

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Індивідуальні навчально-дослідні завдання  
та методичні рекомендації  
до їх виконання з навчальної дисципліни  
**"ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ  
ТА ЕЛЕКТРОНІКИ"**  
для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні  
науки", "Видавничо-поліграфічна справа"  
денної форми навчання



Х А Р К І В  
ВИДАВНИЦТВО ХНЕУ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Індивідуальні навчально-дослідні завдання  
та методичні рекомендації до їх виконання  
з навчальної дисципліни

**"ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ  
ТА ЕЛЕКТРОНІКИ"**

для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні науки",  
"Видавничо-поліграфічна справа"  
денної форми навчання

Харків. Вид. ХНЕУ, 2008

I-60 Індивідуальні навчально-дослідні завдання та методичні рекомендації до їх виконання з навчальної дисципліни "Основи електротехніки та електроніки" для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні науки", "Видавничо-поліграфічна справа" денної форми навчання / Укл. Є. А. Жидко, О. М. Гоков, В. Ю. Вдов'яков. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2008. – 84 с. (Укр. мов.)

Подано індивідуальні навчально-дослідні завдання та методичні рекомендації до їх виконання.

Рекомендовано для студентів, що навчаються за профілем "Комп'ютеризовані технології" й "Системи видавничо-поліграфічних виробництв", а також для тих, хто вивчає однойменну дисципліну за іншими профілями підготовки.

## Вступ

Однією з форм самостійної роботи сучасного навчального процесу у вищій школі є виконання студентами індивідуальних навчально-дослідних завдань (ІНДЗ). ІНДЗ – вид позааудиторної індивідуальної роботи студента з виконання навчального, навчально-дослідного або проєктно-конструкторського завдання, яке використовується в процесі вивчення програмного матеріалу навчальної дисципліни. ІНДЗ – це завершена теоретична або практична робота в межах навчальної програми дисципліни, яка виконується на основі знань і умінь, одержаних у процесі лекційних занять, лабораторних робіт, охоплює різні питання або зміст навчальної дисципліни.

*Мета ІНДЗ* – самостійне вивчення частини програмного матеріалу, систематизація, поглиблення й закріплення знань із навчальної дисципліни, практичне їх використання, розвиток умінь самостійної роботи.

### 1. Навчальне завдання

Організація, що займається ІТ-технологіями та обробкою цифрових потоків на поліграфічних підприємствах, організовує семінар на тему "Способи представлення в електротехніці і електроніці сигналів, які орієнтовані на комп'ютерні технології обробки". Після вивчення стану справ у цій сфері, а також з метою пошуку перспективних кандидатів для фірми, менеджери організації вважають доцільним залучити до семінару студентів. З'ясувавши про ваші успіхи у сфері вивчення аналогічної навчальної дисципліни, менеджери організації просять вас зробити люб'язність і виступити з доповіддю на семінарі.

Вас повідомили, що порівняння різних, орієнтованих на комп'ютерну обробку способів представлення сигналу ви повинні проводити, використовуючи, як приклад, гармонійний сигнал. Фахівці вважають, що це зручно, наочно й дозволить зрозуміти, в чому полягають суттєві відмінності такого традиційного й широко вживаного в електротехніці сигналу з іншими видами сигналів. Для визначеності вам рекомендують узяти гармонійний сигнал у вигляді напруги з параметрами, які б ідентифікували саме вашу доповідь. Вас просять показати в доповіді як, на ваш погляд, взагалі слід оцінювати сигнали, на підставі яких параметрів необхідно проводити їх порівняння. У доповіді ви повинні продемонструвати, в чому полягають переваги й недоліки різних способів представлення сигналів для цифро-

вих технологій. Передбачається, що у разі потреби, ви повинні консультувати співробітників, щоб допомогти їм правильно вибрати сигнал для вирішення практичних завдань, що є у них, і допомогти провести необхідні розрахунки.

Організатори семінару, слідуючи висловлюванню Іммануїла Канта "в усякій науці стільки істини, скільки в ній математики", просять доповідачів якнайширше використовувати представлення сигналів і їх оцінок в математичній формі та ілюструвати міркування наочними графіками. При доповіді також не треба забувати висловлювання українського філософа XVIII століття Григорія Сковороди "Ми повинні бути вдячні Господові за те, що він створив світ таким, що все просте в ньому істинне, а все складне – помилкове".

Доповідь може складатися з двох частин і повинна бути представлена у формі документа WORD в зручному для вас вигляді. Якщо виникне необхідність, то комп'ютерну презентацію або розміщення вашої доповіді на сайті, виконують співробітники організації.

## 2. Методичні рекомендації до виконання навчального завдання

На початку, як рекомендують організатори семінару, має сенс зупинитися на таких питаннях: а) що таке сигнали взагалі; б) з яких позицій характеризують сигнали і яким чином їх представляють; в) що таке електричний гармонійний сигнал. Наприклад, використовуючи рекомендовану літературу, в доповідь з цього питання можна включити наступне.

Використовуване в технічній літературі поняття "сигнал" (від лат. Signum – знак) є дуже широким. Відповідно до прийнятої традиції під сигналом розуміють представлений відповідним чином процес зміни в часі будь-якого фізичного стану об'єкта, призначеного для відображення, реєстрації й передачі повідомлення. Під терміном "представлений" розуміється, що сигнал певним чином описаний, наприклад, за допомогою математичних виразів або набору чисел. Під "об'єктом" розуміється виріб, створений людиною для досягнення певної мети. Кожен блок електротехнічної або електронної системи, відповідно до принципу його функціонування, формує сигнал або здійснює певну операцію над сигналом (його перетворення). Наприклад, звук, що є яким-небудь джерелом, приводить у коливання мембрану мікрофона внаслідок чого на виході мікрофона ви-

никає електричний сигнал, тобто напруга (або струм), форма якого однозначно відповідає вихідному звуковому повідомленню (під формою розуміється закон зміни сигналу в часі). За допомогою сигналів також характеризують фізичні процеси, які супроводжують перетворення, здійснені відповідними фізичними пристроями. За допомогою сигналів можна показати, що надходить від первинного джерела повідомлень і як, наприклад, за допомогою мікрофона або телевізійної камери це "щось" перетвориться в електричний сигнал. Звичайно, і в цьому випадку підкреслюється, що сигнал – це носій певних відомостей про яку-небудь подію, стан об'єкта та його режим роботи, тобто – якоїсь інформації. У електротехніці й електроніці, хоча це не зовсім суворо, з терміном "сигнал" зв'язують також коливання, що створюються еталонними генераторами й еталонні дії на елементи електричного ланцюга.

Залежно від призначення функціонального блоку або ланцюга, характеру їх існування, сигнали можуть мати різну фізичну природу. Зокрема, сигнали можуть бути оптичними, магнітними, пневматичними, електричними. Вони можуть бути поділені на різні групи або класи. Основними величинами, що характеризують стан електричного ланцюга, є електрична напруга та струм, тому в електротехніці і електроніці основним є клас електричних сигналів. У ньому сигнал представляють як напругу або струм, змінну за певним законом у часі.

Сигнали в електричних ланцюгах, якщо продовжити їх класифікацію, можна розділити на *детерміновані й випадкові, періодичні та неперіодичні, інфінітні й фінітні, безперервні, дискретні, квантовані та цифрові*.

*Детермінований* сигнал відрізняється тим, що закон його зміни відомий, а модель не містить невідомих параметрів. Такі сигнали використовують для пізнання процесів, що відбуваються в обладнанні електротехніки й електроніки, опису процесів передачі енергії, при проведенні вимірювань і для інших цілей. Такий сигнал можна передбачити з ймовірністю одиниця, тому використовувані в техніці детерміновані сигнали, для опису їх на формальній мові, представляють у вигляді деякої математичної функції часу (функціональної залежності). Функціональна залежність припускає визначення аналітичних співвідношень між символами й тим самим дозволяє характеризувати форму сигналу. Сигнал, з цієї точки зору, це деяка математична функція, задана у фізичних координатах, яка однозначно відображає одну числову множину (прообраз  $T$ ) в іншу множину (образ  $U$ ) або, іншими словами, кожному числу  $t$  ставить у взаємно

однозначну відповідність число  $u = F(t)$ . При цьому множина  $t \in T$  на числовій прямій називається областю визначення сигналу, а сукупність значень, що приймаються сигналом, – областю його значень.

Детерміновані сигнали, у свою чергу, можна розділити на періодичні і неперіодичні. *Періодичним* називають сигнал, для якого існує відрізок часу (цикл) – період  $T$ , що відповідає умові періодичності  $u(t) = u(t + nT)$ . До періодичних сигналів відносять, наприклад, гармонійні сигнали і періодичні послідовності імпульсів різної форми. Слід мати на увазі, що в загальному випадку періодичні сигнали визначені в нескінченному інтервалі значень незалежної змінної, тобто від  $-\infty$  до  $+\infty$ . У літературі сигнали, що мають необмежену область визначення, називають *інфінітними* (необмеженими). Відповідно до позначень, прийнятих в математиці, область визначення інфінітного сигналу в нескінченному інтервалі значень незалежної змінної від  $-\infty$  до  $+\infty$  позначають як  $R = [-\infty, +\infty]$  – це безліч всіх дійсних чисел. Якщо  $t$  належить  $R$ , то це записують як  $t \in R$ . Фінітними називають сигнали, область визначення яких обмежена  $t \in R_{\text{сom}}$ ,  $R_{\text{сom}} = [-t_1, t_2]$ . Фінітні в інтервалі  $(t_1, t_2)$  сигнали є функції тотожно рівні нулю поза цим кінцевим інтервалом  $(t_1, t_2)$ . Сукупність всіх дійсних чисел, поміщених між початком і кінцем відрізка, називають *континуумом*.

У технічній літературі широко використовуються поняття основи або носія функції. Основу (support – supp) сигналу, що змінюється в часі, позначають  $\text{supp } T = \{t \in R\}$ . Носієм сигналу є область його визначення. Якщо функція  $u(t)$  визначена  $t \in [t_H, t_K]$  і дорівнює нулю  $u(t) = 0$  при  $t < t_H$ , а  $t_K - t_H$  відносно невелике, то говорять, що функція має компактний носій. Якщо і  $t_K = \infty$  або має місце  $\text{supp } T$ , то основа функції називається некомпактною і функція не має компактного носія. При  $\text{supp } T < T_m < T_m$  основа сигналу є компактною, тобто обмеженою і замкнутою. Зазначимо, що введення компактного носія сигналу цінне у зв'язку з можливістю заміни нескінченних меж інтегрування на кінцеві. З іншого боку, використання ідеалізованих інфінітних періодичних сигналів, в припущенні, що вони не мають початку й кінця в часі, дозволяє, у ряді випадків, спростити дослідження електричних ланцюгів. Слід мати на увазі, що періодичні гармонійні сигнали компактного носія не мають. Це, як ми побачимо, свідчить про те, що фізично такі сигнали існувати не можуть.

*Випадковими* називають сигнали з випадковим характером зміни в часі, які можна представити тільки довільними функціями часу (не можна представити детермінованою функцією). Миттєві значення випадкових сигналів наперед невідомі і можуть бути передбачені з ймовірністю, меншою одиниці. Такі сигнали можна описати лише за допомогою статистичних (імовірнісних, стохастичних) залежностей. При цьому суворо певному значенню  $x$  може відповідати безліч значень величини, тобто величина  $y$  *поводиться* як випадкова змінна, здатна приймати різні значення з певною ймовірністю. При стохастичному зв'язку поява однієї події не завжди викликає появу іншої, залежної від першої, а лише змінює ймовірність її появи. До випадкових сигналів відносять різні види перешкод від внутрішніх джерел "шумів" електричних приладів і від інших чинників, що діють в електричному ланцюзі. Сигнали такого типу зустрічаються при передачі інформації у вигляді мови, музики і ін.

Більшість реальних сигналів, які є зовнішніми, або формуються датчиками яких-небудь фізичних величин, є безперервними. *Безперервним* називається фізичний процес, параметри якого змінюються безперервно і можуть в заданому діапазоні приймати як всі види чисельних значень (наприклад, у вигляді цілих, раціональних, речовинних, ірраціональних чисел), так і мати нескінченно велике число значень. Безперервний сигнал при описі на формальній математичній мові представляють у вигляді аналітичних співвідношень між символами. Сигнали у вигляді функціональної залежності, в якій аргументом є час, позначаються символами латинського алфавіту, наприклад  $i(t)$ . Область визначення і область значення безперервного сигналу безперервна, тобто для кожної точки області визначення і області значення можна знайти точку, віддалену від неї на нескінченно малу відстань. Безперервні сигнали називають також *аналоговими*, підкреслюючи, що вони є якби аналогами природних об'єктів, що породжують їх, які, якщо відвернутися від квантових явищ, звичайно, вважаються безперервними.

Зазначимо, що сигнали можуть бути також дискретними або квантованими. Якщо область визначення сигналу складається з окремих точок, сигнал називають *дискретним*. Дискретний сигнал – це послідовність чисел, які називаються елементами дискретного сигналу. Якщо область значень сигналу складається з окремих точок, причому сигнал може приймати лише визначені, як кажуть "квантовані" значення, сигнал називають

вають *квантованим*. Квантований дискретний сигнал називають часто *цифровим*. Прикладом цифрового сигналу може бути послідовність чисел, записана в пам'яті цифрової обчислювальної машини. Якби ці числа можна було записувати з необмеженою кількістю цифр, тобто з нескінченно високою точністю, то це був би дискретний сигнал. Дискретні, квантовані і цифрові сигнали – це, як правило, штучні й у певному значенні абстрактні об'єкти. Проте такі сигнали нині широко використовуються в цифровій електроніці.

Вважається, що "фізичні теорії – це, перш за все, системи математичних відносин". При такому підході об'єкти реального світу й взаємодії між ними замінюють абстрактними математичними об'єктами (числом, вектором, множиною) і математичними відносинами (такими, як функція, функціонал, оператор і ін.). Для того, щоб зробити сигнали об'єктами теоретичного вивчення і розрахунків, сигнали ідеалізують і потім указують на їх спосіб математичного опису, тобто створюють математичну модель досліджуваного сигналу. *Математична модель сигналу* – це опис цього сигналу на формальній мові, яка дозволяє абстрагуватися від конкретної фізичної природи сигналу й надає можливість описувати саме ті властивості сигналів, які об'єктивно виступають як найбільш важливі. Слід мати на увазі також, що дослідник, керуючись всією сукупністю відомостей, які йому доступні, завжди має можливість вибрати з наявного арсеналу математичних моделей ті, які в конкретній ситуації найкращим чином описують фізичний процес при найбільшій простоті їх опису.

Найважливішими об'єктами дослідження електротехніки та електроніки, або тезаурусом дисципліни, є елементарні сигнали: гармонійні й імпульсні. Важливість класу гармонійних сигналів обумовлена, наприклад тим, що вони широко використовуються як тестові для аналізу характеристики електричних ланцюгів. На гармонійні сигнали часто "накладають" повідомлення і з їх допомогою переносять інформацію. Використання імпульсних сигналів дозволяє одержати певний вигравш в коефіцієнті корисної дії і інших енергетичних показниках сучасного електротехнічного і електронного обладнання. Крім того, імпульсні сигнали є основними з тих, які використовують у цифровій електроніці. Враховуючи сказане, в доповіді слід спочатку детально зупинитися на описі тезауруса (класу) гармонійних сигналів. Потім варто розглянути імпульсні сигнали.

До *гармонійних* відносять детерміновані безперервні електричні сигнали, які описуються косинусоїдальними (або синусоїдальними) функціями,

аргументом яких є час, що не мають компактного носія (або кут  $\theta = \omega t$ ). Миттєві значення гармонійної напруги для будь-якого моменту часу  $t$  від  $-\infty$  до  $+\infty$  змінюються згідно із законом:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_U) = U_m \cos(\theta + \psi_U). \quad (1)$$

Сигнали такого типу характеризуються трьома постійними параметрами: амплітудою (найбільшим за абсолютним значенням відхиленням величини, що коливається)  $U_m$ , початковою фазою  $\psi_U$  і кутовою частотою  $\omega$  (швидкістю зміни аргументу-кута  $\theta = \omega t$ ). Для характеристики гармонійного сигналу також використовують поняття періоду  $T$  гармонійного сигналу (найменшого значення часу, після якого процес повністю повторюється)  $T = 2\pi/\omega$ , і частоти сигналу (число циклів коливань в одиницю часу)  $f = 1/T = \omega/2\pi$ . Використання Програми 1 (див. Додаток), яку слід ввести в командне вікно MATLAB, дозволить на невеликому інтервалі побудувати графік гармонійного сигналу й продемонструвати параметри, якими такий сигнал характеризується.

*УВАГА! У доповіді не слід приводити програми; потрібні тільки результати й висновки, одержані в результаті досліджень.*

Для того, щоб можна було ідентифікувати саме вашу доповідь, рекомендується при виборі параметрів сигналу для проведення досліджень виходити з того, що параметри сигналу мають наступні значення: **амплітуда сигналу:**  $U_m = N_{SP}$ , де  $N_{SP}$  – число, яке відповідає номеру, під яким записане прізвище студента в журналі групи; **частота сигналу:**  $f = 10N_{GR}$ , де  $N_{GR}$  – число, яке відповідає номеру групи на факультеті; **період сигналу:**  $T = 10N_{GR}$ ; **початкову фазу гармонійного сигналу** візьміть рівною  $-\pi/2$ .

У своїй доповіді ви повинні звернути увагу слухачів на наступні *важливі властивості* гармонійного сигналу:

1. Гармонійний сигнал є сигналом обмеженим, оскільки область значень сигналу обмежена. На числовій осі  $t \in R$  сигнал приймає в усіх точках кінцеві значення. Функція  $u(t)$  обмежена зверху значенням амплітуди  $U_m$  (верхньою гранню), а знизу числом  $-U_m$  (нижньою гранню).

2. Гармонійний сигнал має нескінченно велику кількість точок сувого локального мінімуму, локального максимуму і нулів функції. Локальні

максимуми і мінімуми є суворими. У проміжках між нулями, коли функція є позитивною, гармонійний сигнал є випуклою функцією. Точки перетину сигналу з віссю абсцис є точками перегину функції.

3. Гармонійний сигнал є функцією, що плавно змінюється за величиною, тобто гладкою функцією. Сигнал і його похідна не містять розривів і, з цієї причини, є таким, що легко диференціюється. Інтеграл від гармонійного сигналу з нескінченними межами (або хоча б з однією нескінченною межею) не визначений.

4. Гармонійний сигнал є періодичним. Оскільки значення функції  $\cos(\omega t + \psi_U) = \cos(\Omega)$  повторюються в інтервалі значень від  $-1$  до  $+1$  з періодом, то для гармонійного сигналу задовольняється умова періодичності  $u(t) = u(t + nT)$  з періодом  $T$ . Періодичну функцію можна розглядати й досліджувати в межах одного періоду; одержаний на цьому інтервалі графік завжди можна періодично продовжити.

5. Наступна важлива властивість гармонійного сигналу – це його стаціонарність. Гармонійний сигнал визначений на всій тимчасовій осі. Це означає, що він представлений не лише на деякому певному проміжку часу, але й у досить далекому минулому і в дуже далекому майбутньому. Відповідно, який би інтервал часу, у минулому або майбутньому, ми не розглядали, гармонійний сигнал завжди буде мати криву одного й того ж вигляду з незмінними в часі амплітудою, кутовою частотою  $\omega$  і початковою фазою  $\psi_U$ . Важливо, що у гармонійного сигналу немає "початку". Тому за початок координат, у ряді практичних випадків, береться деякий момент часу  $t = 0$ , який встановлюється довільно.

Щоб наглядно підтвердити дані затвердження, представте в доповіді графік і зазначте на ньому характерні параметри сигналу. Зверніть увагу слухачів на те, що умова стаціонарності є важливою для так званих еталонних генераторів гармонійного сигналу, які створюють "срязкові" сигнали для тестування або перевірки працездатності різних приладів.

Отже, жодна з реально існуючих напруг (або струмів) не є стаціонарною і, відповідно, гармонійною, хоча б тому, що вона завжди має початок і кінець в часі. Проте реальна напруга може вважатися практично гармонійною (квазігармонійною), якщо в перебіг хоч і кінцевого, але досить довгого проміжку часу, передуючого даним моментам, його миттєві значення з достатньою точністю виражаються формулою  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_U)$  з

постійними  $\omega$  та  $\psi_U$ . Достатня тривалість вказаного проміжку часу дозволяє приблизно розглядати реальне гармонійне коливання за формулами для суворого гармонійного, нехтуючи процесами, що виникають у момент включення генератора, при його виключенні й для ситуацій, викликаних випадковими змінами параметрів,  $\omega$ ,  $\psi_U$  через так звані чинники, що дестабілізували (наприклад, через зміни температури, дії перешкод і ін.). Разом з тим, умова стаціонарності означає, що через те, що гармонійна напруга є безперервне, нескінченне й одноманітне повторення однакових періодів при незмінності параметрів, за допомогою гармонійного сигналу не можна передати інформацію. Щоб "повідомлення" могло бути передано, воно тим або іншим способом повинно "вплинути" на сигнал. Звідси витікає, що відповідно до того, яку інформацію потрібно передавати за допомогою гармонійного сигналу, в ньому треба змінювати якийсь або параметр, або, іншими словами, сигнал треба "модулювати". Модуляцією називається зміна амплітуди, частоти або початкової фази гармонійного сигналу відповідно до передаваного повідомлення. Суть модуляції полягає в тому, що один із параметрів змінюється відповідно до змін передаваного сигналу  $s(t)$ . Відповідно, на практиці можна реалізувати три основні види модуляції: амплітудну (АМ), частотну (ЧМ) й фазову (ФМ). У всіх випадках модуляції той або інший параметр одержує приріст, пропорційний  $s(t)$ . При модуляції маємо:

$$\text{АМ: } U_m(t) = U_m + \Delta U s(t), \text{ ЧМ: } \omega = \omega_0 + \Delta \omega s(t), \text{ ФМ: } \psi_U = \psi_{U0} + \Delta \Psi s(t).$$

Слід звернути увагу на те, що зміна будь-якого параметра гармонійного сигналу в часі означає, що умова його стаціонарності ( $U_m = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ ,  $\psi_U = \text{const}$ ) порушується. З цієї причини модульоване коливання, яке виходить з гармонійного, шляхом зміни його амплітуди, частоти або початкової фази відповідно до миттєвих значень сигналу, що несе інформацію, описується новою функцією й уже не є гармонійним. У простому випадку, щоб описати модуляцію, зберігши уявлення про гармонійний сигнал, використовують поняття повільності модуляції. У будь-якому випадку модульований сигнал набуває відразу "букет" нових властивостей, частина з яких корисна, а частина, в певних умовах, шкідлива.

Для наглядної думки про співвідношення між амплітудами й початковими фазами гармонійних коливань рівних частот використовують век-

ному сигналу ставиться у відповідність радіус-вектор, довжина якого у вибраному масштабі пропорційна амплітуді сигналу, а полярний кут рівний початковій фазі коливань. Як приклад, використовуючи вирази для  $U_m = N_{SP}$ ,  $f = 10N_{GR}$  і  $\varphi = (-1)^{N_{GR}} 2\pi/N_{GR}$ , слід привести векторну діаграму, відповідну тимчасовому графіку заданого гармонійного сигналу. Використання Програми 2 (див. Додаток), яку слід ввести в командне вікно MATLAB, дозволить побудувати діаграму й продемонструвати параметри, яким такий сигнал характеризується.

У зв'язку з неможливістю виконання інтегрування гармонійного сигналу в нескінченних межах, часто для аналізу сигналів використовують кінцеві межі та гармонійний сигнал розглядається з позицій того, що він нібито має компактний носій. Це, виходячи з практичних міркувань, нерідко спрощує обчислення і робить математичні перетворення коректними. Типовим випадком подібного підходу є застосування мультиплікативного процесу, коли використовуються так звані "тимчасові" вікна, при яких гармонійний сигнал множиться на деяку, залежну від часу, віконну функцію (її часто називають – множник). Наприклад, використовується просте прямокутне вікно, коли множник в межах вікна приймає значення 1, а за межами вікна – 0. Параметр  $b$  задає його зсув за тимчасовою віссю. Для гармонійного сигналу зручно вибрати параметр  $b$  так, щоб "вікно" дозволяло "переглядати" й, відповідно, інтегрувати гармонійний сигнал в межах одного періоду  $T$  (або, в окремих випадках півперіоду  $T/2$ ). В цьому випадку

$$\text{значення інтеграла визначатиметься як: } I = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \Pi(t-b) dt = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt.$$

Природно, що кожне вікно охоплює невелику ділянку гармонійного сигналу за часом. Використання Програми 3 (див. Додаток), яку слід ввести в командне вікно MATLAB при дотриманні  $U_m = N_{SP}$ ,  $f = 10N_{GR}$  і  $\varphi = -\pi/2$ , дозволить побудувати графік гармонійного сигналу на інтервалі одного періоду (вікно тривалістю в період). Слід мати на увазі, що операція множення функції, визначеної в нескінченних межах, на множник, є нелінійною операцією, однак вона дозволяє коректно інтегрувати функцію з нескінченними межами інтеграції.

Часто доцільно й навіть необхідно відмовитися від повного опису сигналу на всій тимчасовій осі  $t$ , а натомість працювати з деякими числа-

ми (назвемо їх параметрами), які в деякому сенсі однозначно характеризують сигнал. Наприклад, при проведенні аналізу гармонійних сигналів порівняно рідко використовують відразу всі його миттєві значення (наприклад, всі миттєві значення напруги в певні моменти часу). Як правило, основною й простою метою вимірювань є знаходження значення одного якого-небудь параметра сигналу, який легко фіксується при подачі його на вхід приладу. У такій практичній ситуації, як, втім, і для теоретичних побудов, зручно розглядати вимірювальну систему як деякий устрій, що відображає, з погляду математики, одну множину в іншу. Тоді вольтметр або будь-який інший прилад, що здійснює вимірювання однієї скалярної величини при подачі на його вхід сигналу того, що змінюється в часі, з погляду математики, відображає безліч функцій в безліч чисел. Якщо будь-якому процесу, заданому у вигляді змін уздовж осі часу, відповідно до деякого правила однозначним чином зіставляється чисельна величина, то говорять, що вводиться функціонал (відомий приклад функціонала – це певний інтеграл). Різного роду вольтметри або інші стрілочні прилади можуть бути прикладами вимірювальних пристроїв, що описуються функціоналами, тобто що здійснюють перетворення функції в число  $u(t) \rightarrow u_0$ . При проведенні вимірювань в електротехнічних ланцюгах і електронних схемах термін "функціонал", звичайно, вживається порівняно рідко, а для характеристики згаданої величини використовується поняття – "параметр" змінного сигналу. Слід звернути увагу на те, що осцилограф є зразком електронного пристрою, який відображає безліч функцій (вхідних сигналів) в безліч інших функцій (вихідних сигналів), тому з погляду математики він описується оператором.

Отже, будь-якому сигналу можна зіставити різні параметри шляхом введення функціоналів. Проте такий підхід до представлення сигналів є свідомо неповним і тому окремі параметри сигналу  $u(t) \rightarrow u_0$  слід розглядати як грубі моделі сигналів. У цьому випадку може йтися лише про певну "проекцію" сигналу, задану за допомогою функціонала. У технічних додатках використовують функціонали різного роду: інтенсивності, положення, протяжності та ін. В першу чергу нас цікавитимуть функціонали інтенсивності. В електротехніці та електроніці при виборі бажаних функціоналів інтенсивності для оцінки сигналів використовують два підходи. При першому, умовно названому вимірювальним, підході, функці-



онани вибирають так, щоб їх можна було вимірювати технічно, за допомогою існуючих приладів. При другому підході функціонали характеризують сигнали в деякому сигнальному просторі. Розглянемо, які функціонали інтенсивності використовують для оцінки гармонійного сигналу при "вимірювальному" підході.

Гармонійний сигнал при проведенні вимірювань може бути охарактеризований наступними параметрами: а) *піковим значенням* – найбільшим значенням миттєвої напруги за час вимірювання (за період сигналу). Для гармонійного сигналу пікове значення – це амплітуда; б) *середнім значенням* гармонійного сигналу (*постійної складової*) за період:

$$U_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos(\omega t + \psi_U) dt.$$

Заміна аргументу

косинуса  $(\omega t + \psi_U) = \frac{2\pi}{T} t + \psi_U$  на змінну  $x$  дозволяє одержати

$$U_{CP} = \frac{T}{T2\pi} \int_{\psi_U}^{\psi_U + 2\pi} U_m \cos(x) dx = 0.$$

Результати обчислення середнього значення напруги для гармонійного сигналу можна підтвердити, використовуючи апарат символьних обчислень (використовуємо Програму 4).



Рис. 1. Графіки, що показують, чому середнє значення гармонійного сигналу за період дорівнює нулю

Наприклад, з одержаного за допомогою програми спрощеного виразу випливає, що чисельник дробу рівний нулю і, отже, результат також рівний нулю, оскільки  $T \times f = 1$ . Набуте значення свідчить про те, що у гар-

монійного сигналу постійна складова рівна нулю. Такий результат легко пояснити (рис. 1) Середнє значення гармонійного сигналу за період дорівнює висоті прямокутника з основою  $T$ , площа якої є площа, обмежена віссю абсцис і функцією  $u(t)$  за період. Отже, для сигналу, у якого площі позитивних і негативних значень  $u(t)$  однакові, середнє значення дорівнює нулю. Середнє значення струму або напруги в електричних ланцюгах вимірюють прилади магнітоелектричної системи. Відомо, що вимірювальні механізми магнітоелектричних приладів володіють відносно великим моментом інерції. Тому, якщо подати на магнітоелектричний стрілочний прилад гармонійну напругу, що змінюється, то стрілка не встигає стежити за змінами миттєвих значень напруги і залишиться нерухомою. Показання приладу відповідатимуть постійній складовій сигналу. Інакше кажучи, магнітоелектричний прилад усереднює подану на його вхід напругу, а відхилення стрілки відображає середнє значення за період. Слід пам'ятати, що при включенні таких приладів в електричну мережу, де діє гармонійний сигнал (звичайно, при правильному виборі меж зміни), показання їх будуть дорівнювати нулю. Залежно від того, чи може на прилад для вимірювань поступати постійна складова сигналу чи ні, розрізняють прилади з "відкритим" і "закритим" входом. Прилади з відкритим входом вимірюють середнє значення, а з закритим – ні. Оскільки середнє значення косинусоїдальних ЕДС, напруг і струмів за період дорівнює нулю іноді вводять поняття про їх середнє значення за напівперіод. Сигнали без одного напівперіоду, як буде показано далі, виникають у вентилях блоках джерел живлення, в так званих однонапівперіодних випрямлячах. Середнє значення гармонійного сигналу за напівперіод рівне:

$$U_{CP} = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} U_m \cos(\omega t + \psi_U) dt. \quad (2)$$

Заміна аргумента косинуса на змінну  $x$  дозволяє одержати

$$U_{CP} = \frac{2T}{T2\pi} \int_{\psi_U - \pi/2}^{\psi_U + \pi/2} U_m \cos(x) dx = \frac{2U_m}{\pi}$$

Середнє значення гармонійного сигналу за напівперіод вже не рівне нулю, воно, звичайно, й складає приблизно 64 % від величини амплітуди (рис. 2).



Рис. 2. Графіки, що показують, як визначається і чому рівне середнє значення гармонійного сигналу за половину періоду

Середньовипрямлене значення гармонійного сигналу рівне.

$$U_{CPB} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos(\omega t + \psi_U) dt = \frac{2U_m}{\pi} = 0.637U_m. \quad (3)$$

Воно дорівнює висоті прямокутника з основою  $T$ , площа якого дорівнює площі, обмеженою віссю абсцис і абсолютним (випрямленим) значенням сигналу за один період (рис. 3). Середньовипрямлене значення напруги і струму вимірюється приладами магнітоелектричної системи з випрямлячем.



Рис. 3. Графіки, що показують, як визначається і чому дорівнює середньовипрямлене значення гармонійного сигналу за період

Середньоквадратичне (англійський термін – root mean square, RMS) або діє (ефективне) значення гармонійного сигналу рівне:

$$U_{RMS} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U_m \cos(\omega t + \psi_U)]^2 dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2T\omega} \int_{2\psi_U}^{4\pi + \psi_U} [1 + \cos(x)] dx} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m. \quad (4)$$

Видно, що визначення середньоквадратичного значення напруги пов'язане з виконанням трьох операцій: зведенням напруги в квадрат; усереднювання за період (інтеграції); добування квадратного кореня з результату усереднювання. Результати обчислення інтегралів для середньоквадратичного значення напруги можна підтвердити, використовуючи апарат символічних обчислень (Програма 5). Середньоквадратичне значення сигналу дорівнює висоті прямокутника, площа якого рівна площі, обмеженою віссю абсцис і функцією  $u^2(t)$  за один період (рис. 4).



Рис. 4. Графіки, що показують, як визначається і чому дорівнює середньоквадратичне значення гармонійного сигналу за період

Як відомо з фізики, діюче значення гармонійної напруги, рівне за значенням такій постійній напрузі, яка, прикладаючись до опору  $R$ , виділяє за час  $T$  ту ж кількість теплоти, що й гармонійна напруга  $u(t)$ . Тому середньоквадратичне значення напруги (струму) можна в першу чергу вимірювати приладами з термоперетворювачами теплової й термоелектричної системи. Також пропорційна квадрату струму сила взаємодії двох провідників з однаковими струмами. Отже, середньоквадратичне

значення напруги (струму) вимірюють також приладами індукційної, електродинамічної, електромагнітної системи. Зазначимо, що номінальні струми й напруги багатьох електронних і електротехнічних пристроїв, як правило, характеризуються їх середньоквадратичними значеннями.

Слід мати на увазі, що квадрат середньоквадратичного значення періодичної напруги складної, некосинусоїдальної форми рівний сумі квадратів середньоквадратичних значень постійної складової і всіх гармонійних складових (детально див. тему "Спектри") цієї напруги:

$$U^2 = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots$$

Інакше кажучи, середньоквадратичне значення періодичної напруги складної форми рівне:  $U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}$ . Важливо,

що середньоквадратичне значення періодичної напруги несинусоїдальної форми не залежить від фазових співвідношень між гармонійними складовими. Зв'язок між піковим (амплітудним), середньоквадратичним і середньовипрямленим значеннями напруги даної форми встановлюють за допомогою введення деяких коефіцієнтів:

1. Коефіцієнт амплітуди (у електротехніці й електроніці його ще часто називають чинником піку), рівний відношенню пікового значення до середньоквадратичного:  $k_a = \frac{U_m}{U_{RMS}}$ .

2. Коефіцієнт форми (часто називають форми-фактори) визначається відношенням середньоквадратичного значення до середньовипрямленого:  $k_f = \frac{U_{RMS}}{U_{CPB}}$ .

Нескладно визначити, що для гармонійного сигналу:

$$k_a = \frac{\sqrt{2}U_{RMS}}{U_{RMS}} = \sqrt{2} = 1,41, \quad k_f = \frac{U_{RMS}}{U_{CPB}} = \frac{\pi U_{RMS}}{2U_m} = \frac{\pi U_m}{2U_m \sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Коефіцієнти амплітуди і форми часто виражають в логарифмічних одиницях – децибелах:  $k_a[\text{дБ}] = 20 \lg \frac{U_m}{U_{RMS}}, \quad k_f[\text{дБ}] = 20 \lg \frac{U_{RMS}}{U_{CPB}}$ .

Слухачі семінару після доповіді повинні пам'ятати, що численні вольтметри, що випускаються промисловістю, можуть бути проградуїзовані і, відповідно, можуть вимірювати різні параметри напруги: пікове, середньоквадратичне, середньовипрямлене. Може бути така ситуація, коли декілька вольметрів різних типів, підключених до одного джерела,

можуть показувати неоднакові показання. З цієї причини треба вміти правильно визначати результат вимірювання за показання приладу.

Ще одне важливе питання, на яке ви повинні звернути увагу слухачів семінару, це коли на вхід приладу одночасно подається не тільки гармонійний сигнал, але й одночасно з цим постійна напруга  $U_{CONST}$ , тобто має місце випадок, коли напруга містить постійну та змінну складові.

Обчисліть аналітично (тобто використовуючи формули) середнє, середньовипрямлене й середньоквадратичне значення напруги для випадку одночасної дії двох сигналів – постійної  $U_{CONST}$  та гармонійної напруг. Визначте для кожного випадку пік-фактор і форм-фактор. Зробивши висновки з одержаних результатів, поясніть слухачам семінару як сумісна дія постійної та змінної напруги, порівняно з дією гармонійної напруги, змінює досліджувані параметри напруги, а також коефіцієнти амплітуди й форми. Результати аналітичного обчислення середнього значення напруги для сигналу, який містить постійну й змінну складові, можна перевірити, використовуючи апарат символьних обчислень (Програма 6). Результати аналітичного обчислення середньоквадратичного значення напруги для сигналу, який містить постійну й змінну складові, можна перевірити, використовуючи апарат символьних обчислень (Програма 7).

**УВАГА!** У доповіді не слід наводити програми; у ній потрібно навести одержані кінцеві формули й зробити висновки на підставі досліджень.

У електротехніці й електроніці разом з гармонійними знаходять застосування імпульсні сигнали. Звичайно, такі сигнали генеруються електронними імпульсними пристроями. Імпульси мають детермінований характер, тому, з інформаційної точки зору, їх основною характеристикою є форма імпульсного сигналу.

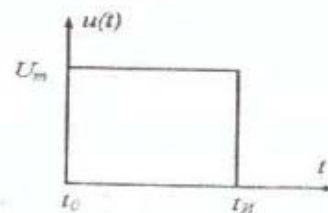


Рис 5. Графік П-імпульсного сигналу

Реальні імпульси мають складну форму, що примушує застосовувати різні способи ідеалізації форми реальних імпульсів. Найбільш простим з тих, що ідеалізуються є прямокутний імпульс (П-імпульс), який характеризується тільки двома параметрами – амплітудою й тривалістю (рис. 5). Для П-імпульсів передбачається, що напруга  $u(t)$  миттєво виникає в початковий момент  $t_0$  і також миттєво зникає у момент закінчення дії імпульсу  $t_u$ . Прямокутний імпульс описується кусково-безперервною функцією часу  $i$ , відповідно, його аналітичний запис проводиться для кожного проміжку часу, протягом якого функція  $u(t)$  безперервна. Якщо прийняти, що початок відліку часу збігається з моментом виникнення імпульсу, то П-імпульсний сигнал можна подати таким чином:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 0 & \text{при } t < 0 \\ u_2(t) = U_m & \text{при } 0 \leq t_u \leq t \\ u_3(t) = 0 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Найчастіше реальні пристрої створюють періодичні послідовності імпульсів. У цьому випадку імпульси повторюються через певний часовий інтервал, що називається періодом. У цьому послідовності П-імпульсів можуть бути знакопостійними або знакозмінними. Серед знакозмінних імпульсів широко використовуються періодичні послідовності імпульсів, які називають меандром. Використовуючи вираз  $U_m = N_{SP}$  і **Програму 8**, продемонструйте слухачам семінару, що є знакопостійні імпульси. Використовуючи вираз  $U_m = N_{SP}$  і **Програму 9**, продемонструйте слухачам семінару, що є знакозмінні імпульси. Використовуючи вираз  $U_m = N_{SP}$  і **Програму 10**, продемонструйте слухачам семінару, що є знакозмінні імпульси типу меандр.

Слід звернути увагу слухачів на те, що для характеристики періодичних послідовностей П-імпульсів часто використовують параметр, який називається скважністю і рівний відношенню періоду до тривалості імпульсу  $\gamma = \frac{T}{t_H}$ , або зворотний йому параметр, що називається коефіцієнт заповнення  $q = \frac{t_H}{T}$ . Параметр  $q$  часто виражають у відсотках. Слід

додати до викладеного вище, що меандр – це послідовність прямокутних імпульсів зі скважністю, рівною двом (коефіцієнт заповнення рівний 50%), коли тривалість імпульсів і проміжки між ними стають рівними. Розрахуйте, чому рівна скважність для всіх трьох випадків, що вивчаються.

У доповіді, говорячи про імпульсні сигнали, зазначте істотні відмінності властивостей таких сигналів від властивостей гармонійних сигналів. Наприклад, можна зазначити наступне:

по-перше, математична функція, що представляє П-імпульс, не є на всій числовій осі часу такою, що безперервно диференціюється, або гладкою. У ряді точок мають місце розриви першого роду;

по-друге, математична функція П-імпульсу не є унімодальною (одновіршинною). У П-імпульсу відсутні суворі локальні екстремуми;

по-третє, хоча в загальному випадку на всій числовій осі виконується  $\text{supp } T$  і основа функції є некомпактною, протягом кожного періоду  $\text{supp } T < |T_m|$ , і носій сигналу є компактним, тобто обмеженим і замкнутим.

Отримайте аналітичні співвідношення (прості формули), що визначають середнє, середньовипрямлене й середньоквадратичне значення напруг для знакопостійних і знакозмінних П-імпульсів, а також для меандру. Визначте для кожного випадку пік-фактор і форм-фактор. Зробивши висновки з одержаних результатів, поясніть слухачам, як відрізнятимуться показання різних типів вольтметрів, а також коефіцієнти амплітуди й форми при дії на них періодичних імпульсних сигналів. Спеціально зупиніться на питанні про те, як на всі перераховані параметри впливає шпаруватість. Результати обчислення середнього, середньовипрямленого й середньоквадратичного значень для знакопостійної імпульсної послідовності, при дотриманні, можна перевірити, використовуючи апарат символічних обчислень (**Програми 11 – 12**). Результати обчислення середнього, середньовипрямленого й середньоквадратичного значень для знакозмінної імпульсної послідовності можна підтвердити, використовуючи апарат символічних обчислень (**Програми 13 – 15** відповідно).

ви повинні звернути увагу слухачів семінару на ситуацію, коли на вхід прилади одночасно подаються імпульсні сигнали і постійна напруга  $U_{CONST}$ , тобто на випадок, коли напруга містить постійну й змінну (імпульсну) складові. Продемонструйте слухачам семінару, що є знакопостійні й знакозмінні П-імпульси з постійною складовою. Це можна зробити

використовуючи розглянуті раніше програми. До них слід внести зміни, пов'язані з появою постійної складової, наприклад:

$U_{cons}=3.0 \%$  Задаємо постійну напругу

$u(t)=U_{cons}+U_m \cdot \text{pulstran}(t,d,'rectpuls',3);$

$u(t)=U_{cons}+U_m \cdot \text{square}(t,30);$

Обчисліть середнє, середньовипрямлене й середньоквадратичне значення напруг для випадків одночасної дії двох сигналів – постійного  $U_{cons}$  і знакопостійних і знакозмінних П-імпульсів. Зробивши висновки з одержаних результатів, поясніть слухачам як сумісна дія постійної та імпульсної напруги порівняно з дією імпульсної напруги, змінює досліджувані параметри напруги, а також коефіцієнти амплітуди й форми.

Представивши вимірювану імпульсну напругу  $u(t)$  сумою двох напруг (постійної та змінної з нульовим середнім), покажіть для знакопостійних і знакозмінних П-імпульсів та для меандру як розрізнятимуться показання вольтметрів з відкритим і закритим (що вимірюють напругу без постійної складової) входом, якщо вони влаштовані таким чином, що вимірюють лікове, середнє і середньоквадратичне значення сигналу.

Зробивши відступ від основної теми, важливо довести для слухачів, що поняття тривалості визначено лише для П-подібного імпульсу. Реальні імпульси, використовувані в електротехніці й електроніці, можуть мати форму далеку від прямокутної. Наприклад, в ідеалі вони можуть бути трикутними, трапецеїдальними і т. п. До того ж імпульс може не належати до класу фінітних функцій і його носій, як, наприклад, у експоненціального імпульсу може бути некомпактним. Зокрема, форма імпульсу в ряді електронних пристроїв може мати вигляд, зображений на рис. 6.

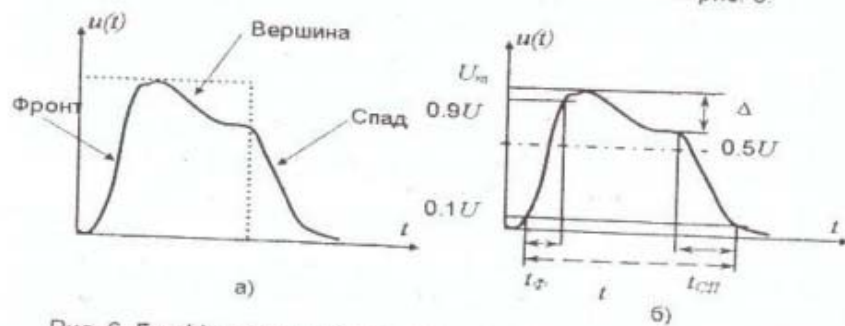


Рис. 6. Графіки реального імпульсного сигналу та параметри, якими він характеризується

Як видно рис. 6, у реальних імпульсів спочатку може відбуватися швидке (не миттєве, як у П-імпульсу) наростання напруги до максимального значення  $U_m$ , яке називається амплітудою імпульсу. Далі напруга, звичайно, порівняно повільно змінюється протягом деякого проміжку часу. Потім знову спостерігається швидкий спад напруги.

Відмінності в швидкості зміни напруги на окремих інтервалах часу дозволяють виділити наступні частини реального імпульсу: фронт, вершину (або повільно спадну частину) і спад імпульсу  $\Delta U$  (рис. 6 а). Вимірювання тривалості реального імпульсу  $t_{и}$  (а також фіксація його положення або, як ще говорять, зрушення відносно початку відліку) стикається з труднощами, пов'язаними з наявністю на початку фронту і в кінці спаду порівняно тривалих ділянок, протягом яких ще мають місце миттєві значення напруги. Очевидно, що визначене для П-імпульсу з компактним носієм поняття тривалості вже "не працює" і для імпульсів складної форми потрібно відповідним чином ввести нове поняття. Багато мати функціонал протяжності  $t_{и}$ , який би дозволяв застосовувати загальний математичний апарат, підходив для широкого класу сигналів, у тому числі і для сигналів з некомпактним носієм, і володів зрозумілими "фізичними властивостями". Слухачам семінару доцільно розповісти, яким чином підходять до вибору функціонала протяжності  $t_{и}$  (і, відповідно, до оцінки активної тривалості реального імпульсу  $t_{и}$ ), щоб він міг характеризувати "протяжність"  $u(t)$  або "ефективну протяжність" (у тих випадках, коли область визначення  $u(t)$  теоретично нескінченна) уздовж осі  $t$ .

Для визначення тривалості реальних імпульсів використовують декілька методів, які використовують різні функціонали протяжності. Найчастіше функціонал протяжності  $t_{и}$  визначається за так званими умовними рівнями, що становлять задану частину від максимуму  $u(t)$ . Такий підхід називають ще методом перетинів. Для вимірювання тривалості реального імпульсу  $t_{и}$  вводять умовний рівень відліку. Як основний вибирається іноді рівень  $0.1 U_m$ , тобто за тривалість імпульсу береться проміжок часу між моментами, в які миттєві значення імпульсної напруги досягають рівня, рівного 10% від амплітуди імпульсу (рис. 6 б). Іноді робочу (активну) тривалість реального імпульсу вимірюють на рівні  $0,5 U_m$ , де  $U_m$  – рівень, відповідний "плоскій частині" імпульсу, якщо вона достатньо чітко вира-

жена, або локальний максимум функції  $u(t)$ . З рис. 6 видно, що тривалість імпульсу  $t_H$  в цьому випадку виходить дещо меншою.

У ряді випадків тривалість імпульсу визначається як сума тривалості фронту, спаду (визначених відповідним чином за рівнями) і тривалості вершини імпульсу:  $t_H = t_\phi + t_{СП} + t_B$ . Слід враховувати, що визначення тривалості фронту і спаду  $t_{СП}$  також ускладнене. Якщо прийняти за значення  $t_\phi$  повну тривалість наростання напруги (від 0 до  $U_m$ ), то вона виявиться невиправдано великою порівняно з тривалістю основної частини фронту, коли відбувається найбільш інтенсивний процес наростання напруги. Тому вважають, що тривалість фронту  $t_\phi$  рівна проміжку часу між моментами, в які миттєві значення імпульсної напруги  $u(t)$  досягають відповідно рівнів 0,1 і 0,9 амплітуди імпульсу. Тривалість спаду  $t_{СП}$  також зазвичай вимірюють проміжком часу між моментом, коли спостерігається різке зростання швидкості спаду напруги (точкою перегину кривої  $u(t)$ ) і моментом, коли миттєве значення імпульсної напруги досягає рівня 0,1 амплітуди імпульсу (рис. 6 б).

Для визначення тривалості імпульсу може бути використано визначення протяжності за умовними межами, в межах яких значення функціонала інтенсивності складає задану частину від повного значення ("метод умовних меж"). В цьому випадку для практичних розрахунків тривалість імпульсу визначають як інтервал часу, усередині якого зосереджена велика частина повної енергії імпульсу, наприклад, як прийнято в енергетичному методі – 90%. Для імпульсів, що починаються

при  $t = 0$ , цю умову можна записати так:  $\int_0^{t_H} u^2(t) dt = 0,9 \int_0^{\infty} u^2(t) dt$ .

Наприклад, для експоненціального імпульсу  $u(t) = U_m e^{-\alpha t}$  енергетичним

методом можна одержати наступне:  $\int_0^{t_H} U_m^2 e^{-2\alpha t} dt = 0,9 \int_0^{\infty} U_m^2 e^{-2\alpha t} dt$ ,

$$\frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{t_H} = \frac{0,9}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty}, \quad e^{-2\alpha t_H} - 1 = -0,9, \quad t_H = \frac{1}{-2\alpha} \ln 0,1 = \frac{2,3}{2\alpha}.$$

Нарешті при теоретичних дослідженнях часто використовують функціонал протяжності, коли за міру тривалості імпульсу приймають відомий з механіки "радіус інерції" фігури  $u(t)$  щодо вертикальної осі,

який проходить через її центр тяжіння. Щоб було зрозуміліше, про що йдеться, розглянемо плоску фігуру, яка утворюється зведенням в квадрат ординат заданого імпульсу  $u(t)$ . Тоді за міру тривалості імпульсу можна прийняти радіус інерції цієї фігури щодо вертикальної осі, яка проходить через центр її тяжіння, оскільки ці величини пропорційні. Розглядати фігуру  $u^2(t)$   $u(t)$  необхідно для того, щоб міра мала сенс і при знакозмінних імпульсах. Спочатку, відповідно до такої методики визначення функціонала протяжності, визначають центр тяжіння  $t_0$  фігури як відношення моменту площі  $M$  до площі  $S$ :

$$t_0 = \frac{M}{S} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t u^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt}, \quad M = \int_{-\infty}^{\infty} t u^2(t) dt, \quad S = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt. \quad (6)$$

Потім знаходять момент інерції щодо вертикальної осі координат  $J$  і щодо осі, яка проходить паралельно їй через центр тяжіння  $J_H$ :

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 u^2(t) dt, \quad J_H = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 u^2(t) dt = J - \frac{M^2}{S}.$$

Нарешті, виходячи з відомого в теоретичній механіці співвідношення, обчислюють радіус інерції, який є мірою тривалості імпульсу:

$$t_H = \Delta t = \sqrt{\frac{J_H}{S}} = \sqrt{\frac{J}{S} - \frac{M^2}{S^2}}. \quad \text{Для прикладу визначимо, використовуючи}$$

"радіус інерції" фігури  $u(t)$ , тривалість експоненціального імпульсу, що не має, як наголошувалося, компактного носія.

$$\text{Площа фігури рівна: } S = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_0^{\infty} (U_m e^{-\alpha t})^2 dt = \frac{U_m^2}{2\alpha}.$$

$$\text{Момент площі: } M = \int_{-\infty}^{\infty} t u^2(t) dt = \int_0^{\infty} t (U_m e^{-\alpha t})^2 dt = \frac{U_m^2}{4\alpha^2}.$$

Момент інерції щодо вертикальної осі координат:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 u^2(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 (U_m e^{-\alpha t})^2 dt = \frac{U_m^2}{4\alpha^3}.$$

$$\text{Нарешті знаходимо: } t_H = \frac{1}{2\alpha}.$$

Для випадку, коли за міру тривалості імпульсу приймають "радіус інерції" фігури  $u(t)$  щодо вертикальної осі, яка проходить через її "центр тяжіння", результати обчислення, при дотриманні можна підтвердити, використовуючи апарат символічних обчислень (Програма 16).

У доповіді слід згадати, що порівняння одержаного результату з тим, що був одержаний при використанні енергетичного методу, коли тривалість імпульсу визначалася як інтервал часу, усередині якого зосереджено 90% повної енергії імпульсу, дозволяє стверджувати, що тривалість виходить в 2,3 рази більше.

Використовуючи Програму 17, побудуйте, при дотриманні  $U_m = N_{SP}$ , експоненціальний імпульс, який не описується теоретично фінітною функцією. Визначте тривалість імпульсу всіма відомими вам способами. Порівняйте одержані результати і зробіть висновки про те, наскільки порівнянні ці результати.

Розглянемо тепер наступний імпульсний сигнал, який також не має компактного носія:  $u(t) = U_m(\ell^{-at} - \ell^{-bt})$ . Використовуючи Програму 18, побудуйте, при дотриманні  $U_m = N_{SP}$ , досліджуваний імпульс. Визначте його тривалість всіма відомими вам способами. Порівняйте одержані результати і зробіть висновки про те, наскільки порівнянні ці результати.

Для випадку, коли за міру тривалості імпульсу приймають "радіус інерції" фігури  $u(t)$  щодо вертикальної осі, яка проходить через її "центр тяжіння", можна при дотриманні  $U_m = N_{SP}$  одержати тривалість імпульсу, використовуючи Програму 19.

**УВАГА!** У доповіді слід на одержаних графіках відзначити величини тривалості імпульсів, одержаних різними способами і на цій підставі зробити висновки на підставі досліджень.

**УВАГА!** Проведені до цього дослідження і зроблені висновки можна віднести до першої частини роботи, а подальше помістити в другу частину доповіді.

Повертаючись до основної теми доповіді, про те, як представляють електричні сигнали в електротехніці і електроніці, ви повинні довести слухачам семінару, що крім використовуваних при "вимірювальному" підході різних функціоналів інтенсивності, які переводять функції в число, коли визначення функціонала ґрунтувалося на можливості кількісного вимірювання його за допомогою приладу, застосовують функціонали,

пов'язані з енергією, і функціонали так званого "сигнального простору". Щоб було зрозуміло, що є функціонали енергії й потужності, зробимо невеликий відступ і нагадаємо про наступне. З фізики й електротехніки відомо, що якщо до провідника (далі – для спільності, називатимемо резистивним елементом) з опором  $R$  прикладена постійна напруга  $U$ , то потужність, що виділяється в резистивному елементі, буде рівна:

$$P(t) = \frac{U^2}{R}. \text{ За час спостереження } T_H \text{ в цьому резистивному елементі}$$

виділиться теплова енергія, рівна:  $E = \int_0^{T_H} P(t) dt = \frac{U^2 T_H}{R}$ . Нехай тепер до

резистивного елементу прикладена не постійна напруга  $U$ , а сигнал, представлений напругою  $u(t)$ . Тоді аналогічно можна записати, що

миттєва потужність рівна:  $P(t) = \frac{u(t)^2}{R}$ . Відповідно, можна обчислити

енергію, що виділилася в резистивному елементі з опором  $R$  за час спостереження  $T_H$ :  $E = \int_0^{T_H} P(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^{T_H} u^2(t) dt$ . Середня потужність

(average power) сигналу на резистивному елементі за заданий проміжок часу  $[0, T_H]$  може бути знайдена, якщо ми енергію, що виділилася на елементі, розділимо на тривалість тимчасового інтервалу  $[0, T_H]$ :

$$P_{CP} = \frac{E}{T_H} = \frac{1}{T_H R} \int_0^{T_H} u^2(t) dt. \text{ У наведеній формулі в знаменник входить}$$

величина резистивного елементу  $R$ . Якщо допустити, що енергія і потужність нас цікавить не як фізична величина, а як деякий засіб для представлення сигналу, то опір  $R$  з формул можна виключити, поклавши  $R = 1$ . Тоді можна одержати деякі "енергетичні" функціонали інтенсивності, які в теорії сигналів характеризуватимуть енергію, середню за заданий проміжок часу  $[0, T_H]$  потужність сигналу і величину миттєвої потужності відповідно:

$$E = \int_0^{T_H} u^2(t) dt, P_{CP} = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} u^2(t) dt, P(t) = u(t)^2.$$

Щоб підкреслити, що при цьому передбачаються одиничні значення опору резистивного елементу  $R$ , одержані величини іноді називають *питомими*. Якщо провести порівняння з тими функціоналами, які використовувалися при "вимірювальному" підході, то нескладно помітити, що квадратний корінь із середньої потужності сигналу – це є не що інше як

$$\text{середньоквадратичне значення сигналу: } U_{RMS} = \sqrt{P_{CP}} = \sqrt{\frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} u^2(t) dt}.$$

Далі в доповіді слід зазначити, що для того, щоб можна було аналізувати властивості й перетворення сигналів максимально загальним чином останнім часом в електротехніці та електроніці використовують так званий простір сигналів (signal space) із своїми специфічними функціоналами, що характеризують сигнали. Сигнали – це деяка сукупність об'єктів, об'єднаних деякими загальними ознаками. У математиці подібні сукупності об'єктів, об'єднані загальною ознакою, прийнято називати множиною, а самі об'єкти – елементами множини. Тому *простір сигналів* – це, *перш за все, множина, окремими елементами якої є сигнали. Природно, як прийнято, саму множину позначати прописними латинськими буквами, наприклад  $U$ , а елементи, тобто сигнали – малими буквами:  $u_1, u_2$  і т. д.* Тоді, наприклад, можна говорити, що множина  $U_1$  складається з гармонійних сигналів виду  $\{u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_U)\}$ , які відрізняються своїми амплітудами, частотами й початковими фазами, а множина  $U_2$  утворена всіма фінітними аналоговими сигналами, відмінними від нуля в інтервалі часу  $[t_H, t_K]$  і рівними нулю поза цим інтервалом (імпульсними сигналами).

Поняття "простір" також означає, що елементи цієї множини ми наділяємо деякими спеціальними властивостями або, іншими словами, допускаємо виконання над цими елементами деяких операцій. Сигнальний простір – це не порожня безліч  $U$  над елементами  $u_1, u_2, \dots$ , для якого визначені операції, такі, що результат виконання цих операцій є елементом цієї ж множини. Вибір тієї або іншої конкретної операції, яку доцільно використовувати, часто диктується практикою і тим, з яких фізичних міркувань ми виходимо. Наприклад, відомо, що стосовно теорії електротехніки і електроніки, напруги можуть складатися або множитися на деякий масштабний коефіцієнт. Для сигналів, як фізичних об'єктів,

виконується, як правило, принцип суперпозиції. Тому цілком природно, якщо ми використовуємо безліч сигналів, для елементів яких визначені операції складання елементів і операція множення елементу на дійсне число. Подібні множини в математиці називають *лінійним простором*. Тому вважатимемо, що простір сигналів це, перш за все, лінійний простір, у якого для безлічі сигналів  $U$  виконуються наступні вимоги: 1. Будь-який сигнал  $u \in U$  при будь-яких  $t$  приймає речовинні значення. 2. Є правило, за допомогою якого парі будь-яких двох сигналів  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ , узятих з цієї безлічі  $U$ , в певному порядку, однозначним чином ставиться у відповідність третій елемент цієї множини  $u_3(t)$ , який називається сумою елементів  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  і позначається символом  $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . 3. Є правило, за допомогою якого будь-якому елементу  $u_1(t)$  безлічі  $U$  і будь-якому дійсному числу  $\lambda$  ставиться у відповідність елемент цієї безлічі  $u(t)$ , який називається добутком елементу  $u_1(t)$  на число  $\lambda$  і позначається символом  $u(t)$  або  $u(t) = \lambda u_1(t)$ . 4. Множина містить особливий нульовий елемент такий, що  $u + \emptyset = u$  для всіх  $u \in U$ . 5. Правила 2 і 3 підпорядковані відомим з математики восьми аксіомам.

Зазначимо, що введення лінійного сигнального простору дозволяє нам абстрагуватися від фізичної природи сигналів, які вивчаються. Оскільки типовим прикладом лінійного простору є сукупність всіх геометричних векторів в просторі (або на площині) із заданими операціями складання цих векторів або множення їх на числа, то лінійні простори називають часто також *векторними просторами*. Іншими словами, лінійні простори одночасно є і векторними, оскільки сума векторів і добуток вектора на число задовольняють ті ж властивості, що й сума і добуток елементів лінійного простору. Сигнали, як елементи лінійних просторів, прийнято також називати векторами, підкреслюючи аналогію властивостей "сигнальних" елементів безлічі  $U$ , і звичайних вільних векторів у тривимірному просторі. Відповідно до цієї традиції ми і надалі "сигнальні" елементи лінійного простору називатимемо *векторами*.

Зверніть увагу слухачів семінару на ту обставину, що використання в такому особливому, не зовсім звичному сенсі терміна "вектор", звичайно, до непорозумінь не приводить. Навпаки, ґрунтуючись на геометричних уявленнях, що склалися, про вектори в тривимірному просторі, це дозво-



ляє з'ясовувати, а часто й передбачати ряд результатів, справедливих для "сигнальних" просторів.

Залежно від характеру як елементів множини, так і операцій визначених над ними, простори бувають різними. Не будь-який простір є лінійним, оскільки операція множення елементів еквівалентна операції множення елементу на число тільки в тому випадку, якщо серед елементів присутні числа. Лінійним простором є безліч дійсних чисел з огляду на те, що серед його елементів є числа. Лінійні сигнальні простори, задані над одним і тим же полем дійсних чисел  $R$  (над не порожньою множиною з нулем, в якому крім операцій складання і множення визначена однозначним чином ще й операція, зворотна множенню – операція ділення), можна розділити на два класи – безкінечновимірні й скінченновимірні. Типовим прикладом безкінечновимірного лінійного сигнального простору над полем дійсних чисел  $R$  є безліч усіх речовинних функцій дійсного змінного  $t$ , або, як ми говорили, безліч аналогових сигналів, заданих на одному й тому ж відрізьку часу, зі встановленими на ньому звичайними операціями складання функцій і множення функції на дійсне число. У такому безкінечновимірному лінійному сигнальному просторі "вектор" має нескінченне число "координат". Іншими різновидами таких лінійних просторів будуть безкінечновимірні лінійні сигнальні простори при накладенні на використовувані функції певних умов гладкості або диференційності. Можна перевірити справедливість раніше вказаних вимог і аксіом і укласти, що, наприклад, безліч  $U[0, T_H]$  всіх трикутних імпульсних напруг  $u(t)$ , заданих на проміжку  $[0, T_H]$  і рівних нулю на краях на сегменті, є лінійним сигнальним простором. Можна також стверджувати, що елемент  $u_1(t)$  такої безлічі  $U[0, T_H]$  має нескінченне число "координат".

Щоб пояснити поняття скінченновимірного сигнального простору, "розмірності" вектора і визначити яке у нього число координат, зробимо відступ від основної теми. Врахуємо при цьому, що розуміння цих питань набуває особливої актуальності в тих ситуаціях, коли обробляють і передають сигнали, використовуючи ЕОМ і цифрове устаткування.

Часто за рядом технічних причин замість безперервного сигналу  $u(t)$  реєструють рівномірно розподілені відліки безперервної функції  $u(t_n)$ . Як прийнято говорити у такому випадку – здійснюють дискретизацію сигналу в часі. Для дискретизації сигналу, як безперервної функції часу  $u(t)$ , вісь

часу розбивається на рівні інтервали, кожен з яких визначається величиною  $\tau$ . При цьому на осі часу наголошується  $N$  точок, координатами яких є наступні значення  $t: 0, 3\tau, \dots, (N-1)\tau$ . Іншими словами, на відрізьку часу вводиться безліч точок  $\{t_n\}$ , які називаються вузлами сітки. Якщо відстань між вузлами постійна (не залежить від  $n$ ) і рівна  $\tau = t_n - t_{n-1}$ , то сітка є рівномірною і містить  $N$  інтервалів дискретизації. Для кожної з цих точок береться значення  $u(t_n)$ , що відповідає їй: проводиться відлік значення початкової функції в даній точці. Таким чином, виходить так звана гратчаста (сіткова) функція у вигляді набору дискретних чисельних значень  $u(t_n)$ , область визначення якої складається з окремих точок. Слід враховувати, що коли беруться відліки, то вони не реєструються з нескінченною точністю, а округляються до невеликої кількості цифр. Отже, при проведенні дискретизації безперервний сигнал  $u(t)$  замінюється вибіркою  $\{u_n(t_n)\}$ . В результаті цього виходить впорядкована сукупність закруглених чисельних величин  $u(n\tau)$  в дискретні моменти часу, де  $\tau$  – інтервал дискретизації,  $n$  – ціле число. Тобто дискретний сигнал є впорядкованою послідовністю з  $n$  числами, які називаються елементами (компонентами) такого сигналу. Іноді для окремих значень  $u(n\tau)$  уживається термін "відлік" так, як при даному дискретному значенні  $u(n\tau)$   $n\tau$   $u(n\tau)$  – це відлік безперервної функції. Для окремого значення  $u(n\tau)$  або для декількох таких значень прийнято також вираз "вибірка з послідовності". Проста модель дискретного сигналу  $u(n\tau)$  – це рахункова безліч точок  $\{t_n = n\tau\}$  на осі часу, в кожній з яких визначено відлікове значення сигналу  $u_n = \{u(n\tau)\}$ . Прийнято зображати набутого дискретного значення змінної величини, опускаючи з кожної із зазначених точок перпендикуляр на вісь  $t$ . Припустимо, що послідовність чисел  $\{u(n\tau)\}$  є саме такою, одержаною в результаті дискретизації, безліччю чисел, вибраних в дискретні моменти часу з функції  $u(t)$  безперервного аргументу. Тоді виходить, що замість функції  $u(t)$  безперервного аргументу ми перейшли до розгляду деякої сіткової функції  $u_n = u(t_n)$  цілочисельного аргументу. Якщо узагальнити виконане, то можна здогадатися, що в процесі

дискретизації безкінечновимірний простір безперервних функцій ми замінили скінченновимірним (з розмірністю  $N$ ) простором сіткових функцій  $\{u(nT)\}$ . Розмірність скінченновимірного простору визначається кількістю точок  $N$  на осі часу, одержуваних у процесі дискретизації.

Після того як на одному з приватних прикладів ми розглянули штучний і в певному значенні абстрактний об'єкт – дискретний сигнал, що є впорядкованою послідовністю чисел, можна з математичних позицій уточнити поняття "вектор", що має кінцеве число "координат" (як деякого елементу такого скінченновимірного простору): вектором  $u_n$  розмірності  $n$  (або  $n$ -вимірним вектором) в скінченновимірному сигнальному просторі називається впорядкована сукупність з  $n$  чисел. При цьому, якщо вектор визначується числами, то писатимемо  $u_n = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  називаються координатами вектора. У зв'язку з цим сигнали скінченновимірного сигнального простору можна також називати  $n$ -вимірними векторами, координатами яких є впорядковані сукупності з  $n$  чисел  $u = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Тут  $N$  – кількість координат сигналу. У скінченновимірному лінійному сигнальному просторі над полем дійсних чисел  $R$  кожен вектор має кінцеве число координат  $n$ . Можна говорити, що розмірність скінченновимірного простору визначається кількістю коефіцієнтів, що одержуються в процесі дискретизації безкінечновимірного простору безперервних функцій  $\{u(t)\}$ . Прикладом вектора в скінченновимірному просторі може бути *вектор ознак*. Цей вектор є групою значень у двійковому кодї, які представляють певний тип інформації. Зокрема, вектором ознак може бути вектор, що визначає стан якого-небудь електронного устаткування. Кожен елемент (табл. 1) вектора ознак показує, включений чи ні деякий блок або поступає чи ні інформація з давача (якщо так, то значення рівне 1, якщо ні – 0).

Таблиця 1

Приклад вектора в скінченновимірному просторі

Блок 1	Блок 2	Давач 1	Давач 2	Давач 3
1	0	1	1	0

Кодова комбінація з нулів і одиниць є вектор  $u(n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  в  $n$ -вимірному просторі (в даному випадку 5-вимірному). Наприклад, в спеціальних пристроях – "портах введення-виведення", за допомогою яких цифрове устаткування може "спілкуватися" з іншими зовнішніми пристроями, на зовнішніх виводах з'являються "двійкові" числа  $u_n = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  в електричній формі (наприклад  $u_n = 01100101$ ). Двійкове число звичайно має 8 розрядів і, відповідно, має 8 координат вектора числа на зовнішніх виведеннях. Шини даних (набір паралельних провідників, за якими передається цифровий сигнал) можуть мати 16, 32, 64 розряди.

Прикладом  $n$ -вимірного лінійного простору (абстрагованого від природи сигналів, що вивчаються) над полем дійсних чисел  $R$  є  $n$ -вимірний арифметичний простір  $R^n$  впорядкованих груп з  $n$  дійсних чисел (впорядкованих сукупностей  $n$  компонентів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  з  $R^n$ ). Так, якщо реєструюча апаратура експериментальної установки фіксує деяку фізичну величину при проведенні  $n$  вимірювань, то після кожного циклу таких вимірювань ми матимемо у своєму розпорядженні набір даних  $u_n = 0, 1, 5, 3, 7, 9, 12, 15$  про вимірювану фізичну величину.

Різні типи "електронної пам'яті" є набір комірок (деяку матрицю розміром  $K \times N$ ), в кожній з яких може зберігатися одне число. В цьому випадку векторами (компонентами) скінченновимірного лінійного сигнального простору над полем дійсних чисел  $R$  можуть бути  $n$ -вимірні рядки  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  матриці (тобто однорядкові матриці, що складаються з  $n$  чисел) з елементами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Аналогічно, безліч  $k$ -вимірних стовпців  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}^T$  матриці також утворює скінченновимірний лінійний простір над полем дійсних чисел  $R$  (простір  $k$ -вимірних стовпців).

У введеному лінійному просторі немає можливості вимірювати "довжину" вектора і обчислювати відстані. Щоб "поглибити" геометричне трактування сигнального простору, в ньому додатково визначають "розмір" кожного елементу і вводять поняття, яке б за своїм сенсом відповідало довжині вектора. Це дозволяє не тільки додати точний сенс висловам типу "перший сигнал більше другого", але й вказати, наскільки він більший. Таким чином приходять до поняття нормованого лінійного сигнального

простору. Лінійний простір сигналів є нормованим, якщо кожному вектору однозначно зіставлено число – норма (погт) цього вектора. При цьому повинні бути виконані наступні аксіоми нормованого простору: 1. Норма не негативна, тобто  $\|u\| = 0$  тоді і тільки тоді, якщо  $u = \emptyset$ . 2. Для будь-якого числа  $\lambda$  справедлива рівність  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ . 3. Якщо  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  – два вектори з  $LN$ , то виконується нерівність трикутника  $u_1 + u_2 \leq \|u_1\| + \|u_2\|$ .

Норма  $\|u\|$  будь-якого елементу  $u \in LN$  є аналогом довжини вектора в математиці. Тому в нормованому лінійному просторі визначений "розмір" кожного елементу. Норма також представляє відстань від елементу  $u(t)$  до нульової точки простору. Чим більша норма, тим "далі" знаходиться  $u \in LN$  від нульового елементу. Нульовий вектор розглядають як деякий стандартний елемент простору сигналів, всі значення якого рівні нулю. Якщо в лінійному просторі  $U$  існує операція, що переводить елементи множини  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$  цього простору в елементи безлічі негативних дійсних чисел  $R$ , і результат такої операції є нормою, то множина з такою операцією називається нормованим сигнальним простором  $LN$ . Оскільки операцій "перекладу" може бути декілька, то для сигналу може існувати декілька норм і норма сигналу може вводитися різними способами. Слід мати на увазі, що норми сигналів задаються по-різному для безкінцевовимірних і скінченновимірних просторів.

Як безкінцевовимірний нормований простір можуть використовуватися простори  $C[t_H, t_K]$  всіх безперервних на сегменті  $t_H \leq t \leq t_K$  сигналів  $u(t)$  і так звані простори  $L$ . Їх називають просторами Лебега у зв'язку з тим, що у визначення норми у них фігурує інтеграл Лебега. Якщо вважати, що підінтегральні функції, що визначають сигнал, є гладкими або шматково-безперервними, то при визначенні норми в просторі Лебега можна користуватися поняттям інтеграла Рімана. Загальним є простір сигналів  $L^p(R)$ ,

$$\text{у якого інтеграл: } L^p(R) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^p dt \right]^{1/p} < \infty, p \in [1, \infty).$$

Норму в цьому просторі зручно пов'язати з числом (рівним значенню вказаного інтеграла), кінцівка якого засвідчує приналежність даного сигналу до класу сигналів, що вивчається. Щоб розмірність норми збігалася

з розмірністю даних сигналів, з цього числа слід добути корінь  $p$ -го ступеня:  $\|u(t)\|_{L^p} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^p dt \right]^{1/p}$ . Для найчастіше використовуваних на практиці варіантів  $p = 1$ ,  $p = 2$  і  $p = \infty$  норми безкінцевовимірному простору приймають відповідно наступний вигляд:  $\|u(t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt$ ,

$$\|u(t)\|_{L^2} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right]^{1/2} \text{ и } \|u(t)\|_{L^\infty} = \max |u(t)|.$$

Перший тип норми зручний для аналізу сигналів, у яких обмежено середньовипрямлене значення. Таку норму використовують для опису роботи ряду електронних пристроїв, зокрема, джерел живлення. Норму такого типу можна зміряти, якщо мати в розпорядженні пристрій з випрямляючим (вентильним) елементом.

Серед розглянутих нормованих просторів, в яких можуть діяти сигнали електротехніки й електроніки, найважливішим є простір  $L^2$  з інтегрованим квадратом. Тому норма другого типу використовується найчастіше. Її часто називають *енергетичною*. Така норма важлива тому, що про величину сигналу часто говорять, виходячи із сумарного енергетичного ефекту, наприклад, кількості теплоти, що виділяється в резисторі. За допомогою такої норми можна характеризувати коефіцієнт корисної дії, допустиму потужність і інші параметри, що визначають найбільш важливі економічні показники будь-якої електронної апаратури. Квадрат норми

$$\text{носить назву енергії сигналу: } E_u = \|u(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt.$$

Слід звернути увагу на дві обставини: 1. Довжина вектора в енергетичному просторі сигналів визначається квадратним коренем з енергії сигналу. Це означає, що всі кінці векторів сигналів з рівними енергіями лежать на поверхні гіперсфери (багатовимірної сфери) одного й того ж радіусу. 2. Енергетична норма виявляється "нечутливою" до змін форми сигналу і, можливо, такою, що відбувається на відносно малих відрізках часу.

У електротехніці й електроніці також використовують норму третього типу, яка обмежує пікове значення сигналу. Обмеження пікового значення

найбільш часто зустрічаються на практиці в електронній апаратурі. Таке обмеження сигналів обумовлене кінцевою довжиною динамічних характеристик вихідних каскадів електронної апаратури, нелінійним характером активних елементів, використовуваних при формуванні сигналів. Перевищення сигналом пікового значення – норми, вказаної в документації на виріб, може приводити до відмови виробу. Особливо важлива така норма для мікроелектронних елементів сучасної цифрової апаратури, оскільки перевищення заданого значення напруги може приводити до виникнення різного виду пробів і до виходу елемента з ладу.

У доповіді доцільно на прикладі прямокутного імпульсу, який характеризується амплітудою  $U_m$  і тривалістю, показати, як визначається норма сигналу в безкінцевовимірному просторі Лебега. Перший тип норми рівний:

$$\|u(t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt = \int_0^{\tau} U_m dt = U_m \tau, \text{ що відповідає фактично площі}$$

П-імпульсу. *Енергетична норма* (норма другого типу) в просторі  $L^2$  з інтегрованим квадратом знаходиться таким чином:

$$\|u(t)\|_{L^2} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right]^{1/2} = \sqrt{\int_0^{\tau} U_m^2 dt} = U_m \sqrt{\tau}. \quad (7)$$

Норма третього типу, яка визначає пікове значення сигналу, рівна амплітуді імпульсу:  $\|u(t)\|_{L^\infty} = \max |u(t)| = U_m$ .

**УВАГА!** Не слід як у методичних рекомендаціях детально характеризувати сигнальний простір і його властивості. Ваше завдання в доповіді стисло викласти суть.

Результати обчислення норми для П-імпульсу, при дотриманні  $U_m = N_{SP}$ , можна підтвердити, використовуючи апарат символічних обчислень (Програма 20). Так само можна визначити норми: сигналу, що є імпульс напруги трикутної форми з амплітудою  $U_m$  і тривалістю  $\tau$ , який має тільки передній фронт (Програма 21) і такий же імпульс напруги, який має передній і задній фронти, але не містить плоскої частини імпульсу (Програма 22).

Як скінченновимірний простір можуть використовуватися простори  $l_N$  всіх дискретних сигналів розмірності  $N$ . Сигнали такого простору позначимо

векторами, наприклад  $u = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ , компонентами яких є координати сигналу. Для дискретних сигналів також можна ввести поняття норми за аналогією з тим, як це було зроблено для аналогових сигналів. При цьому формули треба відповідним чином модифікувати – інтеграли треба перетворити на суми. Діапазон індексів при підсумовуванні повинен відповідати розмірності простору  $N$ .

Найбільш загальною в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $l^p(N)$  для векторів  $u(n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ , що представляють кодову комбінацію з  $N$  впорядкованих чисел, буде норма

$$\|u(n)\|_{l^p} = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |u(n)|^p \right]^{1/p}. \text{ Для найчастіше використовуваних на практиці варіантів } p = 1, p = 2 \text{ і } p = \infty \text{ норми скінченновимірного сигнального простору приймають наступний вигляд}$$

$$\|u(n)\|_{l^1} = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |u(n)| \right];$$

$$\|u(n)\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |u(n)|^2} \text{ і } \|u(n)\|_{l^\infty} = \max |u(n)| \text{ відповідно.}$$

У доповіді доцільно на прикладі прямокутного імпульсу (П-імпульсу), який характеризується амплітудою  $U_m$  і тривалістю, показати, як визначається норма в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $l^p(N)$ . Вважатимемо, що сигнал  $u(n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$  представлений в  $N = 1000$  точках. Для розрахунку норм всіх типів, при дотриманні  $U_m = N_{SP}$ , доцільно використовувати Програму 23. Порівнюючи одержані для одних і тих же амплітуд і тривалості імпульсів результати, визначте наскільки відрізняються норми сигналів в безкінцевовимірному і в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $l^p(N)$ . Далі слід продемонструвати як визначаються і наскільки розрізняються в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $l^p(N)$  норми різного типу для сигналу, що є імпульс напруги трикутної форми, який має тільки передній фронт, з амплітудою  $U_m$  і тривалістю, а також норми імпульсу напруги трикутної

форми, який має передній і задній фронти, але не містить плоскої частини імпульсу (Програми 24 і 25). Зробіть висновки за результатами досліджень.

Далі слід провести дослідження того, як в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів змінюються норми сигналу  $u(n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  у випадках, коли на відносно малих відрізках часу відбуваються зміни форми сигналу, можливо, і значні. На практиці подібні ситуації відповідають дії на електронне устаткування короткочасних зовнішніх імпульсних перешкод. Для цієї мети можна, при дотриманні, скористатися Програмою 26. Зробити висновки, яка з норм виявляється "нечутливою" до змін форми сигналу, можливо, і значним, але таким, що відбувається на відносно малих відрізках часу. Також слід провести дослідження того, як в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $L^p(N)$  змінюються норми сигналу у випадках, коли сигнал виявляється "зашумленим" або на нього впливають шумові перешкоди. Шумові перешкоди (або просто шум) можуть зароджуватися усередині блоків електронного устаткування. Звичайно, це так звані флуктуаційні перешкоди – хаотична, безупорядкована зміна в часі напруги або струму в якому-небудь електричному ланцюзі, випадкові коливання цих фізичних величин біля середніх значень. Внутрішні шуми електронних пристроїв обумовлені статистичною природою протікаючих в них явищ і є проявом теплового руху заряджених частинок в компонентах електричного ланцюга. Для цієї мети скористайтесь Програмою 27. Зробіть висновки про те, як на норми сигналу впливають шуми і про те, яка з норм виявляється найбільш "чутливою" до шумів.

Щоб можна було трактувати відмінності одного сигналу від іншого, математично описувати відмінності між сигналами або помилки представлення одного сигналу іншим, в сигнальний простір вводять поняття метрики простору (metric) або відстані між сигналами. Говорять, що лінійний простір стає метричним простором  $LM$ , якщо в ньому вводиться таке правило, відповідно до якого кожній парі сигналів  $u_1, u_2$  поставлено в однозначну відповідність деяке дійсне негативне число  $\rho(u_1, u_2)$ , яке називається метрикою і що має сенс відстані між ними. Метрика незалежно від способу її визначення повинна підкорятися аксіомам метричного простору: 1.  $\rho(u_1, u_2) = \rho(u_2, u_1)$  (аксіома симетрії або рефлексивності метри-

ки). 2.  $\rho(u, u) = 0$  при будь-яких  $u \in LM$  (аксіома тотожності). 3. Для будь-якого елемента завжди  $\rho(u_1, u_2) \leq \rho(u_1, u_3) + \rho(u_2, u_3)$ . Сенс введення третьої умови, яка називається "правилом трикутника" в тому, що воно є формальним вираженням природної вимоги до метрики: якщо два сигнали близькі до третього, то вони повинні бути близькими і між собою.

Отже, метричним сигнальним простором називається множина  $LM$  з фіксованою на ньому метрикою  $\rho(u_1, u_2)$  (або по-іншому пара, що складається з множини і відстані  $(LM, \rho)$ ). Оскільки в теорії сигналів поняття відстані використовується для трактування відмінності одного сигналу від іншого або помилки представлення одного сигналу іншим, то для характеристики метричного простору повинна вибиратися така метрика, яка б якнайповніше могла одним числом описати схожість або відмінність двох сигналів. Зазвичай метрику визначають як норму різниці двох сигналів:  $\rho(u_1, u_2) = \|u_2 - u_1\|$ . Для безкінцевовимірного простору  $L^p(R)$  метрику в найзагальнішому вигляді можна визначити як:

$$\rho(u_1, u_2)_{L^p} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} [|u_1(t) - u_2(t)|^p dt] \right]^{1/p} \quad (8)$$

Для найчастіше використовуваних на практиці варіантів  $p = 1, p = 2$  і  $p = \infty$  метрика визначається як  $\rho(u_1, u_2)_{L^p} = \max |u_1(t) - u_2(t)|$  відповідно. Метрика першого типу, яка називається "манхеттенська" відстань має простий геометричний сенс – це площа фігури на сегменті, поміщеному між графіками функцій  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ . Метрика другого типу безкінцевовимірного простору називається квадратичною (середньоквадратичною) метрикою, оскільки вона дає квадрат різниці сигналів, усереднений за областю їх визначення. Така метрика, яка називається відстанню за Евклідом, дуже популярна в теорії сигналів з двох причин. По-перше, вона зручна при розрахунках і має певний фізичний сенс: це міра енергії різниці двох сигналів, вимірювання якої легко втілити у фізичному приладі. По-друге, ця метрика, як правило, адекватна завданням, де відмінності між сигналами породжуються сумарною дією великого числа перешкод або помилок вимірювання. Метрика третього типу називається рівномірною або Чебишевською (на честь П. Л. Чебишева, що відкрив багаточлени, які найменше відхиляються від нуля). Її також називають супренум-нормою

або метрикою домінування. Якщо використовуються простори  $C[t_H, t_K]$  всіх безперервних на сегменті  $t_H \leq t \leq t_K$  сигналів  $u(t)$ , то говорять, що в просторі  $C[t_H, t_K]$  має місце рівновимірна збіжність сигналів  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ . З цієї причини метрика простору  $C[t_H, t_K]$  називається рівномірною.

Слід мати на увазі, що збіжність в безкінцевовимірному просторі  $L^2(R)$  або середньоквадратична збіжність, істотно слабкіша рівновимірної збіжності в наступному сенсі: якщо сигнали сходяться в рівновимірній метриці, то вони сходяться і в сенсі середньоквадратичної метрики. Зворотне ж неправильно. Сигнали, що сходяться в сенсі середньоквадратичного відхилення, можуть в деяких точках значно відрізнятись, аж до майже нескінченно великих відхилень. У цьому сенсі, якщо потрібна висока точність функціонування електронного устаткування, то для інженерної практики рівномірна збіжність істотно важливіша.

Продемонструйте, як змінюється відстань між двома сигналами (у метриках першого і другого типу), якщо один із них представляє відрізок синусоїди з амплітудою  $U_{1m}$ , що обертається в нуль на кінцях інтервалу  $[0, T]$ , а другий – прямокутний П-імпульс тієї ж тривалості з амплітудою  $U_m$ , якщо амплітуда  $U_{1m}$  вибирається з наступних трьох міркувань: 1. Амплітуда прямокутного П-імпульсу є однією з точок "золотого перетину" відрізка  $[0, U_{1m}]$ , тобто  $U_m = 0,618 U_{1m}$ . 2. Амплітуда прямокутного П-імпульсу визначається "мінімумом" метрики першого типу  $U_m = (2/\pi) U_{1m}$ . 3. Амплітуда прямокутного П-імпульсу вибрана так, щоб забезпечити мінімум відстані між цими двома сигналами в просторі з квадратичною метрикою  $L_2$ . З приводу останнього випадку відзначимо, що квадрат відстані між сигналами визначається як:

$$\rho^2(u_1, u_2)_{L^2} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt \right] = \int_0^T (U_{1m} \sin \frac{\pi t}{T} - U_m)^2 dt = \frac{U_{1m}^2 T}{2} - \frac{4U_{1m}U_m T}{\pi} + U_m^2 T. \quad (9)$$

Дослідження цього виразу на екстремум показує, що мінімум відстані в квадратичній метриці досягається, якщо  $U_{1m} = (2/\pi) U_m$  і також  $U_{1m} = 0,637 U_m$ . Для досліджень скористайтеся Програмою 28

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

Для дискретних сигналів, що представляють  $n$ -вимірні вектори  $u_1(n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  і  $u_2(n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$  скінченновимірного простору  $l_N$  також можна ввести поняття метрики, за аналогією з тим, як це було зроблено для аналогових сигналів. При цьому формули треба відповідним чином модифікувати – інтеграли слід перетворити на суми. Діапазон індексів при підсумовуванні повинен відповідати розмірності простору  $N$ . Найбільш загальною в  $n$ -вимірному координатному просторі

сигналів  $l^p(N)$  буде метрика:  $\rho(u_1, u_2)_{l^p} = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |u_1(k) - u_2(k)|^p \right]^{1/p}$ . Для найчастіше використовуваних варіантів  $p = 1$ ,  $p = 2$  і  $p = \infty$  формули для метрики є  $\rho(u_1, u_2)_{l^1} = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |u_1(k) - u_2(k)| \right]$ ,  $\rho(u_1, u_2)_{l^2} = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |u_1(k) - u_2(k)|^2 \right]^{1/2}$ , і  $\rho(u_1, u_2)_{l^\infty} = \max |u_1(k) - u_2(k)|$  відповідно.

Продемонструйте, як в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $l^p(N)$  змінюється відстань між двома сигналами, якщо один із них представляє відрізок синусоїди з амплітудою  $U_{1m}$ , що обертається в нуль на кінцях інтервалу  $[0, T]$ , а другий – прямокутний П-імпульс тієї ж тривалості з амплітудою  $U_m$ . Амплітуда  $U_{1m}$  рівна:  $U_m = 0,618 U_{1m}$ ;  $U_m = (2/\pi) U_{1m}$ . Для досліджень використовуйте Програму 29.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

Вивчіть, як в  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $l^p(N)$  визначається відстань між двома сигналами, якщо один із них представляє відрізок синусоїди з амплітудою  $U_{1m}$ , що обертається в нуль на кінцях інтервалу  $[0, T]$ , а другий – сигнал виду  $u(t) = 4U_m(t/4 - t^2/16)$  тієї ж тривалості. Для досліджень використовуйте Програму 30

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень в Програмах 30 – 32 не змінюйте амплітуди імпульсів.

Далі слід провести дослідження того, як у  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $L^p(N)$  змінюються відстані між сигналами у випадках, коли на відносно малих відрізках часу відбуваються зміни форми сигналу і, можливо, значні (іншими словами, коли на один із сигналів впливає імпульсна перешкода). Для цієї мети використовуйте **Програму 31**.

Зробити висновки, яка з метрик є менш "чутливою" до змін форми одного із сигналів і, можливо, значним, але таким, що відбувається на відносно малих відрізках часу.

Далі слід провести дослідження того, як у  $n$ -вимірному координатному просторі сигналів  $L^p(N)$  змінюються відстані між сигналами у випадках, коли один із сигналів виявляється "зашумленим". Для цієї мети використовуйте **Програму 32**.

Зробити висновки про те, як шуми впливають на відстань між сигналами і, яка з метрик виявляється найбільш чутливою до шумів.

Розглянуті абстрактні лінійні нормовані простори в деякому розумінні бідніші своїми властивостями і поняттями, ніж безліч вільних векторів на площині в просторі тому, що такі сигнальні простори не враховують властивості, які стосуються визначення "спрямованості" сигналів, можливостей здійснення їх "повороту" на деякий кут. У них не знайшли відображення найважливіші факти, пов'язані з вимірюваннями кутів, площі, об'ємі і т. п. Внаслідок цього область застосування загальної теорії до аналізу сигналів значно звужується. Ці обмеження можуть бути усунені, якщо ввести поняття "скалярного добутку", що дозволяє знайти "кут" між сигналами і визначити простір зі скалярним добутком. Поставимо у відповідність кожній парі сигналів  $u_1, u_2$  деяку операцію, результатом якої є  $(u_1, u_2)$ , що позначається як дійсне число, і назовемо це число скалярним добутком сигналів  $u_1$  і  $u_2$ . При цьому вважатимемо, що скалярний добуток задовольняє наступні вимоги: 1.  $(u_1, u_2) \geq 0$  і  $(u_1, u_2) > 0$  для будь-якого ненульового вектора, 2.  $(u_1, u_2) = (u_2, u_1)$  (виконується комутативний закон), 3.  $(\lambda u_1, u_2) = \lambda(u_1, u_2)$  для будь-якого дійсного  $\lambda$ , 4.  $(u_1 + u_2, u_3) = (u_1, u_3) + (u_2, u_3)$ .

Дійсний лінійний простір  $E$ , в якому визначено скалярний добуток, називають евклідовим простором. Будь-який евклідовий простір

сигналів стане нормованим, якщо в ньому на основі скалярного добутку ввести норму будь-якого сигналу таким чином:  $\|u(t)\| = \sqrt{(u, u)}$ . Така норма породжує метрику, узгоджену зі скалярним добутком  $\rho(u, u_2) = \|u_2 - u_1\| = \sqrt{(u_2 - u_1)(u_2 - u_1)}$ .

Для безкінцевовимірному евклідовому простору  $C[t_H, t_K]$  всіх визначених і безперервних на сегменті  $t_H \leq t \leq t_K$  сигналів  $u(t)$ , а також сигналів  $u(t)$  простору  $L^2[t_H, t_K]$  інтегрованих із квадратом на сегменті  $t_H \leq t \leq t_K$  і сенсі Лебега скалярний добуток визначається як інтеграл від добутку сигналів:  $(u_1(t), u_2(t)) = \int_{t_H}^{t_K} u_1(t)u_2(t)dt$ . Норма, породжена скалярним

добутком, буде рівна:  $\|u(t)\|_{L^2} = \sqrt{(u, u)} = \left[ \int_{-x}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right]^{1/2}$ . Якщо

інтеграл розуміється в сенсі Лебега, і введена норма узгоджена зі скалярним добутком, то лінійний метричний евклідовий простір називають речовинним гільбертовим простором  $H$ .

Припустимо, що в  $H$ -гільбертовому просторі з кінцевим значенням енергії визначені сигнали в проміжку часу від  $t_H$  до  $t_K$ , кінцевому або нескінченному. Тоді в ньому енергія суми сигналів  $u_1$  і  $u_2$ :

$$E = \int_{t_H}^{t_K} (u_1 + u_2)^2 dt = \int_{t_H}^{t_K} [u_1(t)]^2 dt + \int_{t_H}^{t_K} [u_2(t)]^2 dt + 2 \int_{t_H}^{t_K} [u_1(t)u_2(t)] dt.$$

Загальна енергія, як випливає з одержаних співвідношень, вже не рівна сумі енергій кожного із сигналів. Енергія сумарного сигналу містить у собі взаємну енергію  $E_{CR} = 2 \int_{t_H}^{t_K} [u_1(t)u_2(t)] dt$ . Порівнюючи формули

для скалярного добутку і взаємної енергії нескладно визначити, що скалярний добуток (з коефіцієнтом  $1/2$ ) відповідає взаємній енергії сигналів.

У скінченновимірному  $n$ -вимірному просторі  $L_N^2$  всіх впорядкованих сукупностей  $n$  дійсних чисел  $u(n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$  (дискретних сигналів розмірності  $N$ ) можна ввести поняття скалярного добутку за аналогією з

тим, як це було зроблено для аналогових сигналів. Поставимо у відповідність кожній парі  $u_1(n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  і  $u_2(n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$  таких векторів-рядків дійсне число  $(u_1(n)u_2(n)) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_N\beta_N$ , яке задовольняє всім вимогам, висунутим раніше. Це число називається скалярним добутком векторів-рядків  $(u_1(n)u_2(n)) = \sum_{k=0}^{N-1} u_1(k)u_2(k)$

$u_1(n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  і  $u_2(n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ :  $(u_1(n)u_2(n)) = \sum_{k=0}^{N-1} u_1(k)u_2(k)$ , а

сам простір  $l_N^2$  стає евклідовим. Норма, породжена скалярним добутком,

$$\|u(n)\|_{l^2} = \sqrt{(u(n), u(n))} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |u(n)|^2}$$

У будь-якому речовинному евклідовому сигнальному просторі для додання "геометричного сенсу" аналізованим сигналам можна ввести поняття кута між двома довільними сигналами  $u_1$  і  $u_2$  цього простору. За аналогією з векторною алгеброю, назвемо кутом  $\varphi$  між сигналами  $u_1$  і  $u_2$  в безкінечновимірному сигнальному просторі той кут (що змінюється в межах від 0 до  $\pi$ ), косинус якого визначається співвідношенням:

$$\cos \varphi = \frac{(u_1(t), u_2(t))}{\|u_1(t)\| \|u_2(t)\|} = \frac{(u_1(t), u_2(t))}{\sqrt{(u_1(t)u_1(t))} \sqrt{(u_2(t)u_2(t))}} \quad (10)$$

У скінченновимірному сигнальному просторі назвемо кутом  $\varphi$  між сигналами  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$  той кут (що змінюється в межах від 0 до  $\pi$ ), косинус якого визначається співвідношенням:

$$\cos \varphi = \frac{(u_1(n), u_2(n))}{\|u_1(n)\| \|u_2(n)\|} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_1(k)u_2(k)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |u_1(n)|^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |u_2(n)|^2}} \quad (11)$$

Відзначимо, що два довільні сигнали  $u_1 \neq 0$  і  $u_2 \neq 0$  сигнального простору називаються ортогональними, якщо скалярний добуток цих елементів рівний нулю  $(u_1, u_2) = 0$  (в цьому випадку косинус кута  $\varphi$  між

сигналами буде рівний нулю, а сам кут  $= 90^\circ$ ). Тобто, ортогональні сигнали гранично "несхожі" один на одного. Вся система сигналів  $\{u\}$  сигнального простору називається ортогональною, якщо ортогональні будь-які пари сигналів цієї системи. Ортогональна система сигналів називається ортонормованою, якщо норми всіх її сигналів рівні одиниці. Для елементів ортонормованої системи  $\{u\}$  справедливі наступні співвідношення:

$$(u_V, u_W) = \begin{cases} 1, & \text{при } V = W \\ 0, & \text{при } V \neq W \end{cases}$$

Слід підкреслити важливу властивість енергетичного сигнального простору  $L^2[t_H, t_K]$  з інтегрованим квадратом на сегменті  $t_H \leq t \leq t_K$ . На відміну від інших сигнальних просторів воно є гільбертовим, тобто дозволяє вимірювати не тільки відстані, але й кути. Лише в цьому просторі вводиться поняття ортогональності, що дозволяє порівняно легко розрізнити сигнали. Способи побудови в безкінечновимірному гільбертовому просторі нескінченних систем взаємно ортогональних сигналів детально вивчені в математиці. У доповіді слід як приклад відзначити, що на інтервалі  $0 \leq t \leq T$  ортонормованою є система тригонометричних гармонійних сигналів з кратними частотами – гармоніками (доповнена постійним в часі сигналом):  $u_m(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi mt/T)$ ,  $u_m(t) = \sqrt{2/T} \sin(2\pi mt/T)$ .

Підставляючи різні значення кратних частот  $k$  і  $m$  шляхом безпосередньої інтеграції за формулою переконайтеся в тому, що скалярний добуток двох сигналів  $u_m(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi mt/T)$  і  $u_k(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi kt/T)$ , визначений як інтеграл  $(u_k(t), u_m(t)) = \int_0^T u_k(t)u_m(t)dt$ , буде рівний нулю при

будь-яких різних  $k$  і  $m$ . Для проведення досліджень використовуйте Програму 33. Зазначте, що ортогональна система сигналів  $u_m(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi mt/T)$  і  $u_k(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi kt/T)$  є також ортонормованою і для неї справедливі наступні співвідношення:

$$(u_V, u_W) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m \\ 0, & \text{при } k \neq m \end{cases}$$

Використовуючи Програму 34, зазначте, що при рівних частотах скалярний добуток таких сигналів рівний одиниці



Обчисліть в скінченновимірному  $n$ -вимірному просторі  $L_N^2$  скалярний добуток  $(u_k(n)u_m(n))$  сигналів  $u_m(n) = \sqrt{2/T} \sin(2\pi mn/T)$  і  $u_k(n) = \sqrt{2/T} \sin(2\pi kn/T)$ , за аналогією з тим, як це було зроблено для аналогових сигналів. Для цієї мети використовуйте Програму 35.

Визначте в  $n$ -вимірному сигнальному просторі  $L_N^2$  кут  $\varphi$  між сигналами  $u_m(n) = \sqrt{2/T} \sin(2\pi mn/T)$  і  $u_k(n) = \sqrt{2/T} \sin(2\pi kn/T)$ , тобто той кут, косинус якого визначається співвідношенням:

$$\cos \varphi = \frac{(u_k(n), u_m(n))}{\|u_k(n)\| \|u_m(n)\|} = \frac{\sum_{v=0}^{N-1} u_k(v) u_m(v)}{\sqrt{\sum_{v=0}^{N-1} |u_k(v)|^2} \sqrt{\sum_{v=0}^{N-1} |u_m(v)|^2}} \quad (12)$$

Для цієї мети використовуйте Програму 36.

У доповіді слід також відзначити, що, разом з ортонормованими гармонійними сигналами (гармоніками), останнім часом для представлення "ступінчастих" цифрових сигналів в електроніці широко використовують "несинусоїдальні" ортонормовані системи функцій Радемахера, Уолша, Хаара, і ортогональні функції типу вейвлетів. Такі сигнали у ряді випадків дозволяють істотно спростити і прискорити обробку інформації. Функції Радемахера  $\{rad_n(t)\}$  ( $n = 0, 1, 2$ ) мають вид послідовності прямокутних імпульсів. Кожна з них, приймаючи значення  $+1$  і  $-1$ , містить  $2^{n-1}$  періодів на напіввідкритому інтервалі  $[0, 1)$ . Виняток становить функція, яка на всьому інтервалі рівна  $+1$ . Оскільки функції Радемахера приймають два значення ( $+1$  і  $-1$ ), то вони зручні для обчислення на цифровому устаткуванні. Для практичного використання зручним є співвідношення, що встановлює зв'язок функцій Радемахера з тригонометричними функціями:  $rad_n(t) = \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$ , ( $n = 0, 1, 2$ ). Перевірити ортогональність, ортонормованість шматково-постійних функцій Радемахера можна за допомогою Програми 37). Номери функцій Радемахера слід брати від 1 до 5. Зробіть висновки за наслідками досліджень.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів

На відміну від повного набору ортогональних тригонометричних функцій функції Радемахера непарні. Це перешкоджає їх використанню для апроксимації парних сигналів (вони утворюють неповний набір функцій). Повними ортогональними системами функцій є системи функцій Уолша і Хаара. Останнім часом під впливом методів обробки дискретних сигналів ці системи набули значного поширення. Дані функції характерні тим, що на інтервалі свого існування приймають два значення ( $+1$  і  $-1$ ). Для функцій Уолша прийнято позначення  $wal(n, \theta)$ . Залежно від порядку проходження окремих функцій у системі безліч функцій Уолша може бути одержана різним чином. Загальноприйнятими є наступні способи отримання функцій: 1) впорядкування за частістю (за Уолшем); 2) діагнчне впорядкування (за Пелі); 3) природне впорядкування (за Адамаром).

Щоб розрізнити окремі функції, впорядковані за Уолшем, використовують *узагальнене поняття частоти*. Для опису узагальненої частоти застосовують термін "частість" або як ще говорять в англомовній літературі "секвента". "Частість" може бути визначена як половина середнього числа перетинів нульового рівня в 1 секунду. За допомогою поняття "частість" можна розрізнити функції, точки перетину нульового рівня яких розподіляються нерівномірно і не обов'язково є періодичними. У разі синусоїдальних функцій поняття частоти збігається з поняттям частоти. Якщо функції впорядковані за Уолшем, то частість (або секвента) кожної подальшої функції Уолша більше або дорівнює частоті попередньої функції. Звідси й назва "впорядкування за частістю".

Функції Уолша, впорядковані за частістю, можуть бути представлені у вигляді добутку функцій Радемахера. Номери функцій Радемахера, які при перемноженні утворюють функцію Уолша, визначаються за номерами, вираженими у двійковому коді Гріючі. Номери перемножуваних функцій Радемахера відповідають номерам розрядів, в яких є одиниці закодованого кодом Гріючі числа  $n$ . Наприклад, номер функції Уолша  $n = 2$ . Вираз  $n$  в коді Гріючі-0011. Тоді друга функція Уолша, впорядкована за частістю, визначатиметься як  $wal(2, \theta) = rad(1, \theta) rad(2, \theta)$ . Перевірити ортогональність, ортонормованість шматково-постійних функцій Уолша можна за допомогою Програми 38. У програмі задані функції Уолша впорядковані за частістю. Номери функцій Уолша слід брати від 1 до 7. Перевірте, чи дійсно номер функції Уолша рівний числу змін знаку на інтервалі її існування.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

Відомості про способи впорядкування функцій Уолша за Пелі й за Адамаром можна знайти в літературі

У просторі сигналів помітне місце займають ортогональні й біортогональні вейвлети, що вирізняються серед вигідних якостей. Термін "вейвлет" означає "коротка або маленька хвиля". Вейвлети є новими математичними об'єктами і якщо не претендувати на суворість у визначенні, займають проміжне положення між розглянутими крайніми випадками сигналів (гармонійними та імпульсними сигналами). Майже всі вейвлети не мають простого аналітичного опису у вигляді однієї формули, але вони задаються ітераційними виразами, легко обчислюваними комп'ютерами. Дослідник Інгрід Добеши в 1987 році запропонувала ортогональні вейвлети, зосереджені на кінцевому інтервалі часу (з компактним носієм) "dbN". "Ложкою дьогтю" виявилася відсутність у цих вейвлетів симетрії. Вдосконалені ортогональні вейвлети Добеши названі койфлетами coifN. Відносяться до ортогональних також майже симетричні вейвлети симплета symN. Всі названі майже симетричні вейвлети також реалізуються ітераційними формулами.

Використовуючи Програму 39, перевірте ортогональність несиметричних вейвлетів з компактним носієм, які називаються вейвлети Добеши. Номери вейвлетів Добеши слід брати 5 і 10.

Використовуючи Програму 40, перевірте ортогональність майже симетричних вейвлетів з компактним носієм, які називаються симплети. Номери симплетів слід брати від 6 до 8.

На підставі результатів досліджень зробіть висновки про ортогональність досліджуваних вейвлетів. Зверніть увагу слухачів семінару на те, що незалежно від того, як оцінюють міру схожості й відмінності між сигналами, чи то використовуючи евклідову відстань  $\rho(u_1, u_2) = \|u_2 - u_1\|$ , чи то кут між ними, в сигнальному просторі, застосовуючи геометричну аналогію, завжди легко виявити не схожі один на одного сигнали або, навпаки, схожі сигнали. Для підтвердження зазначеного розглянемо зі скінченновимірною простору два сигнали  $u_1(n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  і  $u_2(n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$  розмірністю  $N$ . Ці сигнали, як деякі вектори сигнального простору, визначають дві точки в  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $R^n$ . Відповідно, евклі-

дова відстань між парою  $n$ -вимірних векторів  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$  обчислюється як

$$\rho(u_1, u_2)_{l^2} = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |u_1(k) - u_2(k)|^2 \right]^{1/2}. \text{ Звідси витікає, що ступінь схожості між сигналами, представленими такими, є величиною, зворотною евклідовій відстані між ними } \rho(u_1, u_2)_{l^2}.$$

Причому, чим ближче окремі компоненти сигналів  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  і  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$  один до одного, чим менше вони відрізняються, тим менше евклідова відстань і тим вище ступінь схожості між векторами  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$ . Інший підхід до визначення ступеня схожості ґрунтується на ідеї скалярного добутку. Якщо сигнали мають однакову розмірність, то їх скалярний добуток визначається як:

$$(u_1(n)u_2(n)) = u_1^T(n)u_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} u_1(k)u_2(k). \quad (13)$$

Результат ділення скалярного добутку на норму кожного сигналу рівний косинусу внутрішнього кута між сигналами. З рис. 7. видно, що чим менше ступінь схожості між сигналами і, відповідно, менше скалярний добуток  $u_1^T(n)u_2(n)$ , тим більше кут  $\varphi$  наближається до  $\pi/2$ . Це ще раз підкреслює той факт, що ортогональні сигнали гранично не схожі один на одного.

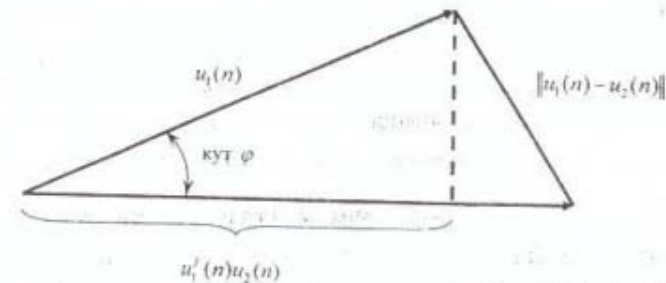


Рис. 7. До визначення ступеня схожості між сигналами, представленими векторами  $u_1(n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  і  $u_2(n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$

Можна помітити, що фактично ці два методи вимірювання схожості або відмінності між сигналами відображають по суті одне й теж.

евклідова відстань між векторами  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$  пов'язана з проекцією вектора  $u_1(n)$  на вектор  $u_2(n)$ . Якщо пронормувати вектори  $u_1(n)$  і, щоб їх довжина стала рівною одиниці, то можна записати  $\rho^2(u_1, u_2) = (u_2 - u_1)^T (u_1 - u_2) = 2 - 2u_1^T u_2$ . Це співвідношення наочно підтверджує той факт, що мінімізація евклідової відстані  $u_2 - u_1$  (збільшення проекції вектора  $u_1(n)$  на вектор  $u_2(n)$ ) і максимізація скалярного добутку  $u_1^T u_2$  (наближення кута  $\varphi$  до нуля) приводять до збільшення "схожості" між сигналами  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$ . І, навпаки, збільшення евклідової відстані  $\|u_2 - u_1\|$  і наближення до ортогональності сигналів вабить збільшення несхожості один на одного сигналів  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$ . Перевірити твердження про те, що до збільшення схожості між сигналами  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$  приводять мінімізація евклідової відстані  $\|u_2 - u_1\|$  і максимізація скалярного добутку  $u_1^T u_2$  (наближення кута  $\varphi$  до 0 градусів), можна за допомогою Програми 41. Затримку другого імпульсу відносно почала першого у відсотках від тривалості слід брати від 1% до 100%.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

Побудуйте, використовуючи *Microsoft Excel*, в єдиній системі координат графіки залежностей евклідової відстані (у метриках першого й другого типів) і кута між імпульсами  $\varphi$  від величини затримки другого імпульсу відносно почала першого імпульсу у відсотках від тривалості. Зробіть висновки з одержаних залежностей про те, як на ступінь "схожості" між сигналами  $u_1(n)$  і  $u_2(n)$  впливає величина евклідової відстані  $u_2 - u_1$  і скалярний добуток  $u_1^T u_2$  (кут  $\varphi$  між сигналами). Припустивши, що сигналами є два П-імпульси, що перекриваються за тривалістю на 50%, проведіть чисельні дослідження і доведіть шляхом зміни амплітуд, що кут між цими сигналами не залежить від амплітуд імпульсів. Для підтвердження чисельних результатів одержите формулу, що визначає кут  $\varphi$ .

Зробіть висновок про те, чи можна утворювати на відрізок  $[0, T]$  ортогональну систему шматково-постійних функцій, якщо, зафіксувавши натуральне число  $M$  і розбивши відрізок  $[0, T]$  на  $M$  рівних ділянок, ство-

рити систему блоково-імпульсних функцій шляхом зрушення кожного П-імпульсу за часом на одну ділянку (рівну тривалості), щоб їх носії не перетиналися. Чи будуть будь-які дві такі функції взаємно ортогональними (тобто їх добуток буде рівний нулю на всьому вказаному інтервалі і буде ділянкою, для якої кожна блоково-імпульсна функція, що буде помножена на саму себе, дасть добуток не рівний нулю)?

Для сучасних комунікаційних систем є характерним постійне зростання кількості корпоративних і індивідуальних абонентів, збільшення обсягу переданих повідомлень. Необхідність прискореного обміну інформацією між багатьма абонентами привела до побудови багатоканальних систем зв'язку, в яких різні абоненти використовують канал в один і той же час. Природно, що в таких системах передачі інформації використовуються гранично не схожі один на одного сигнали і розв'язується завдання розділення повідомлень різних абонентів. Одним із методів розділення інформації різних абонентів, яка передається за виділеними для них каналами, є *метод кодового розділення*. Суть цього методу полягає в тому, що розділення здійснюється за формою сигналів, які використовує той або інший абонент. Академік В. А. Котельников сформулював і вирішив задачу знаходження системи рівновіддалених сигналів, що володіють однаковою енергією, які забезпечували б мінімальну ймовірність неправильного їх пізнання. Виявилось, що оптимальною є система рівновіддалених один від одного сигналів. Такі сигнали іноді називають симплексними, оскільки кінці векторів, що представляють сигнали в сигнальному просторі, лежать у вершинах правильного багатовимірного багатогранника-симплексу. У синхронних системах до оптимальних сигналів наближаються ортогональні сигнали, коли передача сигналів здійснюється так, що переносники інформації задовольняють вимогам ортогональності. Такі сигнали розділяються без взаємних перешкод.

На підставі узагальнення проведених досліджень про зрушення двох П-імпульсів, які показують, що при часових зміщеннях порушується ортогональність сигналів. Зробіть висновки про наступне: 1. Необхідно чи ні мати у разі багатоканальної системи зв'язку з кодовим розділенням каналів блок синхронізації сигналів – переносників інформації за часом (блок точного поєднання сигналів у часі) 2. Наскільки важлива стабільність генераторів при роботі блоку синхронізації, якщо передача інформації між різними абонентами здійснюється ортогональними сигналами, що

створюють сигнали синхронізації? Як важливо при цьому забезпечити тимчасову синхронізацію абонентів, розкиданих на великій території? 3. До чого в багатоканальних системах з кодовим розділенням переносників інформації приведе відхилення внутрішнього кута між сигналами від  $\pi/2$  (поява перекриття імпульсів із-за нестійкої синхронізації) і як у таких системах комунікації змінюватимуться взаємні перешкоди між абонентами (які називаються шумами ортогональності), якщо кут  $\varphi$  між сигналами зменшуватиметься (збільшуватиметься ступінь перекриття між сигналами)? Припустивши, що сигналами є два П-імпульси, що перекриваються за тривалістю на 50%, проведіть чисельні дослідження і визначте, як імпульсна перешкода, що впливає на один імпульс, впливає на метрики і на кут між сигналами. Для цієї мети використовуйте **Програму 42**.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

Відтворіть на площині сигналами у вигляді умовних векторів і покажіть, як змінюватиметься розташування векторів за відсутності та наявності короткочасних імпульсних перешкод. Зробіть висновок про те, наскільки істотною є дія імпульсних перешкод на сигнали електроніки.

Припустивши, що сигналами є два П-імпульси, що перекриваються за тривалістю на 50 відсотків, проведіть чисельні дослідження і визначте, як шум, що впливає на один сигнал, впливає на метрики і на кут між сигналами. Для цієї мети може бути корисною **Програма 43**.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

Відтворіть на площині сигнали у вигляді умовних векторів і покажіть, як змінюватиметься розташування векторів за відсутності і наявності шуму. Зробіть висновок про те, наскільки істотною є дія шумів на сигнали електроніки. Слід мати на увазі, що оскільки всі кутові положення вектора білого шуму рівноймовірні, то в просторі сигналів шум створює хмару невизначеності, яка має сферичну симетрію.

**УВАГА!** Ви виконаєте дослідницьке завдання, хоч і навчальне. При виконанні роботи подібного типу дуже важливо навчитися робити висновки на підставі одержаних результатів. Не забувайте про це.

Використання так званих несинусоїдальних ортогональних сигналів, як елементів скінченновимірного лінійного нормованого метричного сигнального простору зі скалярним добутком, зручно і внаслідок того, що з

їх допомогою можна створювати (генерувати) будь-який сигнал, представляючи його у вигляді набору стандартних ортогональних функцій і чисел. Таке завдання набуло особливої актуальності в період цифрового устаткування і комп'ютерних обчислень. Традиційний класичний апарат створення довільних сигналів у вигляді рядів Фур'є має справу з розкладанням сигналу за гармонійними функціями (синусоїдам і косинусоїдам-гармонікам з кратними частотами) внаслідок чого він виявився малоефективним для цифрових імпульсних сигналів і страждає рядом обмежень. Це пов'язано з тим, що набір гладких гармонійних функцій "погано" сходиться до несинусоїдального сигналу й принципово не здатний, при обмеженому числі членів ряду, створити "хороший" імпульсний сигнал, який володіє локальними особливостями. У підручниках із вищої математики завжди можна знайти доказ того, що якщо в гільбертовому просторі  $H$  задана система ортонормованих функцій  $\{u_k^{ort}(t)\}$ , то на підставі поняття про векторний простір довільний сигнал  $u(t)$  завжди можна представити у вигляді зваженої суми ортонормованих функцій, помножених на коефіцієнти  $C_k$ :

$u(t) = \sum_{k=1}^N C_k u_k^{ort}(t)$ . Таке представлення сигналу називають узагальненим

рядом Фур'є. Коефіцієнт ряду знаходиться шляхом обчислення значення скалярного добутку сигналу на одну з ортонормованих функцій вигляду:

$$C_k = (u(t), u_k^{ort}(t)) = \int_{T_u}^{T_k} u(t) u_k^{ort}(t) dt$$

Характеризуючи систему ортонормованих функцій  $\{u_k^{ort}(t)\}$  і проводячи аналогію з ортами трьохвимірної системи координат, говорять, що в просторі сигналів заданий ортонормований базис.

З математики відомо, коли розглядають звичайний трьохвимірний простір геометричних векторів, що для довільного вектора, який витікає з початку координат, скалярний добуток цього вектора на відповідні базисні осі визначає афінні координати цього вектора щодо ортонормованого базису. Тому скалярний добуток сигналу на одну з ортонормованих функцій, що має норму рівну одиниці, природно назвати проєкцією сигналу на цю ортонормовану функцію. Можна сказати, що всі проєкції сигналу на ортонормований базис визначають координати довільного сигналу щодо ортонормованого базису. Використання узагальненого ряду Фур'є дозволяє

перейти від самих сигналів до розгляду координат цих сигналів щодо вибраного базису. Причому як базис вже може виступати будь-яка система ортонормованих функцій  $\{u_k^{ort}(t)\}$ , а не тільки ортонормована система гармонійних сигналів. При цьому операції над функціями замінюються діями алгебри над числами; останні легко реалізуються на ЕОМ. Зазначені обставини, що характеризують широко використовуваний нині підхід до створення цифрових сигналів, дозволяють вирішувати складні завдання електротехніки й електроніки.

Припустимо, що в цифровому обладнанні ми хочемо створити сигнал у вигляді імпульсу трикутної форми, який має тільки фронт. При цьому нам відомо, що ми маємо можливість створити постійну напругу (еквівалентну функції Уолша з номером 0) і, відносно просто, за допомогою цифрових логічних схем або програмним шляхом за допомогою мікропроцесора згенерувати імпульси за формою відповідні функції Уолша з номером 1. Для отримання необхідного сигналу необхідно знати два чисельні коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є. Обчислимо ці коефіцієнти в розкладанні трикутного імпульсу за системою двох перших функцій Уолша. Для визначеності вважатимемо, що фронт трикутного імпульсу описується таким чином:  $u(\theta) = U_m \theta$ ,  $\theta = t/T$ ,  $U_m = 1$ ,  $T = 1$ . Тоді:

$$C_0 = \int_0^T u(\theta) \text{wal}(0, \theta) d\theta = U_m \int_0^T \theta(1) d\theta = \frac{U_m T^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad (14)$$

$$C_1 = \int_0^T u(\theta) \text{wal}(1, \theta) d\theta = U_m \int_0^{T/2} \theta(1) d\theta + U_m \int_{T/2}^T \theta(-1) d\theta = \frac{-1}{4}, \quad (15)$$

Аналогічно визначимо коефіцієнти  $C_2 = -1/8$  і  $C_3 = -1/18$ .

Використовуючи **Програму 44**, оцініть наскільки відрізняється імпульс трикутної форми від сигналу, створеного підсумовуванням двох і чотирьох функцій Уолша, помножених на відповідні коефіцієнти.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

На підставі результатів досліджень зробіть висновки про те, наскільки задовільним виявився створений сигнал з погляду відмінності за нормами, метриками й внутрішнім кутом між сигналами. Сформулюйте так само, як багато слід використовувати функції Уолша з різними номерами, щоб ство-

рений в базисі Уолша ступінчастий сигнал за різними метриками й внутрішніми кутами мало відрізнявся від бажаного сигналу трикутної форми.

Розглянемо ситуацію, коли в цифровому устаткуванні ми хочемо створити сигнал у вигляді імпульсу трикутної форми, що має тільки фронт, але в цьому випадку фронт імпульсу описується квадратичною залежністю  $u(\theta) = U_m \theta^2$ ,  $\theta = t/T$ ,  $U_m = 1$ ,  $T = 1$  і, крім того, використовуються функції Уолша, впорядковані за Пелі. Для цієї ситуації обчислені коефіцієнти будуть наступні:  $C_0 = 1/3$ ,  $C_1 = -1/4$ ,  $C_2 = -1/8$ ,  $C_3 = 1/16$ ,  $C_4 = -1/16$ ,  $C_5 = 1/32$ ,  $C_6 = 1/64$ ,  $C_7 = 0$ .

Використовуючи **Програму 44**, можна оцінити, наскільки відрізняється імпульс трикутної форми від сигналу, створеного підсумовуванням трьох і семи функцій Уолша (впорядкованих за Пелі), помножених на відповідні коефіцієнти. На підставі результатів досліджень зробіть висновки про те, наскільки задовільним виявився створений сигнал з погляду відмінності за нормами, метриками і внутрішнім кутом між сигналами. Сформулюйте так само, як багато слід використовувати функції Уолша з різними номерами, щоб створений в базисі Уолша ступінчастий сигнал за різними метриками і внутрішніми кутами мало відрізнявся від бажаного сигналу трикутної форми.

**УВАГА!** Для отримання правильних результатів досліджень не змінюйте амплітуди імпульсів.

Як базисні функції, створюючи ортонормований базис, можна використовувати широкий набір ортогональних вейвлетів. Ортонормованими функціями вейвлетів можуть бути різні ортонормовані функції, зокрема вейвлети, які не мають аналітичного уявлення у вигляді однієї формули, але можуть задаватися ітераційними виразами, легко обчислюваними комп'ютерами. В цьому випадку, як і раніше, на підставі поняття про векторний простір сигнал  $u(t)$  також можна представити у вигляді узагальненого ряду Фур'є, тобто зваженої суми ортонормованих вейвлетів,

помножених на коефіцієнти  $C_k$ :  $u(t) = \sum_{k=1}^N C_k u_k^{ort}(t)$ . Коефіцієнти такого ряду знаходяться шляхом обчислення значення скалярного добутку сигналу на одну з ортонормованих функцій заданого вигляду:

$$C_k = (u(t), u_k^{ort}(t)) = \int_{T_H}^{T_K} u(t) u_k^{ort}(t) dt. \text{ Слід враховувати, що ряд і}$$

його коефіцієнти  $C_K$  володітимуть деякою специфікою: якщо маємо справу з ортонормованими вейвлетами, то вони характеризуються двома безперервними та інтегрованими по всій тимчасовій осі функціями: psi-функцією часу  $\psi(t)$ , яку часто називають материнський вейвлет, і масштабуючою phi-функцією  $\varphi(t)$ , яка називається батьківський вейвлетом. Отже, при використанні вейвлетів система ортонормованих функцій  $\{u_k^{ort}(t)\}$  може бути створена як з материнських вейвлетів, так і з батьківських  $\varphi(t)$ . Коли система ортонормованих функцій створюється з материнського (початкового) вейвлета  $\psi(t)$ , використовуються операції зрушення за часом ( $b$ ) і зміни тимчасового масштабу ( $a$ ). В результаті одержуємо наступну систему

функцій:  $\{u_k^{ort}(t)\} = \left\{ \psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\}$ . Параметр ( $b$ ) задає положення

материнського вейвлета на тимчасовій осі, а параметр ( $a$ ) – його масштаб по осі часу (іншими словами, "стиснення" або "розтягування" початкового сигналу). Множник  $1/\sqrt{a}$  забезпечує незалежність норми цих функцій від масштабуючого числа ( $a$ ). Нескладно помітити, що вейвлет-коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є, знайдені шляхом обчислення значення скалярного добутку сигналу на одну з ортонормованих функцій материнського вейвлета, залежатимуть від двох аргументів – тимчасового

масштабу і зсуву по осі часу:  $C_K^D(a,b) = (u(t), \psi_k^{ort}(t)) = \int_{T_H}^{T_K} u(t) a^{1/2} \psi_k^{ort}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$ .

Коли система ортонормованих функцій створюється з батьківського вейвлета  $\varphi(t)$  – виконується тільки масштабування, тому система ортонормованих функцій  $\{u_k^{ort}(t)\} = \{\varphi_a(t)\}$  формує вейвлет-коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є, які визначаються як:

$C_K^A(a) = (u(t), \varphi_{ak}^{ort}(t)) = \int_{T_H}^{T_K} u(t) \varphi_{ak}^{ort}(t) dt$ . Отже, по-перше, з викладеного

випливає, що при використанні ортогональних вейвлетів з'являється два види коефіцієнтів узагальненого ряду Фур'є, які несуть у собі різну й дуже специфічну інформацію про аналізований сигнал. Коефіцієнти батьківського вейвлета  $C_K^A(a)$  несуть інформацію про "грубий або згладжений" образ сигналу. За цієї причини коефіцієнти  $C_K^A(a)$  часто називають коефіцієнтами апроксимації (верхній індекс A підкреслює саме цю обста-

вину). Уточнення образу сигналу досягається за допомогою материнських вейвлет-коефіцієнтів  $C_K^D(a,b)$ . Коефіцієнти  $C_N^D(a,b)$  дозволяють одержати уявлення про деталі образу сигналу, про дрібномасштабні його зміни, про локальні особливості сигналу (сходінки, розриви, які виникають на піках, шумах і інше). Це у деякій мірі мікроскоп, що дозволяє фокусувати увагу на деталях аналізованого сигналу. Коефіцієнти  $C_N^D(a,b)$  часто називають деталізуючими коефіцієнтами (верхній індекс D підкреслює саме ці обставини). По-друге, узагальнений ряд Фур'є, при багаторівневому представленні сигналу (або пакетному розкладанні сигналу), є вже сумою двох сум – наближеної і такої, що деталізує компонент:

$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{KN}^A \varphi_{NK}(t) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_{NK}^D \psi_K(t)$ . Через це узагальнений

ряд Фур'є, побудований на основі ортонормованих вейвлетів, міститиме в своєму складі два набори коефіцієнтів  $\{C_K^A\}$  і  $\{C_N^D\}$ . Зокрема, коефіцієнти  $C_0^A$  і  $C_0^D$  несуть у собі інформацію про сам сигнал, а  $C_1^A$  і  $C_1^D$  – про найбільш грубий "образ" сигналу і "коливання" сигналу щодо цього першого наближення відповідно. Далі, залишаючи у спокої "коливальну" частину, здійснюємо аналогічне розділення образу найбільш грубого наближення  $C_1^A$  (низькочастотної, апроксимуючої частини) на "грубу" і "високочастотну коливальну" частини. В результаті цього одержуємо два нових коефіцієнти. Продовжуючи діяти аналогічно, розкладаючи попередню "грубу" частину на низькочастотну й високочастотну, можна одержати набір коефіцієнтів, який, представлений у вигляді схеми, називається "деревом" пакетного розкладання. На вершині цього дерева – початковий сигнал, а нижче – його пакетні вейвлет-коефіцієнти. Гілки "дерева", що йдуть вліво, вказують на "грубі" апроксимуючі коефіцієнти, а праві гілки йдуть до деталізуючих коефіцієнтів попереднього вузла. На питання, скільки ми хочемо використовувати коефіцієнтів, указує рівень розкладання. Використовуючи Програму 46, можна побачити, що таке апроксимуючі й деталізуючі вейвлет-коефіцієнти пакетного вейвлет-розкладання до рівня N і дерево розкладання для "зашумленого" прямокутного імпульсу.

Для отримання відповідного коефіцієнта необхідно встановити курсор на потрібному вузлі і натиснути ліву клавішу миші на бажаному тер-

мінальному (крайовому) вузлі. У вікні з'явиться тимчасова залежність сигналу в необхідному термінальному вузлі.

Змінюючи тип використовуваного вейвлета і рівень розкладання (у правій верхній частині панелі), а також натискаючи кнопку "Аналіз", вивчіть, як змінюються коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є залежно від типу використовуваного вейвлета і рівня розкладання. Використовуючи **Програму 47**, можна подивитися апроксимуючі й деталізуючі вейвлет-коефіцієнти пакетного вейвлет-розкладання до рівня  $N$  і "дерево розкладання" для прямокутного імпульсу, коли на нього впливає імпульсна перешкода. Використовуючи **Програму 48**, можна подивитися і зафіксувати коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є для "зашумленого" прямокутного імпульсу (апроксимуючі та деталізуючі коефіцієнти першого рівня вейвлет-перетворення), використовуючи вейвлети Добеши і симплети. Аналогічно, використовуючи **Програму 49**, подивіться, що є ті, що апроксимують і деталізують вейвлет-коефіцієнти пакетного вейвлет-розкладання до рівня  $N$  і "дерево розкладання" для сигналу типу "сходи" з різним нахилом сходинок.

За наслідками досліджень зробіть висновки про те, як відповідні коефіцієнти передають "згладжений" образ сигналу, як вони виділяють компоненти сигналу, що мають різні частоти, "стрибки" (розриви першого роду), екстремуми функції, переходи похідних через нуль і інше.

Припустивши, що в цифровому устаткуванні є спеціальний обчислювач, який формує ортонормовані вейвлети й розраховує апроксимуючі та деталізуючі коефіцієнти, створимо сигнал у вигляді імпульсу прямокутної форми, використовуючи узагальнений ряд Фур'є. Генерація сигналу, як наголошувалося, зводиться до об'єднання грубої й деталізуючої компонент. Використовуючи **Програму 50**, можна побачити, що становлять необхідний сигнал і прямокутний імпульс, одержаний у результаті складання апроксимуючих і деталізуючих коефіцієнтів. Використовуючи **Програму 51**, можна побачити, що є необхідний сигнал і сигнал типу "сходи" з різним нахилом сходинок, одержаний у результаті складання апроксимуючих і деталізуючих коефіцієнтів.

Слід мати на увазі, що наведена внизу відмінність у квадратичних нормах показує наскільки нікчемно мала відмінність сигналів. Воно практично близько до точності машинних розрахунків з дійсними числами "подвійної" точності. Оцінити наскільки відрізняються прямокутний імпульс від сигналу створеного підсумовуванням материнських і батьківських

ортонормованих вейвлетів, помножених на відповідні апроксимуючі й деталізуючі коефіцієнти, можна, використовуючи **Програму 52**.

На підставі результатів досліджень зробіть висновки про те, наскільки задовільним виявився створений сигнал з погляду відмінності за нормами, метриками та внутрішніми кутами між сигналами. Сформулюйте також, скільки рівнів розкладання достатньо для того, щоб створений у базисі вейвлетів імпульсний сигнал за різними метриками і внутрішніми кутами мало відрізнявся від бажаного сигналу прямокутної форми.

Завершуючи даний цикл досліджень про представлення сигналів електроніки й електротехніки в сигнальному просторі, ще раз нагадайте слухачам семінару про існуючі аналогії між елементарними геометричними поняттями і відповідними їм уявленнями в теорії сигналів (табл. 2).

Таблиця 2

Аналогії між елементарними геометричними поняттями і відповідними їм уявленнями в теорії сигналів

Поняття в геометрії	Аналогічне уявлення в теорії сигналів
1	2
Направлений відрізок у просторі	
Довжина вектора (модуль)	Норма сигналу
Вектор одиничної довжини (орт)	
Нульовий вектор	
Відстань між векторами	
Скалярний добуток векторів	
Лінійно залежні вектори	
Ортогональні вектори	
Прямокутна декартова система координат в просторі	
Орт прямокутної декартової системи координат	
Точка в просторі	
Радіус-вектор у просторі	
Проекція вектора на вісь системи координат	

Закінчення табл. 2

1	2
Афінні координати точки простору	
Кут між векторами	
Рівність векторів однакової розмірності	
Базис простору	
Взаємні (біортогональні) базиси	

У кінці доповіді покажіть слухачам семінару, що використання поняття сигнального простору дозволяє проводити дослідження, на перший погляд, не зовсім пов'язані з електричними сигналами. Зокрема, можна проводити дослідження з інженерної психології, присвячені тому, як забезпечити упевнене сприйняття й розрізнення букв, знаків і цифр операторами, що працюють з буквенно-цифровою інформацією.

Відомо, що в даний час для відтворення букв, знаків, цифр і інших символів в системах відображення інформації різних пультів управління використовуються 35-елементні матричні індикатори. Елементи знакової інформації, що світяться, розміщені в сім рядків по п'ять елементів в кожній. Для забезпечення безпомилкового читання інформації, особливо в критичних за часом читання і зовнішньої освітленості умовах, необхідно правильно вибрати шрифт. Для визначення раціональності шрифтів може бути використання поняття сигнального простору. Якщо матрицю представити у вигляді вектора, що складається з об'єднаних (наступних один за одним) стовпців матриці або рядків, то можна говорити про те, наскільки не схожі, наприклад, букви латинського алфавіту один на одного.

Використовуючи **Програму 53**, що формує букви латинського алфавіту, вивчіть наскільки не схожі між собою букви в сигнальному просторі. Букви задаються їх номерами в алфавіті. Складіть таблицю з результатами досліджень і зробіть висновки, які букви вашого прізвища схожі одна на одну з погляду метрик і значення кута між ними, та виявіть, які букви відрізняються в більшій мірі.

## Рекомендована література

1. Башарин С. А. Теоретические основы электротехники: теория электрических цепей и электромагнитного поля: Учебное пособие для вузов / С. А. Башарин, В. В. Федоров. – М.: Academia, 2004. – 304 с.
2. Блаттер Н. К. Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2001. – 338 с.
3. Гультяев А. К. Визуальное моделирование в среде Matlab: Учебный курс. – СПб.: КОРОНА-Принт, 2000. – 228 с.
4. Дженкинс Г. Спектральный анализ и его приложения / Г. Дженкинс, Д. Ваттс. Т. 2. – М.: Мир, 1972. – 287 с.
5. Карлащук В. И. Электронная лаборатория на IBM PC. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 706 с.
6. Касаткин А. С. Электротехника / А. С. Касаткин, М. В. Немов. – М.: Высшая школа, 2000. – 544 с.
7. Опачий Ю. Ф. Аналоговая и цифровая электроника / Ю. Ф. Опачий, О. П. Глудкин, А. И. Гуров – М.: Горячая Линия – Телеком, 2002. – 768 с.
8. Прянишников В. А. Электроника: Полный курс лекций. – 4-е изд. – СПб.: Корона-Принт, 2004. – 416 с.



## Додаток

### %Програма 1

```
U=inputdlg('Amplituda','Phasa (rad)',
'Frequens','Input Date');
umt1=str2num(U{1})
psirad1=str2num(U{2})
f1=str2num(U{3})
h1=warndlg('Проверьте правильность
введенных данных'...
,'Указание2');
set(h1,'WindowStyle','modal')
waitfor(h1)
w1=2*pi*f1;
a1=-1*(abs(psirad1)+4.2*pi)/w1;
b1=(abs(psirad1)+4.1*pi)/w1;
n=500;
t1=linspace(a1,b1,n);
ut1=umt1*cos(w1*t1+psirad1);
plot(t1,ut1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, cek');
ylim([-umt1-0.1*umt1 umt1+0.1*umt1])
```

### %Програма 2

```
h=warndlg('Целая часть числа от дроб-
ной отделяется точкой'...
,'Учтите при вводе данных');
set(h,'WindowStyle','modal')
waitfor(h)
Z=inputdlg('Amplituda','Phasa','Frequens'
,'Input Date');
um1=str2num(Z{1});
phi=str2num(Z{2});
ff=str2num(Z{3});
h1=warndlg('Проверьте правильность
введенных данных'...
,'Указание2');
set(h1,'WindowStyle','modal')
waitfor(h1)
ua1=um1*(cos(phi)+i*sin(phi));
disp('Амплитуда или длина вектора')
umpr=abs(ua1)
disp('Величина частоты')
f=ff
disp('Начальная фаза в радианах')
disp('(Пи=3.14 разделить на число)')
phip=angle(ua1)
disp('Проекции на оси вещественных и
мнимых')
u1=um1.*exp(i*pi)
HL=compass(ua1);
set(HL,'linewidth',2)
```

### %Програма 3

```
U=inputdlg('Amplituda','Phasa (rad)',
'Frequens','Input Date');
umt1=str2num(U{1})
psirad1=str2num(U{2})
f1=str2num(U{3})
h1=warndlg('Проверьте правильность
введенных данных'...
,'Указание2');
set(h1,'WindowStyle','modal')
waitfor(h1)
w1=2*pi*f1;
a1=-1*(abs(psirad1)+4.2*pi)/w1;
b1=(abs(psirad1)+4.1*pi)/w1;
n=500;
t1=linspace(a1,b1,n);
b=1/f1
lp3=(t1>=0 & t1<=(b));
ut2=umt1*cos(w1*t1+psirad1);
ut1=ut2.*lp3;
plot(t1,ut1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, cek');
ylim([-umt1-0.1*umt1 umt1+0.1*umt1])
```

### %Програма 4

```
clear
%Объявляем символы
syms T1 Um w t psi l2 T u0 f pi1
%Определяем функцию, описываю-
щую сигнал
ut=Um*cos(2*pi*f*t+psi);
%Вычисляем интеграл
Uin=int(ut,t,0,T);
%Вычисляем среднее значение
Ucp1=(1/T)*Uin;
disp(' ')
disp('Получаем выражение для
постоянной составляющей')
pretty(Ucp1)
disp('Заданные величины амплитуды,
частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду
pi1=pi;
f=50 %Задаем частоту
T=1/50 %Определяем период
disp('Вычисленное значение
постоянной составляющей')
Ucp=subs(Ucp1)
%Програма 5
clear
%Объявляем символы
syms T1 Um w t psi l2 T u0 f pi1
```

```
%Определяем функцию, описываю-
щую сигнал
ut1=Um*cos(2*pi*f*t+psi);
%Определяем функцию, описываю-
щую квадрат сигнала
ut=ut1*ut1;
%Вычисляем интеграл
Uin=int(ut,t,0,T);
%Вычисляем выражение под корнем
Usqr1=(1/T)*Uin;
disp(' ')
disp('Получаем выражение для средне-
квадратического напряжения')
Usqr=sqrt(Usqr1);
pretty(Usqr)
disp('Заданные величины амплитуды,
частоты и периода')
Um=2.828427 %Задаем амплитуду
pi1=pi;
f=50 %Задаем частоту
T=1/50 %Определяем период
disp('Вычисленное значение средне-
квадратического напряжения')
Urms1=subs(Usqr);
Urms=vpa(Urms1,4)
```

### %Програма 6

```
clear
%Объявляем символы
syms T1 Um w t psi l2 T u0 f pi1 Ucons
%Определяем функцию, описываю-
щую сигнал
ut=Ucons+Um*cos(2*pi*f*t+psi);
%Вычисляем интеграл
Uin=int(ut,t,0,T);
%Вычисляем среднее значение
Ucp1=(1/T)*Uin;
disp(' ')
disp('Получаем выражение для посто-
янной составляющей')
pretty(Ucp1)
disp('Заданные величины амплитуды,
частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду
Ucons=5 %Задаем значение посто-
янного напряжения
pi1=pi;
f=50 %Задаем частоту
T=1/50 %Определяем период
disp('Вычисленное среднее значение
напряжения')
Ucp=subs(Ucp1)
```

### %Програма 7

```
clear
%Объявляем символы
syms T1 Um w t psi l2 T u0 f pi1 Ucons
%Определяем функцию, описываю-
щую сигнал
ut1=Ucons+Um*cos(2*pi*f*t+psi);
%Определяем функцию, описываю-
щую квадрат сигнала
ut=ut1*ut1;
%Вычисляем интеграл
Uin=int(ut,t,0,T);
%Вычисляем выражение под корнем
Usqr1=(1/T)*Uin;
disp(' ')
disp('Получаем выражение для средне-
квадратического напряжения')
Usqr=sqrt(Usqr1);
pretty(Usqr)
disp('Заданные величины амплитуды,
частоты и периода')
Um=2.828427 %Задаем амплитуду
Ucons=1.0 %Задаем постоянное на-
пряжение
pi1=pi;
f=50 %Задаем частоту
T=1/50 %Определяем период
disp('Вычисленное значение средне-
квадратического напряжения')
Urms1=subs(Usqr);
Urms=vpa(Urms1,4)
%Програма 8
t=0:0.01:50;
d=[0:50/5:50];
Um=5;
ut=Um*pulstran(t,d,'rectpuls',3);
Tnab=50; %Задаем время наблюдения
n=5; %Задаем число импульсов
t=0:0.01:Tnab;
d=[0:Tnab/n:Tnab]; %Задаем центры
импульсов
Um=5; % Амплитуда импульса
ut=Um*pulstran(t,d,'rectpuls',3);
plot(t,ut,'k','linewidth',2);grid on
ylabel('u(t), B');
xlabel('t, cek');
ylim([-0.1*Um Um+0.1*Um])
%Програма 9
Tnab=40; %Задаем время наблюдения
t=0:0.02:Tnab;
Um=2.5; %Амплитуда импульса
```

```

ut=Um*square(t,30);
plot(t,ut,'k','linewidth',2);grid on
ylabel('u(t), В');
xlabel('t, сек');
ylim([-Um-0.1*Um Um+0.1*Um])
%Программа 10
Tnab=50; %Задаем время наблюдения
t=0:0.02:Tnab;
Um=2.5; %Амплитуда импульса
q=50; %Задаем коэффициент заполнения
n=5; %Задаем число импульсов
ut=Um*square(pi*t/n,q);
plot(t,ut,'k','linewidth',2);grid on
ylabel('u(t), В');
xlabel('t, сек');
ylim([-Um-0.1*Um Um+0.1*Um])
%Программа 11
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 ft i1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um;
ut2=0;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
%Вычисляем среднее значение
Ucp1=(1/T)*(Uin1+Uin2);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для постоянной составляющей')
disp('(среднего значения напряжения)')
pretty(Ucp1);
disp('Заданные величины амплитуды, частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду
gamma=5 %Задаем скважность
f=50 %Задаем частоту следования импульсов
T=1/50 %Определяем период
ti1=T/gamma %Определяем длительность импульса
disp('Вычисленное значение средне-кватратического напряжения')
Urms1=subs(Ucp1);
Urms=vpa(Urms1,4)
%Программа 12
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 ft i1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую квадрат сигнала
ut1=Um*Um;
ut2=0;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
%Вычисляем выражение под корнем
Usqr1=(1/T)*(Uin1+Uin2);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для средне-кватратического напряжения')
Usqr=sqrt(Usqr1);
pretty(Usqr);
disp('Заданные величины амплитуды, частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду
gamma=5 %Задаем скважность
f=50 %Задаем частоту следования импульсов
T=1/50 %Определяем период
ti1=T/gamma %Определяем длительность импульса
disp('Вычисленное значение средне-кватратического напряжения')
Urms1=subs(Usqr);
Urms=vpa(Urms1,4)
%Программа 13
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 ft i1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um;
ut2=-Um;

```

```

ti1=T/gamma %Определяем длительность импульса
disp('Вычисленное значение постоянной составляющей')
Ucp=subs(Ucp1)
%Программа 12
%Объявляем символы
syms Um t T u0 ft i1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую квадрат сигнала
ut1=Um*Um;
ut2=0;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
%Вычисляем выражение под корнем
Usqr1=(1/T)*(Uin1+Uin2);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для средне-кватратического напряжения')
Usqr=sqrt(Usqr1);
pretty(Usqr);
disp('Заданные величины амплитуды, частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду
gamma=5 %Задаем скважность
f=50 %Задаем частоту следования импульсов
T=1/50 %Определяем период
ti1=T/gamma %Определяем длительность импульса
disp('Вычисленное значение средне-кватратического напряжения')
Urms1=subs(Usqr);
Urms=vpa(Urms1,4)
%Программа 13
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 ft i1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um;
ut2=-Um;

```

```

%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
%Вычисляем среднее значение
Ucp1=(1/T)*(Uin1+Uin2);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для постоянной составляющей')
disp('(среднего значения напряжения)')
pretty(Ucp1);
disp('Заданные величины амплитуды, частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду
gamma=5 %Задаем скважность
f=50 %Задаем частоту следования импульсов
T=1/50 %Определяем период
ti1=T/gamma %Определяем длительность импульса
disp('Вычисленное значение постоянной составляющей')
Ucp=subs(Ucp1)
%Программа 14
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 ft i1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um;
ut2=Um;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
%Вычисляем среднее значение
Ucpw1=(1/T)*(Uin1+Uin2);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для средне-выпрямленного')
disp('значения напряжения')
pretty(Ucpw1);
disp('Заданные величины амплитуды, частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду

```

```

gamma=5 %Задаем скважность
f=50 % Частота следования импульсов
T=1/50 %Определяем период
ti1=T/gamma %Определяем длительность импульса
disp('Вычисленное средневыпрямленное значение напряжения')
Ucpw=subs(Ucpw1)
%Программа 15
%Объявляем символы
syms Um t T u0 ft i1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую квадрат сигнала
ut1=Um*Um;
ut2=Um*Um;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
%Вычисляем выражение под корнем
Usqr1=(1/T)*(Uin1+Uin2);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для средне-кватратического напряжения')
Usqr=sqrt(Usqr1);
pretty(Usqr);
disp('Заданные величины амплитуды, частоты и периода')
Um=2 %Задаем амплитуду
gamma=5 %Задаем скважность
f=50 %Задаем частоту следования импульсов
T=1/50 %Определяем период
ti1=T/gamma %Определяем длительность импульса
disp('Вычисленное значение средне-кватратического напряжения')
Urms1=subs(Usqr);
Urms=vpa(Urms1,4)
%Программа 16
clear
%Объявляем символы
syms Um t tk1 alpha q S J M

```

```

%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um*exp(-alpha*t);
ut2=Um*t*exp(-alpha*t);
ut3=t*Um*(exp(-alpha*t))*Um*exp(-alpha*t);
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1^2,t,0,tk1);
Uin2=int(ut2^2,t,0,tk1);
Uin3=int(ut3,t,0,tk1);
%Вычисляем интегралы
S=Uin1;
M=Uin3;
J=Uin2;
disp(' ')
disp('Получаем выражение для площади ')
pretty(S)
disp('Получаем выражение для момента площади ')
disp('относительно вертикальной оси координат')
pretty(M)
disp('Получаем выражение для момента инерции ')
disp('относительно вертикальной оси координат')
pretty(J)
disp('Получаем выражение для длительности импульса ')
tau=sqrt((J/S)-(M*M)/(S*S))
pretty(tau)
disp('Заданные величины для вычисления интеграла')
Um=2 %Задаем амплитуду
alpha=0.045 %Задаем коэффициент альфа
tk1=100 %Задаем конечное время интегрирования
disp('Вычисленное значение длительность импульса')
Tim=subs(tau)
%Программа 17

```

```

t=0:0.01:100;
Um=28;
alpha=0.045;
ut=exp(-alpha*t);
plot(t,ut,'k','linewidth',2);grid on
ylabel('u(t), B');
xlabel('t, сек');
%Программа 18
t=0:0.01:100;
Um=18.8;
a=0.05;
b=0.25;
ut=Um*(exp(-a*t)-exp(-b*t));
plot(t,ut,'k','linewidth',2);grid on
ylabel('u(t), B');
xlabel('t, сек');
%Программа 19
clear
%Объявляем символы
syms Um t tk1 alf bet q S J M
%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um*(exp(-alf*t)-exp(-bet*t));
ut2=t*ut1*t*ut1;
ut3=t*ut1*ut1;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1^2,t,0,tk1);
Uin2=int(ut2,t,0,tk1);
Uin3=int(ut3,t,0,tk1);
%Вычисляем интегралы
S=Uin1;
M=Uin3;
J=Uin2;
disp(' ')
tau=sqrt((J/S)-(M*M)/(S*S));
disp('Заданные величины для вычисления интеграла')
Um=18.8 %Задаем амплитуду
alf=0.05 %Задаем коэффициент a
bet=0.25 %Задаем коэффициент b
tk1=100 %Задаем конечное время интегрирования

```

```

disp('Вычисленное значение длительность импульса')
Tim=subs(tau)
%Программа 20
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 f ti1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um;
ut2=0;
u12t1=(ut1^2);
u12t2=(ut2^2);
T=2*ti1;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
Uin3=sqrt(int(u12t1,t,0,ti1));
Uin4=sqrt(int(u12t2,t,ti1,T));
disp(' ')
disp('Получаем выражение для нормы первого типа')
pretty(Uin1)
disp('Получаем выражение для нормы второго типа')
pretty(Uin3)
disp('Заданные величины амплитуды, длительности и периода')
Um=10 %Задаем амплитуду
ti1=16 %Длительность импульса
T=32 %Задаем период следования импульсов
disp('Вычисленное значение нормы первого типа')
NormL1=subs(Uin1)
disp('Вычисленное значение нормы второго типа')
NormL2=subs(Uin3)
%Программа 21
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 f ti1 gamma q

```

```

%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um*t/ti1;
ut2=0;
u12t1=(ut1^2);
u12t2=(ut2^2);
T=2*ti1;
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
Uin3=sqrt(int(u12t1,t,0,ti1));
Uin4=sqrt(int(u12t2,t,ti1,T));
disp(' ')
disp('Получаем выражение для нормы первого типа')
pretty(Uin1)
disp('Получаем выражение для нормы второго типа')
pretty(Uin3)
disp('Заданные величины амплитуды, длительности и периода')
Um=10 %Задаем амплитуду
ti1=16 %Длительность импульса
T=32 %Задаем период следования импульсов
disp('Вычисленное значение нормы первого типа')
NormL1=subs(Uin1)
disp('Вычисленное значение нормы второго типа')
NormL2=subs(Uin3)
%Программа 22
clear
%Объявляем символы
syms Um t T u0 f ti1 gamma q
%Определяем функцию, описывающую сигнал
ut1=Um*t/ti1;
ut2=Um-(Um*(t-ti1)/ti1);
u12t1=(ut1^2);
u12t2=(ut2^2);
T=2*ti1;
%Вычисляем интеграл

```

```

Uin1=int(ut1,t,0,ti1);
Uin2=int(ut2,t,ti1,T);
Uin1=(Uin1+Uin2);
Uin3=int(ut2t1,t,0,ti1);
Uin4=int(ut2t2,t,ti1,T);
Uin2=sqrt(Uin3+Uin4);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для нормы
первого типа')
pretty(Uin1)
disp('Получаем выражение для нормы
второго типа')
pretty(Uin2)
disp('Заданные величины амплитуды,
длительности и периода')
Um=10 %Задаем амплитуду
ti1=16 %Длительность импульса
T=32 %Задаем период следования им-
пульсов
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
NormL1=subs(Uin1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
NormL2=subs(Uin2)
%Программа 23
um=10; % Амплитуду импульса
tau=16; %Длительность импульса
tt=linspace(0,2*tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
uu=um*rectpuls(tt-a,tau);
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
nl1=(2*tau/nel)*norm(uu,1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
nl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uu,2)
disp('Вычисленное значение нормы
максимального элемента')
nlinf=norm(uu,inf)
plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t , cek ');

```

```

ylabel('u(t) , B');
xlabel('t, CEK');
ylabel('u(t) , B');
ylim([0-0.01*um um+0.05*um])
%Программа 24
um=10; %Амплитуда импульса
tau=16; %Длительность импульса
tt=linspace(0,2*tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
uu=um*tripuls(tt-a,tau,1);
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
nl1=(2*tau/nel)*norm(uu,1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
nl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uu,2)
disp('Вычисленное значение нормы
максимального элемента')
nlinf=norm(uu,inf)
plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t , cek ');
ylabel('u(t) , B');
xlabel('t, CEK');
ylabel('u(t) , B');
ylim([0-0.01*um um+0.05*um])
%Программа 25
um=10; %Амплитуда импульса
tau=16; %Длительность импульса
tt=linspace(0,2*tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau;
uu=um*tripuls(tt-a,2*tau,0);
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
nl1=(2*tau/nel)*norm(uu,1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
nl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uu,2)
disp('Вычисленное значение нормы
максимального элемента')
nlinf=norm(uu,inf)
plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid on

```

```

xlabel('t , cek ');
ylabel('u(t) , B');
xlabel('t, CEK');
ylabel('u(t) , B');
ylim([0-0.01*um um+0.05*um])
%Программа 26
um=10; %Амплитуда импульса
tau=16; %Длительность импульса
tt=linspace(0,2*tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
uu=um*rectpuls(tt-a,tau);
disp('Прямоугольный импульс')
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
nl1=(2*tau/nel)*norm(uu,1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
nl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uu,2)
disp('Вычисленное значение нормы
максимального элемента')
nlinf=norm(uu,inf)
uu1=um*rectpuls(tt-a,tau)+um*tpuls(tt-
a,0.05*tau,0);
disp('Прямоугольный импульс с
изменениями')
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
nl1=(2*tau/nel)*norm(uu1,1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
nl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uu1,2)
disp('Вычисленное значение нормы
максимального элемента')
nlinf1=norm(uu1,inf)
disp('Изменения в процентах при нор-
мах первого типа')
izm1=100*(nl1-nl1)/nl1
disp('Изменения в процентах при нор-
мах второго типа')
izm2=100*(nl2-nl2)/nl2
disp('Изменения в процентах при нор-
мах максимального элемента')

```

```

izm1=100*(nl1-nl1)/nl1
plot(tt,uu1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t , cek ');
ylabel('u(t) , B');
xlabel('t, CEK');
ylabel('u(t) , B');
ylim([0-0.01*um um+1.05*um])
%Программа 27
clear
um=10; %
tau=16; %Длительность импульса
tt=linspace(0,2*tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
uu=um*rectpuls(tt-a,tau);
disp('Прямоугольный импульс')
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
nl1=(2*tau/nel)*norm(uu,1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
nl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uu,2)
disp('Вычисленное значение нормы
максимального элемента')
nlinf=norm(uu,inf)
uu1=um*rectpuls(tt-
a,tau)+0.3+sqrt(3.6)*rand(size(tt));
disp('Прямоугольный импульс с
шумами')
disp('Вычисленное значение нормы
первого типа')
nl1=(2*tau/nel)*norm(uu1,1)
disp('Вычисленное значение нормы
второго типа')
nl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uu1,2)
disp('Вычисленное значение нормы
максимального элемента')
nlinf1=norm(uu1,inf)
disp('Изменения в процентах при нор-
мах первого типа')
izm1=100*(nl1-nl1)/nl1
disp('Изменения в процентах при нор-
мах второго типа')

```

```

izm2=100*(nl2-nl2)/nl2
disp('Изменения в процентах при нор-
мах максимального элемента')
izm1nf=100*(nl1nf-nl1nf)/nl1nf
plot(tt,uu1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, сек ');
ylabel('u(t), В');
xlabel('t, СЕК');
ylabel('u(t), В');
ylim([0-0.01*um um+1.05*um])
%Программа 28
clear
%Объявляем символы
syms Um U1m t T u0 f ti1 gamma q pi
%Определяем функцию, описываю-
щую сигнал
ut1=Um*t;
ut2=U1m*sin(pi*t/T);
u12t1=(ut1^2);
u12t2=(ut2^2);
utt1=(ut1-ut2);
u12tt1=(utt1^2);
%Вычисляем интеграл
Uin1=int(utt1,t,0,T);
Uin3=sqrt(int(u12tt1,t,0,T));
disp(' ')
disp('Получаем выражение для метри-
ки первого типа')
pretty(Uin1)
disp('Получаем выражение для метри-
ки второго типа')
pretty(Uin3)
disp('Заданные величины амплитуды и
периода')
Um=6.37 %
U1m=10 %
T=4 %
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
Metrl1=subs(Uin1)
disp('Вычисленное значение метрики
второго типа')
Metrl2=subs(Uin3)

```

```

%Программа 29
clear
um=6.37; %
u1m=10; %
tau=4; %Длительность импульса
tt=linspace(0,tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
uu=um*rectpuls(tt-a,tau);
uu1=u1m*sin(pi.*tt./tau);
uumet=uu1-uu;
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metrl1=(2*tau/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metrl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrlinf=norm(uumet,inf)
plot(tt,uu,tt,uu1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, сек ');
ylabel('u(t), В');
xlabel('t, СЕК');
ylabel('u(t), В');
ylim([0-0.01*um um+1.05*um])
%Программа 30
clear
um=10; %
u1m=10; %
tau=4; %Длительность импульса
tt=linspace(0,tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
tt1=tt;
uu=4*um.*((tt/4)-((tt.*tt)/(16)));
uu1=u1m*sin(pi.*tt./tau);
uumet=uu1-uu;
disp('Значения расстояний между
сигналами')

```

```

disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metrl1=(2*tau/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metrl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrlinf=norm(uumet,inf)
plot(tt,uu,tt,uu1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, сек ');
ylabel('u(t), В');
xlabel('t, СЕК');
ylabel('u(t), В');
ylim([0-0.01*um 1.05*um])
%Программа 31
clear
um=10; %
u1m=10; %
tau=4; %Длительность импульса
tt=linspace(0,tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
uu=4*um.*((tt/4)-((tt.*tt)/(16)));
uu1=u1m*sin(pi.*tt./tau);
uumet=uu1-uu;
uu111=u1m*sin(pi.*tt./tau)+um*tripuls(tt-
a,0.01*tau,0);
uumet1=uu111-uu;
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('без импульсных помех')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metrl1=(2*tau/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metrl2=sqrt(2*tau/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrlinf=norm(uumet,inf)
disp('Значения расстояний между
сигналами')

```

```

disp('с импульсными помехами')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metrl111=(2*tau/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metrl112=sqrt(2*tau/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrl1inf=norm(uumet,inf)
disp('Изменения в процентах при мет-
рике первого типа')
izm1=100*(metrl111-metrl1)/metrl1
disp('Изменения в процентах при квад-
ратичной метрике ')
izm2=100*(metrl112-metrl2)/metrl2
disp('Изменения в процентах при рав-
номерной метрике')
izm1nf=100*(metrl11inf-metrlinf)/metrlinf
plot(tt,uu,tt,uu111,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, сек ');
ylabel('u(t), В');
xlabel('t, СЕК');
ylabel('u(t), В');
ylim([0-0.01*um um+1.05*um])
%Программа 32
clear
um=10; %
u1m=10; %
tau=4; %Длительность импульса
tt=linspace(0,tau,1000);
nel=length(tt);
a=tau/2;
uu=4*um.*((tt/4)-((tt.*tt)/(16)));
uu1=u1m*sin(pi.*tt./tau);
uumet=uu1-uu;
uu111=u1m*sin(pi.*tt./tau)+(0.3+sqrt(3.6)*
rand(size(tt)));
uumet1=uu111-uu;
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('без шумов')

```

```

disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metr11=(2*tau/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metr12=sqrt(2*tau/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrinf=norm(uumet,inf)
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('с шумами')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metr111=(2*tau/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metr112=sqrt(2*tau/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metr11inf=norm(uumet,inf)
disp('Изменения в процентах при мет-
рике первого типа')
izm1=100*(metr111-metr1)/metr1
disp('Изменения в процентах при квад-
ратичной метрике ')
izm2=100*(metr112-metr2)/metr2
disp('Изменения в процентах при рав-
номерной метрике')
izminf=100*(metr11inf-metrinf)/metrinf
plot(tt,uu,tt,uu111,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t , cek ');
ylabel('u(t) , B');
xlabel('t, CEK');
ylabel('u(t), B');
ylim([0-0.01*um 1.4*um])
%Программа 33
clear
%Объявляем символы
syms Um U1m t T u0 f ti1 gamma q pii
k m
%Определяем два ортогональных
сигнала
ut1=Um*cos(k*pi*t/T);
ut2=U1m*cos(m*pi*t/T);
utt1=ut1*ut2;
%Вычисляем интеграл, определяю-
щий скалярное произведение
Uin1=int(utt1,t,0,T);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для скаляр-
ного произведения')
pretty(Uin1)
disp('Заданные величины амплитуды и
периода')

```

```

T=4 %Задаем период сигналов
Um=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
первого сигнала
U1m=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
второго сигнала
k=2 %Задаем кратность частоты пер-
вого сигнала
m=8 %Задаем кратность частоты вто-
рого сигнала
tt=linspace(0,T,1000);
nel=length(tt);
uu=Um*sin(k*pi.*tt./T);
uu1=U1m*sin(m*pi.*tt./T);
disp('Вычисленное значение скалярно-
го произведения')
ScalL2=subs(Uin1)
%Программа 34
clear
%Объявляем символы
syms Um U1m t T u0 f ti1 gamma q pii
k m
%Определяем два ортогональных
сигнала
ut1=Um*cos(pi*t/T);
ut2=U1m*cos(pi*t/T);
utt1=ut1*ut2;
%Вычисляем интеграл, определяю-
щий скалярное произведение
Uin1=int(utt1,t,0,T);
disp(' ')
disp('Получаем выражение для скаляр-
ного произведения')
pretty(Uin1)
disp('Заданные величины амплитуды и
периода')

```

```

T=4 %Задаем период сигналов
Um=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
первого сигнала
U1m=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
второго сигнала
disp('Вычисленное значение скалярно-
го произведения')
ScalL2=subs(Uin1)
%Программа 35
clear
T=4 %Задаем период сигнала
Um=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
первого сигнала
U1m=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
второго сигнала
k=2 %Задаем кратность частоты пер-
вого сигнала
m=4 %Задаем кратность частоты вто-
рого сигнала
tt=linspace(0,T,1000);
nel=length(tt);
uu=Um*sin(k*pi.*tt./T);
uu1=U1m*sin(m*pi.*tt./T);
disp('Вычисленное значение скалярно-
го произведения')
disp('при разных k и m')
uuscall2=uu1*uu'
plot(tt,uu,tt,uu1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t , cek ');
ylabel('u(t) , B');
xlabel('t, CEK');
ylabel('u(t), B');
ylim([-1.05*Um 1.05*Um])
%Программа 36
clear
T=4 %Задаем период сигнала
Um=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
первого сигнала
U1m=sqrt(2/T) %Задаем амплитуду
второго сигнала
k=2 %Задаем кратность частоты пер-
вого сигнала

```

```

m=4 %Задаем кратность частоты вто-
рого сигнала
tt=linspace(0,T,1000);
nel=length(tt);
uu=Um*sin(k*pi.*tt./T);
uu1=U1m*sin(m*pi.*tt./T);
disp('Вычисленное значение скалярно-
го произведения')
disp('при разных k и m')
uuscadotl2=dot(uu1,uu)
disp('Вычисленное значение норм и уг-
ла в градусах')
disp('при разных k и m')
normuu=sqrt(T/nel)*norm(uu,2)
normuu1=sqrt(T/nel)*norm(uu1,2)
phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*normuu1))
plot(tt,uu,tt,uu1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t , cek ');
ylabel('u(t) , B');
xlabel('t, CEK');
ylabel('u(t), B');
ylim([-1.05*Um 1.05*Um])
%Программа 37
clear
T=1; %Задаем период сигнала
Um=1; %
U1m=1; %
disp(' ')
disp('Число m1, определяющее номер')
disp('первой функции Радемахера')
m1=2 %Число m1, определяющее пер-
вую функцию Радемахера
disp('Число m2, определяющее номер')
disp('второй функции Радемахера')
m2=4 %Число m2, определяющее вто-
рую функцию Радемахера
k1=2^m1; %Задаем частоту первого
сигнала
k2=2^m2; %Задаем частоту второго
сигнала
tt=linspace(0,T,1114);

```

```

tt=tt0(2:end-1);
nel=length(tt);
uu=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
uu1=U1m*(sign(sin(k2.*pi.*tt./T)));
disp('Вычисленное значение скалярно-
го произведения')
disp('при разных k и m')
uuscald2=uu1*uu'
uuscaldot2=dot(uu1,uu)
disp('Вычисленное значение норм')
disp('при разных k и m')
normuu=sqrt(T/nel)*norm(uu,2)
normuu1=sqrt(T/nel)*norm(uu1,2)
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
disp('при разных k и m')
phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*n
ormuu1))
subplot(211);plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-1.15*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uu1,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-1.15*U1m 1.15*U1m])
%Программа 38
clear
T=1; %Задаем период сигнала
Um=1; %
U1m=1; %
disp(' ')
tt0=linspace(0,T,1114);
tt=tt0(2:end-1);
nel=length(tt);
Uwal(8,nel)=0;
m1=1; %Число m1, определяющее
первую функцию Радемахера
m2=2; %Число m2, определяющее
вторую функцию Радемахера
k1=2^m1;

```

```

k2=2^m2;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
uum2=U1m*(sign(sin(k2.*pi.*tt./T)));
Uwal(1,:)=uum1;
Uwal(2,:)=uum2;
Uwal(3,:)=uum2;
m1=2; %Число m1, определяющее
вторую функцию Радемахера
m2=3; %Число m2, определяющее тре-
тью функцию Радемахера
k1=2^m1;
k2=2^m2;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
uum2=U1m*(sign(sin(k2.*pi.*tt./T)));
Uwal(4,:)=uum1.*uum2;
Uwal(5,:)=Uwal(1,:).*uum1.*uum2;
Uwal(6,:)=Uwal(1,:).*uum2;
Uwal(7,:)=uum2;
m1=4; %Число m1, определяющее
четвертую функцию Радемахера
k1=2^m1;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
Uwal(8,:)=Uwal(7,:).*uum1;
disp('Число K, определяющее номер')
disp('первой функции Уолша')
K=1 %Число , определяющее номер
одной функции Уолша
uu1=Uwal(K,:);
disp('Число M, определяющее номер')
disp('второй функции Уолша')
M=7 %Число, определяющее номер
другой функции Уолша
uu=Uwal(M,:);
disp('Вычисленное значение скалярно-
го произведения')
disp('при разных k и m')
uuscald2=uu1*uu'
uuscaldot2=dot(uu1,uu)
disp('Вычисленное значение норм')
disp('при разных k и m')
normuu=sqrt(T/nel)*norm(uu,2)
normuu1=sqrt(T/nel)*norm(uu1,2)

```

```

disp(' Вычисленное значение угла в
градусах')
disp('при разных k и m')
phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*n
ormuu1))
subplot(211);plot(tt,uu1,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-1.15*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-1.15*U1m 1.15*U1m])

```

**%Программа 39**

```

clear
[phi1,psi1,tt1]=wavfun('db5',10);
[phi2,psi2,tt2]=wavfun('db10',10);
nel1=length(tt1);
nel2=length(tt2);
N=0.8*min(nel1,nel2);
N1=0.7*N;
tt1m=(1/N).*linspace(N1,nel1,N);
tt2m=(1/N).*linspace(N1,nel2,N);
phi1r=phi1(1:N);
phi2r=phi2(1:N);
uu1=phi1r;
uu=phi2r;
disp(' ')
uuscald2=uu1*uu';
uuscaldot2=dot(uu1,uu);
normuu=norm(uu,2);
normuu1=norm(uu1,2);
Um=max(uu1);
U1m=max(uu);
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
disp('при разных номерах функции
Добеши')
phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*n
ormuu1))

```

```

subplot(211);plot(tt1m,uu1,'k','linewidth',2);
grid on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.6*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt2m,uu,'k','linewidth',2);g
rid on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.6*U1m 1.15*U1m])
%Программа 40
clear
[phi1,psi1,tt1]=wavfun('sym7',10);
[phi2,psi2,tt2]=wavfun('sym8',10);
nel1=length(tt1);
nel2=length(tt2);
N=0.8*min(nel1,nel2);
N1=0.7*N;
tt1m=(1/N).*linspace(N1,nel1,N);
tt2m=(1/N).*linspace(N1,nel2,N);
phi1r=phi1(1:N);
phi2r=phi2(1:N);
uu1=phi1r;
uu=phi2r;
disp(' ')
uuscald2=uu1*uu';
normuu=norm(uu,2);
normuu1=norm(uu1,2);
Um=max(uu1);
U1m=max(uu);
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
disp('при разных номерах симплетов')
phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*n
ormuu1))
subplot(211);plot(tt1m,uu1,'k','linewidth',2);
grid on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.4*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt2m,uu,'k','linewidth',2);g
rid on

```

```

xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.4*U1m 1.15*U1m])
%Программа 41
clear
Um=10; %
U1m=10; %
tau=4; %Длительность импульсов
T=2.2*tau;
tt=linspace(0,T,1917);
nel=length(tt);
a=tau;
d=50 %Задаем задержку второго импульса относительно начала
%первого импульса в процентах от
длительности
b=0.01*d*(a)+a/2;
uu=Um*rectpuls(tt-a/2,tau);
uu1=U1m*rectpuls(tt-b,tau);
uumet=uu-uu1;
disp(' ')
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metr1=(T/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики')
metr2=sqrt(T/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrinf=norm(uumet,inf)
uuscall2=uu*uu1';
uuscadotl2=dot(uu,uu1);
disp('Вычисленное значение норм и уг-
ла в градусах')
normuuu=sqrt(T/nel)*norm(uu,2)
normuuu1=sqrt(T/nel)*norm(uu1,2)
normuu=norm(uu,2);
normuu1=norm(uu1,2);
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
disp('между импульсными сигналами')

```

```

phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*normuu1))
subplot(211);plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.2*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uu1,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.2*U1m 1.15*U1m])
%Программа 42
clear
Um=10; %
U1m=10; %
tau=4; %Длительность импульсов
T=2.2*tau;
tt=linspace(0,T,1917);
nel=length(tt);
a=tau;
d=50 %Задаем задержку второго импульса относительно начала
%первого импульса в процентах от
длительности
b=0.01*d*(a)+a/2;
uu=Um*rectpuls(tt-a/2,tau)+Um*tripuls(tt-
a/1.5,0.05*tau,0);
uu1=U1m*rectpuls(tt-b,tau);
uumet=uu-uu1;
disp(' ')
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metr1=(T/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metr2=sqrt(T/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrinf=norm(uumet,inf)
uuscall2=uu*uu1';

```

```

uuscadotl2=dot(uu,uu1);
disp('Вычисленное значение норм и уг-
ла в градусах')
normuuu=sqrt(T/nel)*norm(uu,2)
normuuu1=sqrt(T/nel)*norm(uu1,2)
normuu=norm(uu,2);
normuu1=norm(uu1,2);
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
disp('между импульсными сигналами')
phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*normuu1))
subplot(211);plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.2*Um 2.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uu1,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.2*U1m 1.15*U1m])
%Программа 43
clear
Um=10; %
U1m=10; %
tau=4; %Длительность импульсов
T=2.2*tau;
tt=linspace(0,T,1917);
nel=length(tt);
a=tau;
d=50 %Задержка второго импульса от-
носительно начала
%первого импульса в процентах от
длительности
b=0.01*d*(a)+a/2;
uu=Um*rectpuls(tt-
a/2,tau)+sqrt(14.6)*rand(size(tt));
uu1=U1m*rectpuls(tt-b,tau);
uumet=uu-uu1;
disp(' ')
disp('Значения расстояний между
сигналами')

```

```

disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metr1=(T/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metr2=sqrt(T/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrinf=norm(uumet,inf)
uuscall2=uu*uu1';
uuscadotl2=dot(uu,uu1);
disp('Вычисленное значение норм и уг-
ла в градусах')
normuuu=sqrt(T/nel)*norm(uu,2)
normuuu1=sqrt(T/nel)*norm(uu1,2)
normuu=norm(uu,2);
normuu1=norm(uu1,2);
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
disp('между импульсными сигналами')
phi=(180/pi)*acos(dot(uu,uu1)/(normuu*normuu1))
subplot(211);plot(tt,uu,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.2*Um 2.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uu1,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.2*U1m 1.15*U1m])
%Программа 44
clear
T=1; %Задаем период сигнала
Um=1; %
U1m=1; %
disp(' ')
tt0=linspace(0,T,1114);
tt=tt0(2:end-1);
nel=length(tt);
Uwal(9,nel)=0;

```



```

m1=1; %Число m1, определяющее
первую функцию Радемахера
m2=2; %Число m2, определяющее
вторую функцию Радемахера
k1=2^m1;
k2=2^m2;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
uum2=U1m*(sign(sin(k2.*pi.*tt./T)));
Uwal(9,nel)=0;
Uwal(1,:)=uum1;
Uwal(2,:)=uum1.*uum2;
Uwal(3,:)=uum2;
m1=2; %Число m1, определяющее
вторую функцию Радемахера
m2=3; %Число m2, определяющее тре-
тью функцию Радемахера
k1=2^m1;
k2=2^m2;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
uum2=U1m*(sign(sin(k2.*pi.*tt./T)));
Uwal(4,:)=uum1.*uum2;
Uwal(5,:)=Uwal(1,:).*uum1.*uum2;
Uwal(6,:)=Uwal(1,:).*uum2;
Uwal(7,:)=uum2;
m1=4;%Число m1, определяющее чет-
вертую функцию Радемахера
k1=2^m1;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
Uwal(8,:)=Uwal(7,:).*uum1;
Uwal(9,:)=1;
disp(' ')
uur=(1/2)*Uwal(9,:)-(1/4)*Uwal(1,:);
uur2=uur-(1/8)*Uwal(3,:)-(1/18)*Uwal(7,:);
uur1=tt;
disp('Вычисленное значение норм ')
disp('при линейно нарастающем им-
пульсном сигнале ')
norm2uu=sqrt(T/nel)*norm(uur1,2)
disp('при аппроксимации двумя функ-
циями Уолша')
norm2uu1=sqrt(T/nel)*norm(uur,2)
disp('при аппроксимации четырьмя
функциями Уолша')

```

```

norm2uu2=sqrt(T/nel)*norm(uur2,2)
normuu=norm(uur1,2);
normuu1=norm(uur,2);
normuu2=norm(uur2,2);
disp('Отличие норм в процентах')
disp('при аппроксимации двумя функ-
циями Уолша')
otlnorm1=100*(norm2uu
norm2uu1)/norm2uu
disp('при аппроксимации четырьмя
функциями Уолша')
otlnorm1=100*(norm2uu
norm2uu2)/norm2uu
uumet=uur-uur1;
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('при аппроксимации двумя функ-
циями Уолша')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metrl1=(T/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metrl2=sqrt(T/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrlinf=norm(uumet,inf)
disp('Значения расстояний между
сигналами')
disp('при аппроксимации четырьмя
функциями Уолша')
uumet4=uur2-uur1;
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metrl1=(T/nel)*norm(uumet4,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metrl2=sqrt(T/nel)*norm(uumet4,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrlinf=norm(uumet4,inf)
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')

```

```

phi1=(180/pi)*acos(dot(uur,uur1)/(normuu
*normuu1))
phi2=(180/pi)*acos(dot(uur2,uur1)/(normu
u*normuu2))
subplot(211);plot(tt,uur,tt,uur1,'k','linewidth'
,2);grid on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.15*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uur2,tt,uur1,'k','linewidt
h',2);grid on
xlabel('t, cек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.15*U1m 1.15*U1m])
%Программа 45
clear
T=1; %Задаем период сигнала
Um=1; %
U1m=1; %
disp(' ')
tt0=linspace(0,T,1114);
tt=tt0(2:end-1);
nel=length(tt);
Uwal(9,nel)=0;
m1=1; %Число m1, определяющее
первую функцию Радемахера
m2=2; %Число m2, определяющее
вторую функцию Радемахера
k1=2^m1;
k2=2^m2;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
uum2=U1m*(sign(sin(k2.*pi.*tt./T)));
Uwal(9,nel)=0;
Uwal(1,:)=uum1;
Uwal(2,:)=uum1.*uum2;
Uwal(3,:)=uum2;
m1=2; %Число m1, определяющее вто-
рую функцию Радемахера
m2=3; %Число m2, определяющее тре-
тью функцию Радемахера
k1=2^m1;
k2=2^m2;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));

```

```

uum2=U1m*(sign(sin(k2.*pi.*tt./T)));
Uwal(4,:)=uum1.*uum2;
Uwal(5,:)=Uwal(1,:).*uum1.*uum2;
Uwal(6,:)=Uwal(1,:).*uum2;
Uwal(7,:)=uum2;
m1=4;%Число m1, определяющее чет-
вертую функцию Радемахера
k1=2^m1;
uum1=Um*(sign(sin(k1.*pi.*tt./T)));
Uwal(8,:)=Uwal(7,:).*uum1;
Uwal(9,:)=1;
disp(' ')
uur=(1/3)*Uwal(9,:)-(1/4)*Uwal(1,:)-
(1/8)*Uwal(3,:);
uur2=uur+(1/16)*Uwal(2,:)-
(1/16)*Uwal(7,:)+(1/32)*Uwal(6,:);
uur2=uur2+(1/64)*Uwal(4,:);
uur1=tt.*t;
disp('Вычисленное значение норм.')
disp('при квадратично нарастающем
импульсном сигнале ')
norm2uu=sqrt(T/nel)*norm(uur1,2)
disp('при аппроксимации тремя функ-
циями Уолша')
norm2uu1=sqrt(T/nel)*norm(uur,2)
disp('при аппроксимации восьмью
функциями Уолша')
norm2uu2=sqrt(T/nel)*norm(uur2,2)
normuu=norm(uur1,2);
normuu1=norm(uur,2);
normuu2=norm(uur2,2);
disp('Отличие норм в процентах')
disp('при аппроксимации тремя функ-
циями Уолша')
otlnorm1=100*(norm2uu
norm2uu1)/norm2uu
disp('при аппроксимации восьмью
функциями Уолша')
otlnorm1=100*(norm2uu-
norm2uu2)/norm2uu
uumet=uur-uur1;
disp('Значения расстояний между
сигналами')

```

```

disp('при аппроксимации тремя функциями Уолша')
disp('Вычисленное значение метрики первого типа')
metr1=(T/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадратичной метрики ')
metr2=sqrt(T/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равномерной метрики ')
metrinf=norm(uumet,inf)
disp('Значения расстояний между сигналами')
disp('при аппроксимации восьмью функциями Уолша')
uumet4=uur2-uur1;
disp('Вычисленное значение метрики первого типа')
metr1=(T/nel)*norm(uumet4,1)
disp('Вычисленное значение квадратичной метрики ')
metr2=sqrt(T/nel)*norm(uumet4,2)
disp('Вычисленное значение равномерной метрики ')
metrinf=norm(uumet4,inf)
disp('Вычисленное значение угла в градусах')
phi1=(180/pi)*acos(dot(uur,uur1)/(normuu*normuu1))
phi2=(180/pi)*acos(dot(uur2,uur1)/(normuu*normuu2))
subplot(211);plot(tt,uur,tt,uur1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.15*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uur2,tt,uur1,'k','linewidth',2);grid on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.15*U1m 1.15*U1m])
%Программа 46
clear

```

```

Um=10; %Задаем амплитуду прямоугольного импульса
tau=4; %Длительность импульса
T=2.2*tau;
a=tau;
tt=linspace(0,T,1917);
s=Um*rectpuls(tt-a/1.5,tau)+sqrt(1.6)*rand(size(tt));
t=wpdec(s,3,'db4');
fig=drawtree(t);
%Программа 47
clear
Um=10; %Задаем амплитуду прямоугольного импульса
tau=4; %Длительность импульса
T=2.2*tau;
a=tau;
tt=linspace(0,T,1917);
s=Um*rectpuls(tt-a/1.5,tau)+Um*tripuls(tt-a/1.5,0.03*tau,0);
t=wpdec(s,3,'db4');
fig=drawtree(t);
%Программа 48
clear
%Формируем сигнал
Um=10; %Задаем амплитуду прямоугольного импульса
tau=4; %Длительность импульса
T=2.2*tau;
a=tau;
tt=linspace(0,T,1917);
s=Um*rectpuls(tt-a/1.4,tau)+sqrt(1.6)*rand(size(tt));
%Находим аппроксимирующие и детализирующие
%коэффициенты первого уровня
вейвлет-преобразования
[ca1,cd1]=dwt(s,'sym5');
[ca2,cd2]=dwt(s,'db4');
%Строим графики
subplot(212);plot(tt,uu1,'k','linewidth',2)
subplot(311);plot(s,'k','linewidth',2);title('Signal');

```

```

grid on
subplot(323);plot(ca1,'k','linewidth',2);
title('Coef.approx sym5');grid on
subplot(325);plot(ca2,'k','linewidth',2);
title('Coef.approx db4');grid on
subplot(324);plot(cd1,'k','linewidth',2);
title('Coef.detail sym5');grid on
subplot(326);plot(cd2,'k','linewidth',2);
title('Coef.detail db4');grid on
%Программа 49
clear
%Формируем сигнал «лестница»
rand('seed',123456789);
s=2+kron(ones(1,8),[1 1])+((1:16).^2)/16+0.3*rand(1,16);
t=wpdec(s,3,'db4');
fig=drawtree(t);
%Программа 50
clear
%Формируем сигнал
Um=10; %Задаем амплитуду прямоугольного импульса
tau=4; %Длительность импульса
T=2.2*tau;
a=tau;
tt=linspace(0,T,1024);
s=Um*rectpuls(tt-a/1.4,tau);
[ca1,cd1]=dwt(s,'db4');
subplot(221);plot(ca1,'k','linewidth',2);
title('Coef.approx db4');grid on
subplot(222);plot(cd1,'k','linewidth',2);
title('Coef.detail db4');grid on
srecon=idwt(ca1,cd1,'db4');
err1=norm(s-srecon);
subplot(212);plot([s;srecon]);
ylim([-0.15*Um 1.15*Um])
title('Signal and reconstruir.signal');grid on
xlabel(['Error norm=',num2str(err1)])
%Программа 51
rand('seed',123456789);
s=2+kron(ones(1,8),[1 1])+((1:16).^2)/16+0.3*rand(1,16);
[ca1,cd1]=dwt(s,'db4');
subplot(221);plot(ca1,'k','linewidth',2);
title('Coef.approx db4');grid on
subplot(222);plot(cd1,'k','linewidth',2);
title('Coef.detail db4');grid on
srecon=idwt(ca1,cd1,'db4');
err1=norm(s-srecon);
subplot(212);plot([s;srecon]);
ylim([-0.15*Um 1.15*Um])
title('Signal and reconstruir.signal');grid on
xlabel(['Error norm=',num2str(err1)])
%Программа 52
clear
%Формируем сигнал
Um=10; %Задаем амплитуду прямоугольного импульса
tau=4; %Длительность импульса
T=2.2*tau;
a=tau;
tt=linspace(0,T,1024);
s=Um*rectpuls(tt-a/1.4,tau);
%Находим аппроксимирующие и детализирующие
%коэффициенты первого уровня
вейвлет-преобразования
[ca2,cd2]=dwt(s,'db4');
srecon=idwt(ca2,cd2,'db4');
uur1=s;
uur=srecon;
nel=length(uur1);
disp('Вычисленное значение квадратичной нормы')
norm2uu=sqrt(T/nel)*norm(uur1,2)
disp('исходного сигнала ')
norm2uu=sqrt(T/nel)*norm(uur,2)
disp('сигнала, полученного с помощью вейвлетов')
norm2uu1=sqrt(T/nel)*norm(uur,2)
normuu=norm(uur1,2);
normuu1=norm(uur,2);
disp('Отличие норм в процентах')
otlnorm1=100*(norm2uu-norm2uu1)/norm2uu
uumet=uur-uur1;
disp('Значения расстояний между сигналами')

```

```

disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metr1=(T/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metr2=sqrt(T/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrlinf=norm(uumet,inf)
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
phi2=(180/pi)*acos(dot(uur,uur1)/(normuu
*normuu1));
phi1=abs(phi2)
tt=linspace(0,15,nel);
Um=max(uur);
U1m=Um;
subplot(211);plot(tt,uur,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.15*Um 1.15*Um])
subplot(212);plot(tt,uur1,'k','linewidth',2);grid
on
xlabel('t, сек');
ylabel('u(t), В');
ylim([-0.15*U1m 1.15*U1m])
%Програма 53
clear;
[alphabet, targets] = prprob;
i = 10; %Задаем номер по алфавиту
одной буквы
ti = alphabet(:, i);
letter{i} = reshape(ti, 5, 7);
Bukwa1=letter{i}
spy(Bukwa1)
uur=reshape(Bukwa1, 1, 35);
i = 15; %Задаем номер по алфавиту
другой буквы
ti = alphabet(:, i);
letter{i} = reshape(ti, 5, 7);
Bukwa2=letter{i}
figure

```

```

spy(Bukwa2)
uur1=reshape(Bukwa2, 1, 35);
nel=length(uur1);
T=1;
disp('Вычисленное значение квадра-
тической нормы ')
disp('первой буквы ')
norm2uu=sqrt(T/nel)*norm(uur1,2)
disp('второй буквы')
norm2uu1=sqrt(T/nel)*norm(uur,2)
normuu=norm(uur1,2);
normuu1=norm(uur,2);
disp('Отличие норм в процентах')
otlnorm1=100*(norm2uu
norm2uu1)/norm2uu
uumet=uur-uur1;
disp('Значения расстояний между
буквами')
disp('Вычисленное значение метрики
первого типа')
metr1=(T/nel)*norm(uumet,1)
disp('Вычисленное значение квадра-
тической метрики ')
metr2=sqrt(T/nel)*norm(uumet,2)
disp('Вычисленное значение равно-
мерной метрики ')
metrlinf=norm(uumet,inf)
disp('Вычисленное значение угла в
градусах')
phi1=(180/pi)*acos(dot(uur,uur1)/(normuu
*normuu1))

```

## НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Індивідуальні навчально-дослідні завдання та методичні  
рекомендації до їх виконання  
з навчальної дисципліни  
**"ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ ТА ЕЛЕКТРОНІКИ"**  
для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні науки",  
"Видавничо-поліграфічна справа"  
денної форми навчання

Укладачі: **Жидко Євген Анатолійович**  
**Гоков Олександр Михайлович**  
**Вдовьонков Володимир Юрійович**

Відповідальний за випуск **Гоков О. М.**

Редактор **Нещеретна О. М.**

Коректор **Мартовицька-Максимова В. А.**

План 2008 р. Поз. №254.

Підп. до друку 17.04.2008 Формат 60 × 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.  
Ум.-друк. арк. 5,25. Обл.-вид. арк. 6,04. Тираж 100 прим. Зам. № 231

Видавець і виготівник — видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, пр. Леніна, 9а  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи  
Дк №481 від 13.06.2001 р.