного П - образного сердечника, на который одета обмотка катушки, и подвижного якоря. Сердечник заканчивается двумя полюсами. Между сердечником и якорем в исходном положении имеется воздушный зазор. При протекании тока по виткам ка-

тушки создается магнитный поток (средняя магнитная линия показана пунктиром).

В электромагнитных устройствах, состоящих из подвижной и неподвижной частей, магнитное поле всегда вызывает такие перемещения, в результате которых магнитное сопротивление станет минимальным. В исходном положении наибольшим магнитным сопротивлением обладают воздушные промежутки у полюсов. По этой причине магнитное поле старается уменьшить воздушный промежуток, сделав магнитную линию минимальной длины и $R_{mag} \rightarrow 0$. Как следствие, электромагнит притянет якорь к П - образному сердечнику. Энергия системы уменьшится на величину, затраченную на подъем якоря. Сила, с которой притягивается якорь к сердечнику, равна

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu}. \quad (3.90)$$

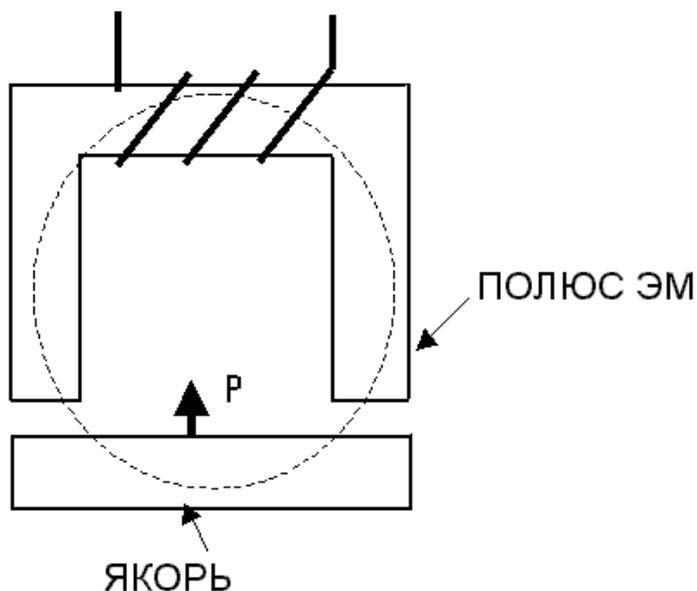


Рис. 3.25. Простейший электромагнит

Следует обратить внимание на то, что сила притяжения увеличивается пропорционально квадрату магнитной индукции. А увеличение индукции приводит на участок насыщения гистерезисной кривой, требует увеличения магнитодвижущей силы, и, как следствие, увеличения габаритов электромагнита.

Изложенный принцип широко используется в *электромагнитных реле контакторах и магнитных пускателях*.

Рассмотрим в качестве примера электромагнитное реле с поворотным якорем. Реле показано на рис. 3.26.

В таком реле различают две части: управляющую и исполнительную. Управляющая часть состоит из электромагнита 1, представляющего собой катушку, надетую на стальной сердечник, якоря 2 и пружины 3. Исполнительная часть состоит из системы неподвижных контактов 4, подвижной контактной пластины 5, посредством которой управляющая часть реле воздействует на исполнительную, и системы подвижных контактов 6.

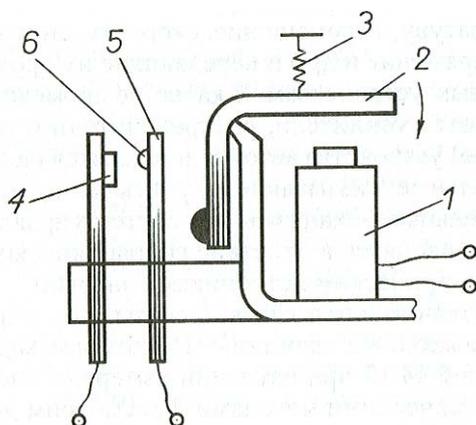


Рис. 3.26. Электромагнитное реле

Когда ток в катушке электромагнита отсутствует, якорь под действием пружины удерживается в верхнем положении, при этом контакты реле разомкнуты. При появлении тока в катушке электромагнита якорь притягивается к сердечнику, и подвижный контакт замыкается с неподвижным. Происходит замыкание исполнительной цепи, т.е. включение того или иного устройства.

Для коммутации силовых цепей (десятки – сотни ампер) используют реле – контакторы или, просто, *контакторы*. По принципу действия они подобны реле, однако имеют специальные рабочие контакты. При коммутации силовых цепей обычные контакты «обгорают», покрываются окислами, что препятствует надежному соединению контактов. В контакторах подвижные рабочие контакты имеют специальное исполнение, благодаря которому они при замыкании скользят по по-

верхностям неподвижных контактов, что способствует механическому удалению «нагара», окислов и созданию надежного контакта.

Для дистанционного управления (пуска и остановки) электрических двигателей используют *магнитные пускатели*. Они представляют собой сочетание контактора и теплового реле.

Используются также *соленоиды* – полые катушки, которые втягивают внутрь стальной сердечник. При прохождении тока по катушке происходит втягивание сердечника внутрь катушки. Это также обусловлено тем, что магнитное поле вызывает такие перемещения подвижной части чтобы, в результате, магнитное сопротивление стало минимальным. Внутри катушки магнитная индукция максимальна, поэтому когда сердечник размещается в середине катушки магнитное сопротивление путей замыкания магнитных линий стает минимальным.

Эффект втягивания металлических сердечников внутрь катушки, при протекании по ее обмотке тока широко используется в различных устройствах. Матрицы из соленоидов используются в печатающих головках скоростных матричных принтеров. Соленоиды применяют в электромагнитных устройствах – позиционерах, которые «удерживают» в нужном положении фокусирующую систему оптических дисков. «Соленоидные» двигатели позиционируют головки накопителей информации на магнитных дисках (винчестерах). Следует иметь в виду, что катушки электромагнитных устройств должны питаться от источников тока. Кроме того, для того чтобы позиционеры нормально функционировали (с требуемой быстротой) необходимо, чтобы значения их постоянной времени L/R , были малыми. Для этого необходимо использовать катушки с минимальными размерами сердечников.

В электротехнике и электронике находят также применение различного рода электромагниты, выполняющие функции фиксации, прижимания, торможения вращающихся деталей, переключения скоростей и прочее. Такие электромагниты могут быть самофиксирующимися. Они могут содержать механический фиксатор, который при срабатывании электромагнита жестко фиксирует якорь, в результате чего он остается в притянутом состоянии после отключения рабочей обмотки. Для приведения якоря в исходное положение в специальную дополнительную обмотку сброса подают импульс сброса и фиксатор разблокируется. При наличии возвратной пружины якорь займет исходное положение.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение схемы электрической цепи и основные понятия, характеризующие структуру и геометрическую конфигурацию цепи.
2. Приведите формулировку первого закона Кирхгофа для электрической цепи. Раскройте его содержание.
3. Приведите формулировку второго закона Кирхгофа для электрической цепи. Раскройте его содержание.
4. Укажите правила определения знаков тока, напряжения и ЭДС для электрической цепи.
5. Охарактеризуйте последовательное соединение элементов цепи. Запишите выражение для комплексного сопротивления и сделайте пояснения.
6. Поясните понятие делитель напряжения. Приведите основное свойство простейшего делителя напряжения. Что означает понятие коэффициент деления ?
7. Что означает понятие потенциометр ?
8. Охарактеризуйте параллельное соединение элементов цепи. Запишите выражение для комплексного сопротивления и сделайте пояснения.
9. Представьте параллельное соединение элементов цепи в виде эквивалентного двухполюсника.
10. Нарисуйте схемы простейшего делителя тока и его реализации в приборах измерения тока и для шунтирования резистора.
11. Сформулируйте и поясните основное свойство простейшего делителя тока.
12. Охарактеризуйте понятие шунт. С какой целью используют в электронике делитель тока ?
13. Смешанное соединение элементов цепи. Поясните это понятие. Приведите типичный пример такого соединения.
14. Формула смешанного соединения элементов электрической цепи. Объясните это понятие. С какой целью оно применяется ?
15. Соединение элементов цепи «звездой» и «треугольником». Приведите пример.
16. Сформулируйте правила преобразования «треугольника» в «звезду» и наоборот.
17. Дайте определение последовательного колебательного контура. Приведите его схему.

18. Запишите выражение для комплексного сопротивления последовательного колебательного контура. Изобразите график зависимости реактивного сопротивления от частоты. Проанализируйте его.
19. Какое явление в колебательном контуре называется электрическим резонансом? Как определена его резонансная частота?
20. Поясните понятия: активно-емкостное и активно-индуктивное сопротивление последовательного колебательного контура.
21. Что называют добротностью контура?
22. Выразить через добротность комплексное сопротивление последовательного контура.
23. Изобразите график зависимости полного сопротивления последовательного контура от частоты.
24. Перечислите основные свойства последовательного колебательного контура.
25. Дайте определение параллельного колебательного контура. Приведите его схему.
26. Запишите выражение для комплексного сопротивления параллельного колебательного контура. Изобразите для параллельного колебательного контура график зависимости реактивной проводимости от частоты. Проанализируйте его.
27. Как определена резонансная частота параллельного колебательного контура? Поясните понятия: активно-емкостное и активно-индуктивное сопротивление такого контура.
28. Как определяется добротность параллельного контура?
29. Как соотносятся между собой на резонансной частоте амплитуды токов на реактивных элементах и амплитуда тока, поданного на параллельный контур от источника ?
30. Выразить через добротность комплексное сопротивление параллельного контура.
31. Изобразите и проанализируйте график зависимости полного сопротивления параллельного контура от частоты.
32. Какой формулой определяется полоса пропускания параллельного контура?
33. Перечислите основные свойства параллельного колебательного контура.
34. Охарактеризуйте понятия пьезоэлектрический элемент и резонатор.
35. Приведите эквивалентную схему, описывающую электрические характеристики пьезоэлектрического резонатора в области резонансных частот. Проанализируйте ее.

36. От чего зависит резонансная частота пьезорезонатора? Какие материалы используют в качестве пьезорезонатора? Какая у таких резонаторов добротность?
37. Для решения каких задач служит метод контурных токов (МКТ)? На чем он основан? Как соотносятся количество уравнений, которое приходится решать, и количество простых независимых контуров в цепи?
38. Запишите последовательность действий для реализации МКТ. Какую величину называют комплексным контурным сопротивлением?
39. Сформулируйте правило знаков в МКТ.
40. Как определяется контурная ЭДС и ее знак?
41. Для решения каких задач служит метод узловых напряжений (МУН)? На чем он основан? Как соотносятся количество уравнений, которое приходится решать, и количество узлов в цепи?
42. Запишите последовательность действий для реализации МУН. Какую величину называют комплексной узловой проводимостью?
43. Сформулируйте правило знаков в МУН.
44. Поясните понятие: активная мощность электрической цепи.
45. Как определены активная и реактивная мощность реальных приемников электрической энергии? Охарактеризуйте понятие: коэффициент мощности.
46. Приведите определение полной и комплексной мощности. Для каких целей введены эти понятия в электротехнике?
47. Определите понятие – комплексный коэффициент передачи двухпортовой четырехполюсной цепи SISO по напряжению. С какой целью его используют? Представьте его в показательной форме.
48. Что называют амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристиками четырехполюсной цепи? От чего они зависят?
49. О каких свойствах электрической цепи позволяют судить формы АЧХ и ФЧХ?
50. Охарактеризуйте понятие – амплитудно-фазовую характеристика.
51. Приведите примеры АЧХ и ФЧХ для типичных электрических цепей.
52. Дайте определение полосы прозрачности и запираания, граничной частоты (частоты среза) электрической цепи.
53. Охарактеризуйте понятия: фильтры низких частот, фильтры верхних частот, полосовые и заграждающие (режекторные) фильтры.

54. Что означает понятие децибел (dB)? С какой целью оно применяется?
55. Что означает понятие передаточная операторная функция электрической цепи. С какой целью оно применяется?
56. Дайте определение нулей, полюсов и собственных частот электрической цепи. Что характеризует диаграмма полюсов-нулей?
57. Кратко охарактеризуйте следующие случаи в электрической цепи: сильное затухание, критическое затухание, слабое затухание, отсутствие затухания.
58. Что означает термин «пассивные» электрические цепи?
58. Что означает термин устойчивость электрической цепи?
60. Какие электрические цепи называют цепями без потерь?
61. Дайте определение полосно-заграждающей и частотно-выделяющей электрических цепей.
62. Охарактеризуйте понятия переходного процесса, его длительности и коммутация цепи.
63. Что называют начальными условиями электрической цепи и что они характеризуют? Охарактеризуйте понятие главные начальные условия.
64. Что называют конечными условиями в электрической цепи и что они характеризуют?
65. В чем отличие классического и операторного методов расчета переходных процессов? Что лежит в основе операторного метода?
66. Приведите определение преобразования Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$. Каким условиям должна удовлетворять функция $f(t)$?
67. Перечислите основные этапы при решении задач расчета переходных процессов операторным методом.
68. Какую величину называют постоянной времени цепи? Как она определена для RL и RC цепей? По происшествии какого времени считается, что переходный процесс заканчивается?
69. Приведите определение δ – функции Дирака.
70. Что понимают под переходной и импульсной характеристиками электрической цепи?
71. Каким образом определяют переходную и импульсную характеристиками электрической цепи?
72. Приведите сводки формул, определяющих взаимосвязь обобщенных характеристик.

73. Дайте определение фазных напряжений трехфазных цепей. Какие два вида соединения трехфазных систем различают? Перечислите их главные особенности.
74. Какие провода трехфазных цепей называют линейными и нейтральными? Какие токи (напряжения) называют нейтральными и фазными?
75. Какая связь существует между линейным и фазным напряжениями?
76. Что называют нулевым проводом? Для чего он служит?
77. Назовите основные особенности токов и напряжений в цепи при соединении треугольником.
78. Охарактеризуйте понятие взаимной индукции.
79. Из чего состоит простейший трансформатор? Что называют первичной и вторичной обмотками трансформатора?
80. Нарисуйте схему простейшего трансформатора и поясните его работу.
81. Что характеризует коэффициент связи в катушках индуктивности?
82. Каким соотношением определяется для случая гармонических напряжений отношение напряжения первичной и вторичной обмоток?
83. Охарактеризуйте понятие коэффициент трансформации трансформатора.
84. Как связаны для гармонического сигнала токи первичной и вторичной обмоток? Охарактеризуйте понятие: трансформатор тока.
85. Охарактеризуйте понятия: силовые, измерительные, импульсные трансформаторы.
86. Какие виды потерь энергии существуют в трансформаторах?
87. Охарактеризуйте понятия: магнитная цепь, магнитопровод, напряженность магнитного поля, намагничивающая сила.
88. Охарактеризуйте понятие однородная магнитная цепь.
89. Охарактеризуйте понятия магнитное сопротивление и магнитное напряжение. Запишите закон Ома для магнитной цепи.
90. Нарисуйте схему простейшего электромагнита. Поясните его работу.
91. Электромагнитные реле контакторов и магнитных пускателей. Дайте им краткую характеристику.
92. Электромагнитное реле с поворотным якорем. Приведите его схему и принцип работы.
93. Соленоиды. Дайте им краткую характеристику Где они применяются?

4. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В электрических цепях нередко встречаются токи и напряжения (далее коротко – сигналы) довольно сложной формы. Эта сложность временной зависимости затрудняет не только расчеты, но и визуальное восприятие самого сигнала, понимание характера («физики») процессов, протекающих в элементах цепи. Из-за этого общего, так сказать «глобального» рассмотрения сигнала, часто становится непонятным какие свойства этого сигнала объективно выступают как наиболее важные, на которые требуется обращать внимание, а какие являются второстепенными, малозначительными и их можно игнорировать. Вполне естественно, что был потребен математический аппарат, который бы позволял «раскладывать сложное явление на составные части» и, благодаря этому, давать характеристику изучаемому процессу в наиболее важном отношении, наиболее рациональным способом описывать его нужные свойства.

В 1807 году Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830 гг.) высказал смелое предположение о том, что любую произвольную периодическую функцию, причем даже такую, которая содержит разрывы, можно представить рядом в виде суммы, с определенными коэффициентами (коэффициентами Фурье), периодических, связанных между собой косинусоид и синусоид. Косинусоиды и синусоиды с частотами, кратными частоте первой гармоники, в рядах Фурье получили название гармоник. При этом ряд Фурье, теоретически, имеет бесконечное число членов гармоник, но на практике оно всегда конечно.

В некотором смысле идеи, лежащие в основе такого предположения Фурье, восходят к древнему Вавилону, когда люди интуитивно сводили произвольное и, казалось бы, достаточно сложное колебание, к системе отдельных гармонических колебаний и, особенно, к соображениям о консонансах (созвучиях) в музыке: колеблющаяся струна может звучать слитно, согласованно, издавая одновременно тоны различной частоты.

Фурье был в большей мере физиком и инженером (свои идеи он изложил в конкурсной работе по теории теплоты), чем математиком и доказательство высказанных предположений не удовлетворили даже

его современников. В последствии исходное утверждение Фурье о том, что функция (для нас это физическая величина, изменяющаяся во времени, сигнал) может быть представлена в виде комбинации простых гармоник и охарактеризована как упорядоченная и счетная система коэффициентов, было сформулировано корректно, строго доказано и изучение рядов Фурье можно считать одним из наиболее плодотворных глав математики.

С позиций современной математики утверждениям Фурье можно придать и некий наглядный «геометрический смысл».

Известно, что в прямоугольной (декартовой) системе координат, имеющей 3 координатные взаимно-перпендикулярные оси с ортами $\vec{i}_X, \vec{i}_Y, \vec{i}_Z$, вектор можно представить проекциями на оси. При этом каждая проекция вектора на ось равна скалярному произведению орта оси на вектор. Мы уже отмечали, что в линейном метрическом пространстве сигнал можно также представить неким вектором. Тогда по аналогии, сигнал (конечной мощности и энергии) может быть охарактеризован своими проекциями на некие ортогональные координатные оси, «направление» которых задается специальными, как говорят, базисными функциями. Набор этих ортогональных функций составляет координатный базис. Напомним, что функции ортогональны, если их скалярное произведение, а, следовательно, и взаимная энергия равны нулю. Если быть еще более точным, то следует отметить, что используемые в качестве направлений функции должны быть не только ортогональными, но и нормированными (средняя мощность базисной функции должна быть равна единице). Поэтому правильнее говорить, что координатный базис должен быть ортонормированным.

Таким образом, «геометрически» получается, что ряд Фурье это такое разложение произвольного сигнала, при котором коэффициенты ряда Фурье есть проекции на базисные направления.

Величины коэффициентов в выражениях разложения функции (сигнала) при тригонометрическом или ином представлении ряда получили *название спектра*. Эти коэффициенты характеризуют интенсивность элементарных гармоник, или, другими словами, величина каждого коэффициента показывает насколько значителен вклад каждой гармоники в формирование сигнала. Разложение сигнала на элементарные гар-

моники с целью определения их интенсивности *называют спектральным анализом сигнала или преобразованием Фурье (ПФ)*.

В настоящее время применение методов спектрального анализа весьма многообразно. В различных областях электротехники и электроники возникают особые, специфические вопросы, при решении которых применяются ПФ. В частности, при обработке изображений вычисление ПФ является одной из наиболее часто встречающихся операций.

Сегодня, кроме тригонометрических ортогональных функций, широко применяются в качестве базисных и другие ортогональные системы функций. В связи с развитием компьютерных методов вычислений особое значение для ускорения обработки информации приобрело использование систем кусочно-постоянных функций, основными среди которых являются функции Уолша и Хаара.

Классическое ПФ является традиционным математическим аппаратом для анализа стационарных процессов. Однако, с позиций точного представления произвольных сигналов ПФ имеет ряд ограничений и недостатков.

ПФ, обладая хорошей локализацией по частоте, мало информативно по времени. Отдельные особенности сигнала, например, короткие всплески или провалы, разрывы, ступеньки или пики вызывает незначительные изменения частотного образа сигнала во всем интервале частот. Особенности вариации мгновенных значений сигнала как бы «размазываются» по всей частотной оси, что делает их обнаружение по спектру практически невозможным. Кроме того, ясно, что такая плавная базисная функция, как синусоида, в принципе не может представлять перепады сигналов с бесконечной крутизной, хотя такие сигналы (например, прямоугольные импульсы) применяются весьма широко. При этом единственным приспособлением к представлению быстрых изменений сигналов, таких как пики, перепады и пр. является резкое увеличение числа гармоник, которые оказывают влияние на форму сигнала.

Большой «ложкой дегтя» при преобразовании Фурье оказывается злополучный *эффект Гиббса*. Точное восстановление сигнала после ПФ, в условиях практически неизбежного ограничения числа гармоник, теоретически (и, тем более, практически) невозможно.

Проблемы спектрального анализа сигналов с локальными особенностями частично решаются переходом к так называемому *кратковременному или оконному преобразованию Фурье*. Идея этого преобразова-

ния проста: временной интервал разбивается на ряд промежутков – временных окон. Окно скачками перемещается и за некоторое число таких перемещений позволяет «просмотреть» весь сигнал. В каждом окне выполняется свое спектральное разложение, так что вместо обычно одной спектрограммы мы теперь получаем набор спектрограмм. В результате получается частотно-временное описание сигнала. Естественно, что поскольку каждое окно охватывает небольшой участок по времени, точность описания локальных изменений сигнала может быть повышена. Часто используются окна Гаусса или иные окна, обеспечивающие малые искажения спектра из-за граничных явлений и уменьшающие проявление эффекта Гиббса.

Казалось бы, раз оконное преобразование Фурье дает нам возможность с высокой детальностью представлять спектры быстроизменяющихся сигналов, то достаточно им и ограничиться. Однако ситуация не так проста! Она упирается в известный *принцип неопределенности Гейзенберга*. Согласно ему невозможно получить одновременно высокое частотное и высокое временное разрешение. Выбирая окно с малой шириной по времени, мы получаем высокое временное разрешение, но низкое частотное разрешение. Взяв окно с большой шириной во времени, получаем хорошее разрешение по частоте, но плохое во времени. Оконное преобразование оперирует с окнами, имеющими одинаковую ширину, а потому данное противоречие для него неразрешимо.

Таким образом, недостаток оконного преобразования Фурье состоит в том, что используется фиксированное окно и, следовательно, фиксированное разрешение по времени и частоте для всех точек плоскости преобразования, которое не может быть адаптировано к локальным свойствам сигнала.

Кардинальное решение задачи анализа сложных с локальными особенностями сигналов кроется в применении вейвлет-преобразований.

Довольно грубо можно представить *вейвлеты* (в переводе с английского – короткие или маленькие волны) как некоторые функции, способные осуществлять преобразование Фурье не по всей временной оси, а локально, по месту своего расположения. Вполне естественно, что кроме изменения «средней частоты» маленькие волны должны переме-

щаться к тому месту сигнала, в котором должно осуществляться «локальное преобразование» Фурье, и масштабироваться.

Вейвлет-преобразование (ВП) имеет существенное преимущество перед ПФ, прежде всего за счет свойства локальности у вейвлетов. В ВП операция умножения на окно как бы содержится в самой базисной функции, которая сужает и расширяет окно. Кроме того, появляется возможность адаптивного к сигналу выбора параметров окна. Подвижное частотно-временное окно одинаково хорошо выделяет и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов. Это свойство дает ВП большое преимущество при анализе локальных свойств сигналов.

За короткий срок теория ВП получила революционное развитие. Причина успеха обусловлена тем, что новый аппарат пригоден для представления нестационарных и сложных сигналов, свойства которых меняются во времени или пространстве. Он давно ожидался теоретиками и практиками. Число текущих публикаций неуклонно растет и не поддается учету из-за огромного числа практических применений. Из последних достижений следует отметить то, что новый Международный стандарт сжатия изображений JPEG-2000 предусматривает сжатие при помощи разложения по вейвлетам. Одним из вариантов ВП является анализ сигналов со многими уровнями; параметры соответствующей системы приведены в стандартах Экспертной группы по движущимся изображениям MPEG-4. Такое ВП обеспечивает сжатие информации более чем в 300раз. Подтверждением значимости ВП является и тот факт, что фирмой Analog Devices разработаны и выпускаются однокристалльные дешевые микросхемы, основанные на ВП и предназначенные для сжатия и восстановления изображений в реальном масштабе времени.

4.1. Основы общей теории спектральных представлений сигнала

4.1.1. Понятие спектра сигнала

Электрические сигналы обычно задают в виде некоторой временной функции $u(t)$. Такое представление позволяет определить форму сигнала и судить о локальных изменениях (об искажениях), которые происходят с сигналом при прохождении через электрическую цепь.

Вместе с тем, как доказано в математике, любую временную функцию $u(t)$, отвечающую определенным требованиям (условиям Дирихле), можно представить в виде совокупности составляющих, определяемых с помощью ряда или интеграла Фурье.

Если система действительных функций $\{\varphi_n(x)\}$ является ортонормированной (т. е. она представляет ортонормированный базис), то произвольная кусочно-непрерывная функция $u(t)$, для которой выполняется условие $\int |u(t)|^2 dt < \infty$, может быть представлена в виде *обобщенного ряда Фурье* по системе функций $\{\varphi_n(x)\}$

$$u(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \dots \quad (4.1)$$

Здесь коэффициенты C_n определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b u(t)\varphi_n(t)dt. \quad (4.2)$$

Совокупность коэффициентов C_n называется *спектром сигнала* $u(t)$ в ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$. Спектр полностью определяет сигнал.

Обобщенный ряд Фурье обладает следующим важным свойством: при заданной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ и фиксированном числе слагаемых ряда он обеспечивает наилучшую аппроксимацию $u(t)$ в смысле минимума среднеквадратической ошибки. Если ортогональная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ к тому же является полной, то с увеличением числа членов ряда среднеквадратическую ошибку можно сделать сколь угодно малой.

Выбор наиболее рациональной ортогональной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ зависит от цели, преследуемой при разложении функции $u(t)$ в ряд. Если требуется провести как можно более точное разложение, то, как правило, используют ортогональную систему основных тригонометрических функций – синусов и косинусов. Если необходимо свести к минимуму число членов ряда (при заданной допустимой погрешности ап-

проксимации), то используют разнообразные системы функций Уолша, Хаара и многие другие.

Спектры сигналов, используемых в электротехнике и электронике, при всем их многообразии могут быть разделены на два вида – дискретные и сплошные.

Дискретные спектры (от лат. discretus – разделенный, прерывистый) состоят из дискретного ряда гармонических колебаний. Обычно с помощью таких спектров характеризуют периодические негармонические сигналы, которые широко используются в электронике в цепях питания, синхронизации, развертки.

Дискретные спектры изображают графически. Поскольку каждая спектральная составляющая характеризуется частотой, амплитудой и начальной фазой, то графически дискретный спектр изображают в виде двух графиков на которых по горизонтальной оси в некотором масштабе отложены частоты гармоник, а по вертикальной оси представлены в виде отрезков линий либо амплитуда, либо начальная фаза спектральных составляющих. Первый график называют спектром амплитуд (амплитудным спектром). А второй – спектром фаз (фазовым спектром).

Периодические сигналы являются в известном смысле идеализацией. Они, по определению, являются бесконечно протяженными во времени. Реально существующие сигналы всегда имеют конечную длительность, поэтому, строго говоря, они не являются периодическими сигналами.

Вместе с тем, если рассматривать бесконечный временной интервал как период, то в принципе любой сигнал конечной длительности можно условно считать повторяющимся на бесконечности. Признаком периодичности сигнала является его повторяемость через интервал T , поэтому сигнал конечной длительности можно рассматривать как периодический сигнал с периодом $T \rightarrow \infty$.

Отсюда вытекает, что спектр сигнала конечной длительности содержит спектральные составляющие, интервал между которыми стремится к нулю. Такой спектр с бесконечно малыми интервалами между смежными составляющими называют *сплошным*.

Следует помнить, что сигналы конечной длительности имеют сплошные спектры. Для удобства их обычно представляют в виде графика спектральной плотности.

4.1.2. Спектральное представление периодического сигнала

Периодическим называют электрический сигнал, математическая модель которого удовлетворяет следующему условию

$$u(t) = u(t \pm nT). \quad (4.3)$$

T - это период сигнала, т.е. минимальный отрезок времени, по истечению которого мгновенное значение периодического сигнала начинают повторяться.

n – целые числа: $n = 0, 1, 2, \dots$

Спектральное представление периодического сигнала обычно выполняют в следующих базисах.

1. В ортонормированном базисе, образованном гармоническими функциями кратного аргумента $\{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$.

Система тригонометрических функций $\{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$ кратных аргументов является полной и ортогональной на интервале (t_0, t_0+T) , где t_0 - произвольная величина, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - период базисных функций,

$\omega_0 = 2\pi/T$ - основная частота последовательности, образующей периодический сигнал (частота основной гармоники).

В этом случае произвольный периодический сигнал $u(t)$ конечной мощности на интервале (t_0, t_0+T) можно представить *тригонометрическим рядом Фурье*

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t)] + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\omega_0 t)]. \quad (4.4)$$

Коэффициенты ряда вычисляют по формуле

$$a_n = (u, \varphi_c) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos(n\omega_0 t) dt; \quad (4.5)$$

$$b_n = (u, \varphi_s) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin(n\omega_0 t) dt; \quad (4.6)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt. \quad (4.7)$$

Коэффициенты a и b разложения сигнала в ряд Фурье дают достаточно ясную характеристику сигнала. Они показывают, насколько $u(t)$ содержит в себе эталонные колебания $\{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$

Каждую гармонику можно описать ее амплитудой A_n и начальной фазой ψ_n . Для этого коэффициенты тригонометрического ряда Фурье следует записать в виде

$$a_n = A_n \cos \psi_n, b_n = B_n \cos \psi_n, \quad (4.8)$$

так, что

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \operatorname{tg} \psi_n = \frac{b_n}{a_n}. \quad (4.9)$$

2. В ортонормированном базисе, образованном системой функций, состоящих из экспонент с мнимыми аргументом $\{\ell^{jn\omega_0 t}\}$.

Система экспоненциальных функций $\{\ell^{jn\omega_0 t}\}$ кратных аргументов является полной и ортогональной на интервале (t_0, t_0+T) , где t_0 - произвольная величина, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - период базисных функций, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - ос-

новная частота последовательности, образующей периодический сигнал (*частота основной гармоники*).

В этом случае произвольный периодический сигнал $u(t)$ конечной мощности на интервале (t_0, t_0+T) можно представить *комплексным рядом Фурье*

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \ell^{jn\omega_0 t}. \quad (4.10)$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формуле

$$\dot{A}_n = (u, \varphi_j) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)_n \ell^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (4.11)$$

В общем случае коэффициенты \dot{A}_n являются комплексными величинами.

Комплексный ряд Фурье можно получить из тригонометрического ряда Фурье, если воспользоваться формулой Эйлера. Это еще раз подчеркивает, что тригонометрический и комплексный ряды Фурье это просто два различных способа представления одного и того же периодического сигнала.

Из выражения для определения коэффициентов комплексного ряда Фурье следует, что каждый коэффициент это есть произведение множителя $2/T$ (который зависит от периода) на интеграл, который зависит главным образом от формы одиночного импульса, из которого состоит вся периодическая последовательность. Интеграл, как комплексная функция частоты, получил название *спектральной плотности одиночного импульса*.

$$\dot{S}(jn\omega_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)_n \ell^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (4.12)$$

Отсюда следует, что коэффициенты комплексного ряда Фурье связаны со спектральной плотностью одиночного импульса соотношением

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \dot{S}(jn\omega_0). \quad (4.13)$$

Поскольку комплексные коэффициенты ряда Фурье характеризуются модулем и аргументом, то можно об амплитудном и фазовом спектре периодической последовательности импульсов сказать следующее.

Огибающая линейчатого амплитудного спектра (кривая, проходящая по вершинам спектральных компонент, расположенным на частотах ω_n кратных частоте основной гармоники ω_0) периодической по-

следовательности, полученной путем повторения заданного импульса, совпадает по форме и отличается только масштабом (масштабным коэффициентом $2/T$) от спектральной плотности одиночного импульса $\dot{S}(j\omega)$.

Огибающая линейчатого фазового спектра периодического сигнала определяется аргументом спектральной плотности одиночного импульса.

Так как спектр периодического сигнала линейчатый (дискретный) и его гармоники его расположены только на частотах $\omega_n = n\omega_0, f_n = n/T$, то, дискретизируя аргумент огибающей, можно получить выражение для расчета амплитудного и фазового спектра.

Таким образом, вычислив спектральную плотность одиночного импульса, можно, не прибегая к непосредственному вычислению коэффициентов ряда Фурье, рассчитать и построить спектр периодической последовательности сигналов той же формы, полученной путем повторения непериодического сигнала.

Кроме того, знание спектральной плотности одиночного импульса позволяет, опять же не прибегая к вычислению коэффициентов ряда Фурье, определять как влияет на спектр те или иные действия над сигналом во временной области (уменьшение или увеличение длительности, изменения фронтов и прочее).

4.1.3. Спектр произвольного (непериодического) сигнала. Интегральное преобразование Фурье

Для спектрального представления непериодических сигналов (говорят также – аperiodических сигналов) формы записи ряда Фурье использовать не целесообразно. Во-первых, число гармонических составляющих, входящих в ряд, будет бесконечно большим, а расстояние между линиями спектральной диаграммы будет бесконечно малым. Во-вторых, из-за того что период в этом случае стремится к бесконечности, амплитудные коэффициенты станут неограниченно малыми.

В этой связи сплошной спектр произвольного аperiodического сигнала связывают со спектральной плотностью сигнала, когда разложение в ряд заменяется *разложением в интеграл Фурье*

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) \ell^{-j\psi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \ell^{-j\omega t} dt. \quad (4.14)$$

Спектральная плотность сигнала (интеграл Фурье), представляет апериодический сигнал $u(t)$, заданный на бесконечном интервале времени $(-\infty, \infty)$, интегральной суммой функций $\{\ell^{j\omega t}\}$ с частотами $-\infty < \omega < \infty$, отстоящими друг от друга на бесконечно малую величину $d\omega$.

Модуль спектральной функции $S(\omega)$ характеризует плотность распределения амплитуд составляющих сплошного спектра непериодического сигнала по частоте (закон распределения плотности амплитуд). Термин «спектральная плотность» означает, что $S(\omega)$ есть амплитуда напряжения (тока), приходящаяся на 1 Гц в бесконечно узкой полосе частот, которая включает в себя рассматриваемую частоту. Модуль спектральной функции свидетельствует о том, что хотя амплитуды всех гармоник сплошного спектра и являются бесконечно малыми величинами, но роль этих гармоник в процессе формирования импульса, неодинакова. В той части спектра, где спектральная функция больше, суммирование составляющих с бесконечно малыми амплитудами в пределах малого, но конечного диапазона частот, дает мгновенное значение импульса большее по величине, чем на тех частотах, где спектральная плотность меньше. Знание спектральной плотности непериодического сигнала, т. е. знание относительного распределения амплитуд гармоник в спектре сигнала, позволяет сделать правильный вывод о том, какова должна быть частотная характеристика электрической цепи, чтобы она «пропускала» все спектральные компоненты сигнала и не вносила искажений в передаваемый импульс.

По заданной спектральной плотности сигнала $\dot{S}(\omega)$ всегда можно восстановить сигнал $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \ell^{j\omega t} d\omega. \quad (4.15)$$

Эта формула называется *обратным преобразованием Фурье* для сигнала .

Таким образом, можно сформулировать окончательно очень важный результат: сигнал $u(t)$, и его спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ взаимно однозначно связаны прямым и обратным преобразованием Фурье. Формула (4.14) позволяет осуществить прямое преобразование и найти спектральную плотность импульса. Формула (4.15) позволяет осуществить обратное преобразование и вычислить зависимость мгновенных значений от времени $u(t)$, если задана спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$. Преобразования Фурье позволяют определить, как влияют те или иные действия над сигналом во временной области на его представление в частотной области (на его спектр), и наоборот.

Заметим, что формулами интегрального преобразования Фурье можно пользоваться при условии, что функция $u(t)$ является абсолютно

интегрируемой, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty$. Подобное условие сужает класс до-

пустимых сигналов, для которых в классическом смысле можно говорить о спектральной плотности. В частности, в указанном классическом смысле нельзя говорить о спектральной плотности гармонического сигнала, единичной функции Хевисайда и т. п.. В современной математике разработаны приемы, позволяющие разумным образом вычислять спектральную плотность неинтегрируемых сигналов. Однако, в этом случае спектральную плотность следует описывать не обычными классическими функциями, а обобщенными функциями.

4.1.4. Основные свойства преобразования Фурье

Каждому сигналу $u_1(t)$ соответствует своя спектральная функция $\dot{S}_1(\omega)$. Укажем это соответствие символически $u_1(t) \Leftrightarrow \dot{S}_1(\omega)$. Покажем теперь, что некоторым математическим операциям над $u_1(t)$ соответствуют вполне определенные операции над $\dot{S}_1(\omega)$. Присущую преобразованию Фурье способность проявлять однозначное соответствие между сигналом и спектральной функцией при проведении каких-либо операций над ними будем называть свойством. Тогда можно говорить о следующих, наиболее важных свойствах преобразования Фурье.

1. *Свойство линейности.*

Это свойство формулируется так: если имеется некоторая совокупность сигналов $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), \dots$, причем $u_1(t) \Leftrightarrow \dot{S}_1(\omega)$, $u_2(t) \Leftrightarrow \dot{S}_2(\omega)$, $u_3(t) \Leftrightarrow \dot{S}_3(\omega)$, $u_4(t) \Leftrightarrow \dot{S}_4(\omega), \dots$, то взвешенная сумма сигналов (каждый сигнал умножается на свой коэффициент a_η) преобразуется во взвешенную сумму спектральных плотностей

$$\sum_{\eta} a_{\eta} u_{\eta}(t) \Leftrightarrow \sum_{\eta} a_{\eta} \dot{S}_{\eta}(\omega). \quad (4.16)$$

2. Свойство временного сдвига (смещения во времени).

Пусть сигналу $u_1(t)$ соответствует своя спектральная функция $\dot{S}_1(\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на t_0 секунд позже $u_1(t - t_0)$. Пользуясь заменой переменных $t_2 = (t - t_0)$, можно получить

$$u_1(t - t_0) \Leftrightarrow \dot{S}_1(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (4.17)$$

Таким образом, при сдвиге сигнала $u_1(t)$ на величину t_0 в сторону опережения или запаздывания амплитудно – частотный спектр (модуль спектральной плотности) сохраняется неизменным, а фазочастотный спектр изменяется на величину $\pm \omega t_0$.

3. Свойство изменения масштаба времени.

Предположим, что исходный сигнал подвергнут изменению масштаба времени. Это означает, что роль времени играет новая независимая переменная kt . Если $k > 1$, то происходит «сжатие исходного сигнала во времени», если же $0 < k < 1$, то сигнал «растягивается во времени».

Оказывается, что если $u_2(t) \Leftrightarrow \dot{S}_2(\omega)$, то

$$u_2(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{k} \dot{S}_2\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (4.18)$$

Изменение масштаба времени в k раз приводит к изменению масштаба частоты в $1/k$ раз. Кроме того, сам спектр умножается на $1/k$.

4. *Спектральная плотность производной и неопределенного интеграла.*

Пусть $u_3(t) \Leftrightarrow \dot{S}_3(\omega)$. Будем изучать новые сигналы $u_5(t) = \frac{d[u_3(t)]}{dt}$ и $u_6(t) = \int u_3(t)dt$. Можно получить следующее выражение

$$\dot{S}_5(\omega) = j\omega\dot{S}_3(\omega), \dot{S}_6(\omega) = \frac{1}{j\omega}\dot{S}_3(\omega). \quad (4.19)$$

Дифференцированию сигнала по времени соответствует умножению его спектральной плотности на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $j\omega$ является *оператором дифференцирования*, действующим в частотной области.

Кроме того, поскольку при дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает, то это приводит к тому, что модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению с модулем исходного сигнала (говорят, что происходит подъем высокочастотных компонент спектра). Это свидетельствует о том, что дифференциаторы действуют подобно фильтру высоких частот.

Интегрированию сигнала по времени соответствует деление его спектральной плотности на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $1/j\omega$ является оператором интегрирования, действующим в частотной области. Модуль спектра интеграла имеет большие значения в области низких частот по сравнению с модулем исходного сигнала (говорят, что происходит подавление высокочастотных компонент спектра). Это свидетельствует о том, что интеграторы действуют подобно фильтру низких частот.

5. *Спектральная плотность на нулевой частоте.*

Модуль спектральной функции $S(\omega)$ характеризует плотность распределения амплитуд составляющих сплошного спектра непериодического сигнала по частоте. При $\omega = 0$ выражение для спектральной функции переходит в следующее

$$\begin{aligned}
S(\omega)\ell^{-j\psi(\omega)} &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\ell^{-j\omega t} dt = S(0)\ell^{-j\psi(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\ell^{0t} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt.
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

Последний интеграл это есть площадь под кривой, описывающей сигнал.

Следовательно, для любого сигнала спектральная плотность на нулевой частоте равна «площади сигнала».

Это свойство является полезным при определении структуры сигнала на нулевой частоте для импульсов прямоугольной, треугольной, трапециидальной формы, поскольку площадь таких фигур хорошо известна из геометрии.

4.2. Примеры практического определения спектра непериодического сигнала

4.2.1. Спектральная функция

Спектральную плотность *дельта функции* (п.3.4.3) находим, используя формулу прямого преобразования Фурье

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega)\ell^{-j\psi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ell^{-j\omega t} dt = 1.
\tag{4.21}$$

Таким образом, амплитудный спектр равномерный и равен единице, а фазовый спектр равен нулю.

4.2.2. Спектральная функция единичной функции Хевисайда

Математическая модель функции Хевисайда (см. п.1.5, рис.1.15) не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, поэтому, не раскрывая промежуточные выкладки, связанные с использованием обобщенных функций, сразу запишем

$$\sigma(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (4.22)$$

Спектральная плотность имеет δ – особенность, связанную с тем, что функция включения имеет постоянную составляющую 1/2 при $t = 0$. При анализе воздействия единичного скачка $\sigma(t)$ на цепи, передаточная функция которых равна нулю при $\omega = 0$ (т.е на цепи не пропускающие постоянный ток). В формуле можно учитывать только второе слагаемое, представляя спектральную плотность единичного скачка в виде $\sigma(t) \Leftrightarrow \dot{S}(\omega) = \frac{1}{j\omega}$.

4.2.3. Спектральная плотность прямоугольного импульсного сигнала

Воспользуемся прямоугольным импульсным сигналом, представленным в п.1.5.

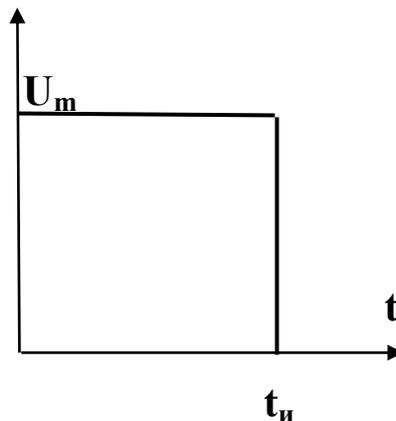


Рис. 4.1. Прямоугольный импульс

Для нахождения спектральной плотности импульсных сигналов, представляемых отрезками прямых будем использовать прием, заключающийся в дифференцировании исходного сигнала необходимое число раз, чтобы он предстал в виде нескольких δ – функций.

Функция, представляющая прямоугольный импульс, имеет изолированные разрывы первого рода в точках $t = 0$ и $t = t_n$. Производная в этих точках, при использовании обобщенных функций, будет равна произведению δ – функции на величину скачка функции в точке разрыва. В

нашем случае математическая модель сигнала после первого дифференцирования будет такова

$$u'(t) = (U_m - 0)\delta(t) + (0 - U_m)\delta(t - t_u) = U_m\delta(t) - U_m\delta(t - t_u).$$

Спектральная плотность производной $u'(t)$, в соответствии со свойствами линейности и сдвига во времени и (4.21), равна

$$\dot{S}'(\omega) = U_m - U_m e^{-j\omega t}.$$

Используя связь между спектрами сигналов и их производными (4.19) находим

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{\dot{S}'}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} [U_m - U_m e^{-j\omega t}] = \frac{U_m}{j\omega} [1 - e^{-j\omega t}] = \\ &= \frac{U_m}{j\omega} \left[e^{j(\frac{\omega t_u}{2} - \frac{\omega t_u}{2})} - e^{-j(\frac{\omega t_u}{2} + \frac{\omega t_u}{2})} \right] = \frac{U_m}{j\omega} e^{-j\frac{\omega t_u}{2}} \left[e^{j(\frac{\omega t_u}{2})} - e^{-j(\frac{\omega t_u}{2})} \right] = \\ &= \frac{2U_m}{\omega} e^{-j\frac{\omega t_u}{2}} \left[\frac{e^{j(\frac{\omega t_u}{2})} - e^{-j(\frac{\omega t_u}{2})}}{2j} \right] = \frac{2U_m}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_u}{2}\right) e^{-j\frac{\omega t_u}{2}} = \\ &= U_m t_u \frac{\sin(\pi f t_u)}{\pi f t_u} e^{-j\frac{\omega t_u}{2}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Отсюда находим модуль спектральной функции (*амплитудно-частотный спектр*)

$$S(f) = |\dot{S}(f)| = U_m t_u \frac{|\sin(\pi f t_u)|}{\pi f t_u} = U_m t_u \frac{|\sin(y)|}{y}, \quad (4.24)$$

и ее аргумент (*фаза-частотный спектр*)

$$\psi(f) = -\pi f t_u - \psi_{\sin}. \quad (4.25)$$

Заметим, что, как и ожидалось, спектральная плотность на нулевой частоте равна площади «прямоугольника сигнала» $S(0) = U_m t_u$.

Аргумент комплексной спектральной функции определяется суммой двух составляющих, где ψ_{\sin} учитывает изменение знака функции $\sin(\pi f t_u)$. Из соотношения Эйлера $-1 = e^{\pm j\pi}$ следует тот факт, что если комплекснозначная функция представлена только вещественной составляющей, то изменение знака функции означает скачкообразное изменение ее аргумента на величину $\pm \pi (\pm 180^\circ)$.

Модуль и аргумент спектральной функции прямоугольного импульса показаны на рис.4.2.

Если анализируемый импульс сдвинуть влево на половину длительности импульса, чтобы он располагался симметрично оси ординат, то в соответствии со свойством(4.17), определяющим сдвиг во времени можем записать

$$\begin{aligned} \dot{S}_N(f) &= \dot{S}(f) e^{j\frac{\omega t_u}{2}} = U_m t_u \frac{\sin(\pi f t_u)}{\pi f t_u} e^{-j\frac{\omega t_u}{2}} e^{j\frac{\omega t_u}{2}} = \\ &= U_m t_u \frac{\sin(\pi f t_u)}{\pi f t_u}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Отсюда модуль спектральной функции (амплитудно – частотный спектр)

$$S(f) = |\dot{S}(f)| = U_m t_u \frac{|\sin(\pi f t_u)|}{\pi f t_u} = U_m t_u \frac{|\sin(y)|}{y}, \quad (4.27)$$

и ее аргумент (фазочастотный спектр)

$$\psi_N(f) = \psi_{\sin}. \quad (4.28)$$

Модуль и аргумент спектральной функции прямоугольного импульса, расположенного симметрично оси ординат, показаны на рис.4.3.

Нули спектральной функции прямоугольного импульса определяются соотношением

$$f_{0k} = \frac{k}{t_H}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.29)$$

Эта формула свидетельствует о том, что с уменьшением длительности импульса происходит увеличение реальной ширины спектра. Под *шириной спектра* здесь и в дальнейшем будем понимать частотный интервал, в пределах которого модуль спектральной плотности не меньше некоторого наперед заданного уровня, например $0.1 S_{MAX}$.

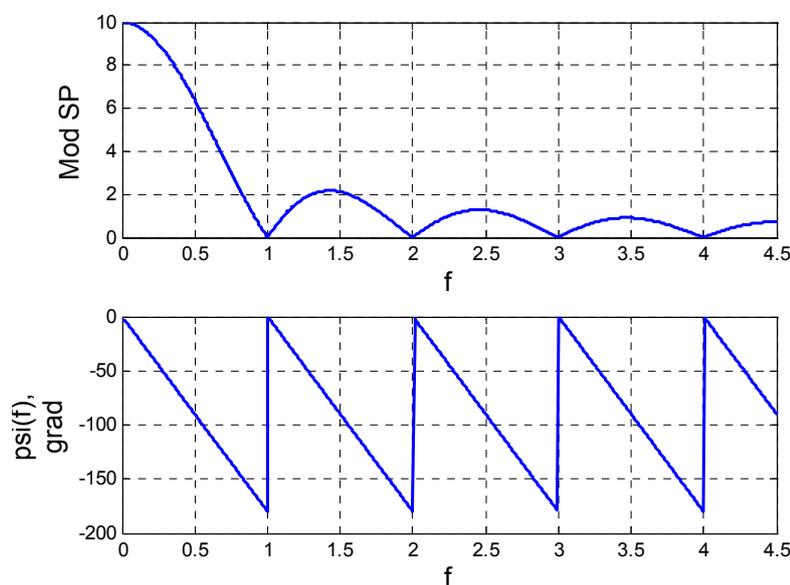


Рис. 4.2. Модуль и аргумент спектральной плотности прямоугольного импульса, показанного на рис. 4.1.

4.2.4. Спектральная плотность треугольного импульсного сигнала

Пусть определяем спектральную плотность представленного в п.1.5 на рис. 1.14 треугольного импульса, расположенного симметрично относительно оси ординат. Для нахождения его спектральной плотности, опять будем использовать прием, заключающийся в дифференцировании исходного сигнала, чтобы он предстал в виде δ – функций.

После первого дифференцирования исходного сигнала получаем два разнополярных прямоугольных импульса (рис. 4.4). Вторая производная имеет вид трех δ – функций, умноженных на величину скачка (рис. 4.4).

Математическая модель второй производной треугольного импульсного сигнала такова:

$$u''(t) = \frac{2U_m}{t_H} \left[\delta\left(t + \frac{t_H}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{t_H}{2}\right) \right] - \frac{4U_m}{t} \delta(t). \quad (4.30)$$

Спектральная плотность второй производной, на основании свойств линейности, сдвига во времени и (4.21),

$$\begin{aligned} \dot{S}_{(2)}(\omega) &= \frac{2U_m}{t_H} \left[\ell^{j\left(\frac{\omega t_u}{2}\right)} - \ell^{-j\left(\frac{\omega t_u}{2}\right)} - 2 \right] = \frac{2U_m}{t_H} \left[2 \cos\left(\frac{\omega t_u}{2}\right) - 2 \right] = \\ &= \frac{4U_m}{t_H} \left[\cos\left(\frac{\omega t_u}{2}\right) - 1 \right] = \frac{-2 \cdot 4U_m}{t_H} \left[\sin^2\left(\frac{\omega t_u}{2 \cdot 2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

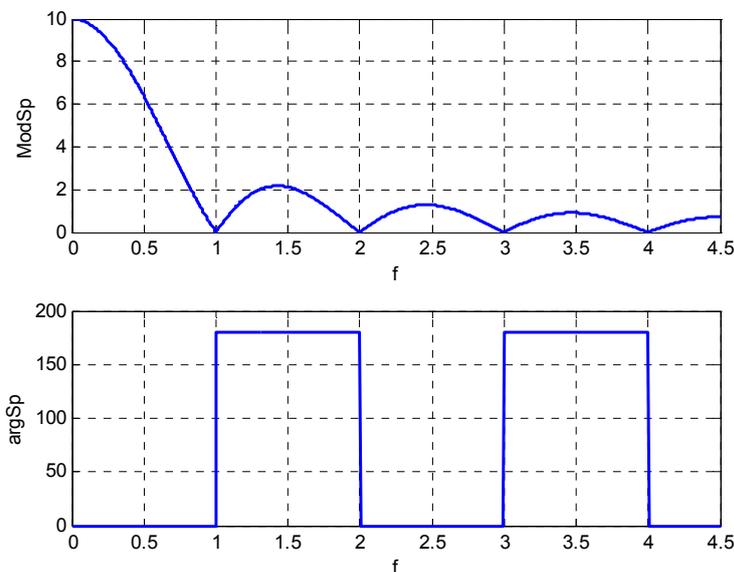


Рис. 4.3. Модуль и аргумент спектральной плотности прямоугольного импульса, расположенного симметрично оси ординат

Используя связь между спектрами сигналов и их производными (4.19), окончательно получаем

$$S(\omega) = \frac{\dot{S}_{(2)}(\omega)}{j\omega j\omega} = \frac{2 \cdot 4U_m}{\omega^2 t_H} \left[\sin^2\left(\frac{\omega t_u}{4}\right) \right] = \frac{U_m t_H}{2} \frac{\left[\sin^2\left(\frac{\omega t_u}{4}\right) \right]}{\left(\frac{\omega t_u}{4}\right)^2}. \quad (4.32)$$

Следует заметить, что при $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |S(\omega)| \approx 1/\omega^2$. Т. е. модуль спектральной плотности убывает с ростом частоты гораздо быстрее, чем в случае прямоугольного импульсного сигнала $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |S(\omega)| \approx 1/\omega$. Отметим также, что, как и ожидалось, спектральная плотность на нулевой частоте равна площади «треугольника сигнала» $S(0) = 1/2 U_m t_u$.

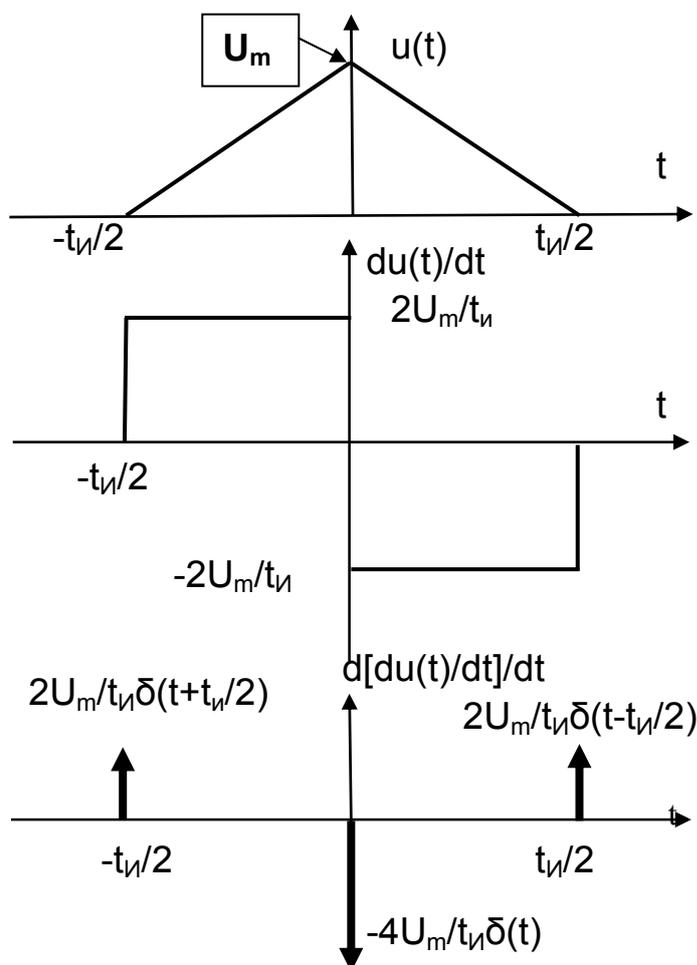


Рис. 4.4. Треугольный импульс и его математические модели после дифференцирования

Модуль и аргумент спектральной функции треугольного импульса, расположенного симметрично оси ординат, показаны на рис.4.5.

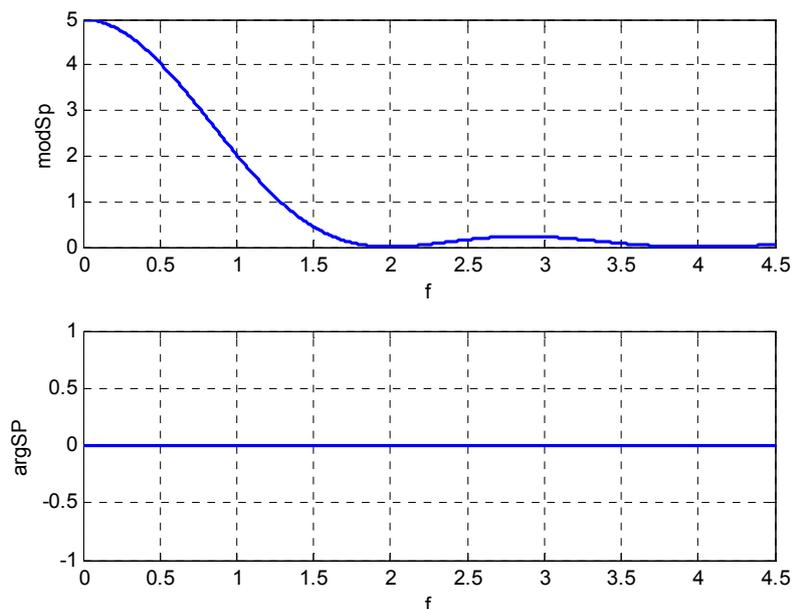


Рис. 4.5. Модуль и аргумент спектральной плотности треугольного импульса симметричного относительно начала ординат

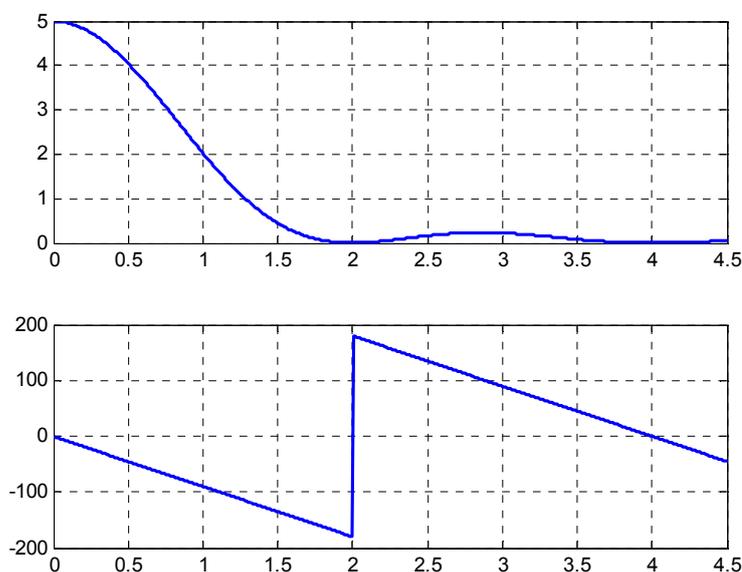


Рис. 4.6. Модуль и аргумент спектральной плотности треугольного импульса, сдвинутого по оси времени на половину длительности импульса вправо относительно начала ординат

Нули спектральной функции треугольного импульса определяются соотношением

$$f_{0k} = \frac{2k}{t_{II}}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.33)$$

Эта формула также свидетельствует о том, что уменьшение длительности импульса приводит к увеличению реальной ширины спектра.

Если треугольный импульс сдвинуть по оси времени вправо на половину длительности импульса, то модуль и аргумент его спектральной плотности будут иметь вид, показанный на рис. 4.6.

Сравним спектральные плотности прямоугольного и треугольного импульсов. Для этого построим модули спектральной плотности для импульсов, имеющих одинаковую длительность (рис.4.7). Обратившись к графикам, можно сделать следующие выводы:

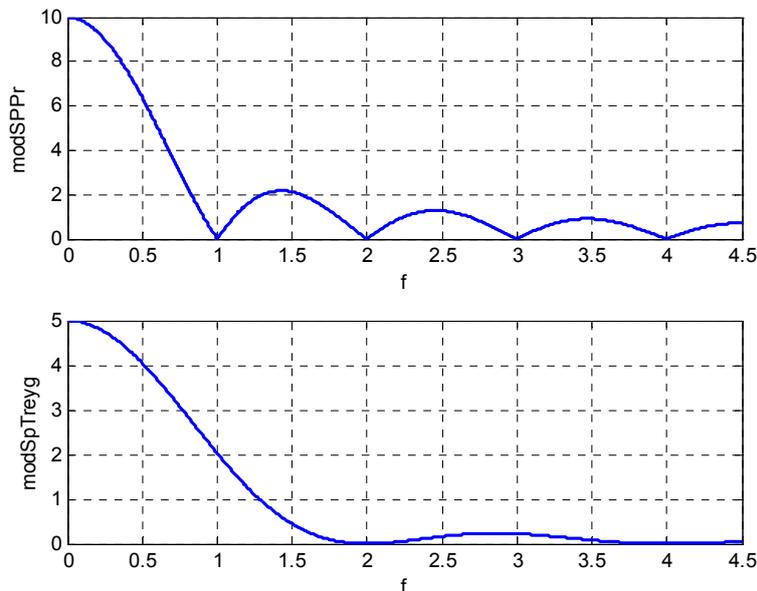


Рис.4.7. Модули спектральных функций прямоугольного и треугольного импульсов

1. У прямоугольного импульса спектр получается более широкий. Это обусловлено тем, что спектральная плотность прямоугольного импульса в области высоких частот убывает значительно медленнее, чем у треугольного импульса.
2. Для того, чтобы электрическая цепь пропускала практически всю энергию сигнала необходимо, чтобы ее амплитудно – частотная характеристика имела полосу пропускания определяемую, по крайней мере, соотношением

$$\Delta f = \Pi = \frac{4}{t_H}. \quad (4.34)$$

3. В полосе частот от нуля до $f = \frac{2}{t_H}$ в спектре треугольного импульса сосредоточено больше энергии, чем у прямоугольного импульса с той же длительностью.

4.2.5. Дискретные сигналы и их спектры

Дискретные сигналы возникают в тех случаях, когда источник сообщений выдает информацию лишь в фиксированные моменты времени. Поэтому основным свойством дискретного сигнала является то, что его значения определены не во все моменты времени, а лишь в счетном множестве точек. Если аналоговый сигнал имеет математическую модель вида непрерывной или кусочно – непрерывной функции, то отвечающий ему дискретный сигнал $u_n(t)$ представляет собой последовательность $\{\dots, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, u_3, \dots\}$ отсчетных значений сигнала $u(t)$ в точках $\{\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, \dots\}$ соответственно.

На практике, как правило, отсчеты дискретных сигналов берут во времени через равный промежуток Δ , называемый интервалом (шагом) дискретизации:

$$\Delta = t_m - t_{m-1} = t_{m-1} - t_{m-2} = \dots$$

Операцию дискретизации, т.е. переход от аналогового сигнала $u(t)$ к дискретному сигналу $u_n(t)$ можно описать вводя в рассмотрение обобщенную функцию

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta), \quad (4.35)$$

называемую *дискретизирующей последовательностью*.

Дискретный сигнал, в этом случае, будет равен скалярному произведению функции $u(t)$ и $\eta(t)$

$$u_n(t) = (u(t), \eta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) dt = \{\dots, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, u_3, \dots\}. \quad (4.36)$$

В математике доказывается, что спектр произведения двух сигналов пропорционален интегралу произведения их спектральных плотностей (так называемой *свертке сигналов*)

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_\eta(\xi) \dot{S}_u(\omega - \xi) d\xi. \quad (4.37)$$

Если подставить значения спектральных плотностей и упростить выражение, то можно получить, что *спектральная плотность дискретизированного сигнала* определяется выражением

$$\dot{S}_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega - 2\pi k / \Delta). \quad (4.38)$$

Итак, спектр сигнала, полученного в результате идеальной дискретизации бесконечно короткими импульсами S_n , представляет собой сумму бесконечного числа «копий» спектра S_u исходного аналогового сигнала, сдвинутых одна относительно другой. Копии располагаются на оси частот через одинаковые интервалы $2\pi/\Delta$, равные значению угловой частоты первой гармоники дискретизирующей импульсной последовательности.

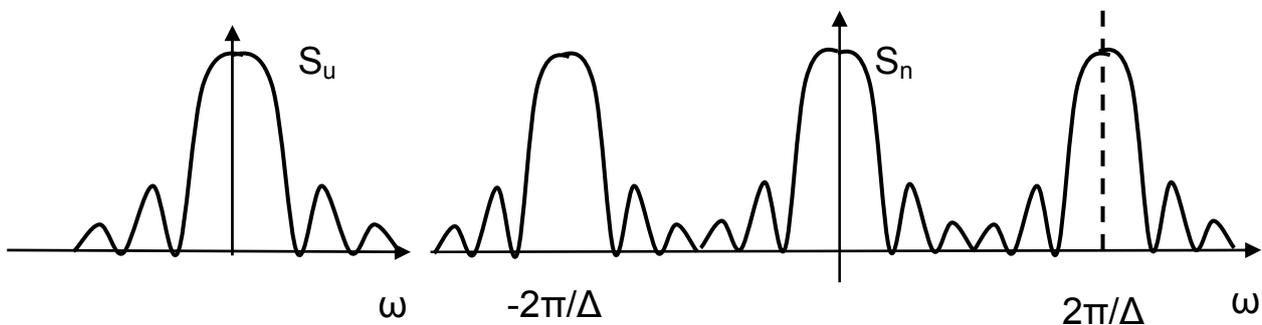


Рис. 4.8. Спектральные плотности одного импульса и полученного на его основе дискретизированного сигнала

Использование дискретизации позволяет численно вычислять спектры сигналов, в том числе и для случаев, когда аналитические расчеты затруднены. Для этой цели сигнал задается таблицей (вектор – строкой) численных значений, определенных в точках (узлах) дискретизации. Дискретные отсчеты сигнала делают через одинаковые временные интервалы на протяжении одного периода. Спектральная плотность при этом будет определяться по формуле

$$\dot{S}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-j2\pi mk/N}. \quad (4.39)$$

Формула определяет последовательность коэффициентов, образующих *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ).

Следует иметь в виду, что коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары. Поэтому принято считать, что коэффициенты $C_{N/2+1}, C_{N/2+2}, C_{N/2+3}, \dots$ отвечают отрицательным частотам. При изучении амплитудного спектра они не дают новых сведений. Ясно, что при любом N число гармоник, определяемых с помощью ДПФ, составляет половину числа отсчетов.

Для того, чтобы вычислить ДПФ последовательности из N элементов, требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами. Если длины обрабатываемых массивов чисел имеют порядок тысячи и более, то это требует большого времени вычисления даже для современных ЭВМ. Для повышения оперативности ДПФ применяют специальные алгоритмы *быстрого преобразования Фурье* (БПФ) (начало развития с 60-х годов прошлого столетия), которые сокращают количество вычислительных операций и тем самым ускоряют счет на ЭВМ. Выигрыш в скорости вычислений по сравнению с традиционным ДПФ достигает сотен и тысячи раз.

Принцип БПФ мы изучать не будем, однако отметим, что он реализован почти во всех пакетах спектрального анализа сигналов на ЭВМ. С помощью БПФ производится перевод временное представления сигнала (в координатах амплитуда – время) в частотную область (спектральная плотность – частота). Пример расчета спектральной плотности прямо-

угольного импульса, аналогичного ранее рассмотренному, с помощью БПФ показан на рис. 4.9.

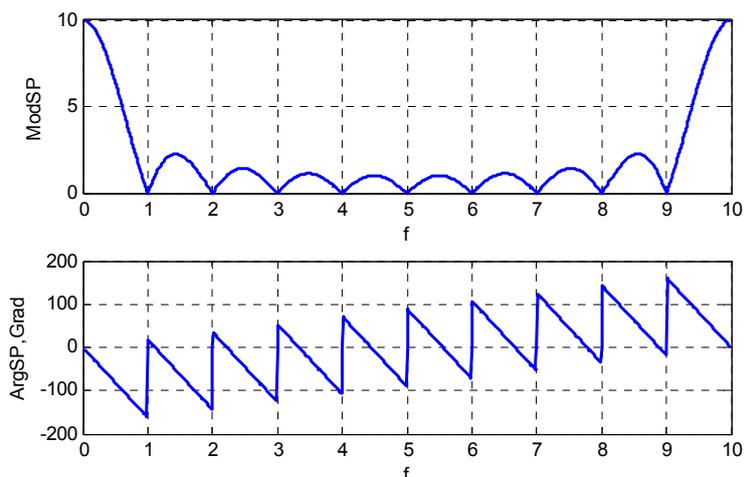


Рис. 4.9. Модуль и аргумент спектральной плотности прямоугольного импульса, полученные с использованием БПФ

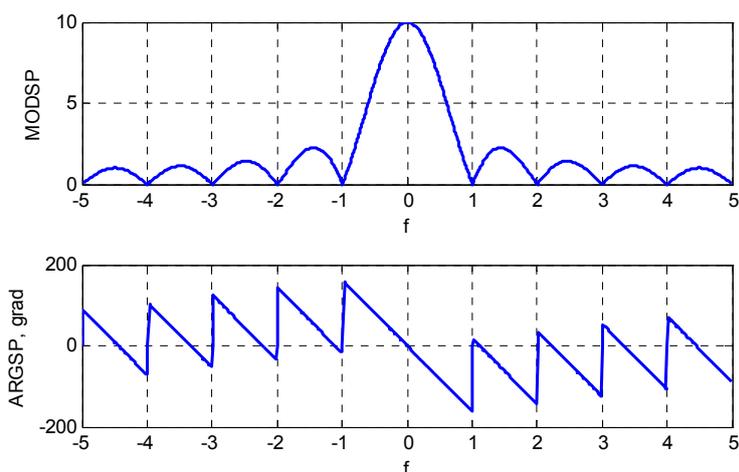


Рис. 4.10. Модуль и аргумент спектральной плотности прямоугольного импульса, полученные с использованием БПФ и перегруппировки частотных компонент

Как следует из рисунка, правее частоты 5 Гц (коэффициенты ДПФ, номера которых больше $N/2$) спектр содержит сопряженные копии начальных членов в обратном порядке. По этой причине спектральные компоненты, близкие к нулевой частоте, группируются по краям спектральной диаграммы. Это не всегда удобно с точки зрения физического восприятия спектра. Есть специальные алгоритмы, которые обеспечи-

вают перегруппировку элементов выходного массива преобразования Фурье таким образом, что компоненты, близкие к нулевым частотам, оказываются в центре графика. Пример построения графика спектральной плотности того же прямоугольного импульса, но уже с перегруппировкой, показан на рис. 4.10.

Сравнив спектры нетрудно заметить, что нулевая частота в последнем случае соответствует центру графика.

4.2.6. Спектр пачки импульсов

Широко применяемой на практике является форма сигнала в виде группы равноотстоящих друг от друга импульсов одинаковой формы (говорят *пачки импульсов*). Предположим, что рассматриваем пачку, состоящую из n импульсов прямоугольной формы.

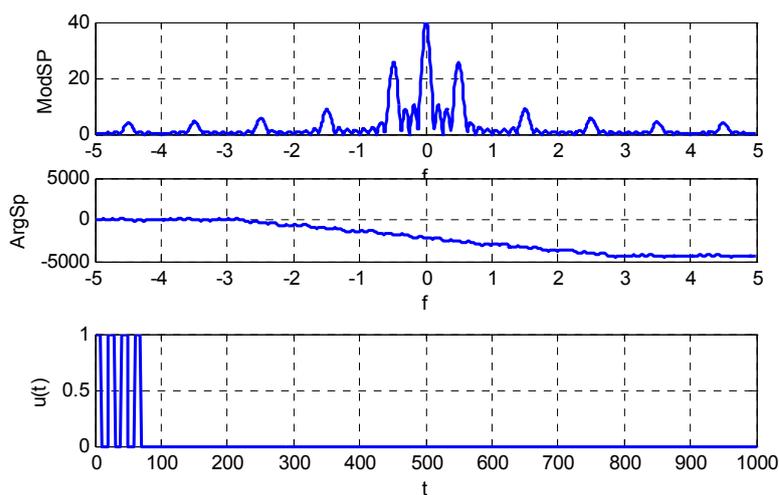


Рис. 4.11. Модуль и аргумент спектральной плотности показанной в нижнем подокне пачки импульсов

Теоретически, используя спектральную функцию одного импульса и применяя свойство сдвига, можно показать, что спектральная плотность пачки импульсов это есть произведение спектральной плотности одного импульса на комплексный множитель, значение которого зависит от количества и расположения импульсов в пачке. Мы, не решая эту задачу аналитически, выполним расчет спектральной плотности пачки с помощью БПФ и на типичном примере изучим особенности спектра пач-

ки импульсов. Типичный спектр пачки, состоящей из четырех импульсов прямоугольной формы, показан на рис.4.11.

Из рисунка можно сделать следующие выводы.

1. Спектр пачки импульсов значительно отличается от спектра одиночного импульса.

Он получается «изрезанным», так как каждый «лепесток» спектра одиночного импульса «рассекается» на несколько частей. На частотах, определяемых частотой повторений импульсов в пачке, спектральная плотность увеличивается, т.е. наблюдается концентрация энергии. В частности, на нулевой частоте - в число раз, равному количеству импульсов в пачке.

Можно догадаться, что при увеличении числа импульсов в группе спектральная плотность все более расщепляется, «главные лепестки» сужаются, а их максимумы возрастают. В пределе, при бесконечном числе импульсов в пачке, график примет линейчатую структуру спектра периодической функции.

2. Реальная ширина спектра группы импульсов будет такой же, как и у одиночного импульса.

4.3. Определение спектра периодического сигнала

В п.4.1.2 было установлено, что совокупность комплексных величин \dot{A}_n , именуемая комплексным спектром разложения периодического сигнала в ряд Фурье, с точностью до множителя $2/T$ определяется спектральной плотностью $\dot{S}(\omega)$ одиночного аperiodического сигнала. Т. е., другими словами, модуль спектральной плотности одиночного импульса и огибающая линейчатого спектра периодической последовательности, полученной путем повторения заданного импульса, совпадают по форме и отличаются только масштабом $2/T$. Это обуславливает подход к построению спектра периодической последовательности импульсов.

Последовательность действий при построении спектра периодического сигнала такова.

1. По аналитическому выражению, представляющему математическую модель сигнала, находят формулу спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$. Исходя из заданной формы сигнала, спектральную плотность можно

также определить по таблицам, либо рассчитать, как было показано выше, с использованием БПФ.

2. По известной спектральной плотности строят графики огибающих амплитудного и фазового спектра периодического сигнала.

На графиках обязательно отмечают наиболее характерные точки графика (значения, где огибающая имеет локальные экстремумы, где ее значения равны нулю и прочее).

Значения частот f_{0n} , при которых огибающая равна нулю, определяются общей формулой $f_{0n} = \nu / t_{II}$, где ν – величина, зависящая от формы сигнала. Для прямоугольного импульса $\nu = 1$, треугольного – $\nu = 2$.

3. Определяют частоты гармоник. Гармоники располагаются на частотах $f_k = kF = k/T$.

4. Находят количество компонент спектра, находящихся в «лепестках» спектральной функции. Их количество определяет параметр $q = T/t_{II}$, называемый *скважностью*.

5. Наносят на ось частот все необходимые частоты и строят *линейчатый спектр*.

В системе координат «модуль спектральной плотности – частота», «аргумент спектральной плотности – частота» для дискретных значений частот спектр, при традиционном математическом подходе к построению графиков, должен был бы изображаться рядом точек на плоскости. Такое изображение не очень наглядно, поэтому из каждой точки опускают перпендикуляр на ось частот, получая на графике множество вертикальных линий. Имея в виду такое изображение спектра, его называют линейчатым. Поэтому построение линейчатого спектра при наличии известных частот гармоник завершают тем, что из названных точек восстанавливают ординаты (проводят линии) до пересечения с соответствующей огибающей.

Пример построения спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой равной 10 В, длительностью импульса 0,1 сек и периодом следования 0,4 сек показан на рис. 4.12.

6. Вычисляют и наносят на график линию спектра при нулевой частоте. Значение спектра определяют по формуле

$$A(0) = \frac{1}{T} S(0) = \frac{1}{T} U_m t_{II} = \frac{U_m}{q}. \quad (4.40)$$

Для импульса, используемого для построения спектра $A(0) = 10/4 = 2.5B$. Эта линия на графике не показана.

В заключение рассмотрения функций, описывающих частотный состав сигнала, уместно еще раз вернуться к понятию фильтрации сигнала. Теперь можно сказать, что фильтрацией называется процесс изменения частотного спектра в некотором желательном направлении. Этот процесс может привести к усилению или ослаблению частотных составляющих в некотором диапазоне частот, к подавлению или выделению какой-нибудь конкретной частотной составляющей.

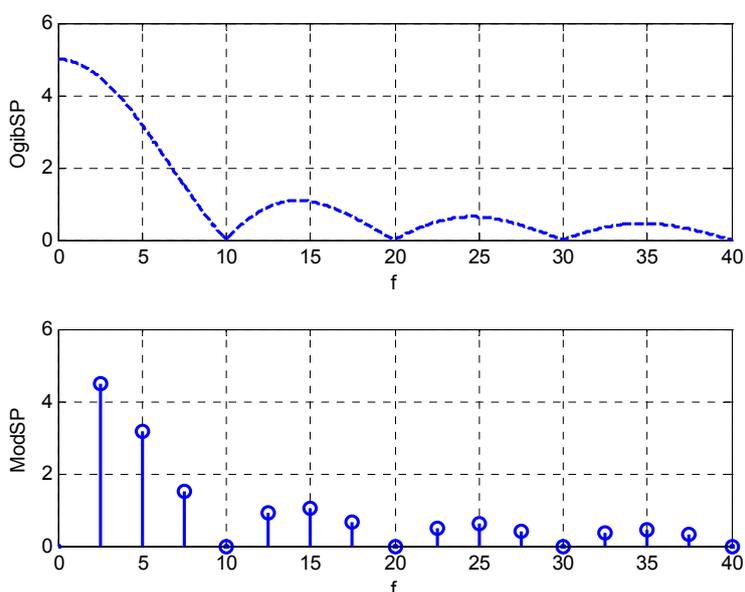


Рис. 4.12. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

4.4. Разновидности спектров

4.4.1. Понятие энергетического спектра

К понятию *энергетического спектра* приводят следующие рассуждения.

Если известен ток $i(t)$, протекающий по резистивному элементу R под действием приложенного напряжения $u(t)$, то мгновенная мощность, развиваемая при этом будет равна

$$p = i^2(t)R = u^2(t)/R = \Re f^2(t). \quad (4.41)$$

Следовательно, произведение двух одинаковых функций может быть использовано в качестве величины, выражающей мощность.

Полная энергия сигнала будет определяться интегрированием мгновенной мощности по времени в пределах действия сигнала

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p dt = \Re \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \quad (4.42)$$

То есть, интеграл от квадрата функции, характеризующий изменения величины процесса, выражает суммарную энергию всего процесса. Если связать сигнал с его спектральной плотностью, то можно получить формулу Парсеваля

$$\int_0^{\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.43)$$

согласно которой энергия сигнала пропорциональна интегралу от квадрата модуля его спектральной плотности.

Следовательно, энергию некоторого сигнала (в общем случае временного процесса) можно вычислить двояким путем: либо интегрируя квадрат функции времени, либо интегрируя квадрат амплитудного спектра.

Эта формула свидетельствует и о том, что энергия любого сигнала есть результат суммирования вкладов от различных интервалов частотной оси. Каждый малый интервал положительных частот $\Delta\omega$ обеспечивает вклад в общую энергию сигнала, равный

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} S^2(\omega) \Delta\omega. \quad (4.44)$$

По виду функции $S^2(\omega)$ можно судить о распределении энергии в спектре, поэтому величина $S^2(\omega)$ носит название *спектральной плот-*

ности энергии сигнала $u(t)$, или, короче, энергетического спектра сигнала $u(t)$.

Понятие энергетического спектра оказывается весьма полезным для получения различных инженерных оценок, устанавливающих реальную ширину спектра (полосу частот, где сосредоточена большая доля общей энергии) сигналов очень сложной формы.

Следует иметь в виду, что, изучая сигнал с помощью энергетического спектра, мы неизбежно теряем информацию, которая заключена в фазовом спектре сигнала, поскольку энергетический спектр есть квадрат модуля спектральной плотности и не зависит от ее фазы. Например, при энергетическом подходе все сигналы, одинаковые по форме, но отличающиеся расположением на временной оси, выступают как совершенно неразличимые.

Если определить долю энергии, которая заключена в “ k ” последовательных «лепестках» спектральной плотности прямоугольного импульса, то можно констатировать что на первый «лепесток» спектра приходится энергия, составляющая 90,2% от общей энергии, на первый и второй – 95% ,на первые три - 97%. Такая оценка реальной ширины спектра сигнала не раскрывает всей картины явления, поскольку фазовые соотношения играют важнейшую роль в формировании формы сигнала. Но если сведения о форме сигнала отступают на второй план (форма сигнала является случайной или сильно искажена помехами), то величина энергии приобретает первостепенное значение, и энергетическая оценка ширины спектра становится особенно целесообразной.

Следует иметь в виду, что энергетический спектр «отсеивает» составляющие спектра с малым уровнем. «Лепестки», хорошо заметные на графике спектральной плотности, могут «пропасть» с энергетического спектра.

4.4.2. Явление Гиббса

Предположим, что мы, используя прямое преобразование Фурье, получили спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с очень малыми фронтом и спадом. Вычисления мы провели не для бесконечного числа гармоник, а, например, всего для десяти. Если теперь, используя эти десять гармоник и применяя обратное преобразование Фурье, попытаться получить исходный импульс, то мы обна-

ружим, что в восстановленном импульсе вблизи фронта и спада возникнут волнообразные колебательные процессы, которые через некоторое время затухнут. С энергетической точки зрения такое явление не очень понятно, поскольку доля энергии «отброшенных» гармоник практически ничтожно мала.

Явление появления погрешностей (затухающих колебательных процессов) в окрестностях точек разрыва восстановленного импульса, возникающее при усечении линейчатого спектра (ограничении числа используемых гармоник), получило название явления Гиббса (Дж. Уиллард Гиббс, не будучи первооткрывателем в 1898 году разрекламировал его).

Кратко, существо вопроса состоит в том, что ряд Фурье аппроксимирует сигнал в среднеквадратическом смысле (минимизирует энергию ошибки). Близость нормы сигнала к норме конечного отрезка обобщенного ряда Фурье не означает сходимость суммы ряда к мгновенному значению сигнала в каждой точке (поточечной сходимости). Спектральные линии, отвечающие большим N (частотам, которые мы не приняли во внимание), порождают резкий «всплеск» суммы ряда Фурье.

Заметим, что если брать величину N очень большой, то все равно амплитуда пульсаций синтезированного импульса (первого всплеска) будет составлять 9 процентов от величины скачка. А, следовательно, практически всегда при восстановлении периодических сигналов электрической цепи будут наблюдаться «выбросы и колебания» в тех местах сигнала, где имеет место быстрое его изменение (в точках разрыва производной, скачка), поскольку не одна электрическая цепь не может передать бесконечное число гармоник сигнала.

Эффект Гиббса более широкое понятие, чем мы описали для случая Фурье анализа и синтеза сигнала. Он в той или иной форме встречается и в ряде других случаев синтеза сложных колебаний, в том числе, как установим позже, при выполнении вейвлет анализа и синтеза.

Для борьбы с эффектом Гиббса применяют ряд методов, суть которых состоит в умножении амплитуд гармоник на специальные множители (сигма множителей, множителей Фейера, Чезаро и прочее).

4.4.3. Оконное преобразование Фурье

Оценивая классическое преобразование Фурье произвольных сигналов можно отметить целый ряд его недостатков:

1. Базисной функцией при разложении в ряд Фурье является гармоническое (синусоидальное) колебание, которое математически определено в интервале времени от $-\infty$ до $+\infty$ и имеет неизменные во времени параметры. Соответственно, преобразование Фурье требует знание сигнала не только в прошлом, но и в будущем, что является теоретической абстракцией;

2. В условиях практически неизбежного ограничения числа гармоник или спектра колебаний точное восстановление сигнала после прямого и обратного преобразований Фурье теоретически (и, тем более, практически) невозможно, в частности, из-за появления эффекта Гиббса;

3. По составу высших составляющих спектра практически невозможно оценить местоположение локальных особенностей сигналов и их характер;

4. Отдельные особенности сигнала (например, разрывы или резкие всплески) вызывают незначительные изменения частотного образа сигнала во всем интервале частот от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку они создают множество высших гармоник очень малой амплитуды и фактически «размазываются» по всей частотной оси. Это делает их обнаружение по спектру практически невозможным. Не очень хорошо помогает отображению быстрых изменений сигналов, таких как всплески или перепады, увеличение числа гармоник. Хотя и так ясно, что такая плавная базисная функция, как синусоида, в принципе вообще не может представлять перепады сигналов с бесконечной крутизной, хотя такие сигналы (например, прямоугольные импульсы) встречаются очень часто.

5. Преобразование Фурье не учитывает, что частота колебания может изменяться во времени. Кроме того, на практике не все сигналы стационарны, а для нестационарных сигналов трудности преобразования Фурье возрастают многократно, делая его практически невозможным.

Проблемы спектрального анализа и синтеза сигналов, быстроизменяющихся и ограниченных по времени, частично решаются переходом к так называемому *кратковременному или оконному преобразованию Фурье*.

Идея этого преобразования проста: для получения о сигнале высокочастотной информации с хорошей точностью следует извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала, а

для низкочастотной спектральной информации наоборот. По этой причине временной интервал существования сигнала разбивается на ряд промежутков – временных окон. В каждом промежутке вычисляется свое преобразование Фурье-мгновенный спектр. Если в каком то окне (мгновенном спектре) существовали частотные составляющие некоторого сигнала, то они будут присутствовать и в «общем» спектре. Таким образом, можно перейти к частотно-временному представлению сигнала.

Кратковременное (оконное) преобразование выполняется с использованием выражения:

$$\dot{S}_{ок}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)w(t-b)\ell^{-j\omega t} dt. \quad (4.45)$$

Здесь, в отличие интеграла Фурье, функция $u(t)$ под знаком интеграла дополнительно умножается на оконную функцию $w(t - b)$. Параметр b окна задает его сдвиг на временной оси. Обычно задается ряд фиксированных значений b в пределах полного окна. Например, для простейшего П - прямоугольного окна функция $w(t - b)$ в пределах окна дает 1, а за пределами окна просмотра – 0. При этом для каждого окна мы получаем свой набор комплексных амплитуд сигнала в частотной области. Окно скачками перемещается и за некоторое число таких перемещений позволяет «просмотреть» весь сигнал. В каждом окне выполняется свое спектральное разложение, так что вместо обычно одной спектрограммы мы теперь получаем набор спектрограмм.

Естественно, что поскольку каждое окно охватывает небольшой участок по времени, точность описания локальных изменений сигнала может быть повышена. Часто используются *окна Гаусса* или иные окна, обеспечивающие малые искажения спектра из-за граничных явлений и уменьшающие проявление эффекта Гиббса.

Казалось бы, раз оконное преобразование Фурье дает нам частотно-временное представление сигналов, то все замечательно и достаточно им и ограничиться. Но не все так просто. Все упирается в известный *принцип неопределенности Гейзенберга* (Гейзенберг Варнер Карл, 1904 – 1976 г.). Согласно ему невозможно получить одновременно высокое частотное и высокое временное разрешение. Выбирая окно с ма-

лой шириной по времени, мы получаем высокое временное разрешение, но низкое частотное разрешение. Взяв окно с большой шириной во времени, получаем хорошее разрешение по частоте, но плохое во времени. Оконное преобразование оперирует с окнами, имеющими одинаковую ширину, а потому данное противоречие для него неразрешимо.

У оконного преобразования, кроме того, сохраняется принципиальный недостаток преобразования Фурье: в нем по-прежнему используется единственная базисная функция – синусоида со всеми отмеченными ранее недостатками.

4.5. Основы вейвлет-преобразований сигналов

4.5.1. Основные идеи, лежащие в основе вейвлет-преобразований

Мы уже неоднократно пользовались тем, что определяли сигналы как векторы в некотором пространстве. Не претендуя на строгость, мы полагали, что вектором является некоторый набор чисел, представляющих сигнал. Мы говорили о базисе векторного пространства, в котором любой вектор из пространства может быть разложен в виде их линейной комбинации. Число векторов в базисе определяло размерность векторного пространства.

На основании понятия о векторном пространстве мы представили сигнал в виде обобщенного ряда Фурье (4.1), т. е. как взвешенную сумму простых составляющих — базисных функций $\{\varphi_n(x)\}$, помноженных на коэффициенты C_k . «Геометрически» ряд Фурье означал разложение произвольного сигнала, как некоего вектора, при котором коэффициенты ряда Фурье есть проекции на базисные направления. Мы установили, что коэффициенты разложения в ряд Фурье дают достаточно ясную качественную характеристику сигналу. Они показывают насколько $u(t)$ содержит в себе эталонные колебания $\{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$.

Ряд Фурье использует в качестве базисных функций синусоиды и косинусоиды, представленные комплексной экспонентой. Они предельно локализованы в частотной области (вырождаясь на спектрограмме в вертикальную линию), но очень плохо локализованы (точнее, вообще не локализованы) во временной области. Кроме того, такие базисные функции не способны адаптиро-

ваться к локальным изменениям сигналов. Все это приводит к ряду недостатков, о которых говорилось выше.

Недостатки традиционного преобразования Фурье обусловили то, что назрела острая необходимость в создании нового математического аппарата приближения сигналов, свободного от указанных недостатков.

Понятно, что более гибкую технику обработки сигналов может дать использование принципиально новых базисов, которые бы могли осуществлять преобразование Фурье не по всей временной оси (или оси t), а локально по месту своего расположения. Базисы такого типа должны позволять, подобно «окну» перемещаться к тому месту сигнала, в котором должно осуществляться «локальное преобразование Фурье» и масштабироваться. Базисными функциями нового типа могут быть различные функции, но понятно, что они близко или отдаленно должны напоминать возникающие и сразу затухающие колебания (волны) с некой средней частотой. Это обеспечивало бы им различное представление сигналов с локальными скачками и разрывами.

Базисом нового типа стали *вейвлеты*, которые были предложены в начале 90-х годов прошлого века. Термин вейвлет, впервые был введен специалистом по сейсмографии Морле (J. Morlet), Английское слово wavelet (от французского "onde-lette") дословно переводится как "короткая (маленькая) волна". В различных переводах зарубежных статей на русский язык встречаются еще термины: "всплеск", "всплесковая функция", "маловолновая функция", "волночка" и др. Заметим, что подобная интерпретация названий вейвлетов способна дать стимул к начальному пониманию сути вопроса, но она является чрезмерно упрощенной а, подчас, даже принципиально ошибочной. Прежде всего, потому, что подавляющее большинство вейвлетов не имеет ничего общего с возникающей и затухающей по амплитуде синусоидальной волной и свойства вейвлетов принципиально и сильно отличаются от свойств синусоиды.

Вейвлет (wavelet) – это обобщенное название временных функций, имеющих вид волновых пакетов той или иной формы, локализованных по оси независимой переменной (по оси времени t) и способных к сдвигу по ней и масштабированию (сжатию или растяжению).

Прямое вейвлет-преобразование, в соответствии с общепринятым подходом к анализу сигналов, означает разложение произвольного сигнала по принципиально новому базису в виде, что очень значимо, сово-

купности волнообразных пакетов-вейвлетов, которые характеризуются четырьмя принципиально важными свойствами:

1. Имеют вид коротких, локализованных по времени волновых пакетов с нулевым значением интеграла, определяющего площадь под кривой, описывающей сигнал.
2. Обладают возможностью сдвига по времени.
3. Способны к масштабированию (сжатию или растяжению вдоль оси времени).
4. Имеют ограниченный (или, точнее, локальный) частотный спектр.

Хотя идейно и чисто внешне вейвлет разложение напоминает разложение сигнала по экспоненциальным функциям, здесь имеют место серьезные отличия.

Во-первых, экспоненциальные функции простираются во времени от $-\infty$ до ∞ , как говорят математики, имеют глобальный носитель, а вейвлеты занимают лишь небольшой промежуток времени, имеют компактный носитель. Разложение в этом смысле локально.

Во-вторых, коэффициенты вейвлет разложения несут принципиально иную информацию, позволяющую определять свойства и локальные особенности функции $u(t)$, описывающей сигнал.

К тому же, одна из основополагающих идей вейвлет-представления сигналов заключается в том, что аппроксимация в пространстве сигналов достигается суммированием составляющих так называемого грубого приближения и составляющих, отражающих различные уточнения при приближении. Поэтому сразу же следует отметить, что коэффициенты разложения, получаемые при прямом вейвлет-преобразовании, по своей сути, принципиально отличаются от коэффициентов преобразования Фурье для гармонических функций. Набор коэффициентов, получаемый в ходе прямого вейвлет преобразования и содержащий информацию о конкретном сигнале, состоит из «грубых», аппроксимирующих и «уточненных», детализирующих. Это позволяет по иному, нежели раньше, обрабатывать их.

Как известно, примерно такой, сходный по форме, подход используется в математике при представлении функции рядами Тейлора. Ряд Фурье, если захотеть, можно также рассмотреть с такой точки зрения. Грубое представление – это нулевой член ряда, который представляет сигнал любой формы числом, константой, равной площади под кривой сигнала. Первое приближение – это сумма константы с «детализирую-

щей» первой гармоникой. Затем приближение постепенно улучшается увеличением числа «детализирующих» членов ряда.

В основе вейвлет-преобразования лежит использование непрерывных и интегрируемых по всей оси времени t двух классов функций.

1. Масштабирующей или скейлинг-РНИ («фи») функции $\varphi(t)$, определяющей грубое приближение (аппроксимацию) сигнала и порождающей аппроксимирующие коэффициенты.

Масштабирующая функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять определенному уравнению, называемому масштабирующим. Кроме того,

должно выполняться $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$. Масштабирующая функция порождает

вейвлет функцию $\psi(t)$. Хотя, следует иметь в виду, что масштабирующие РНИ функции $\varphi(t)$ присущи только ортогональным вейвлетам. Для иных они могут не существовать.

2. Вейвлет – функций PSI («пси») $\psi(t)$ с нулевым значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, определяющих детали сигнала и порождающих детализирующие коэффициенты.

Система вейвлет –PSI функций $\psi(t)$ создается на основе той или иной базисной функции $\psi_0(t)$. Базисная функция $\psi_0(t)$, помимо отмеченных требований, должна обеспечивать выполнение двух основных операций:

- смещение по оси времени t - $\psi_0(t - b)$;
- масштабирование $\frac{1}{\sqrt{a}} \psi_0\left(\frac{t}{a}\right)$.

Параметр a задает ширину базисной функции (ее масштаб). Множитель $\frac{1}{\sqrt{a}}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a . Параметр масштаба a реально может быть только положительным. Параметр b задает положение базисной функции на оси времени. Нетрудно убедиться в том, что следующее выражение задает сразу два этих свойства и порождает следующую систему базисных функций $\{\psi(t)\}$

$$\{\psi(t)\} = \{\psi(a, b, t)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_0 \left(\frac{t-b}{a} \right) \right\}. \quad (4.46)$$

Итак, с помощью исходного, как говорят материнского вейвлета, можно, за счет операций сдвига во времени (b) и изменения временного масштаба (a), сконструировать систему базисных функций $\{\psi(t)\}$, вейвлет-функций, по которым можно разлагать произвольный сигнал с помощью обобщенного ряда Фурье.

Сейчас имеется довольно обширный и разнообразный набор вейвлетов. В настоящее время используются более полтора десятка вейвлетов, которые обычно классифицируют по виду и особенностям образующей функции $\psi_0(t)$, по имени ученого, впервые предложившего тот или иной вейвлет. По таким вейвлетам имеется обширный справочный материал. К примеру, в системе MATLAB используются базовые типы вейвлетов, которые имеют следующие полные и сокращенные названия

=====

Haar	haar
Daubechies	db
Symlets	sym
Coiflets	coif
BiorSplines	bior
ReverseBior	rbio
Meyer	meyr
DMeyer	dmey
Gaussian	gaus
Mexican_hat	mexh
Morlet	morl
Complex Gaussian	cgau
Shannon	shan
Frequency B-Spline	fbsp
Complex Morlet	cmor

По конкретному типу вейвлета можно получить подробную справку на английском языке. Например, для вейвлета Добеши:

General characteristics: Compactly supported wavelets with extremal phase and highest

number of vanishing moments for a given support width. Associated scaling filters are minimum-phase filters.

Family	Daubechies
Short name	db
Order N	N strictly positive integer
Examples	db1 or haar, db4, db15
Orthogonal	yes
Biorthogonal	yes
Compact support	yes
DWT	possible
CWT	possible
Support width	$2N-1$
Filters length	$2N$
Regularity	about $0.2 N$ for large N
Symmetry	far from
Number of vanishing moments for psi	N

График МНАТ вейвлета, называемого «мексиканская шляпа» (Mexican hat -похож на сомbrero), показан на рис. 4.13.

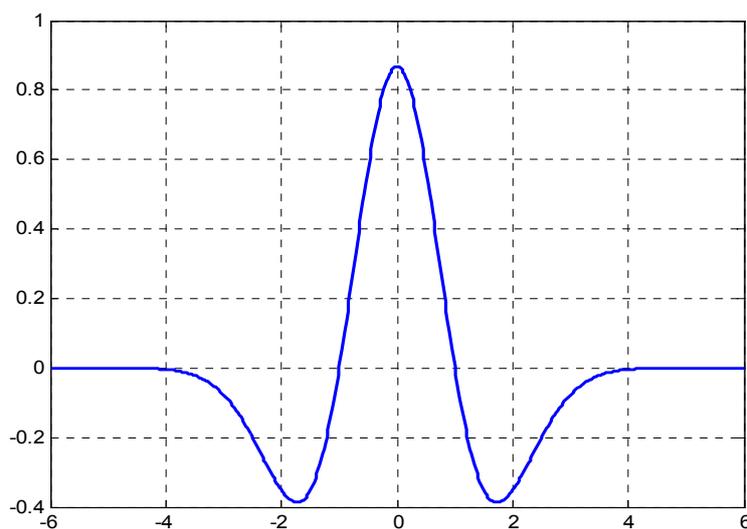


Рис. 4.13. График МНАТ вейвлета, называемого «мексиканская шляпа»

График Гауссового вейвлета 10 порядка показан на рис. 4.14.

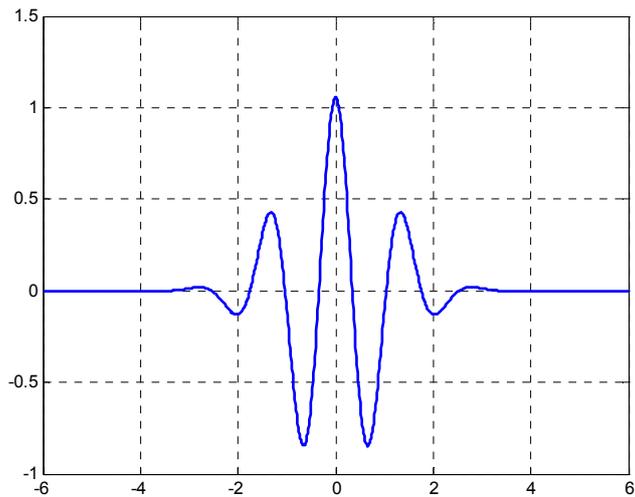


Рис. 4.14. График Гауссового вейвлета 10 порядка

Графики масштабирующей или скейлинг-РНІ («фи») функции $\varphi(t)$ и вейвлет-функций PSI («пси») $\psi(t)$ ортогональных вейвлетов Добеши 4 и Добеши 10 и показаны на рис. 4.15 и 4.16.

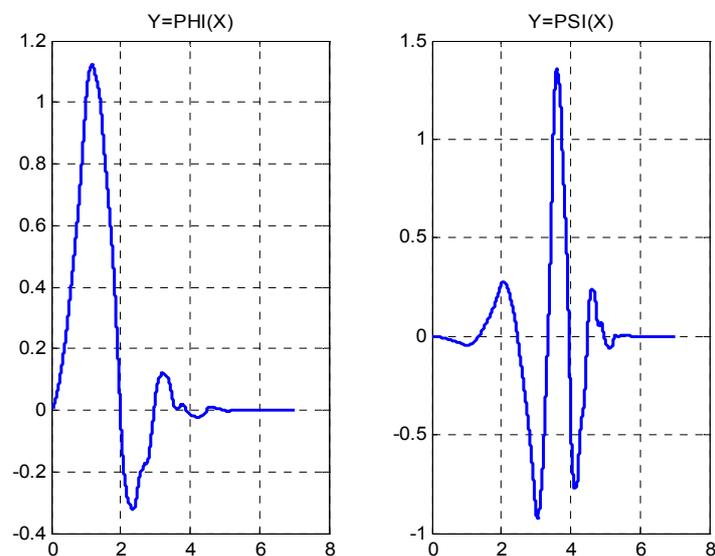


Рис. 4.15. Графики масштабирующей РНІ («фи») функции $\varphi(t)$ и вейвлет-функций PSI («пси») вейвлета Добеши 4

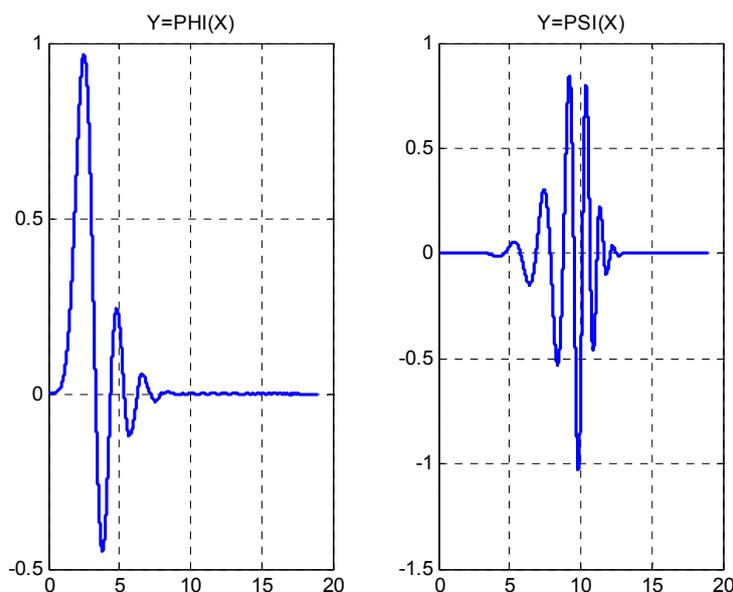


Рис. 4.16. Графики масштабирующей PHI («фи») функции $\varphi(t)$ и вейвлет-функций PSI («пси») вейвлета Добеши 10

Разнообразие вейвлетов приводит к необходимости правильно их подбирать для решения конкретной задачи. Удачный выбор типа вейвлета может существенно повысить эффективность решаемой задачи. И напротив, необоснованное применение того или иного вейвлета может привести, по меньшей мере, к разочарованию.

4.5.2. Общие сведения о вейвлет-преобразованиях

Вейвлет функции $\{\psi(t)\}$, будучи функциями времени, имеют свое традиционное спектральное представление $\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt$ с помощью спектральных плотностей $\{\dot{S}(\omega)\}$, часто именуемое как частотное представление, *Фурье образ*. Поскольку функцию $\{\psi(t)\}$ изначально выбирают исходя из условия $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, из-за чего $\{S(0) = 0\}$, и $\{S(\infty) = 0\}$, то и графики спектральных плотностей $\{S(\omega)\}$, в общем случае, будут представлять собой функции с компактным носителем, имеющие один глобальный и несколько локальных экстремумов (в принципе их может и не быть, когда график спектральной плотности имеет вид колоколооб-

разной кривой). Величина последних будет резко уменьшаться по мере удаления от глобального экстремума. То есть график спектральной плотности будет сосредоточен в определенном диапазоне частот и его глобальный экстремум будет расположен вблизи некоторой ненулевой частоты ω_0 . Эту частоту можно рассматривать как среднюю круговую частоту вейвлета (*центральную частоту вейвлета*).

Тогда можно утверждать, исходя из свойств спектральных преобразований, что малые значения a соответствуют мелкому масштабу $\{\psi(t)\}$ и высоким частотам ω_0 ($\omega \Rightarrow 1/a$), большие значения a – крупному масштабу $\{\psi(t)\}$, растяжению материнского вейвлета, и сжатию его спектра.

Подводя итог сказанному, можем теперь более корректно сформулировать, что представляет собой вейвлет преобразование.

Если сконструирован базис функционального пространства $\{\psi(t)\} = \{\psi(a, b, t)\}$ с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов материнского вейвлета с произвольными значениями параметров a и b , то по формальной аналогии с преобразованием Фурье, путем вычисления вейвлет коэффициентов, можно получить *непрерывное прямое вейвлет-преобразование (CWT – continuous wavelet transform)*

$$\begin{aligned}
 W(a, b) &= (u(t), \psi(a, b, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

Прямое вейвлет преобразование можно рассматривать как разложение сигнала (*декомпозицию*) по всем возможным сдвигам и растяжениям/сжатиям сигнала. При этом параметры a и b могут принимать любые значения в пределах указанных выше областей их определения.

Как видно, вейвлет-анализ не использует амплитудно-частотную область для визуального представления спектра сигнала, как это имеет место при традиционном спектральном анализе Фурье. Вместо нее используется область время (точнее сдвиг) – масштаб.

При непрерывном изменении a и b для расчета вейвлет спектра необходимы большие вычислительные затраты. Следует также учитывать, что множество функций $\{\psi(t)\}$ обычно избыточно. При очень сложном спектре, из-за этой избыточности, можно даже неверно интерпретировать особенности сигнала. Поэтому для практического применения необходима дискретизация значений a и b . Дискретизация как правило осуществляется через степени двойки

$$a = 2^m, b = k2^m, \psi_{mk}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m}t - k), \quad (4.48)$$

где m и k – это целые числа. В этом случае плоскость ab превращается в соответствующую сетку. Сетка дискретизации называется *диадической*. Соответственно такое преобразование принято называть *диадным (dyadic) вейвлет-преобразованием*.

В этом случае коэффициенты разложения $W(m,k) = d_{mk}$ = детализирующие коэффициенты для вейвлет-декомпозиции сигнала уровня k . Теперь эти коэффициенты дискретны и вейвлет-спектр можно представить как «лес» из вертикальных отрезков, размещенных над mk плоскостью (точнее, сеткой). Координата m указывает на скорость изменения сигнала, а k – на положение вдоль оси времени.

Важной особенностью диадного вейвлет-преобразования является исключение перекрытия носителей вейвлетов, т. е. устранение избыточности в ходе вейвлет-преобразований.

Наряду с прямым вейвлет – преобразованием, осуществляющим анализ сигнала, существует обратное вейвлет-преобразование, с помощью которого можно осуществлять синтез сигналов.

Обратное непрерывное вейвлет-преобразование обычно записывают следующим образом

$$u(t) = \frac{1}{K_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}, \quad (4.49)$$

где K_ψ – константа (нормирующий коэффициент), зависящий от ψ ,

$$K_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega. \quad (4.50)$$

$\psi(\omega)$ - Фурье-преобразование вейвлета $\psi(t)$.

Как было установлено исследованиями, после проведения прямого и обратного вейвлет преобразования можно обеспечить довольно точное восстановление сигнала на заданном промежутке. Оказалось, что при использовании ортогональных вейвлетов возможно даже точное восстановление сигнала, как говорят, его (полная) реставрация.

Считается, что вейвлет-преобразование на основе только детализирующей ортогональной вейвлет функции $\psi(t)$ способно восстановить, по крайней мере, тонкие детали временной зависимости сигнала $u(t)$. Для восстановления полной формы сигнала (реконструкции) приходится прибегать к масштабирующей функции $\varphi(t)$, именуемой также аппроксимирующей. В литературе эту функцию также называют «отцовским» вейвлетом, намекая на то, что без осуществления «папаши» материнский вейвлет не способен воспроизвести «потомство», полноценно представляющее исходный сигнал.

В иных случаях восстановление дает близкий к исходному сигналу $u(t)$ приближенный сигнал, причем близость понимается в традиционном смысле обеспечения минимума среднеквадратической погрешности восстановления.

4.5.3. Практическое осуществление вейвлет-преобразований

Изученные «геометрическим способом», в виде обобщенного ряда Фурье, вейвлет-преобразования позволяют понять идею и наглядно представить весь процесс анализа (декомпозиции, разложения) и синтеза сигналов. Временными функциями-вейвлетами можно пользоваться скорее для демонстрации сущности вейвлет-декомпозиции и реставрации сигналов, чем для практической работы по обработке и представлению реальных сигналов. Реальные действия в большей степени базируются на особой трактовке вейвлет-преобразований в частотной области, что позволяет плодотворно использовать хорошо разработанные алгоритмы традиционных спектральных методов, давно известный аппарат частот-

ной фильтрации и методы быстрого быстрых преобразований, подобных быстрому преобразованию Фурье.

Рассмотрим, вначале, частотный подход чисто умозрительно и без строгих доказательств.

В электрических цепях, как мы отмечали, осуществляется преобразование сигналов. Сигнал на выходе цепи определяется комплексным коэффициентом передачи или импульсной характеристикой электрической цепи.

В первом случае, если сигнал на входе $u_{BX}(t)$ задан своей спектральной плотностью $\dot{S}_{BX}(j\omega)$, то, исходя из спектрального метода, можно показать, что спектральная плотность сигнала на выходе цепи $\dot{S}_{BIX}(j\omega)$ определяется операцией умножения на комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(j\omega)$

$$\dot{S}_{BIX}(j\omega) = \dot{K}(j\omega)\dot{S}_{BX}(j\omega). \quad (4.51)$$

Мы говорили о том, что в зависимости от вида АЧХ цепь имеет область частот, в пределах которой цепь пропускает сигналы с минимальным ослаблением и область частот с противоположными свойствами. В зависимости от взаимного расположения этих областей мы различали фильтры низких частот, фильтры верхних частот и прочее.

Каждый ортогональный вейвлет, как временная функция, вполне очевидно, имеет свою спектральную функцию $\dot{S}_{\psi}(j\omega)$. Было показано в литературе, что если $\dot{S}_{\psi}(j\omega) \Leftrightarrow \dot{K}(\omega)$, то вейвлет можно представить в виде реализации *двух фильтров – низкочастотного*, с комплексным коэффициентом передачи $Lo(\omega)$, и согласованного с ним *высокочастотного* $Hi(\omega)$. В соответствии с этим область действия вейвлетов может быть разбита на две составляющие — низкочастотную и высокочастотную. Граничную частоту этих фильтров удобно взять равной половине общей полосы спектра сигнала. Пропуская сигнал через оба фильтра одновременно можно всегда разложить сигнал на низкочастотную и высокочастотную составляющие.

$$\dot{S}_{BLX}(\omega) = \dot{S}_{BX}(\omega)Lo(\omega) + \dot{S}_{BX}(\omega)Hi(\omega). \quad (4.52)$$

Фильтр Lo дает на выходе частотный образ для аппроксимации (грубого приближения) сигнала, а фильтр Hi — для его детализации.

В теории доказывается, что выходной сигнал можно представить также в виде так называемой свертки двух функций – входного временного сигнала $\{u(t)\}$ и импульсной характеристики цепи (по сути, обратного преобразования Фурье от произведения комплексного коэффициента передачи на спектральную функцию). Поэтому фильтры можно характеризовать, помимо комплексного коэффициента передачи, также коэффициентами импульсной характеристики.

Пожалуй, главным выводом из теории вейвлет-преобразований является вывод о соответствии вейвлет-коэффициентов коэффициентам импульсной характеристики этих фильтров. Другими словами, коэффициенты импульсной характеристики фильтров Hi и Lo есть детализирующие коэффициенты вейвлет-декомпозиции сигнала и их коэффициенты аппроксимации.

К примеру, можно говорить о том, что низкочастотный фильтр Lo , построенный на основе вейвлета Хаара, из сигнала $\{u_n(t)\}$ производит последовательность средних арифметических, сглаживая колебания. Высокочастотный фильтр Hi , построенный на основе вейвлета Хаара, из последовательности $\{u_n(t)\}$ формирует сигнал, который имеет смысл половины разности между соседними членами (аналог половины первой конечно-разностной производной). Новый, выходной сигнал отражает колебания последовательности $\{u_n(t)\}$.

По предложенной выше схеме можно построить также фильтры восстановления сигнала и с их помощью осуществить обратное вейвлет - преобразование.

Итак, можно даже не понимать природы вейвлетов, но важно знать, что каждому ортогональному вейвлету соответствует в общем случае четыре фильтра:

1. Низкочастотный фильтр разложения сигнала;
2. Высокочастотный фильтр разложения сигнала;
3. Низкочастотный фильтр восстановления сигнала;
4. Высокочастотный фильтр восстановления сигнала.

На рис.4.17 показаны четыре вейвлет-фильтра на основе биортогонального вейвлета BIOR3.5.

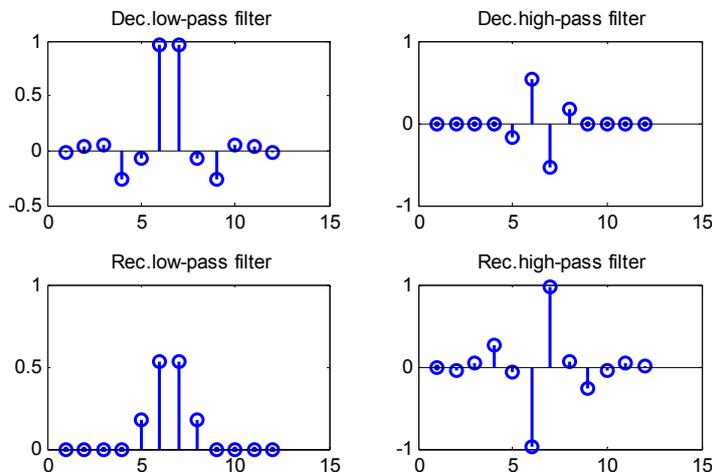


Рис. 4.17. Вейвлет-фильтры на основе биортогонального вейвлета BIOR3.5.

Поскольку фильтры передают только половину всех частотных компонент сигнала, то не попавшие в полосу прозрачности компоненты могут быть безболезненно удалены. По аналогии с казней каждого десятого в провинившихся войсковых подразделениях Древнего Рима, эта операция получила название «децимация». В количественном отношении ей обычно придается более общий смысл, не связанный с числом 10. Используется децимация вдвое, которая обозначается как $\downarrow 2$, и означает удаление половины отсчетов. При этом, если просто сложить полученные на выходах фильтров сигналы, то получится исходный сигнал, т. е. будет иметь место полная реконструкция сигнала на ее начальном уровне.

Однако Lo фильтр можно, в свою очередь, разложить на два фильтра и снова подвергнуть спектры этих новых фильтров операции децимации. Это означает изменение уровня реконструкции, которое можно представить деревом реконструкции (что будет сделано позднее).

Таким образом, может быть сформирована система вейвлет-фильтров, реализующих операцию декомпозиции сигнала того или иного уровня.

Операция последовательной разбивки Lo фильтров и постепенного огрубления сигнала была предложена Малла и известна как *алгоритм Малла* (в его французской фамилии Mallat буква «t» не читается).

Подобные операции, в конце концов, обеспечивают существенное сокращение количества соответствующих обрабатываемых компонентов сигнала, что лежит в основе приближенного представления сигнала на разных уровнях декомпозиции сигнала. Такое представление позволяет реализовать операции *сжатия (компрессии) сигналов и их очистки от шума*.

Возникает законный вопрос, почему именно низкочастотный фильтр удостоен операции деления? Можно сказать, что это следствие устоявшейся практики применения сигналов — основные частотные компоненты их расположены обычно в низкочастотной области спектра. Считается, что именно она несет больше информации, чем высокочастотная (уточняющая) область. В цифровых сигналах такое предположение выполняется не всегда.

При обычном алгоритме Мала на каждом шаге «отрезается» половина низкочастотной части диапазона сигнала. Р. Койфман и М. Векерхаузер предложили усовершенствованный алгоритм Маала. При этом осуществляется деление полос как низкочастотных, так и высокочастотных фильтров. Функции, порождающие необходимые для этого базисы получили название *вейвлет-пакетов*.

Вейвлет анализ сигнала обычно производится по ранее изложенной схеме многократно (говорят - осуществляется многоуровневый анализ). Берем сигнал $u(t) = \{u_n(t)\}$ и применяем к нему низкочастотный фильтр разложения с децимацией для получения сглаженной составляющей $A = \{A_K\}$, затем применяем высокочастотный фильтр разложения с децимацией для получения деталей $D = \{D_K\}$, которые мы потеряли при сглаживании.

Будем называть $A = \{A_K\}$ коэффициентами аппроксимации первого уровня разложения и обозначать их $A_1 = \{A_{1,K}\}$. Массив $D = \{D_K\}$ будем называть детализирующими коэффициентами и обозначать $D_1 = \{D_{1,K}\}$.

Далее процедура разложения применяется к набору коэффициентов A_1 и мы получаем коэффициенты второго уровня разложения $A_2 = \{A_{2,m}\}$ и

$D_2 = \{D_{2,m}\}$. Заметим, что после каждого шага число аппроксимирующих коэффициентов A и отдельно детализирующих D уменьшается в два раза. Повторяя процедуру разложений, необходимое число раз μ , мы получаем вместо сигнала $\{u_n(t)\}$ серию коэффициентов $\{A_\mu, D_\mu, D_{\mu-1}, D_{\mu-2}, \dots, D_1\}$.

Схема разложения сигнала может быть изображена следующим образом, как показано на рис.4.18:

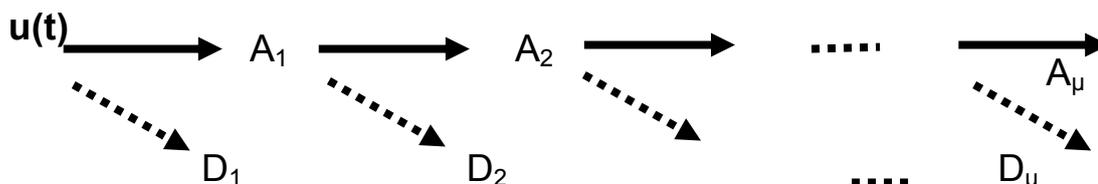


Рис. 4.18. Разложение сигнала на аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты

В результате мы получим полный набор аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов, вплоть до уровня декомпозиции $\mu+1$. Это и есть *вейвлет-декомпозиция сигнала*.

По этому набору коэффициентов мы можем построить вейвлет-спектрограмму сигнала, оценить его особенности. Кроме того, полученные коэффициенты разных уровней можно также специальным образом обработать. После изменения коэффициентов разложения сигнал можно восстановить в обратном порядке путем использования фильтров восстановления и получить его новые свойства.

Пример разложения по аппроксимирующим и детализирующим коэффициентам Хаара и Добеши 4 сигнала в виде функции синуса показан на рис. 4.19.

На рис. 4.20 показано разложение другого сигнала («лестницы») с определением коэффициентов аппроксимации и детализирующих коэффициентов для вейвлетов Хаара и Добеши 4.

При наличии аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов можно выполнить восстановление сигнала. В общем случае, каждый уровень восстановления (реконструкции) сигнала определяется по правилу, наглядно представленному ниже

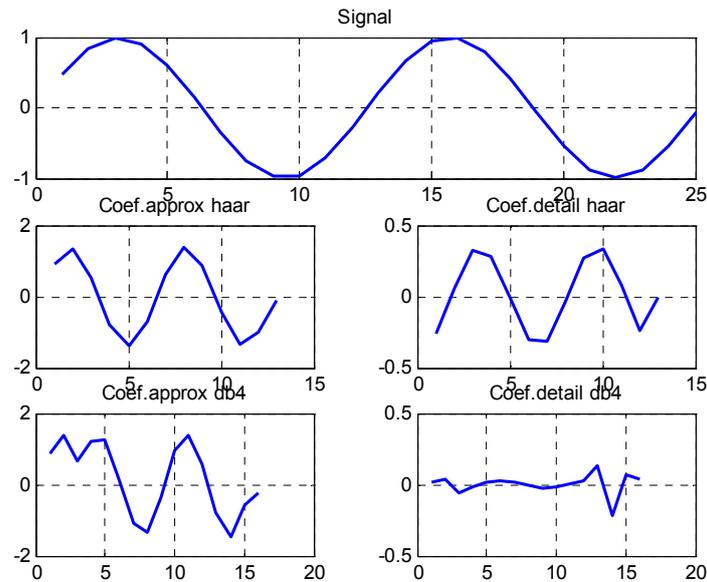


Рис. 4.19. Разложение по аппроксимирующим и детализирующим коэффициентам Хаара и Добеши 4 сигнала в виде функции синуса

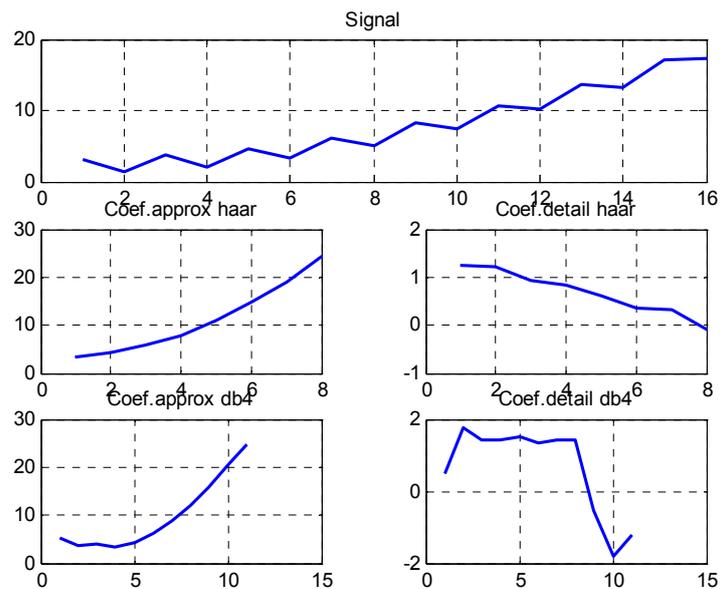


Рис. 4.20. Разложение по аппроксимирующим и детализирующим коэффициентам Хаара и Добеши 4 сигнала в виде «лестницы»

$$s = A_1 + D_1 \Rightarrow A_2 + D_2 + D_1 \Rightarrow A_3 + D_3 + D_2 + D_1 \Rightarrow \dots$$

На рис. 4.22 показан результат проведения обратного вейвлет-преобразования ранее разложенного сигнала «лестница» с использова-

нием вейвлета Добеши 4. В нижнем подокне построены одновременно графики исходного и восстановленного сигнала и определена относительная величина их различий.

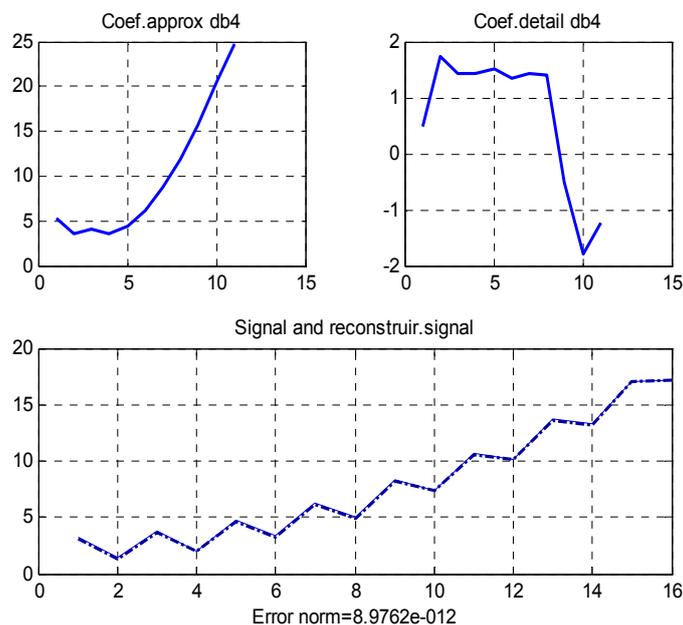


Рис. 4.22. Коэффициенты и графики исходного и восстановленного сигнала «лестница»

Как свидетельствует графики и величина погрешности результат поразителен. Погрешность восстановления сигнала по аппроксимирующим и детализирующим коэффициентам с помощью обратного вейвлет – преобразования ничтожно мала и составляет примерно 9×10^{-12} . Это близко к точности машинных расчетов. Разделить слившиеся графики невозможно, хотя мы и предприняли попытку сместить один из сигналов на величину 0.1 вниз и по - разному их маркировать.

Полученный результат обусловлен тем, что выбранный тип вейвлета и использованный сигнал теоретически обеспечивают точное восстановление последнего или, как говорят, полную реконструкцию сигнала.

Мы уже отмечали, что в реальных условиях при ограничении числа гармоник точное восстановление сигнала с разрывом производной при использовании прямого и обратного преобразования Фурье невозможно в принципе. Последний пример показывает, что вейвлет-преобразование способно обеспечить точную реконструкцию сигнала после его прямого и обратного преобразований. Это безусловно является огромным принципиальным преимуществом вейвлет-технологии обработки сигналов.

В вейвлет-преобразовании после первоначального разложения сигнала на грубую (низкочастотную) и детализирующую (высокочастотную) компоненты мы оставляем высокочастотную часть в покое и продолжаем раскладывать низкочастотную часть. Существует, кроме этого, и так называемое пакетное вейвлет-преобразование, в котором раскладывают и высокочастотную часть также на низкочастотную и высокочастотную компоненты. Оно способствует лучшей частотной локализации сигнала.

Схематически вейвлет-пакетное (wavelet-packets) разложение сигнала (splitting-расщепление) изображают графически в виде схемы, обычно именуемой «деревом» разложения (в левом окне рис. 4.23).

На вершине этого дерева – исходный сигнал, а ниже – его пакетные вейвлет коэффициенты. При разложении данных некоторого узла ниже слева находятся аппроксимирующие коэффициенты, справа – детализирующие. Поэтому все ветви влево указывают на аппроксимирующие коэффициенты, а правые ветви идут к детализирующим коэффициентам предыдущего узла.

Таким образом, появляется гораздо больше возможности выбора базиса для разложения – от минимального вейвлет-разложения (эта часть коэффициентов расположена слева оси симметрии) до полного разложения на всех уровнях.

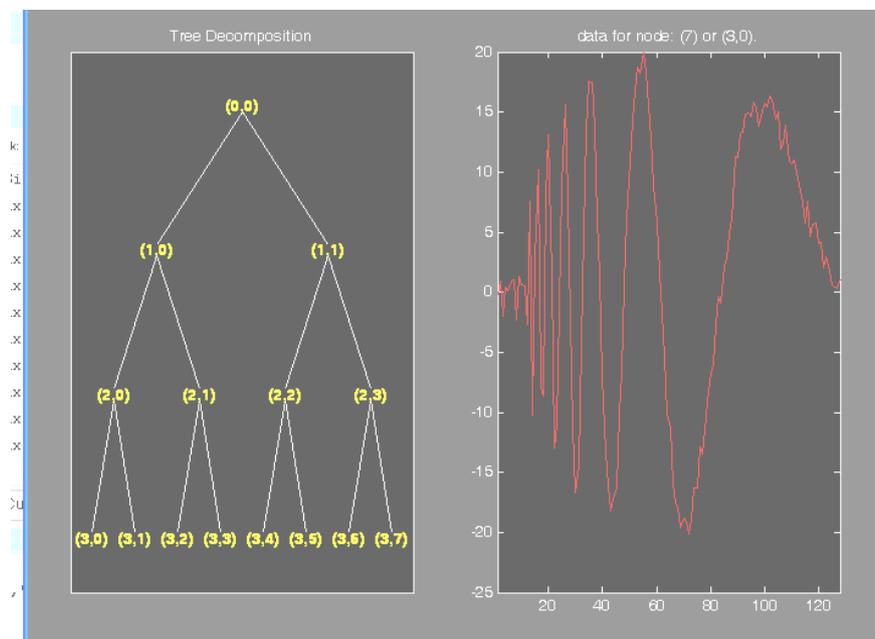


Рис. 4.23. Пакетное разложение сигнала

Преобразование с помощью вейвлет-пакетов является адаптивным вейвлет-преобразованием, поскольку оно легко приспосабливается к особенностям сигнала и может успешно использоваться для компрессии сигналов и их очистки от шумов (подробно см. ниже)

На рис справа расположен график коэффициента в одном из узлов дерева. Обычно в MATLAB такой график можно воспроизвести если соответствующий узел активировать мышкой.

4.5.4. Использование вейвлет-анализа для выявления особенностей сигналов

Для изучения сигналов, обнаружения их локальных особенностей используют специальное и весьма специфическое представление непрерывного одномерного вейвлет преобразования в виде вейвлет-спектрограммы сигнала.

Вейвлет-спектрограмма, по сути, представляет собой изображение на масштабной временной плоскости своеобразного визуального образа сигнала, в котором с помощью различных цветов изображения отражается поведение и особенности сигнала при различном его рассмотрении.

Вейвлет-спектрограмма базируется на матрице, у которой количество строк равно максимальной величине масштабного коэффициента (длине вектора a), а количество столбцов равно длине вектора, представляющего отсчеты сигнала (величине b). Каждая ячейка матрицы содержит элемент $W(a_k, b_m)$, определяющий величину коэффициента вейвлет преобразования. Каждому элементу матрицы, соответствует точка, окрашенная в цвет, соответствующий величине элемента. Таким образом, изображение вейвлет-спектрограммы характеризует зависимость коэффициентов вейвлет преобразования от координат точки на плоскости (точнее, от масштабного коэффициента a , который откладывается по оси ординат и от параметра b , являющегося аналогом времени и откладываемого по оси абсцисс).

Для понимания того, что представляет собой плоскостное изображение вейвлет-спектрограммы и как оно связано с сигналом представим себе, что у Вас в руках имеется лист, соответствующий по размерам плоскости спектрограммы, с прорезанным прямоугольным окошком, и лупа. Предположим, что имеется возможность прорезь перемещать и

менять ее размеры. Ординату положения прорези определяет параметр a . Размер прорези по горизонтали равен ширине спектрограммы. Окно прямоугольной лупы также можно менять, т. е. сужать или растягивать по горизонтали. Размер окна лупы по горизонтали определяется параметром, равным величине $1/a$.

Пусть Вас интересует спектрограмма сигнала, при рассмотрении его лупой на отдельных мелких фрагментах его временного существования. Вы устанавливаете окно лупы узким по вертикали (тем самым берете большую величину a) и начинаете смотреть через лупу на сигнал. При этом Вы, в зависимости от интересующего фрагмента сигнала, выбираете положение окна лупы по оси времени. Нечего не измениться, если положение лупы по горизонтали Вы будете определять не в масштабе времени, а в значениях координаты изменения величины b (в новом масштабе при изменении времени от t_{MIN} до t_{MAX} положение будет варьировать от 0 до величины b). Тогда, зафиксировав внимание на интересующем фрагменте сигнала, Вы, произвольно, определяете два параметра a и b .

Теперь, переходя к листу для анализа спектра и перемещая прорезь в листе вверх по спектрограмме на соответствующую величину a , Вы можете по цветному изображению определить, как меняются коэффициенты вейвлет-преобразования или, по другому, спектрограмму, в зависимости от величины b или, что тоже самое, в другом масштабе, от временного положения анализируемого участка сигнала.

Если же Вас, наоборот, интересует спектрограмма поведения сигнала на больших временных интервалах (фрагментах), Вы раздвигаете окно лупы по горизонтали (берете малую величину a), выбираете укрупненный фрагмент сигнала и положение лупы по оси времени, и, затем, смотрите спектрограмму, устанавливая прямоугольник прорези в нижнюю часть листа в соответствии с величиной a .

В такой интерпретации параметр a называют *временным масштабом*, поскольку он в определенной степени характеризует детальность рассмотрения сигнала. Малые значения a соответствуют изучению сигнала при длительном времени его существования, большие параметры a – изучению небольших фрагментов сигнала. На вейвлет-спектрограмме коэффициенты a с малыми номерами, которые дают огрубленную картину сигнала, расположены снизу, а с большими номерами,

дающие детальную картину сигнала, – сверху. Параметр b аналогичен смещению сигнала по оси времени.

Рассмотрим теперь вейвлет-спектрограммы некоторых сигналов.

Пусть вначале это будет спектрограмма фрагмента синусоиды. Напомним, что традиционный амплитудный спектр такого сигнала представляет собой вертикальную линию, расположенную на частоте синусоиды. Такая линия, по большому счету, ничего не выражает и никак не характеризует сигнал.

Вейвлет-спектрограмма того же синусоидального сигнала показана на рис. 4.24. Чтобы иметь представление о величинах $W(a_k, b_m)$ коэффициентов вейвлет-преобразования на рис. 4.25 показан трехмерный график зависимости $W(a_k, b_m)$.

Как свидетельствует рис. 4.24, спектрограмма синусоиды выглядит маловыразительно. Понятно, что гладкая гармоническая функция, как бы по определению, не может давать много информации о «локальных особенностях сигнала». Тем не менее, глядя на спектрограмму, можно отметить ряд особенностей анализируемого сигнала. Во-первых, хорошо видна периодичность функции.

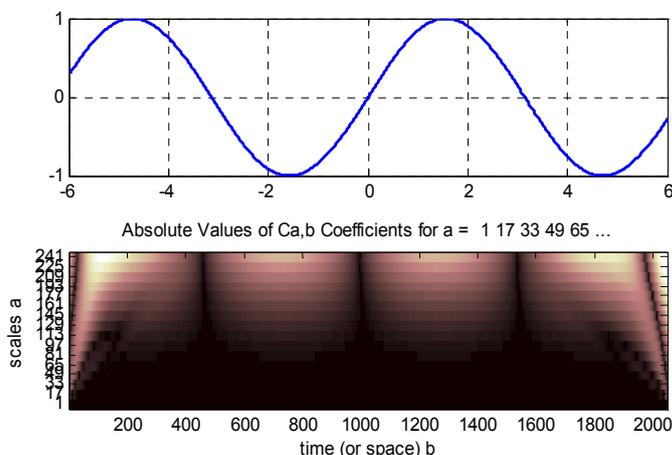


Рис. 4.24. Вейвлет-спектрограмма синусоидального сигнала

Анализируемому гармоническому сигналу соответствуют периодические яркие горизонтальные области, где, как видно из рис.4. 25, модули коэффициентов вейвлетов велики. Сгущение светлых областей вейвлет - спектрограмм соответствует областям вблизи точек экстремумов. Участки синусоиды, вблизи точек перехода через нуль (это как известно линей-

ные участки с наибольшей скоростью изменения сигнала), отображаются сгущением темных областей. Особенности сигнала хорошо заметны при больших величинах a , и пропадают при малых a . Это и понятно, что чем с более общих позиций мы характеризуем синусоиду, чем более ее крупные фрагменты рассматриваем, тем меньше «деталей» мы замечаем. Об этом также свидетельствует уменьшение уровня и нивелирование величин $W(a_k, b_m)$ на рис.4.25.

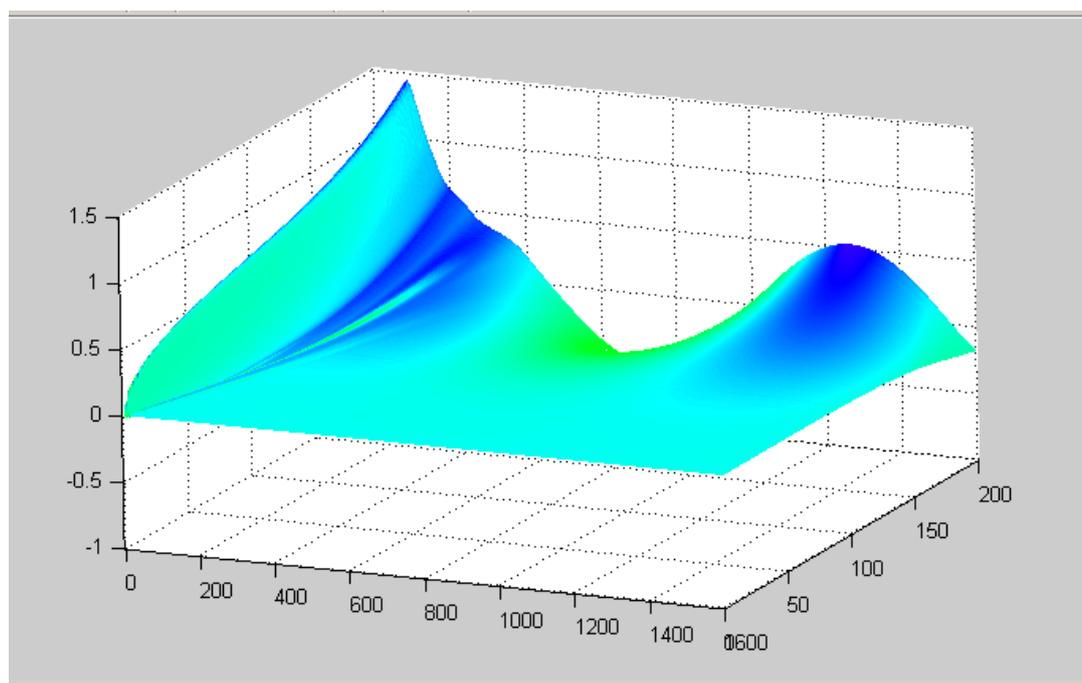


Рис. 4.25. Трехмерный график зависимости коэффициентов вейвлет преобразования $W(a_k, b_m)$

Некоторое четко видимое усложнение спектра, которое «украшает» вейвлет-спектрограмму по краям, вызвано ограниченной областью существования сигнала и обусловлено краевыми «разрывами» синусоиды.

Вейвлет-спектрограмма модуля синусоидальной зависимости с линейкой соответствия цветов и величин коэффициентов $W(a_k, b_m)$ показана на рис. 4.26

Рисунок свидетельствует, что и здесь локальным особенностям сигнала, экстремумам соответствуют светлые области спектрограммы (большие величины коэффициентов $W(a_k, b_m)$). Причем точки излома графика сигнала (точки, где изображающие график линии образуют угол или «острия») становятся заметными уже при малых коэффициентах a .

Это является следствием того, что в точках перегиба функции (в острых минимумах) производная меняется, не так плавно, как у просто синусоиды, а очень резко. Наблюдая ход темных линий, образованных сгущением темных точек можно усмотреть тенденцию изменения сигнала (участки роста или убывания функции).

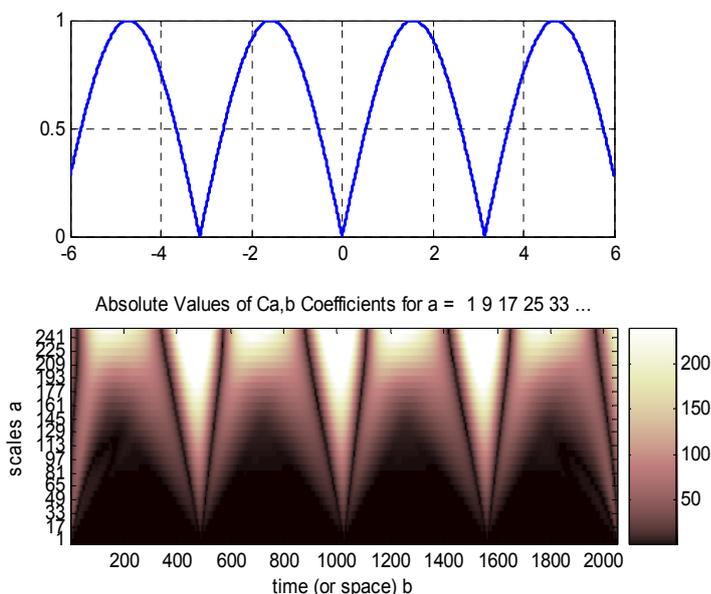


Рис. 4.26. Вейвлет-спектрограмма модуля синусоидального сигнала

Очень важно, что вейвлет-спектрограммы сигналов позволяют выделять такие особенности сигналов, которые вообще незаметны на графиках сигналов.

Для доказательства этого усложним сигнал, предположив, что он описывается функцией вида $u(t) = \sin(t) + 0.1[\sin(t)]^7$. Это означает, что к ранее изученному синусоидальному сигналу добавлена небольшая компонента в виде функции синуса в седьмой степени. График добавленной компоненты, новый анализируемый сигнал и вейвлет-спектрограмма его показаны на рис. 4.27.

Внешне новый сигнал совершенно не отличим от чистой синусоиды. Однако спектрограмма суммы синусоидального и добавочного сигнала в третьем подокне существенно преобразилась и значительно облегчает процесс анализа сигнала. По прежнему, чисто гармоническому синусоидальному сигналу соответствуют яркие горизонтальные полосы, отра-

жающие большие вейвлет коэффициенты. Вместе с тем, на спектрограмме появляются дополнительные, несколько меньшей яркости сгущения светлых областей. Они, как легко заметить, отчетливо выделяют экстремумы, изменения знаков первой производной дополнительной компоненты.

Спектрограмма отражает тот факт, что чем больше выражена особенность сигнала, тем выше будут уровни ее вейвлет-коэффициентов и тем сильнее она будет выделяется на спектрограмме. Линейным участкам с большой крутизной синусоиды и компоненты соответствует сгущение темных областей. Причем вертикальные темные полосы отражают также локальные особенностям обеих сигналов.

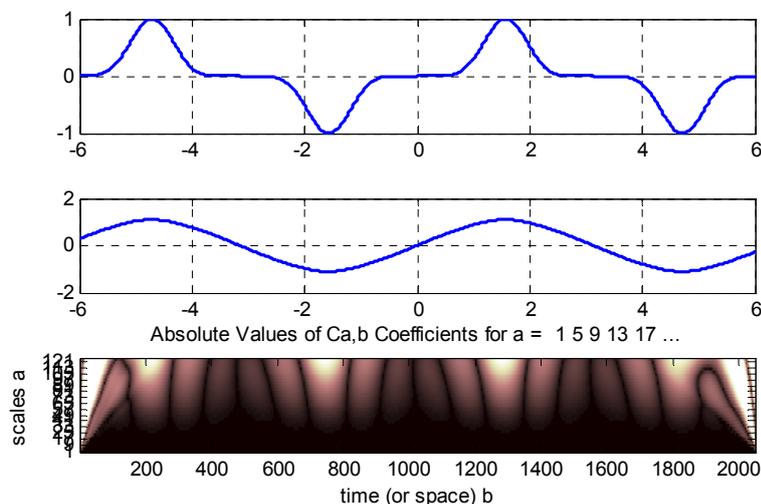


Рис. 4.27. Вейвлет-спектрограмма суммы синусоидального сигнала и умноженной на малый коэффициент дополнительной компоненты

Рассмотренные до этого сигналы описывались заранее известными функциями. Они точно были определены для каждого момента времени или, как говорят, были детерминированными. Однако в электрических цепях часто встречаются случайные сигналы, которые могут принимать бесконечное число форм. Флуктуационные процессы, обусловленные случайным характером процессов, происходящих в компонентах электрической цепи, называют «шумом». «Шум» зарождается в результате случайного, на микроскопическом уровне, поведения носителей заряда внутри компо-

нентов электрической цепи (из-за случайного характера появления и исчезновения электронов, изменения скорости их движения и прочее).

Поэтому изучим теперь сигнал в виде синусоиды с двумя разрывами первого рода, на который накладывается «шум» и сильно искажает его. «Шум», несмотря на различную природу, представим в виде последовательности импульсных сигналов, похожих по форме, непредсказуемых по амплитуде и длительности и случайно расположенных по оси времени. Естественно, что наложение шумов ухудшает обнаружение скачков в сигнале, поскольку, по существу, шум это почти те же скачки с произвольными значениями уровня и положения.

График сигнала в виде синусоиды, «шума» и вейвлет-спектрограмма суммарного сигнала показаны на рис. 4.28.

Вейвлет-спектрограмма сигнала, несмотря на его сильное искажение шумами, в своей верхней части отчетливо показывает наличие двух разрывов. В нижней части спектрограммы видна весьма сложная структура шумов, что является свидетельством высокой разрешающей способности вейвлетов при выявлении «тонкой» структуры сигналов.

Таким образом, те особенности сигнала, которые почти незаметны на графике сигнала, вообще не наблюдаются на спектре Фурье, прекрасно видны на вейвлет-спектрограммах сигнала. Это делает анализ сигнала более «прозрачным» и многое проясняет в его сущности.

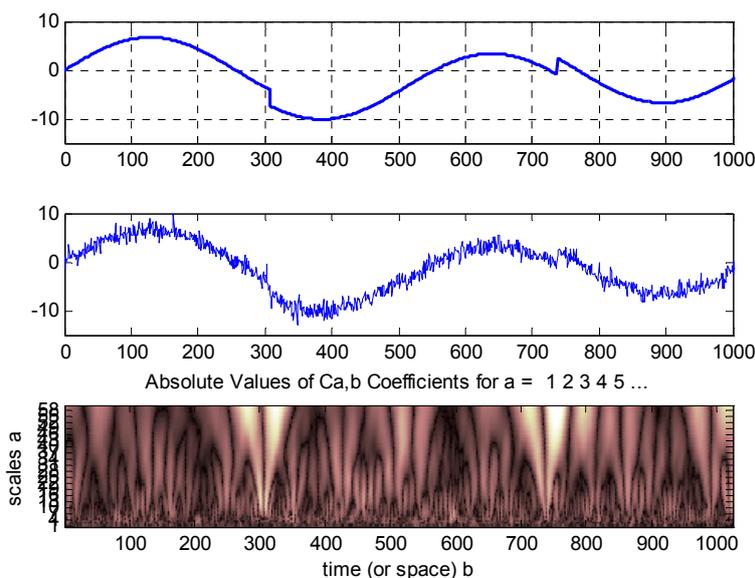


Рис. 4.28. Вейвлет-спектрограмма сигнала с «шумом»

4.5.5. Использование вейвлет-анализа для удаления шумов и «сжатия» сигналов

При вейвлет-анализе сигнал раскладывается на аппроксимирующие коэффициенты, которые представляют сглаженный сигнал, и детализирующие коэффициенты, отражающие вариации сигнала (высокочастотные составляющие спектра сигнала).

Первый известный факт заключается в том, что флуктуационные процессы на контактах компонентов электрической цепи, именуемые «шумом», как и все кратковременные особенности сигнала, создают высокочастотные составляющие спектра. Следовательно, шумовая компонента сигнала больше отражается в детализирующих коэффициентах cD . Отсюда следует, что для удаления шума следует специальным образом обработать детализирующие коэффициенты. Вторым известным фактом является то, что уровень шумовой компоненты обычно меньше по модулю, чем у основного сигнала. Поэтому простейший способ удаления шума состоит в том, чтобы сделать нулевыми значения детализирующих коэффициентов, которые по величине меньше некоторого порогового значения.

Таким образом, задав некоторый порог для их уровня и срезав (или ограничив) детализирующие коэффициенты с высоким содержанием шумовых компонент, можно уменьшить уровень шумов. При этом возможно как глобальное ограничение всех коэффициентов по уровню, одинаковое для всего сигнала и всех коэффициентов, так и локальное ограничение, учитывающее изменяющийся характер сигнала. Эта процедура называется *пороговой обработкой коэффициентов (трешолдингом)*.

Широкое распространение получили такие методы пороговой обработки, как жесткий трешолдинг и мягкий трешолдинг.

При *жесткой пороговой обработке* сохраняются неизменными все коэффициенты, большие или равные по абсолютной величине порога λ , а меньшие коэффициенты обращаются в нуль.

При *мягкой пороговой обработке* наряду с обращением в нуль коэффициентов, по модулю меньших, чем λ , происходит уменьшение по модулю остальных коэффициентов на величину λ .

Процесс декомпозиции и реставрации сигнала определяется деревом, представленным в графической форме, которое отражает, по сути, работу с частотными фильтрами. При этом следует иметь в виду то обстоятельство, что полное дерево пакетного вейвлет разложения со-

держит много коэффициентов. Изучение всех полученных коэффициентов пакета затруднительно ввиду их большого числа. Кроме того, некоторые из коэффициентов могут быть малоинформативными. Поэтому очень важно «взять в работу» не все дерево, а некое поддерево оптимальной величины в смысле числа коэффициентов и их информативности.

Для нахождения наиболее целесообразного количества коэффициентов используют различные критерии, но наибольшее распространение получили критерии, позволяющие оценить информативность набора коэффициентов и основанные на определении энтропии.

Очевидно, что полученные о чем либо сведения будут тем ценнее и содержательнее, чем больше была их неопределенность до получения этих сведений. В качестве меры неопределенности и применяется специальная характеристика, именуемая энтропией. *Энтропия* (как величина, обратная неопределенности) будет равна нулю, если о событии все достоверно известно (когда нет неопределенности). И, наоборот, энтропия увеличивается и обращается в максимум в ситуации, чем больше возможных событий и чем более они равновероятны (нет приоритета у какого нибудь события и трудно предсказать, что произойдет).

Если вейвлет-коэффициенты получаются малыми и их появление почти равновероятно, то энтропия получается большой. И наоборот, энтропия мала, если коэффициенты существенно отличаются. Понятно также, что любое усреднение коэффициентов увеличивает энтропию.

Для выбора необходимого числа коэффициентов вычисляют одну из следующих характеристик.

1. Энтропию Шеннона.
2. Логарифм энтропии.
3. Пороговую энтропии.
4. Энтропию «SURE».

При этом используется следующая стратегия: сначала строится полное дерево разложения, затем снизу-вверх анализируются пары узлов, имеющие общий корень. Если при переходе от коря к узлам энтропия не уменьшается, эта пара заменяется на корень. Возможен также упрощенный вариант – подобрать оптимальный уровень, т. е. высоту полного дерева, при котором энтропия минимальна.

В общем случае, при решении задачи шумоподавления необходимо: оценить спектральный состав шумовой компоненты, выбрать тип пороговой обработки (трешолдинга) и критерий расчета самого порога.

От выбора порогового уровня фона (оценки дисперсии шума) зависит качество шумоподавления сигнала, оцениваемое в виде отношения сигнал/шум. Задание малых значений порога сохраняет «шум» в коэффициентах детализации и поэтому приводит лишь к незначительному увеличению отношения сигнал/шум. При больших значениях порога можно потерять коэффициенты, которые несут существенную информацию о самом сигнале. Поиск оптимального значения λ_0 означает отыскание такого порога, который при наименьшем смещении восстановленного сигнала обеспечивает наибольшее значение отношения сигнал/шум.

Определить оптимальное значение порога λ_0 , соответствующее уровню k разложения сигнала, позволяет определить критерий Штейна не смещенной оценки риска (Stein's unbiased risk estimation), как аргумент некоторой функции риска $R_k(\lambda)$, при котором данная функция принимает минимальное значение.

Качество шумоподавления сигнала (отношение сигнал/шум) зависит также от способа применения трешолдинга. Используются следующие *способы пороговой обработки*:

1. *Общий* (глобальный) трешолдинг, осуществляемый с использованием фиксированного значения порога λ - значения, единого для всех уровней и коэффициентов детализации сигнала;

2. *Многоуровневый* трешолдинг, осуществляемый с использованием порога, значения которого изменяются от уровня к уровню;

3. *Локальный* (адаптивный) трешолдинг, подразумевающий использование порога λ , переменного не только по уровню разложения, но также зависящего от позиции коэффициентов детализации на данном уровне.

Таким образом, процедура удаления шума сигнала, а также его компрессии состоит из трех шагов.

1. Осуществляется декомпозиция сигнала. При этом выбирается вейвлет и уровень разложения k и, затем, вычисляется вейвлет-разложение исходного сигнала до уровня k .

2. Выполняется пороговая обработка детализирующих коэффициентов. Для каждого уровня от 1 до k выбирается порог и применяется соот-

ветствующая выбранному способу пороговая обработка детализирующих коэффициентов.

3. Наконец, проводится восстановление сигнала по новым коэффициентам. Другими словами, осуществляется вейвлет-реконструкция, основанная на первоначальных аппроксимирующих коэффициентах уровня k и модифицированных детализирующих коэффициентах уровней от 1 до k .

На рис. 4.29 показаны результаты очистки от шумов сложного сигнала, полученные использованием *локального (адаптивного) трешолдинга*.

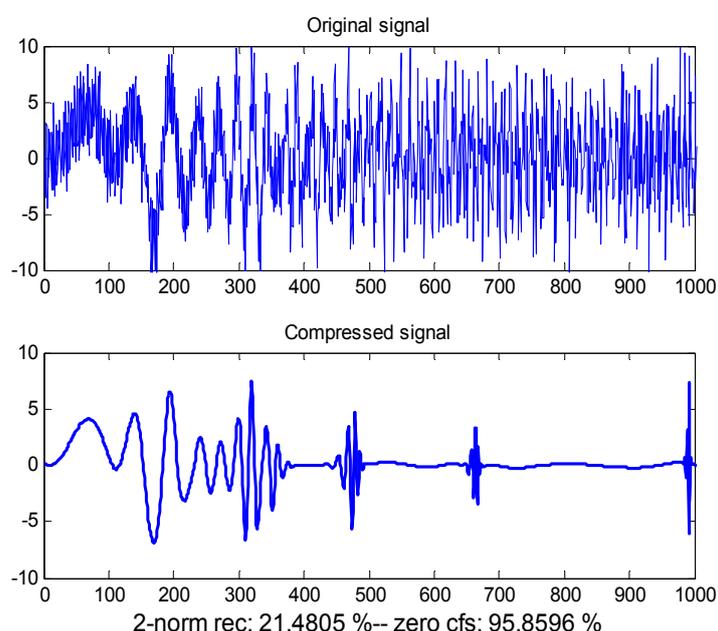


Рис. 4.29. Результаты очистки от шумов сложного сигнала

Вейвлеты открывают новые и необычные подходы в сокращении избыточной информации или как говорят в «компрессии» сигнала или изображения.

Возьмем в качестве примера сигнал, получаемый при снятии электрокардиограммы. Он позволяет судить о работе сердца. Это, как вы видели, довольно сложный импульсный сигнал, несущий в себе довольно много информации. Докторам такая информация очень важна и они часто ею пользуются. Если взять «картинку» электрокардиограммы и попытаться ее передавать с помощью Интернета, то обнаружится, что она «занимает» мегабайтные объемы и ее передача требует довольно

длительного времени, не говоря уже о стоимости. Оказывается, с помощью вейвлет-преобразований объем передаваемой информации можно сократить в сотни раз или, как говорят, осуществить *компрессию* (сжатие) сигнала.

Другим примером необходимости применения техники «сжатия, компрессии», только теперь уже изображений, является создание архива отпечатков пальцев. Криминалистические отделы милиции завалены миллионами таких отпечатков различного качества. К сожалению их сканирование ведет к появлению больших графических файлов, для хранения которых требуется множество дорогих файловых серверов. Опять же существуют те же проблемы с их передачей по каналам связи. И здесь, понятно, весьма актуальна задача компрессии. Обработка снимков по вейвлет технологии сжатия информации дала прекрасные результаты. При сжатии информации в десятки раз качество снимка остается хорошим и он (отпечаток пальца) мало отличается от исходного.

Идея компрессии, применительно к вейвлетам, та же –ограничение уровня детализирующих коэффициентов. Кратковременные особенности сигнала (а к ним можно отнести и шумы в виде множества таких особенностей) создают детализирующие коэффициенты. Задав некоторый порог для их уровня, а еще лучше, установив для каждого коэффициента свой уровень отдельно, можно осуществить компрессию сигнала.

Для сжатия используется ранее описанная процедура, содержащая три шага. При этом надо иметь в виду, что более высокую степень компрессии обеспечивает установка локальных порогов.

Резюмируя сказанное, еще раз подчеркнем следующее. Вейвлет-преобразование имеет существенное преимущество перед преобразованием Фурье прежде всего за счет свойства локальности у вейвлетов. В вейвлет-преобразовании операция умножения на окно как бы содержится в самой базисной функции, которая сужает и расширяет окно: с ростом параметра a увеличивается разрешение по частоте и уменьшается разрешение по времени, а с уменьшением этого параметра уменьшается разрешение по частоте и увеличивается по времени. Отсюда появляется возможность адаптивного к сигналу выбора параметров окна. Подвижное частотно-временное окно одинаково хорошо выделяет и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов. Это свойство вейвлет-преобразования дает ему большое преимущество при анализе локальных свойств сигналов.

Используя вейвлет-преобразование возможно локально реконструировать сигнал: реконструировать только часть сигнала или выделить вклад определенного масштаба. Если вейвлет - коэффициенты подвержены случайным ошибкам, они будут действовать на реконструируемый сигнал локально вблизи положения возмущения, а преобразование Фурье распространяет ошибки по всему восстанавливаемому сигналу. Преобразование Фурье также чувствительно к фазовым ошибкам, а при вейвлет-преобразовании этого нет.

Именно благодаря ряду свойств, принципиально отсутствующих у преобразования Фурье, вейвлет-преобразование нашло широкое применение для анализа тонкой структуры сигналов и изображений, для их сжатия и очистки от шума, что важно и полезно.

Контрольные вопросы

1. Что называют спектральным анализом сигнала или преобразованием Фурье (ПФ)? Какие функции применяются в качестве базисных?
2. Охарактеризуйте основные свойства кратковременного или оконного преобразованию Фурье. В чем заключается его основной недостаток?
3. В чем заключается эффект Гиббса?
4. Сформулируйте принцип неопределенности Гейзенберга.
5. Каким образом произвольная кусочно-непрерывная функция $u(t)$, для которой выполняется условие $\int |u(t)|^2 dt < \infty$, может быть представлена в виде обобщенного ряда Фурье по системе функций $\{\varphi_n(x)\}$? Что называют спектром сигнала $u(t)$ в ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$?
6. Каким важным свойством обладает обобщенный ряд Фурье?
7. Дискретные спектры. Определите это понятие. Какие сигналы обычно характеризуют с их помощью и как?
8. Сплошной спектр. Определите это понятие. Какие сигналы обычно характеризуют с их помощью и как?
9. Приведите определение периодического сигнала.
10. Запишите выражения для тригонометрического ряда Фурье и его коэффициентов.
11. В каких базисах обычно выполняют спектральное представление периодического сигнала?

12. Как можно представить произвольный периодический сигнал $u(t)$ конечной мощности на интервале (t_0, t_0+T) комплексным рядом Фурье? Приведите формулу для вычисления коэффициентов ряда.
13. Дайте определение спектральной плотности одиночного импульса. Как связаны с ней коэффициенты комплексного ряда Фурье?
14. Для каких сигналов применяется разложение в интеграл Фурье и с какой целью? Запишите выражение.
15. Что характеризует модуль спектральной функции $S(\omega)$?
16. Определите понятие обратное преобразование Фурье для сигнала. С какой целью его применяют?
17. Сформулируйте и поясните основные свойства преобразования Фурье.
18. Чему равна спектральная плотность на нулевой частоте для сигнала любой формы?
19. Спектральную плотность дельта функции и спектральная функция единичной функции Хевисайда. Запишите их выражения.
20. Спектральная плотность прямоугольного импульсного сигнала. Приведите выражения для амплитудно-частотного и фазо-частотного спектров.
21. Модуль и аргумент, нули спектральной функции прямоугольного импульса. Охарактеризуйте эти понятия. Приведите выражения, описывающие их.
22. Спектральная плотность треугольного импульсного сигнала. Приведите выражения для амплитудно-частотного и фазо-частотного спектров.
23. Модуль и аргумент спектральной функции треугольного импульса. Охарактеризуйте эти понятия. Приведите выражения, описывающие их.
24. Охарактеризуйте понятие – дискретные сигналы. Приведите примеры.
25. Что называют дискретизирующей последовательностью? Запишите выражение для спектральной плотности дискретизированного сигнала. Определите понятия – дискретное и быстрое преобразование Фурье.
26. Определите понятие пачки импульсов. Приведите пример спектра пачки, состоящей из четырех импульсов прямоугольной формы. Охарактеризуйте его.

27. Перечислите последовательность действий при построении спектра периодического сигнала. Какой параметр называют скважностью?
28. Запишите формулу Парсеваля. Что она характеризует?
29. Объясните понятие энергетического спектра сигнала $u(t)$.
30. На чем основано кратковременное или оконное преобразование Фурье? Изложите его преимущества.
31. Охарактеризуйте понятие – вейвлет (wavelet).
32. Перечислите основные свойства волнообразных пакетов-вейвлетов и основные отличия разложения сигнала по вейвлетам от разложения по экспоненциальным функциям.
33. Что называют масштабирующей или скейлинг-РНИ («фи») функцией $\varphi(t)$ и каким условиям она должна удовлетворять?
34. Вейвлет-функций PSI («пси») $\psi(t)$. Охарактеризуйте это понятие.
35. Какие свойства базисной функции $\psi_0(t)$ отражают параметры a и b ?
36. Что представляе собой Фурье образ вейвлет функции $\{\psi(t)\}$ и график спектральной плотности ?
37. Дайте определение центральной частоте вейвлета.
38. Запишите аналитическое представление непрерывного прямого вейвлет-преобразования (CWT-continuous wavelet transform). Охарактеризуйте его.
39. Что означает понятие сетка дискретизации. Охарактериуйте понятие – диадное (dyadic) вейвлет-преобразование. Сформулируйте основную особенность диадного вейвлет-преобразования.
40. Обратное непрерывное вейвлет-преобразование. Запишите аналитическое представление. Для решения каких задач оно служит?
41. Можно ли представить вейвлет в виде реализации двух фильтров – низкочастотного, с комплексным коэффициентом передачи $Lo(\omega)$, и согласованного с ним высокочастотного $Hi(\omega)$? Какой из них дает частотный образ для аппроксимации (грубого приближения) сигнала, а какой для его детализации?
42. Какие 4 фильтра соответствуют каждому ортогональному вейвлету?
43. Сформулируйте алгоритм Малла для Lo фильтров. Где он используется?
44. Охарактеризуйте понятие вейвлет-пакетов и их использование.

45. Нарисуйте схему разложения сигнала на аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты. Поясните ее.
46. Раскройте содержание понятия – вейвлет-декомпозиция сигнала.
47. Охарактеризуйте пакетное вейвлет-преобразование. Для чего оно используется?
48. На чем базируется и что представляет собой вейвлет-спектрограмма?
49. Охарактеризуйте коэффициенты a и b в вейвлет-спектрограммах. Что называют временным масштабом?
50. Приведите и проанализируйте графики сигнала в виде синусоиды с «шумом» и вейвлет-спектрограмму суммарного сигнала.
51. Использование вейвлет-анализа для удаления шумов и «сжатия» сигналов. Кратко изложите идею метода. Охарактеризуйте понятие пороговой обработки коэффициентов (трешолдинг).
52. Мягкая и жесткая пороговая обработка (жесткий трешолдинг и мягкий трешолдинг). В чем их суть и отличия?
53. Как осуществляется процесс декомпозиции и реставрации сигнала? Охарактеризуйте понятие дерева (графическая форма).
54. Раскройте содержание понятия энтропия. Сформулируйте критерий Штейна несмещенной оценки риска.
55. Перечислите основные способы пороговой обработки.
56. Приведите примеры применения вейвлетов для компрессии (сжатия) сигнала.

Рекомендуемая литература

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук – 1966. – Т. 166. – № 11. – С. 1145 – 1170.
2. Башарин С.А. Теоретические основы электротехники: теория электрических цепей и электромагнитного поля : Учебное пособие для вузов / С.А. Башарин, В.В. Федоров. – М.: Academia, 2004. – 304 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарика, 2000. – 638 с.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.
5. Блаттер Н.К. Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2001. – 338 с.
6. Гультьяев А.К. Визуальное моделирование в среде Matlab: Учебный курс. – Санкт-Петербург: КОРОНА-Принт, 2000. – 228 с.
7. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1972. Т.2. – 287 с.
8. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. Е.В. Мищенко; Под ред. А.П. Петухова – М.: РХД, 2001. – 151 с.
9. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук – 2001. – Т. 171. – № 5. – С. 465 – 501.
10. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
11. Жуков А.И. Метод Фурье в вычислительной математике. – М.: Наука. Физматлит, 1992. – 485 с.
12. Иванов И.И. Электротехника. Основные положения, примеры и задачи / И.И. Иванов, А.Ф. Лукин, Г.И. Соловьев. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 192 с.
13. Иванов И.И. Электротехника: Учебник для вузов / И.И. Иванов, В.С. Равдоник. – М.: Высшая школа, 1984. – 375 с.
14. Карлащук В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 705 с.
15. Киселев Б.М. Matlab. Пакет Simulink // Радиомир. Ваш компьютер – 2005 – №9. – С14 – 18.

16. Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники. Сборник задач: учебное пособие для вузов / Н.В. Коровкин, Е.Е. Селина, В.Л. Чечурин. – СПб.; М.; Х.; Минск: Питер, 2004. – 512 с.
17. Марпл-мл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
18. Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники: Курс лекций: Учеб.пособие для высших и сред.учеб.заведений. – СПб.: Корона-Принт, 2000 . – 366 с.
19. Рекус Г.Г., Белоусов А.И. Сборник задач по электротехнике и электронике: Учебное пособие для вузов / Г.Г. Рекус, А.И. Белоусов. – М.: Высшая школа, 1991. – 416 с.
20. Черных И.В. Simulink: Инструмент моделирования динамических систем. – <http://matlab.ru>, раздел «Simulink».
21. Четверухин Б.М. Основы электротехники и электроники: Конспект лекций / Б.М. Четверухин, Г.С. Прокудин. – К.: Изд-во Европейского ун-та, 2002. – 149 с.
22. Чуи К. Введение в вейвлеты / Пер. с англ. Под ред. Я.М. Жилейкина – М.: Мир, 2001. – 318 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Основы представления токов и напряжений в электротехнике	7
1.1. Неизменные во времени токи и напряжения в электрической цепи. Термины и определения	7
1.2. Положительные направления токов, напряжений и ЭДС в элементах электрической цепи	14
1.3. Гармонические токи и напряжения в электрической цепи	18
1.4. Символический метод комплексных амплитуд	23
1.5. Импульсные токи и напряжения электрической цепи	28
Контрольные вопросы	40
2. Основные компоненты электрической цепи и их свойства	42
2.1. Классификация компонентов (элементов) электрической цепи	43
2.2. Источники энергии (генераторы) электрической цепи	46
2.2.1. Общие вопросы характеристики источников энергии	46
2.2.2. Химические источники электрической энергии	58
2.3. Резистивные элементы и резисторы электрической цепи	70
2.3.1. Идеализированный резистивный элемент	70
2.3.2. Резисторы, выпускаемые промышленностью	74
2.3.3. Термисторы	77
2.3.4. Варисторы и супрессоры импульсных перепадов напряжения	78
2.3.5. Предохранители	79
2.4. Коммутационные изделия и разъемные соединители	81
2.5. Емкостные элементы и конденсаторы электрической цепи	88
2.5.1. Идеализированный емкостной элемент	88
2.5.2. Конденсаторы, выпускаемые промышленностью	93
2.6. Индуктивные элементы и индуктивности электрической цепи	98
2.6.1. Идеализированный индуктивный элемент	98
2.6.2. Катушки индуктивности и дроссели	104
2.7. Частотные свойства пассивных компонентов электрической цепи	108

Контрольные вопросы	108
3. Методы анализа электрических цепей	111
3.1. Понятия топологии и законы электрической цепи	113
3.1.1. Понятия, характеризующие соединения элементов цепи	113
3.1.2. Основные законы электрической цепи	115
3.2. Соединения элементов цепи и их свойства	117
3.2.1. Последовательное соединение элементов цепи	117
3.2.2. Параллельное соединение элементов цепи	120
3.2.3. Смешанное соединение элементов цепи	123
3.2.4. Соединение элементов цепи «звездой» и «треугольником»	124
3.2.5. Последовательный колебательный контур и его свойства	126
3.2.6. Параллельный колебательный контур и его свойства ...	130
3.2.7. Пьезоэлектрический элемент и его свойства	136
3.3. Методы расчета и анализа электрических цепей с гармоническими источниками	138
3.3.1. Метод контурных токов	138
3.3.2. Метод узловых напряжений (потенциалов)	140
3.3.3. Энергетические соотношения в электрической цепи	142
3.3.4. Частотные свойства электрической цепи	144
3.3.5. Нули и полюсы передаточной характеристики	151
3.4. Методы расчета и анализа электрических цепей с коммутирующими элементами и импульсными источниками ...	156
3.4.1. Общие сведения о переходных процессах	156
3.4.2. Операторный метод расчета переходных процессов	159
3.4.3. Обобщенные функции. δ - функция Дирака	167
3.4.4. Обобщенные характеристики электрических цепей	168
3.5. Трехфазные и магнитные цепи	171
3.5.1. Трехфазные цепи	171
3.5.2. Индуктивные связи в электрических цепях. Трансформаторы	173
3.5.3. Основные понятия магнитных цепей. Электромагнит- ные устройства с притягивающимися элементами	180
Контрольные вопросы	185
4. Спектральное представление токов и напряжений	

в электрических цепях	190
4.1. Основы общей теории спектральных представлений сигнала	194
4.1.1. Понятие спектра сигнала	194
4.1.2. Спектральное представление периодического сигнала	197
4.1.3. Спектр произвольного (непериодического) сигнала. Интегральное преобразование Фурье	200
4.1.4. Основные свойства преобразования Фурье	202
4.2. Примеры практического определения спектра непериодического сигнала	205
4.2.1. Спектральная функция	205
4.2.2. Спектральная функция единичной функции Хевисайда	205
4.2.3. Спектральная плотность прямоугольного импульсного сигнала	206
4.2.4. Спектральная плотность треугольного импульсного сигнала	209
4.2.5. Дискретные сигналы и их спектры	214
4.2.6. Спектр пачки импульсов	218
4.3. Определение спектра периодического сигнала	219
4.4. Разновидности спектров	221
4.4.1. Понятие энергетического спектра	221
4.4.2. Явление Гиббса	223
4.4.3. Оконное преобразование Фурье	224
4.5. Основы вейвлет-преобразований сигналов	227
4.5.1. Основные идеи, лежащие в основе вейвлет-преобразований	227
4.5.2. Общие сведения о вейвлет-преобразованиях	227
4.5.3. Практическое осуществление вейвлет-преобразований	235
4.5.4. Использование вейвлет-анализа для выявления особенностей сигналов	245
4.5.5. Использование вейвлет-анализа для удаления шумов и «сжатия» сигналов	252
Контрольные вопросы	258
Рекомендуемая литература	262

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

Часть 1

Авторы: **Гоков Александр Михайлович**
Жидко Евгений Анатольевич

Ответственный за выпуск **Медведь О. И.**

Ответственный редактор **Седова Л. Н.**

Редактор **Демченко Н. И.**

Корректор **Демченко Н. И.**

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ ТА ЕЛЕКТРОНІКИ. ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Навчальний посібник

Частина 1

Автори: **Гоков Олександр Михайлович**
Жидко Євген Анатолійович

ISBN 966-676-141-6

План 2006 г. Поз. №119-П.

Подл. в печ. *42 05 4000* Формат 60 × 90 1/16. Бумага MultiCopy. Печать Riso.
Усл.-печ. л. 16,75. Уч.-изд. л. 17,59. Тираж *420* экз. Заказ № *325*

Свидетельство о внесении в Государственный реестр субъектов издательского
дела Дк №481 от 13.06.2001 г.

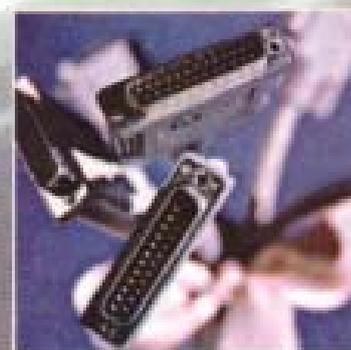
Издатель и изготовитель — издательство ХНЗУ, 61001, г. Харьков, пр. Ленина, 91

Гоков А.М., Жидко Е.А.

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

У Ч Е Б Н О Е П О С О Б И Е

Приведены основные сведения из общей теории электроники, фундаментальные идеи, термины и определения. Излагаются принципы построения, модели, характеристики и параметры простейших структур полупроводниковой электроники — диодов — и более сложных — транзисторов. Изучаются основы микроэлектроники и оптоэлектроники, модели, принципы построения и функционирования реальных устройств. Рассматриваются полупроводниковые изделия силовой электроники, их практические реализации и применение. Приведен широкий круг характерных практических примеров.



ИЗДАТЕЛЬСТВО **ХНЭУ**

МАРТИН 2006