

Министерство образования Украины
ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Одесское отделение инженерной академии Украины
Институт содержания и методов исследования

Теоретические основы
интегрированных
технологических систем

В пяти книгах
под общей ред. акад. *Якимова А.В.*

А.В. Якимов, Б.О. Ткаченко, С.Г. Зимин, А.А. Якимов,
Ф.В. Новиков, Г.В. Новиков

ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ОБЫЧНОМ
И ПРЕРЫВИСТОМ ШЛИФОВАНИИ

Допущено Министерством
образования Украины в
качестве учебного пособия
для студентов технических
учебных заведений

Одесса ОГПУ 1998

УДК 621.9.01

Тепловые процессы при обычном и прерывистом шлифовании: Учебное пособие/А.В. Якимов, Б.О. Ткаченко, С.Г. Зимин, А.А. Якимов, Ф.В. Новигов, Г.В. Новигов.
Одесса: ОГПУ. 1998. -272 с.

В учебном пособии систематизированы теплофизические задачи на основе классификации влияния теоретических форм обрабатываемых поверхностей на температурное поле при шлифовании. Изложенный материал дает исчерпывающую характеристику математических приемов, используемых для построения функции Грина, а также носит справочный характер. Пособие предназначено для студентов, аспирантов и инженеров-механиков.

Ил.69 Табл.8 Библиогр. 26

ISBN 5-7763-9925-7

Рецензенты: Ю.Н. Сухоруков, д-р техн. наук, проф.

В.П. Ларшин, д-р техн. наук.

Учебное пособие рекомендовано к изданию институтом промышленных технологий, дизайна и менеджмента (ИПТДМ) при ОГПУ.

Содержание

Предисловие к серии.....	5
1. Краткие сведения о теплопроводности.....	10
2. Метод источников.....	15
2.1. Примеры построения функции Грина.....	16
2.2. Граничные условия.....	19
2.3. Движущиеся источники.....	26
2.4. Плоское шлифование с охлаждением.....	37
2.5. Шлифование тонких пластин.....	52
2.6. Шлифование клиновидных деталей.....	70
2.6.1. Односторонний источник.....	70
2.6.2. Двухсторонний источник.....	87
2.7. Исследование нестационарного температурного поля.....	95
3. Метод интегральных преобразований.....	104
3.1. Сущность метода.....	104
3.2. Пример применения метода.....	107
4. Шлифование цилиндрических деталей (кольцевой источник тепла).....	119
4.1. Шлифование сплошных деталей.....	119
4.2. Шлифование полых деталей.....	136
5. Шлифование цилиндрических деталей с винтовым источником тепла.....	149

6. Численные методы решения дифференциальных уравнений теплопроводности.....	158
7. Прерывистое шлифование.....	211
7.1. Тепловые явления при прерывистом шлифовании.....	212
7.2. Определение формы профиля фронтальной поверхности прерывистого круга, обеспечивающей минимальную теплонапряженность.....	226
7.3. Функциональные связи основных физических параметров процесса прерывистого шлифования.....	234
7.3.1. Приведенный режущий профиль прерывистого круга и его характеристики.....	234
7.3.2. Долевой вклад работ, затрачиваемых на резание и трение, в общем энергетическом балансе процесса шлифования.....	255
Список литературы.....	270

Предисловие

*Серия книг посвящается памяти
крупного ученого-теплофизика
Сипайлова Владимира Антоновича*

Перед инженерами-механиками Украины стоит задача коренного изменения структуры и характера машиностроительного производства с учетом рыночного механизма экономики. Переход от производства машин с ограниченной номенклатурой к малым сериям с широкой номенклатурой требует применения гибких информационных и ресурсосберегающих технологий, интегрированных систем.

Одновременно возрастают требования к системе образования в стране, которая должна отвечать концепции рыночной экономики.

При перепрофилировании машиностроительных предприятий необходимо развивать системный подход к технологии машиностроения как к науке об интегрированном производстве, в котором на основе компьютерной техники автоматизированы все этапы от подготовки производства, разработки и обеспечения технологического процесса, учета и выпуска готовой продукции. Только в этом случае выпускаемая продукция будет конкурентоспособной на отечественном и мировом рынке.

Новый системный подход требует изменить и мировоззрение инженерно-технических работников машиностроительных предприятий.

Наибольший шанс на успех будут иметь те фирмы, в которых при создании новых машин специалисты по компьютерной технике управления будут понимать технические аспекты, а инженеры-конструкторы и технологи будут владеть навыками работы на компьютерах.

Одной из причин, препятствующих решению этой сложной задачи, является отсутствие в Украине научно-технической литературы, отвечающей современным воззрениям на развитие машиностроения.

Издание серии учебных пособий по теоретическим основам интегрированных технологических систем и производств в машиностроении в значительной степени восполнит образовавшийся пробел по обеспечению инженеров-механиков соответствующей научно-технической и учебной литературой.

В состав серии предлагается включить пять учебных пособий, характеристики которых приводятся ниже.

В первом учебном пособии рассматриваются теоретические основы тепловых явлений при шлифовании обычными и прерывистыми кругами. Здесь систематизированы теплофизические задачи на основе классификации форм обрабатываемых поверхностей деталей. Такое изложение материала, с одной стороны, дает исчерпывающую характеристику методов решения тепловых задач, используемых для построения

математических моделей прогнозирования качества поверхностного слоя, с другой - носит справочный характер решения типовых задач.

В результате расширяется круг потенциальных читателей, в число которых входят студенты, аспиранты технических и физико-математических университетов, технологи и конструкторы машиностроительных предприятий.

Второе учебное пособие посвящено основам теории обобщения и стабилизации качества поверхностного слоя при прерывистом шлифовании. Здесь рассмотрены закономерности формирования качества поверхностного слоя на примере шлифования зубчатых колес. Приведены методики расчета основных физических и технологических параметров при шлифовании зубчатых колес тарельчатыми, конусными, фасонными кругами, включая силы и температуру резания, износ круга, нагрузку, действующую на зерно, и т.д. Обоснованы оптимальные условия обработки. Дана характеристика прогрессивных ресурсосберегающих технологий изготовления зубчатых колес.

Третье учебное пособие посвящено разработке теоретических предпосылок оптимизации технологических процессов финишной обработки на этапах разработки технологических систем и их функционирования. Основу пособия составляет системный подход CAD/CAM/CAT (Computer Aided Development, machining and Training) и соответствующая интегрированная технологическая система шлифования, которая на основе указанного подхода охватывает

(интегрирует) этапы разработки (Development) реализации (Machining) процессов шлифования.

Сущность нового подхода состоит в том, что при известном маршруте обработки сложнопрофильных деталей этапы разработки (CAD) и реализации (CAM) процесса шлифования рассматриваются как последовательные этапы предварительного (CAD) и окончательного (CAM) управления процессом. При этом на этапе разработки решаются задачи определения параметров и условий шлифования, которые обеспечивают наивысшую производительность последующей обработки с учетом технологических требований к качеству поверхностного слоя и точности изготовления, а на этапе реализации (обработки) - решаются задачи стабилизации этих параметров, и условий шлифования; при этом принимаются во внимание индивидуальные особенности каждой обрабатываемой детали. Индивидуальные особенности учитываются на этапе управления САТ (Computer, Aided Training), где САТ - автоматизированное обучение технологической системы шлифования, дополняющее этапы обработки САМ.

Четвертое учебное пособие содержит систематизированные материалы по технологическим основам гибкого автоматизированного проектирования (ГАП). Основные разделы пособия - технология, организация и управление, которые тесно переплетаются в рамках интегрированного производства. Отмечается, что станки с ЧПУ, входящие в состав ГАП, положительно зарекомендовали себя при обработке лезвийным

инструментом (точение, фрезерование, растачивание). Показано, что технологию обработки на шлифовальных станках с ЧПУ, входящих в состав ГАП, следует разрабатывать на основе интегрированных технологических систем шлифования, работающих на основе системного подхода CAD/CAM/CAT.

Пятое учебное пособие является завершающим в данной серии и состоит из двух частей.

В первой части описаны оригинальные схемотехнические решения авторов по разработке и внедрению интегрированных технологических систем шлифования. Здесь даются описания конструкций датчиков, элементов компьютерной и микропроцессорной техники интеллектуальных систем диагностики и управления, которые положительно зарекомендовали себя при внедрении их на различных машиностроительных предприятиях. Как правило, все эти разработки выполнены на уровне изобретений.

Во второй части пособия авторы приводят подробный русско-украинско-английский глоссарий (словарь) новых терминов из области гибких автоматизированных систем и производств, технологии автоматизированного машиностроения и интегрированных производственных систем.

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Теплопроводность - перенос теплоты в результате движения и энергетического взаимодействия микрочастиц тела (молекул, атомов, электронов). Явление теплопроводности возможно только в вещественной среде: твердых телах, неподвижных жидкостях и газах.

В основу теории теплопроводности положены два закона: закон теплопроводности Фурье и закон теплоотдачи Ньютона-Рихмана.

Согласно теории Фурье, количество тепла dQ , проходящее через элементарную площадку dS за время dt , пропорционально градиенту температуры $\frac{\partial T}{\partial n}$, т.е.

$$dQ = -\frac{\partial T}{\partial n} ds \cdot dt. \quad (1)$$

Знак минус указывает на то, что тепло передается в сторону убывания температуры. Коэффициент пропорциональности λ - есть физический параметр вещества, характеризующий его способность проводить тепло. Он называется коэффициентом теплопроводности, или просто теплопроводностью.

Количество тепла, переносимого в единицу времени через единицу площади, называется плотностью теплового потока

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}.$$

В системе единиц СИ рассмотренные величины измеряются следующим образом: $[\lambda]$ Вт/м²К, $[q]$ Вт/м².

Закон Ньютона-Рихмана описывает процесс теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей средой (жидкостью или газом). Он описывается в виде соотношения

$$q = \alpha(T_o - T_c), \quad (2)$$

где q - плотность теплового потока;

α - коэффициент теплоотдачи (Вт/м²К);

T_o - температура поверхности тела;

T_c - температура окружающей среды.

Дифференциальное уравнение теплопроводности выводится на основе закона сохранения энергии. Если элементарному объему dV сообщить количество тепла dQ , то температура увеличится на dT в соответствии с уравнением

$$dQ = C\gamma dVdT. \quad (3)$$

Здесь C - удельная теплоемкость; γ - плотность вещества.

Для определения общего количества тепла, поглощенного телом объемом V , необходимо произвести интегрирование по всему этому объему. Данная идея положена в основу методов математического описания и исследования температурного поля в твердых телах.

Если допустить, что к элементарному объему dV через его грани за время dt будет подведено тепло dQ_x , dQ_y , dQ_z , а за это же время через противоположные грани будет отведено количество

тепла $dQ_x + dx$, $dQ_y + dy$, $dQ_z + dz$, то например, в направлении оси X через грань площадью $dydz$ подведенное количество тепла можно выразить зависимостью (рис. 1)

$$dQ = q_x dydzdt, \quad (4)$$

где q_x - проекция вектора плотности теплового потока на ось X.

Соответственно через противоположную грань будет отведено

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt. \quad (5)$$

Количество тепла, поглощаемое элементарным объемом, равно разности

$$dQ'_x = q_x dydzdt - q_{x+dx} dydzdt. \quad (6)$$

Приращение плотности теплового потока q_{x+dx} можно представить в виде

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx. \quad (7)$$

После подстановки (7) в (6) получим

$$dQ'_x = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydzdt. \quad (8)$$

Учитывая аналогичным путем количество тепла, подведенного через другие оставшиеся грани, можно найти общее количество тепла, полученного элементарным объемом dV .

$$dQ = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dydzdt. \quad (9)$$

Приравнивая полученное выражение к правой части уравнения (3),

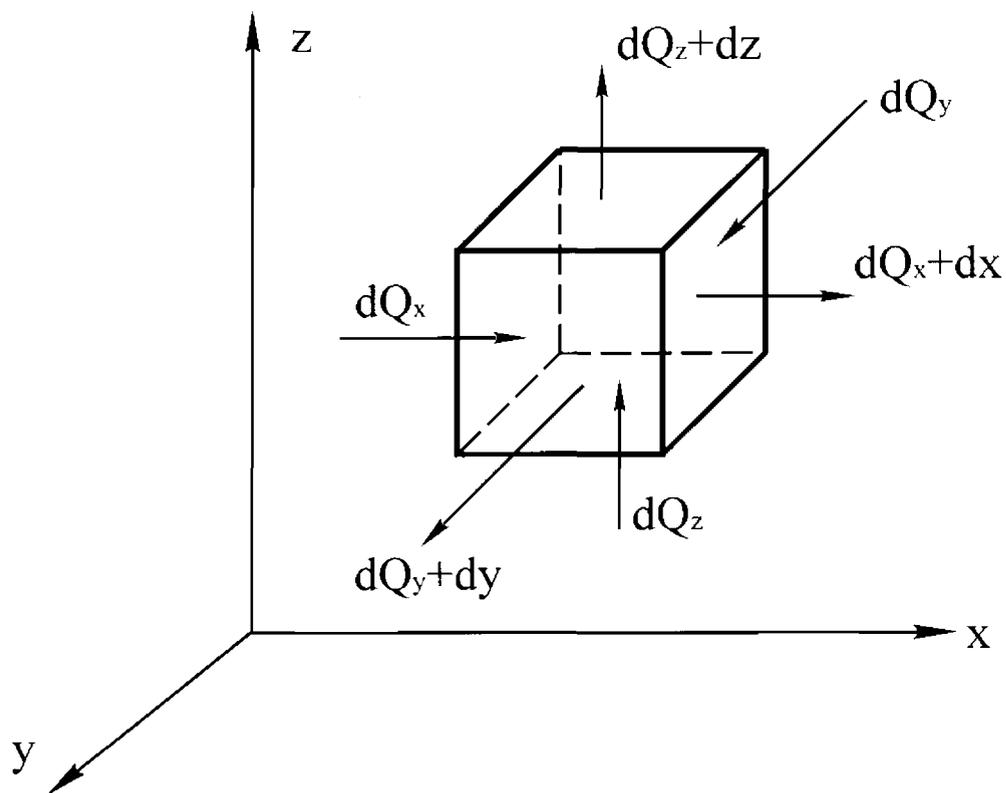


Рис. 1. Расчетная схема

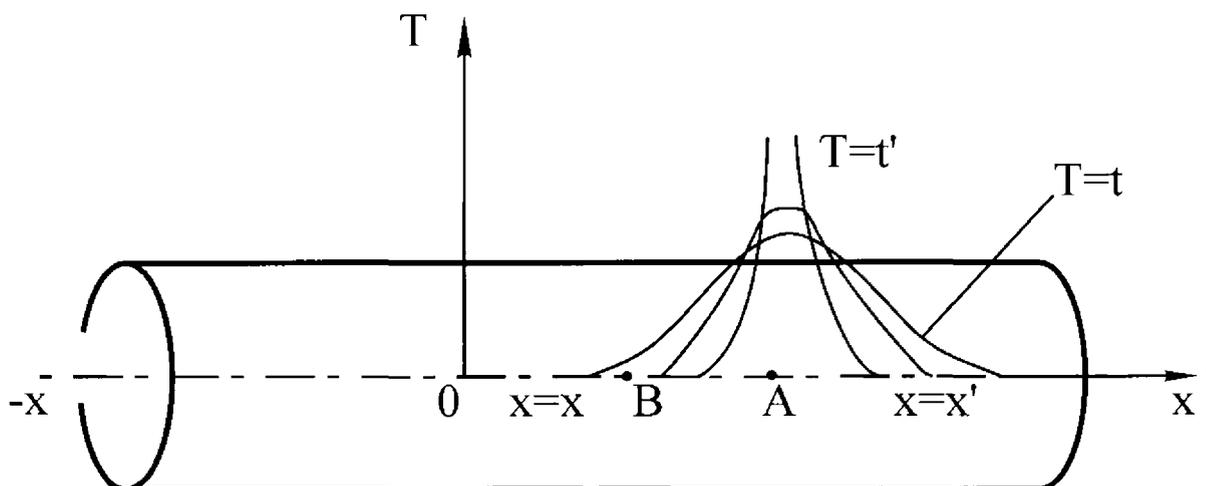


Рис. 2. Расчетная схема распространения тепла в бесконечном стержне

получим

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz dt = C_\gamma dx dy dz dT, \quad (10)$$

или

$$C_\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right). \quad (11)$$

На основании закона Фурье проекции вектора плотности теплового потока можно представить в виде

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (12)$$

После подстановки выражения (2) в (11) можно получить

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{C_\gamma} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (13)$$

Уравнение (13) описывает процесс теплопередачи в неподвижной твердой среде, который осуществляется за счет теплопроводности.

Однако при механической обработке деталей машин приходится иметь дело с подвижными источниками тепла.

При этих условиях перенос тепла будет осуществляться не только за счет теплопроводности, но и за счет движения самой нагретой детали. Данный случай следует рассматривать как частный случай конвективного переноса тепла, при котором все элементы нагретой среды перемещаются с одинаковой скоростью.

Если совместить одну из осей системы координат (например ось Z) с направлением движения теплового источника, то

уравнение теплопроводности (13) будет иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{C\gamma} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + V \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (14)$$

Здесь V - скорость перемещения теплового источника;

коэффициент $a = \lambda/C\gamma$ называется коэффициентом температуропроводности $(\text{м}^2/\text{с})$, или просто температуропроводностью.

2. МЕТОД ИСТОЧНИКОВ

При решении теплофизических задач широкое распространение получил метод источников (метод Грина).

Этот метод хорошо известен в теории электрического потенциала. Идея метода и его физическая интерпретация состоят в том, что если известен закон изменения потенциала от точечного заряда, то можно построить картину потенциала заряженного тела любой формы или произвольной системы тел [1]. Для данного метода вся сложность задачи состоит в определении так называемой функции Грина, удовлетворяющей данным граничным условиям.

Процесс определения этой функции называют построением фундаментального решения.

Сущность метода Грина применительно к теории теплопроводности заключается в следующем. Если известен закон изменения температуры $T(x,y,z,t)$ в точке $B(x,y,z)$ теплопроводящего

пространства от точечного источника, помещенного в точку $A(x', y', z')$, выделившего количество тепла Q в момент времени t' , то температура в точке $B(x, y, z)$ от системы распределенных в пространстве источников определяется суперпозицией из температурных полей. Решение задачи сводится к определению функции $T(x, y, z, t)$ от единичного источника тепла Q (функция Грина), удовлетворяющей граничным условиям задачи. Распределение тепловых отраженных источников в пространстве, время их действия и движения учитываются интегрированием.

2.1. Примеры построения функции Грина

1. Известно, что если в n -мерном пространстве в точке A с координатами $x'_1, x'_2, x'_3 \dots x'_n$ в момент времени t' выделилось количество тепла Q , то температура тела в точке B с координатами x_1, x_2, \dots, x_n в момент времени ($t > t'$) описывается функцией

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, t, t') = \frac{Q}{C\gamma \left[\sqrt{4\pi a(t-t')} \right]^n} \exp \left\{ -\frac{R^2}{4a(t-t')} \right\}, \quad (15)$$

где R^2 - квадрат расстояния между точками A и B , причем

$$R^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2. \quad (16)$$

Функция (15) есть решение фундаментального уравнения теплопроводности (14). На основе данного решения можно записать функцию Грина для различных условий задачи. Рассмотрим некоторые характерные случаи.

Задача 1. Распространение тепла в бесконечном стержне (рис.2) связано с решением одномерной задачи.

Если в точке стержня с координатой $x = x'$ подействовал в момент времени t' мгновенный источник тепла $q = Q$, то температура в точке В, расположенной на расстоянии $X = x$ в момент времени $t > t'$, опишется функцией

$$T(x, t) = \frac{Q}{C\gamma \sqrt{4\pi a(t-t')}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right\}. \quad (17)$$

Задача 2. Источник тепла, возникнув в точке А в момент времени $\tau = 0$, действовал непрерывно до момента времени $\tau = t'$. Температура в точке В' стержня на расстоянии x от теплового источника в момент времени $t > t'$ определяется суперпозицией температурных полей во времени. Действие источника тепла от момента времени $\tau = 0$ до $\tau = t'$ определяется как действие последовательно "вспыхивающих" в одной и той же точке мгновенных источников тепла. Если представить схему действия источников при помощи временной оси τ (см. рис. 3), то указанная суперпозиция запишется в виде суммы

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{Q}{C\gamma \sqrt{4\pi a}} \left[\frac{1}{\sqrt{t-0}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-0)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{t-t_1}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t_1)}\right\} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{t-t_2}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t_2)}\right\} + \dots + \frac{1}{\sqrt{t-t'}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right\} \right] = \\ &= \frac{Q}{C\gamma \sqrt{4\pi a}} \int_0^{t'} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-\tau)}\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Задача 3. Источники тепла распределены в объеме V и действуют непрерывно от момента времени $t' = 0$ до исследуемого

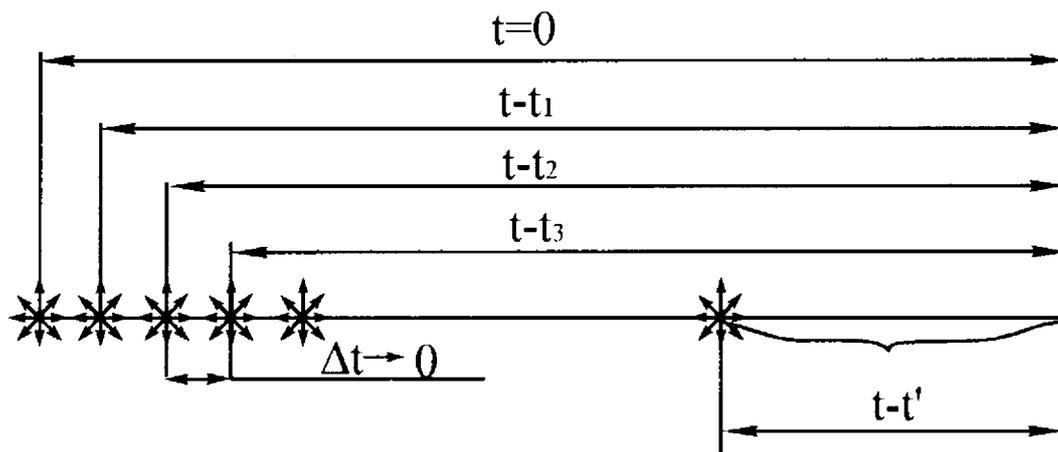


Рис.3. Временная схема действия источника

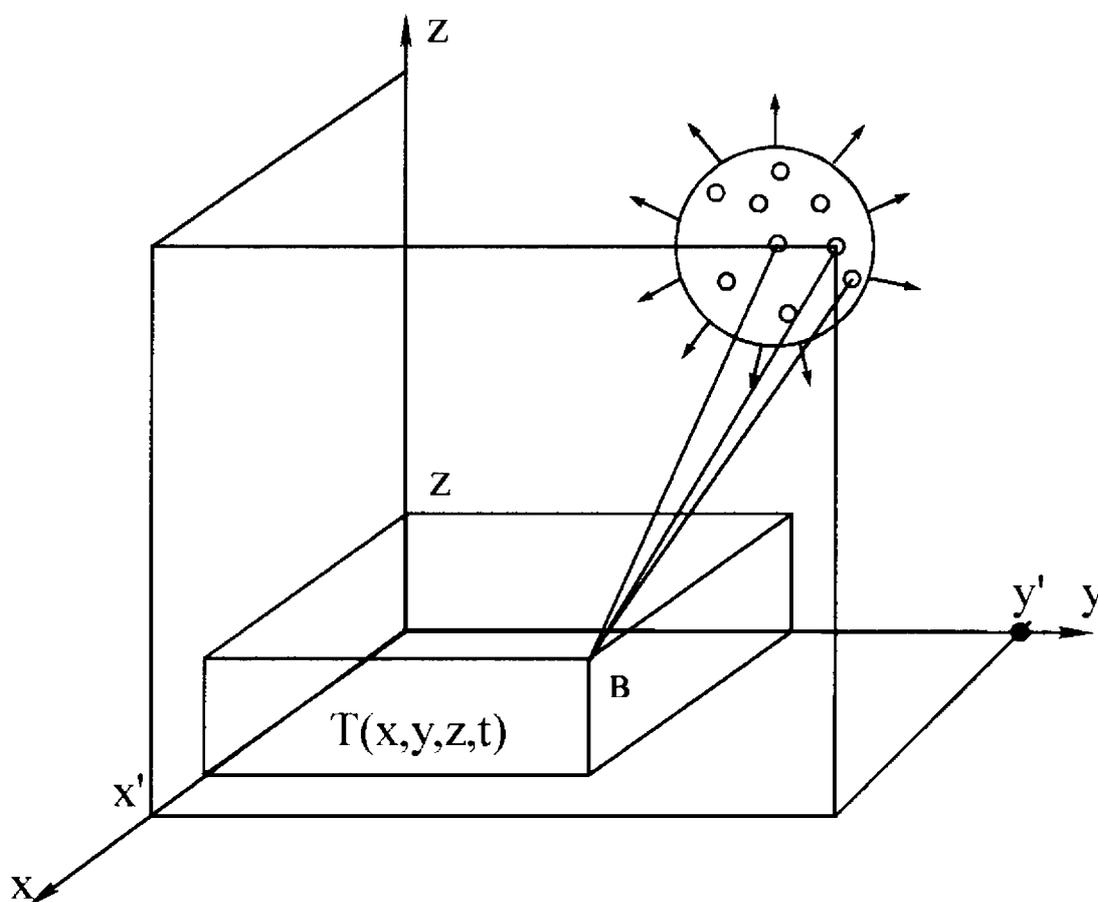


Рис.4. Схема действия источника тепла

момента времени $t' = t$ (рис.4). Температура в точке В теплопроводящего пространства в момент времени $t' = t$ определится суперпозицией температурных полей от всех источников q как в пространстве, так и во времени, т.е.

$$T(x,y,z,t) = \iiint_V \int_0^t \frac{Q(x',y',z',t')}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} * \exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}\right\} dx'dy'dz'dt'. \quad (19)$$

В формуле (19) x, y, z и t - постоянные величины (координаты точки В), а x', y', z' и t' - переменные интегрирования.

До сих пор рассматривалось бесконечное сплошное теплопроводящее пространство. Если ограничить теплопроводящее пространство плоскими поверхностями, то температурное поле с учетом граничных условий будет деформировано. Для решения задач теплопроводности в этих случаях широко используется метод отраженных тепловых источников. Для криволинейных поверхностей применение метода источников (метода Грина) ограничено.

2.2. Граничные условия

Уравнения (13) и (14) представляют собой линейные уравнения второго порядка в частных производных. Для того чтобы решение $T(x,y,z,t)$ являлось единственным решением поставленной задачи,

оно должно одновременно удовлетворять некоторым начальным и граничным условиям.

Начальное условие $T = T(x, y, z, t_0) = \Theta(x, y, z)$ определяет распределение температуры внутри исследуемой области в начальный момент времени.

Граничные условия в теории теплопроводности принято разделять на четыре вида.

Граничные условия первого рода задают распределение температуры на границе области в любой момент времени, т.е.

$$T(x_S, y_S, z_S, t) = \varphi(t, S).$$

Например, на границе теплопроводящего ограниченного пространства выполняются граничные условия первого рода, т.е. поддерживается постоянная температура $T|_{x=0} = 0$.

На рис. 5 представлено теплопроводящее тело, внутри которого в точке А с координатами x' , y' , z' в момент времени $t' = 0$ мгновенно выделилось количество тепла Q . Требуется определить температуру в точке В теплопроводящего тела в момент времени $t' = t$.

Для обеспечения заданных граничных условий первого рода необходимо расширить теплопроводящую среду в область отрицательных значений X (рис.5) и для обеспечения стока тепла равной интенсивности поместить в точке А с координатами $-x'$, $+y'$, $+z'$ зеркально-симметричный относительно точки А тепловой источник. Тогда температура в точке В определится суперпозицией этих двух источников.

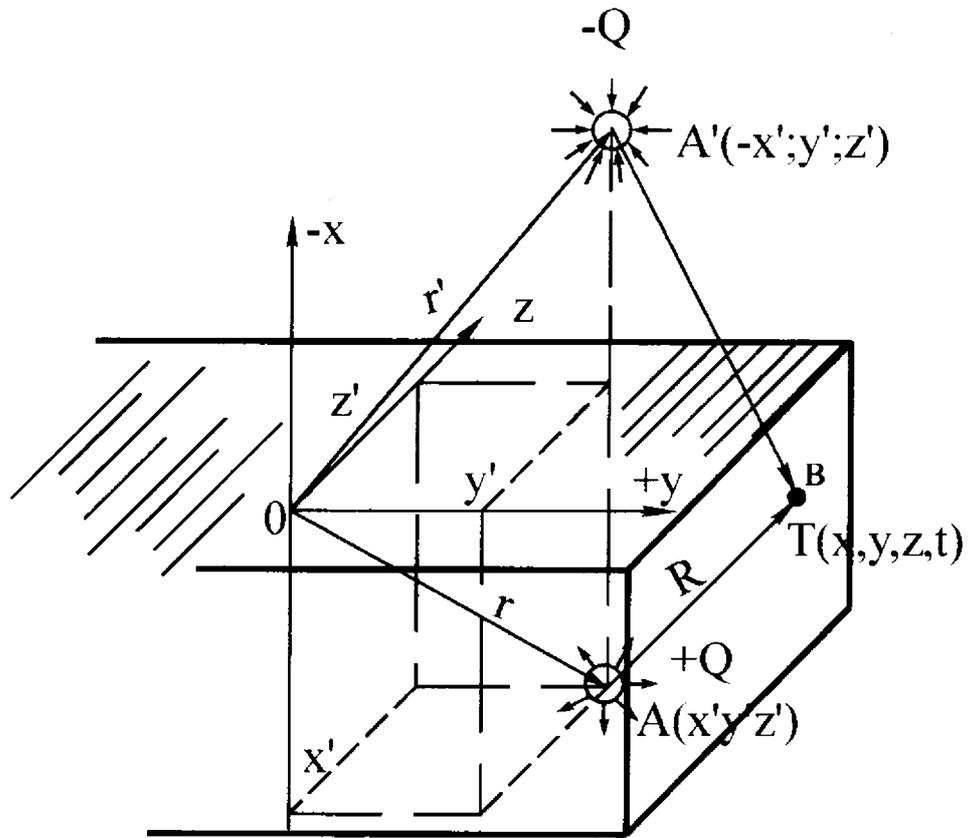


Рис.5. Расчетная схема

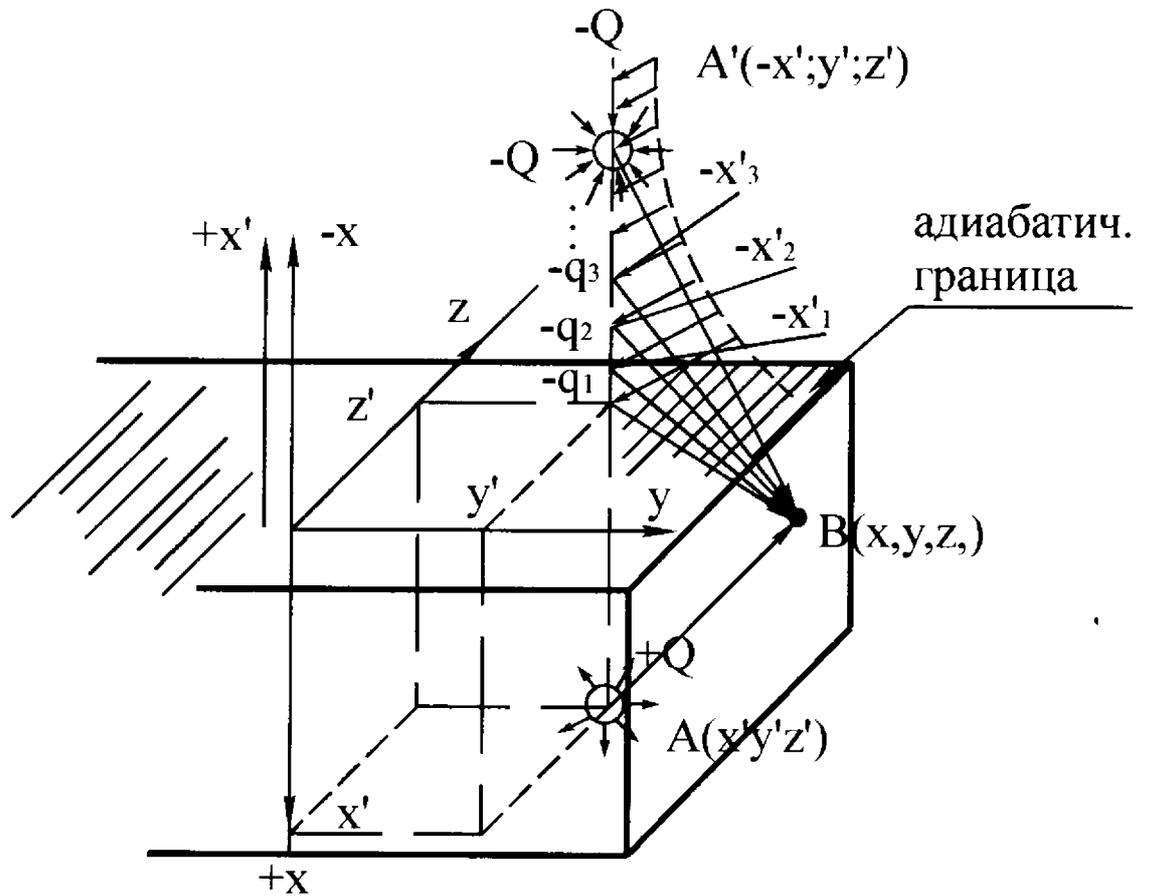


Рис.6. Расчетная схема

Функция Грина, описывающая распределение температуры в теплопроводящем теле, с граничными условиями первого рода имеет вид

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, t) &= \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} - \\
 &- \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} = \quad (20) \\
 &= \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} - \right. \\
 &\quad \left. - \exp\left\{-\frac{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} \right].
 \end{aligned}$$

Подставляя в (20) координату $x=0$, можно убедиться, что граничные условия первого рода выполняются. Кроме того, формула удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности.

Граничное условие второго рода задает плотность теплового потока для каждой точки граничной поверхности в любой момент времени, т.е. $q(x_S, y_S, z_S, t)$ или по закону Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = -\frac{1}{\lambda} q(S, t),$$

где $\frac{\partial T}{\partial n}$ - производная температуры по нормали поверхности S.

Частный случай - это $\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S=0} = 0$ - адиабатическая стенка. Для

построения функции источника, удовлетворяющей граничному

условию второго рода, необходимо относительно адиабатической плоскости поместить в точке $A'(-x', y', z')$ зеркально-симметричный положительный тепловой источник (рис. 5), т.е. задать в точке (A') источник такой же интенсивности.

Температура в точке В определится суперпозицией этих двух источников, т. е.

$$T(x, y, z, t) = \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} + \right. \quad (21)$$

$$\left. + \exp\left\{-\frac{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} \right].$$

Если источник подействовал на поверхности, то отраженный источник совпадает с исходным. В этом случае тепловой источник имеет удвоенную мощность.

При выполнении граничных условий второго рода функция Грина имеет вид

$$T(x, y, z, t) = \frac{2Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\}.$$

Если продолжительность действия теплового источника изменяется от $t' = 0$ до $t' = t$, то функция Грина запишется так:

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{2Q dt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}\right\}. \quad (22)$$

Граничные условия третьего рода задает теплообмен на границе области с окружающей средой. Закон теплообмена может

быть задан в форме рассмотренного выше закона Ньютона-Рихмана, т.е.

$$q = \alpha(T_0 - T_C) \quad \alpha(T_0 - T_C) + \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = 0,$$

где T_0 - температура поверхности тела;

T_C - температура окружающей среды.

Коэффициент теплообмена α зависит от свойств тела, среды и температуры.

Если на прямой, перпендикулярной плоскости XOY и проходящей через точку $A(x', y', z')$, задать систему отрицательных стоков в области отрицательных значений X (рис. 6), то температура в точке $B(x, y, z)$ определится суперпозицией всех источников. Закон распределения стоков описывается формулой

$$Q' = \frac{\alpha}{\lambda} Q \exp\left\{-\frac{\alpha}{\lambda} x\right\} \quad (23)$$

при наличии дополнительного отрицательного источника интенсивностью Q в зеркально-симметричной точке $A'(-x', +y', +z')$.

Уравнение для расчета температуры в точке $B(x, y, z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = & \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} - \right. \\ & \left. - \exp\left\{-\frac{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} \right] - \left[\frac{Q'_1(x'_1)}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} * \right. \\ & \left. * \exp\left\{-\frac{(x+x'_1)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right\} \right] + \frac{Q'_2(x'_2)}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} * \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \exp \left\{ - \frac{(x + x'_2)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4at} \right\} + \dots + \frac{Q'_n(x'_n)}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} * \\
& * \exp \left\{ - \frac{(x + x'_n)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4at} \right\}. \\
T(x, y, z, t) = & \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \left[\exp \left\{ - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4at} \right\} - \right. \\
& \left. - \exp \left\{ - \frac{(x + x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4at} \right\} \right] - \left[\frac{\alpha}{\lambda} \frac{Q'}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} * \right. \\
& \left. \int_0^\infty \exp \left\{ - \frac{(x + x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4at} - \frac{\alpha}{\lambda} x' \right\} dx' \right] \quad (25)
\end{aligned}$$

Если тепловой источник Q располагается на поверхности ($x' = 0$), то система стоков описывается формулой

$$Q' = 2 \frac{\alpha}{\lambda} Q \exp \left\{ - \frac{\alpha}{\lambda} x \right\}, \quad (26)$$

а формула суперпозиции имеет вид

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, t) = & \frac{2Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4at} \right\} - \\
& - 2Q \frac{\alpha}{\lambda} \frac{1}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \int_0^\infty \exp \left\{ - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4at} - \frac{\alpha}{\lambda} x' \right\} dx'. \quad (27)
\end{aligned}$$

Если тепловой источник действует на поверхность в течение некоторого промежутка времени от $t' = 0$ до $t' = t$, то уравнение для расчета температуры в точке $B(x, y, z)$ таково

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{2Q dt'}{C\gamma[4\pi a(t - t')]^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4a(t - t')} \right\} - \quad (28)$$

$$-2Q \frac{\alpha}{\lambda C_Y} \frac{1}{\rho} \int_0^t \frac{dt'}{[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')} - \frac{\alpha}{\lambda} x'\right\} dx'.$$

Рассмотренные функции удовлетворяют граничным условиям третьего рода.

Граничные условия четвертого рода выражают равенство тепловых потоков на границе раздела двух теплопроводящих сред и записываются в виде равенства

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_S = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_S. \quad (29)$$

Задачи с данным граничным условием и подвижными источниками тепла решаются численными методами математики.

2.3. Движущиеся источники

Рассмотренные решения теплофизических задач (функции Грина) удовлетворяют уравнению теплопроводности в системе координат, связанной с твердым теплопроводящим пространством.

При наличии движения теплового источника необходимо систему координат связать с движущимся источником. При совмещении оси z с направлением движения теплового источника дифференциальное уравнение теплопроводности запишется в виде (14). Фундаментальным решением уравнения теплопроводности (14) является функция источника с непрерывно изменяющейся координатой z' по закону $z' = Vt$. На рис. 7 показан точечный источник, движущийся в плоскости OZY вместе с подвижными осями координат. В начальный момент времени $\tau = t'$ источник

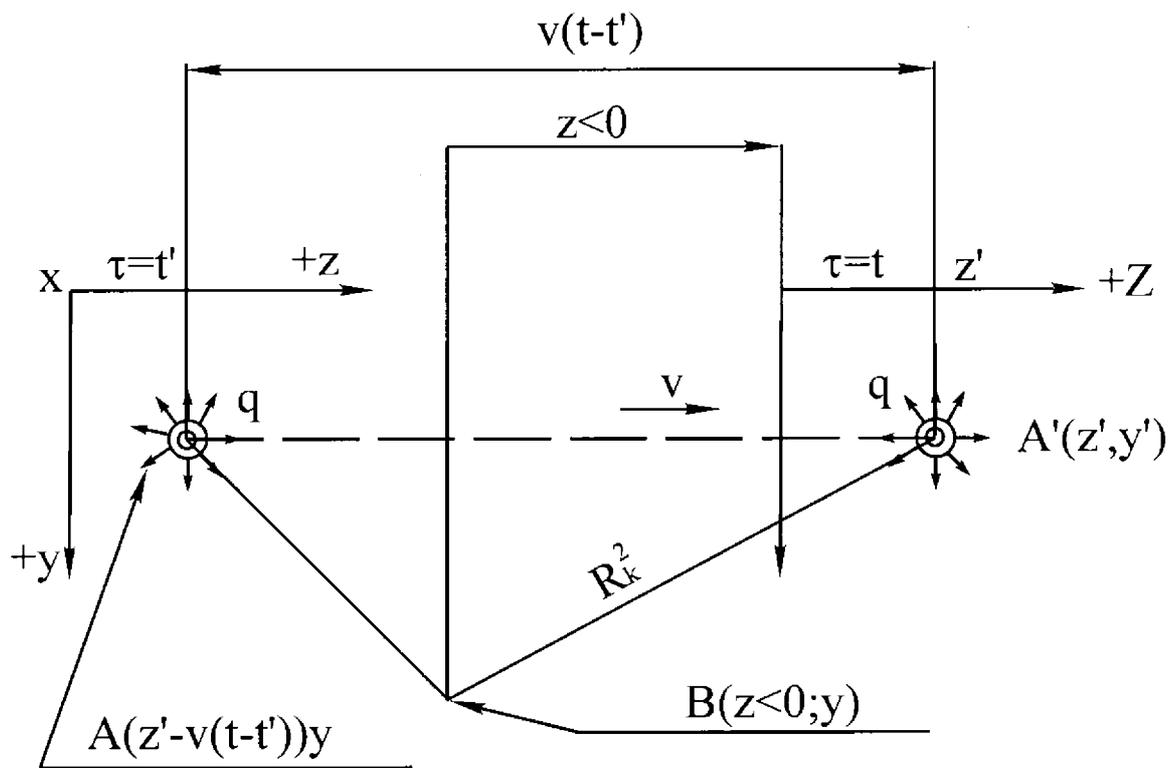


Рис.7. Схема движения точечного источника тепла

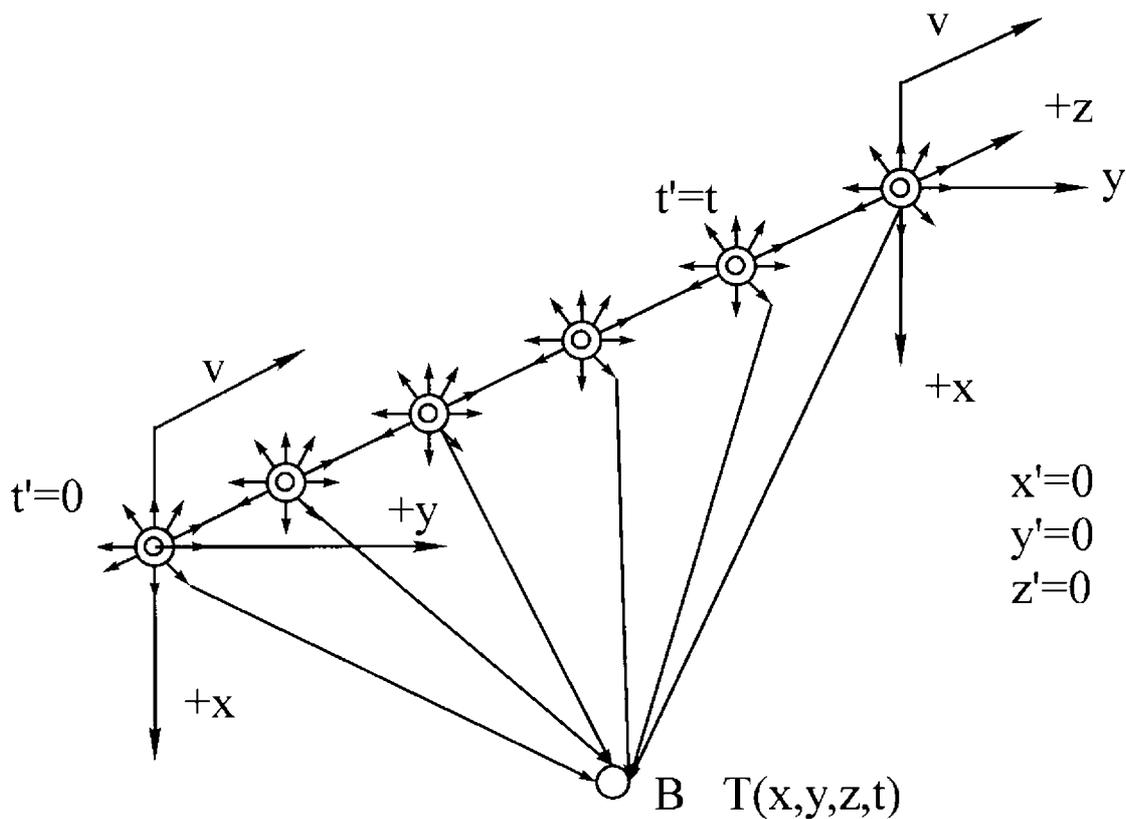


Рис.8. Расчетная схема

занимает положение в точке $A(z' - V(t - t'); y')$, в конечный момент времени - в точке $A'(z'; y')$. Оси координат вместе с источником переместились на расстояние $l = V(t - t')$. Температура в точке $B(z, y)$ равна суперпозиции от всех положений движущегося теплового источника. В формулу Грина входит квадрат расстояния R^2 . Этот параметр по мере перемещения осей координат изменяется. В конечном положении осей координат (для $\tau = t$) в точке $A'(z'; y')$

$$R_k^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2,$$

а в начальном положении осей координат в точке $A(z' - V(t - t'), y')$

$$R_H^2 = (z - z' + V(t - t'))^2 + (y - y')^2.$$

Если источник подействовал в начале координат $x' = y' = z' = 0$ в момент времени $t' = 0$ (мгновенный источник), то температура в точке B (рис. 7) в подвижных осях координат в момент времени $t = t'$ определится из выражения

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + [z - z' + Vt]^2}{4at}\right\} = & (30) \\ &= \frac{Q}{C\gamma(4\pi at)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + (z + Vt)^2}{4at}\right\}. \end{aligned}$$

Задача 1. В интервале времени от $t' = 0$ до $t = t'$ в положительном направлении оси Z движется тепловой источник мощностью Q (рис. 8). По данным А.Н. Резникова [7], это движение можно моделировать по аналогии с кажущимся движением последовательно загорающихся ламп в гирлянде иллюминации.

Температура в точке В для данных условий определяется суперпозицией всех промежуточных положений тепловых источников

$$T(x,y,z,t) = \int_0^t \frac{Qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + [z + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\}. \quad (31)$$

Задача 2. Точечный источник мощностью q движется по поверхности адиабатической стенки $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$. Теплообмен на поверхности отсутствует. В этом случае, как указывалось ранее, мощность теплового источника удваивается. Температура в точке (рис. 8) определяется суперпозицией всех промежуточных положений тепловых источников

$$T(x,y,z,t) = \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + [z + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\}. \quad (32)$$

Задача 3. Задана система подвижных тепловых источников, распределенных в объеме сферической поверхности радиусом R (рис. 9). Источники действуют непрерывно в интервале времени от $t'=0$ до $t=t'$. Сферическая поверхность перемещается в направлении оси Z со скоростью V . Требуется найти температуру в точке $B(x,y,z)$ в момент времени t .

Температура в точке $B(x,y,z)$ определяется суперпозицией как в пространстве, так и во времени всех источников. Причем координата z точки $B(x,y,z)$ отсчитывается в конечном положении подвижных осей координат $XYZO$. Координаты x и y не зависят от

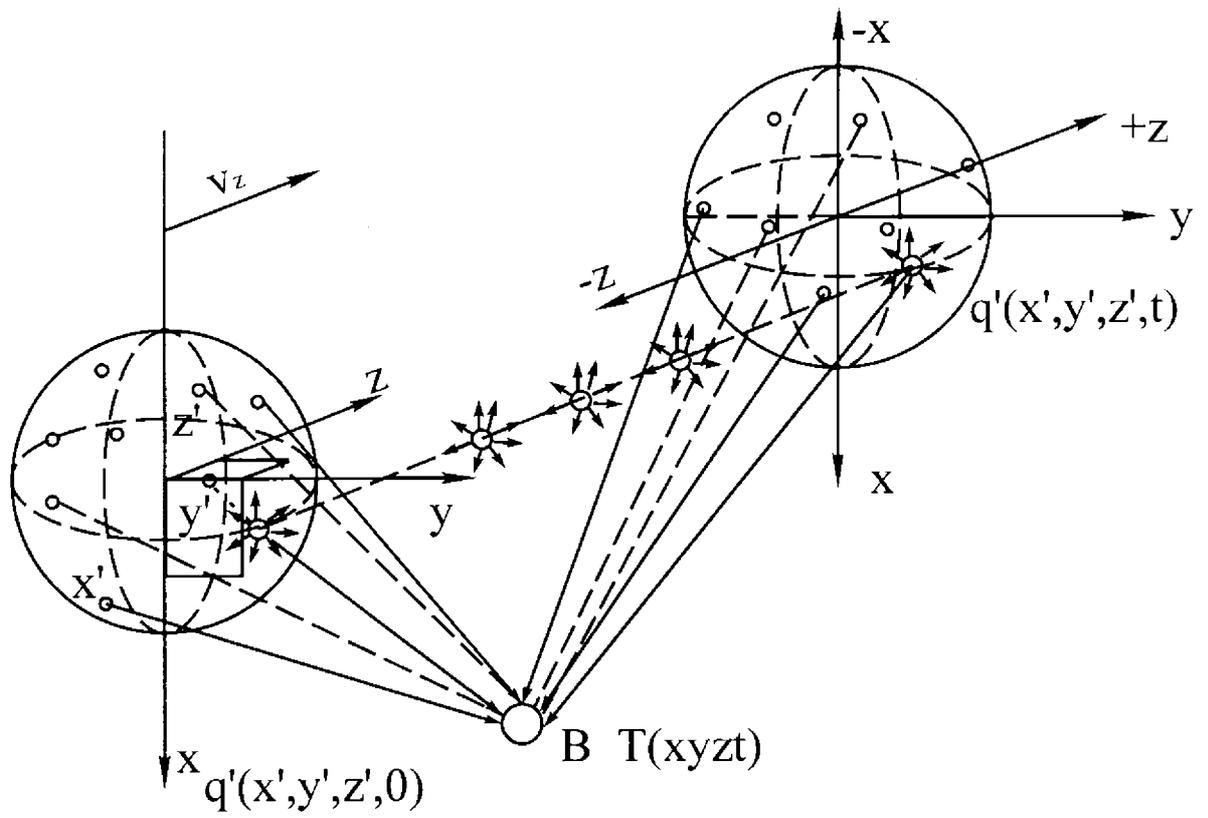


Рис.9. Расчетная схема

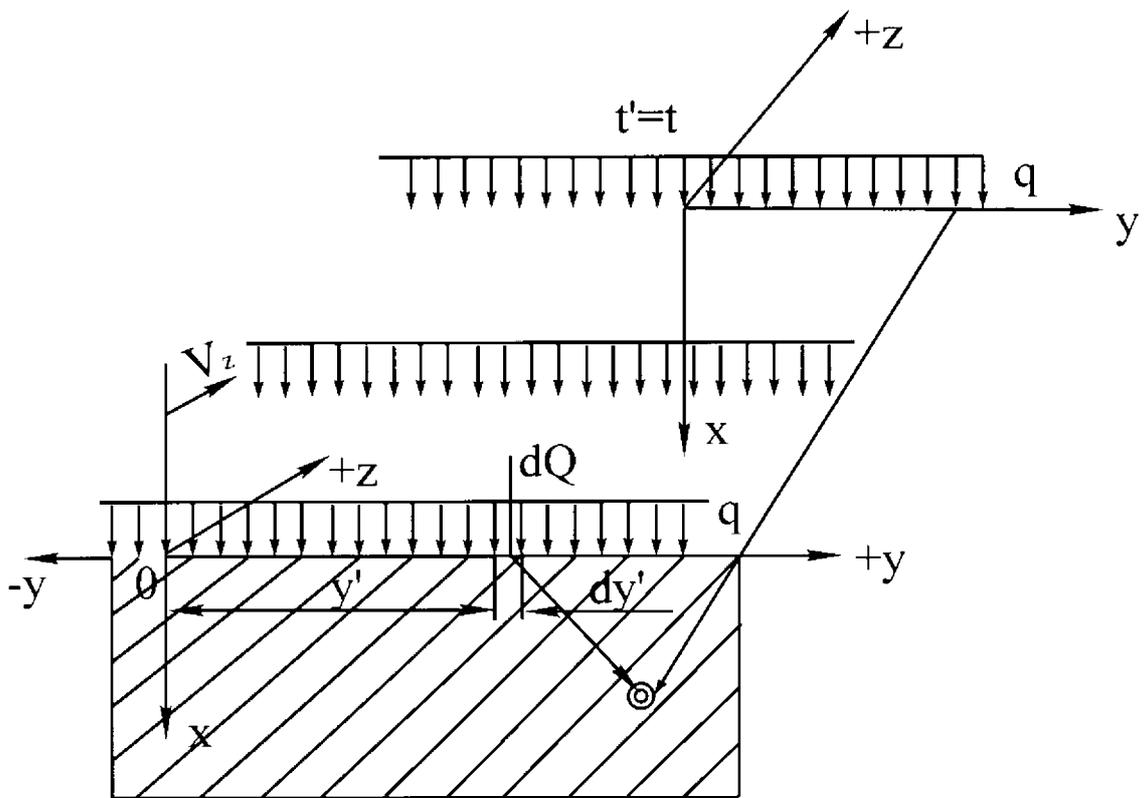


Рис.10. Схема движения бесконечного линейного источника тепла

положения подвижных осей. Температура в точке $B(x, y, z)$ определяется из выражения

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t dt' \int_{-R}^R dx' \int_{-\sqrt{R^2 - (x')^2}}^{\sqrt{R^2 - (x')^2}} dy' \int_{-\sqrt{R^2 - (x')^2 - (y')^2}}^{\sqrt{R^2 - (x')^2 - (y')^2}} dz' \frac{Q}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} * \exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z' + V(t-t'))^2}{4a(t-t')}\right\} \quad (33)$$

Рассмотрим интегрирование функции Грина в следующих задачах.

Задача 4. По поверхности твердого теплопроводящего пространства в положительном направлении оси Z движется постоянно действующий источник тепла мощностью q . На поверхности отсутствует теплообмен ($\alpha = 0$). Функция, описывающая температурное поле от такого источника, имеет вид

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{2q dt'}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + [z + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\}. \quad (34)$$

Требуется вычислить интеграл в формуле (34). Представим (34) в виде

$$T = \int_0^t \frac{2q}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2zV(t-t') + V^2(t-t')^2}{4a(t-t')}\right\} dt' \quad (35)$$

или

$$T = \int_0^t \frac{2q}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{R^2 + 2zV(t-t') + V^2(t-t')^2}{4a(t-t')}\right\} dt',$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Формулу можно записать

$$T = \exp\left\{-\frac{Vz}{2a}\right\} \int_0^t \frac{2q}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\left[\frac{R^2}{4a(t-t')} + \frac{V^2}{4a}(t-t')\right]\right\} dt'.$$

Произвести замену переменной $t' \rightarrow \xi$

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{R^2}{4a(t-t')}; & 2\xi d\xi &= \frac{R^2}{4a} \frac{dt'}{(t-t')^2}; \\ t-t' &= \frac{R^2}{4a\xi^2}; & dt' &= \frac{R^2}{2a\xi^3} d\xi; \\ \xi_H &= \frac{R}{\sqrt{4at}}; & \xi_B &= \frac{R}{\sqrt{4a(t-t')}} = \infty. \end{aligned}$$

Отсюда

$$T = \exp\left\{-\frac{Vz}{2a}\right\} \int_{R/\sqrt{4at}}^{\infty} \frac{2q}{C\gamma \left[\frac{4\pi a R^2}{4a\xi^2}\right]^{3/2}} \exp\left\{-\left[\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{4a \cdot 4a\xi^2}\right]\right\} \frac{R^2}{2a\xi^3} d\xi.$$

Учитывая, что $\lambda = C\gamma a$, получим

$$T = \exp\left\{-\frac{Vz}{2a}\right\} \int_{R/\sqrt{4at}}^{\infty} \frac{q}{\lambda R \pi^{3/2}} \exp\left\{-\left[\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2}\right]\right\} d\xi. \quad (36)$$

Если источник движется достаточно долго, то процесс устанавливается; температурное поле в системе координат, связанной с источником, становится квазистационарным, не зависящим от времени. Поэтому, подставив в (35) $t \rightarrow \infty$, получим выражение, описывающее квазистационарный процесс

$$T = \exp\left\{-\frac{Vz}{2a}\right\} \int_0^{\infty} \frac{q}{\lambda R \pi^{3/2}} \exp\left\{-\left[\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2}\right]\right\} d\xi.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2}\right]\right\} d\xi &= \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi^2 - 2\xi \frac{VR}{4a\xi} + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + 2\xi \frac{VR}{4a\xi}\right]\right\} d\xi = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi - \frac{VR}{4a\xi}\right]^2 - \frac{1}{2} \frac{VR}{a}\right\} d\xi = \\ &= \exp\left(-\frac{VR}{2a}\right) \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi - \frac{VR}{4a\xi}\right]^2\right\} d\xi. \end{aligned}$$

Производим замену переменной $\xi \rightarrow U$; $U = -\frac{VR}{4a\xi}$; $U_H = -\infty$, $U_B = 0$;

$$dU = \frac{VR}{4a} \frac{d\xi}{\xi^2}; \quad \xi^2 = \frac{V^2 R^2}{16a^2 U^2}; \quad d\xi = \frac{4a}{VR} \xi^2 dU;$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi - \frac{VR}{4a\xi}\right]^2\right\} d\xi &= \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\left[-\frac{VR}{4aU} + U\right]^2\right\} \frac{4a}{VR} \frac{V^2 R^2}{16a^2 U^2} dU = \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\left[-\frac{VR}{4aU} + U\right]^2\right\} \frac{VR}{4aU^2} dU. \end{aligned}$$

Замена $U \rightarrow -v$ дает $dU = -dv$; $v_H = +\infty$; $v_B = 0$, получим

$$\begin{aligned} - \int_{+\infty}^0 \exp\left\{-\left[\frac{VR}{4av} - v\right]^2\right\} \frac{VR}{4av^2} dv &= \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{VR}{4av} - v\right]^2\right\} \left(\frac{VR}{4av^2} + 1 - 1\right) dv = \\ &= - \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{VR}{4av} - v\right]^2\right\} dv + \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{VR}{4av} - v\right]^2\right\} \left(\frac{VR}{4av^2} + 1\right) dv. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi - \frac{VR}{4a\xi}\right]^2\right\} d\xi = -\int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{VR}{4av} - v\right]^2\right\} dv + \\ + \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{VR}{4av} - v\right]^2\right\} \left(\frac{VR}{4av^2} + 1\right) dv.$$

Первый интеграл в правой части отличается от вычисляемого только знаком, поэтому

$$2 \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi - \frac{VR}{4a\xi}\right]^2\right\} d\xi = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{VR}{4av} - v\right]^2\right\} \left(1 - \frac{VR}{4av^2}\right) dv.$$

И, наконец, производя замену, получим

$$v - \frac{VR}{4av} = \kappa; \quad d\kappa = \left(1 + \frac{VR}{4av^2}\right) dv; \quad \kappa_H = -\infty; \quad \kappa_B = +\infty;$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[\xi - \frac{VR}{4a\xi}\right]^2\right\} d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\kappa^2] d\kappa = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Решение задачи имеет вид

$$T = \exp\left\{-\left[\frac{Vz}{2a} + \frac{VR}{2a}\right]\right\} \frac{q\sqrt{\pi}}{2\lambda R\pi^{3/2}} = \frac{q}{2\pi\lambda R} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z + R)\right\}. \quad (37)$$

Решим еще дополнительную задачу на бесконечно длинный линейный источник.

Задача 5. Задан бесконечно длинный линейный источник, совпадающий с осью Y , т.е. $x' = 0$; $z' = 0$. Пусть рассматриваемый источник движется в положительном направлении оси Z со скоростью V . Интенсивность теплового источника характеризуется линейной плотностью теплового потока $-q$. Пусть такой источник

действует в течение времени t (рис. 10). Необходимо найти температурное поле.

Тогда элементарный источник $dQ = qdy'$.

Функция Грина запишется таким образом:

$$dT(x, y, z, t) = \frac{2qdy'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 + [z + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\} dt'. \quad (38)$$

Требуется вычислить функцию (38)

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^t \frac{2q}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 + [z + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\} dt'. \quad (39)$$

Для вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(y-y')^2}{4a(t-t')}\right\} dy'$$

произведем замену переменных

$$\frac{y-y'}{\sqrt{4a(t-t')}} = \xi; \quad d\xi = -\frac{dy'}{\sqrt{4a(t-t')}};$$

$$\xi_H = \frac{y+\infty}{\sqrt{4a(t-t')}} = +\infty; \quad \xi_H = \frac{y-\infty}{\sqrt{4a(t-t')}} = -\infty;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\xi^2\} \sqrt{4a(t-t')} d\xi = \sqrt{4\pi a(t-t')}.$$

Подставляя в формулу (39), получим

$$T = \int_0^t \frac{q}{C\gamma 2\pi a(t-t')} \exp\left\{-\frac{x^2 + [z + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\} dt'. \quad (40)$$

Представим решение в виде

$$T = \int_0^t \frac{q}{C\gamma 2\pi a(t-t')} \exp\left\{-\frac{x^2 + z^2 + 2Vz(t-t') + V^2(t-t')^2}{4a(t-t')}\right\} dt' =$$

$$= \exp\left\{-\frac{Vz}{2a}\right\} \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')} \exp\left\{-\left[\frac{r^2}{4a(t-t')} + \frac{V^2(t-t')}{4a}\right]\right\},$$

где $r^2 = x^2 + z^2$.

Заменяем переменную $\frac{r^2}{4a(t-t')} = \xi; \quad \xi_H = \frac{r^2}{4a}; \quad \xi_B = +\infty;$

$$d\xi = \frac{r^2}{4a} \frac{dt'}{(t-t')^2}; \quad t-t' = \frac{r^2}{4a\xi}; \quad d\xi = \frac{r^2}{4a} \frac{16a^2 \xi^2}{r^4} \frac{dt'}{dt} = \frac{4a\xi^2}{r^2} dt';$$

$$dt' = \frac{r^2}{4a\xi^2} d\xi.$$

Получим

$$\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')} \exp\left\{-\left[\frac{r^2}{4a(t-t')} + \frac{V^2(t-t')}{4a}\right]\right\} = \int_{r^2/4at}^{\infty} \frac{r^2}{4a\xi^2} \frac{4a\xi}{r^2} d\xi \exp\left\{-\left[\xi + \frac{V^2 r^2}{4a4a\xi}\right]\right\} =$$

$$= \int_{r^2/4at}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \exp\left\{-\left[\xi + \frac{V^2 r^2}{16a^2\xi}\right]\right\}.$$

Для состояния теплового насыщения $t \rightarrow \infty$ получим

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \exp\left\{-\left[\xi + \frac{V^2 r^2}{16a^2\xi}\right]\right\}.$$

Осуществим замену переменной

$$\frac{V^2 r^2}{4a^2} \eta^2 = \xi; \quad d\xi = \frac{V^2 r^2}{2a^2} \eta d\eta; \quad \eta_H = 0; \quad \eta_B = \infty;$$

Получим

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \exp\left\{-\left[\xi + \frac{V^2 r^2}{16a^2 \xi}\right]\right\} = \int_0^{\infty} \frac{V^2 r^2}{2a^2} \eta d\eta \frac{4a^2}{V^2 r^2 \eta^2} * \\ * \exp\left\{-\left[\frac{V^2 r^2}{4a^2} \eta^2 + \frac{V^2 r^2 4a^2}{16a^2 V^2 r^2 \eta^2}\right]\right\} = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta} \exp\left\{-\left[\frac{V^2 r^2}{4a^2} \eta^2 + \frac{1}{4\eta^2}\right]\right\}.$$

Из теории цилиндрических функций [4] известно интегральное представление модифицированной функции Бесселя второго рода нулевого порядка:

$$K_0(m) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \exp\left\{-\left[m^2 z^2 + \frac{1}{4z^2}\right]\right\}.$$

В нашем случае $m = Vr/2a$ получим

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \exp\left\{-\left[\xi + \frac{V^2 r^2}{16a^2 \xi}\right]\right\} = 2K_0\left(\frac{V}{2a} \sqrt{x^2 + z^2}\right).$$

Окончательно

$$T = \frac{q}{\pi\lambda} \exp\left\{-\frac{Vz}{2a}\right\} K_0\left(\frac{Vr}{2a}\right). \quad (41)$$

Приведенные в задачах 4 и 5 интегралы используются в дальнейших выводах.

2.4. Плоское шлифование с охлаждением

Необходимо решить следующую задачу.

По поверхности полубесконечного тела, на которой задан теплообмен, по закону Ньютона в положительном направлении оси Z с постоянной скоростью V движется бесконечно

протяженный вдоль оси Y полосовой источник шириной $2h$. Плотность теплового потока q по всей площади источника распределена равномерно. Температуру окружающей среды примем равной 0 . Математически задача формулируется так. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (42)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} T|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0; \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + \alpha T \Big|_{x=0} = 0; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q. \end{aligned} \quad (43)$$

Решение будем искать методом источников. Решением уравнения теплопроводности с краевыми условиями (43) для неподвижного точечного источника, т.е. $V=0$, действующего на поверхности теплопроводящей среды с момента времени $t'=0$ до $t'=t$, описывается формулой (28).

Чтобы удовлетворить уравнению (42), необходимо учесть движение среды относительно источника и связанной с ним системой координат. Для этого в решении (28) вместо z' запишем $z' - V(t - t')$. Кроме того, источник тепла рассредоточен по бесконечной полосе. Поэтому введем в решение задачи величину элементарного мгновенного количества тепла, выделяющегося в данной точке

$$dQ = q dy' dz' dt' .$$

Схема представлена на рис. 11. Температурное поле будет представлено суперпозицией как в пространстве, так и во времени всех элементарных точечных источников $2dQ$, действующих на плоскости $x=0$ в течение времени от $t'=0$ до $t'=t$, плюс суперпозиция всех отрицательных $2dQ'$ стоков, построенных для каждого из элементарных источников $2dQ$. Таким образом, формула для элементарного источника $2dQ$ имеет вид

$$dT = \frac{2qdz'dy'dt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 + [z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\} -$$

$$- 2\frac{\alpha}{\lambda} qdz'dy'dt' \int_0^{\infty} \frac{1}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x+x')^2}{4a(t-t')} - \frac{(y-y')^2 + [z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\} - \frac{\alpha}{\lambda} x' \Bigg\} dx'. \quad (44)$$

Первое слагаемое (44) описывает действие элементарного источника $2dQ$ в точке (A), $(x'=0)$ (рис. 11). Второе слагаемое учитывает действие всех отрицательных стоков, размещенных на луче AD. Учитывая, что источники распределены по полосе и, кроме того, движутся, причем t' изменяются от 0 до t , z' от $-h$ до $+h$, а y' от $-\infty$ до $+\infty$, получим формулу суперпозиции

$$T(x, y, z, t) = \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2}{4a(t-t')} - \frac{[z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\} - \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} *$$

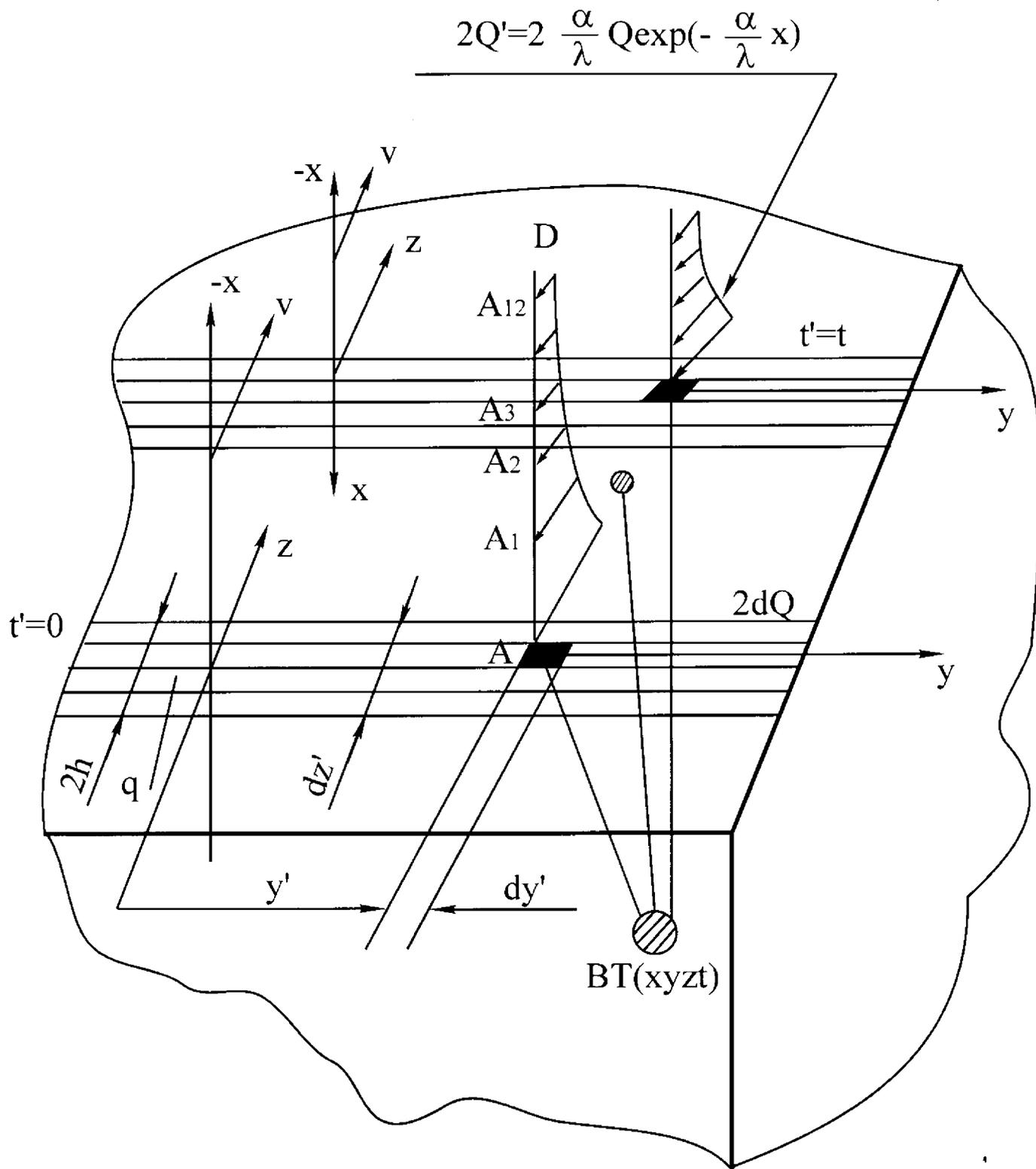


Рис.11. Расчетная схема плоского шлифования с охлаждением

$$* \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{(x+x')^2 + (y-y')^2 + [z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} - \frac{\alpha}{\lambda} x' \right\} dx'. \quad (45)$$

Необходимо учесть, что при шлифовании температурное поле быстро становится квазистационарным, поэтому верхний предел интегрирования t будем приравнивать бесконечности. Вычислим интеграл в формуле (45). Преобразуем второе слагаемое

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{x^2 + 2xx' + (x')^2 + (y-y')^2}{4a(t-t')} - \right. \\ & \left. - \frac{[z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} - \frac{\alpha}{\lambda} x' \right\} dx' = \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{x^2}{4a(t-t')} - \right. \\ & \left. - \frac{(y-y')^2 + [z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} \right\} \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{(x')^2 + 2xx' - \frac{\alpha}{\lambda} x'}{4a(t-t')} \right\} dx'. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по x'

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{(x')^2 + 2xx' - \frac{\alpha}{\lambda} x'}{4a(t-t')} \right\} dx' = \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{(x')^2 + 2xx' + 4\frac{\alpha}{\lambda} x' a(t-t')}{4a(t-t')} \right\} dx' = \\ & = \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{(x')^2 + 2x' \left[x + 2\frac{\alpha}{\lambda} a(t-t') \right]^2 + \left[x + 2\frac{\alpha}{\lambda} a(t-t') \right]^2 - \left[x + 2\frac{\alpha}{\lambda} a(t-t') \right]^2}{4a(t-t')} \right\} dx' = \\ & = \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{\left[x' + x + 2\frac{\alpha}{\lambda} a(t-t') \right]^2}{4a(t-t')} \right\} \exp \left\{ \frac{\left[x + 2\frac{\alpha}{\lambda} a(t-t') \right]^2}{4a(t-t')} \right\} dx' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right]^2 \int_0^\infty \exp \left\{ - \frac{\left[x' + x + 2\frac{\alpha}{\lambda}(t-t') \right]^2}{4a(t-t')} \right\} dx' = \\
&= \exp \left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right]^2 \int_0^\infty \exp \left\{ - \left(\frac{x'}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right)^2 \right\} dx'.
\end{aligned}$$

В полученном выражении комплекс $\frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')}$ не зависит от переменной интегрирования x' . Обозначив его

$$- \frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} = U,$$

получим

$$\exp U^2 \int_0^\infty \exp \left\{ - \left(\frac{x'}{2\sqrt{a(t-t')}} + U \right)^2 \right\} dx'.$$

Произведя замену переменной

$$\frac{x'}{2\sqrt{a(t-t')}} + U = \xi; \quad \xi_{\text{H}} = U; \quad \xi_{\text{B}} = \infty; \quad dx' = 2\sqrt{a(t-t')} d\xi,$$

получим

$$\begin{aligned}
\exp U^2 \int_0^\infty \exp \left\{ - \left(\frac{x'}{2\sqrt{a(t-t')}} + U \right)^2 \right\} dx' &= \exp U^2 \int_U^\infty \exp \left\{ - \xi^2 \right\} 2\sqrt{a(t-t')} d\xi = \\
&= \exp U^2 2\sqrt{a(t-t')} \int_U^\infty \exp \left\{ - \xi^2 \right\} d\xi;
\end{aligned}$$

НО

$$\int_U^{\infty} \exp\{-\xi^2\} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} U,$$

получим

$$\exp U^2 \sqrt{\pi a(t-t')} \operatorname{erfc} U.$$

Тогда (45) запишется в виде

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = & \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} * \\ & * \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 + [z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')}\right\} * \\ & * \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\pi a(t-t')} \operatorname{erfc} U \cdot \exp U^2\right). \end{aligned} \quad (46)$$

Если в (46) принять $\alpha=0$, то получим задачу на нагрев без теплообмена. Таким образом, множитель в скобках характеризует влияние теплообмена. Осуществим интегрирование по времени формулы (46). В (46) первое слагаемое на учитывает теплообмена

$$\begin{aligned} T_1 = & \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{\infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}\right. \\ & \left. - \frac{2V(z-z')(t-t') + V^2(t-t')^2}{4a(t-t')}\right\}. \end{aligned}$$

Обозначив $R^2 = x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$, получим

$$T_1 = \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{R^2}{4a(t-t')} + \frac{V(z-z')}{2a} + \frac{V^2(t-t')}{4a}\right)\right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-h}^{+h} \exp\left\{-\frac{V(z-z')}{2a}\right\} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{R^2}{4a(t-t')} + \frac{V^2(t-t')}{4a}\right)\right\} = \\
&= \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{R^2}{4a(t-t')} + \frac{V^2(t-t')}{4a}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Интеграл

$$\int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{R^2}{4a(t-t')} + \frac{V^2(t-t')}{4a}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{VR}{2a}\right\} \frac{q}{2\pi\lambda R}$$

вычисляется в задаче 4.

Получим

$$T_1 = \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\pi\lambda R} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z'+R)\right\} dy', \quad (47)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Слагаемое, учитывающее теплообмен

$$\begin{aligned}
T_2 &= -\frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + (y-y')^2 - (z-z')^2}{4a(t-t')} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2V(z-z')(t-t') + V^2(t-t')^2}{4a(t-t')}\right\} \sqrt{\pi a(t-t')} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')}\right) * \\
&\quad * \exp\left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')}\right)^2 = -\frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} * \\
&\quad \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{R^2 + V^2(t-t')^2}{4a(t-t')}\right\} \sqrt{\pi a(t-t')} \exp\left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t')}} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \Big)^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right);$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} \exp \left\{ -\frac{V}{2a}(z-z') \right\} \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2q dt'}{C\gamma 8\pi a(t-t')} \exp \left\{ -\left(\frac{R^2}{4a(t-t')} + \frac{V^2(t-t')}{4a} \right) \right\}^*$$

$$\exp \left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right)^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right) =$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} \exp \left\{ -\frac{V}{2a}(z-z') \right\} \frac{q}{C\gamma 4\pi a} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')} \exp \left\{ -\frac{R^2}{4a(t-t')} - \frac{V^2(t-t')}{4a} + \frac{x^2}{4a(t-t')} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{x}{\sqrt{4a(t-t')}} \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} + \frac{\alpha^2 a(t-t')}{\lambda^2} \right\} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right).$$

Обозначив $R^2 = x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = x^2 + r^2$, получим

$$\frac{\alpha}{\lambda} \exp \left\{ -\frac{V}{2a}(z-z') \right\} \frac{q}{C\gamma 4\pi a} \int_0^t \frac{dt'}{t-t'} \exp \left\{ -\frac{x^2 + r^2}{4a(t-t')} - \frac{V^2(t-t')}{4a} + \frac{x^2}{4a(t-t')} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + x \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} a(t-t') \left\} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right) = \frac{\alpha}{\lambda} \exp \left\{ -\frac{V}{2a}(z-z') + x \frac{\alpha}{\lambda} \right\} * \\
& * \frac{q}{C\gamma 4\pi a} \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{dt'}{t-t'} \exp \left\{ - \left[\frac{r^2}{4a(t-t')} + (t-t') \left(\frac{V^2}{4a} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} a \right) \right] \right\} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t')}} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right).
\end{aligned}$$

Предлагаем читателям доказать следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{dt'}{(t-t')} \exp \left\{ - \left(\frac{r^2}{4a(t-t')} + (t-t') \left(\frac{V^2}{4a} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} a \right) \right) \right\} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t')}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a(t-t')} \right) = \\
& = 2 \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} \exp \left(-\frac{\alpha}{\lambda} \xi - \frac{V}{2a} \sqrt{\xi^2 + r^2} \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Окончательно получим, учитывая, что $\lambda = C\gamma a$

$$\frac{\alpha}{\lambda} \exp \left\{ -\frac{V}{2a}(z-z') + x \frac{\alpha}{\lambda} \right\} \frac{q}{2\pi\lambda} \int_x^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} \exp \left(-\frac{\alpha}{\lambda} \xi - \frac{V}{2a} \sqrt{\xi^2 + r^2} \right) d\xi,$$

где ξ - переменная интегрирования от x до ∞ .

Тогда

$$\begin{aligned}
T_2 = & -\frac{\alpha}{\lambda} \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \exp \left\{ -\frac{V(z-z')}{2a} + \frac{\alpha}{\lambda} x \right\} \int_x^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} * \\
& * \exp \left(-\frac{\alpha}{\lambda} \xi - \frac{V}{2a} \sqrt{\xi^2 + r^2} \right). \tag{48}
\end{aligned}$$

Подставляя (47) и (48) в (46), получим

$$\begin{aligned}
T(x, y, z) = & \int_{-h}^{+h} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q dy'}{2\pi\lambda R} \exp \left\{ -\frac{V}{2a}(Z-Z' + R) \right\} - \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} \frac{q}{2\pi\lambda} * \\
& * \exp \left\{ \frac{V(z-z')}{2a} + \frac{\alpha}{\lambda} x \right\} \left\{ \int_x^{\infty} \exp \left(-\frac{\alpha}{\lambda} \xi \right) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} * \right. \right.
\end{aligned}$$

$$* \exp \left\{ -\frac{V}{2a} \sqrt{\xi^2 + r^2} \right\} dy' \left. \right\} d\xi \left. \right\} dz',$$

где $R^2 = x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, $r^2 = (y - y')^2 + (z - z')^2$, ИЛИ, подставляя R^2 и r^2 , получим

$$\begin{aligned} T(x, y, z) = & \int_{-h}^{+h} \exp \left\{ -\frac{V}{2a} (z - z') \right\} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\pi\lambda \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} * \right. \\ & * \exp \left\{ -\frac{V}{2a} \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right\} dy' \left. \right] dz' - \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} \frac{q}{2\pi\lambda} \exp \left[-\frac{V(z - z')}{2a} + \frac{\alpha}{\lambda} x \right] * \\ & \left. \left\{ \int_x^{\infty} \exp \left(-\frac{\alpha}{\lambda} \xi \right) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{V}{2a} \sqrt{\xi^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right\}}{\sqrt{\xi^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dy' \right] d\xi \right\} dz'. \quad (49) \end{aligned}$$

Интегрируя по y' и делая замену $y' \rightarrow \eta$

$$\eta = (y - y') + \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

в первом слагаемом и

$$\eta = (y - y') + \sqrt{\xi^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

во втором, получим

$$\begin{aligned} d\eta &= -dy' - \frac{2(y - y')dy'}{2\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}; \\ d\eta &= -\frac{dy' \left[(y - y') + \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right]}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}; \\ d\eta &= -dy' \frac{\eta}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$-\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dy'}{\sqrt{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}};$$

$$\eta_H = y + \infty = \infty;$$

$$\eta_B = y - \infty = -\infty.$$

Выразим $y - y'$ через η , для этого возведем в квадрат левую и правую части

$$\eta - (y - y') = \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2};$$

$$\eta^2 - 2\eta(y - y') + (y - y')^2 = x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

$$y - y' = \frac{\eta^2 - [x^2 + (z - z')^2]}{2\eta}.$$

Подставляя в (49), получим

$$\begin{aligned} T(x, y, z) = & \int_{-h}^{+h} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z - z')\right\} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{q}{2\pi\lambda} \left(-\frac{d\eta}{\eta}\right) \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} * \\ & * \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(\eta - (y - y'))\right\} dz' - \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^h \frac{q}{2\pi\lambda} * \\ & * \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z - z') + \frac{\alpha}{\lambda}x\right\} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\xi\right) \left[\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{V}{2a}(\eta - (y - y'))\right\}}{\sqrt{\xi^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \left(-\frac{d\eta}{\eta}\right) \right] * \\ & * \sqrt{\xi^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} d\xi dz'. \end{aligned}$$

Отсюда, подставляя

$$y - y' = \frac{\eta^2 - [x^2 + (z - z')^2]}{2\eta},$$

имеем

$$T(x, y, z) = \int_{-h}^{+h} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\pi\lambda} \left(-\frac{d\eta}{\eta}\right) \exp\left\{-\frac{V}{2a}\left(\eta + \frac{x^2 + (z-z')^2}{\eta}\right)\right\} dz' -$$

$$-\frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} \frac{q}{2\pi\lambda} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z') + \frac{\alpha}{\lambda}x\right\} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\xi\right) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \right.$$

$$\left. \exp\left\{-\frac{V}{4a}\left(\eta + \frac{\xi^2 + (z-z')^2}{\eta}\right)\right\} \right] d\xi dz'.$$

Преобразуем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \exp\left\{-\frac{V}{4a}\left(\eta + \frac{x^2 + (z-z')^2}{\eta}\right)\right\}.$$

Из теории цилиндрических функций известно следующее интегральное представление модифицированной функции Бесселя второго рода мнимого аргумента [4].

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\tau + \frac{z^2}{4\tau}\right)\right\} \frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}},$$

для $\nu=0$ получим

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\tau + \frac{z^2}{4\tau}\right)\right\} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Тогда интеграл запишется так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \exp\left\{-\frac{V}{4a}\left(\eta + \frac{x^2 + (z-z')^2}{\eta}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \exp\left\{-\left(\frac{V\eta}{4a} + \frac{x^2 + (z-z')^2}{\eta} \frac{V}{4a}\right)\right\}.$$

Наконец, делая замену

$$\frac{V\eta}{4a} = \xi; \quad \xi_H = -\infty; \quad \xi_B = +\infty; \quad d\xi = \frac{V}{4a} d\eta; \quad \frac{1}{\eta} = \frac{V}{4a} \frac{1}{\xi},$$

получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \exp\left\{-\frac{V}{4a}\left(\eta + \frac{x^2 + (z-z')^2}{\eta}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4a}{V} d\xi \frac{V}{4a\xi} \exp\left\{-\left(\xi + \frac{x^2 + (z-z')^2}{4\xi}\right) \frac{V^2}{4a^2}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi} \exp\left\{-\left(\xi + \frac{z^2}{4\xi}\right)\right\} = 2K_0(z) = 2K_0\left(\frac{V}{2a}\sqrt{x^2 + (z-z')^2}\right).$$

Окончательное решение поставленной задачи, как видно, не зависит от y

$$T(x, z) = \int_{-h}^{+h} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} \frac{q}{\pi\lambda} K_0\left(\frac{V}{2a}\sqrt{x^2 + (z-z')^2}\right) dz' - \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-h}^{+h} \frac{q}{\pi\lambda} *$$

$$* \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z') + \frac{\alpha}{\lambda}x\right\} \left[\int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\xi\right) K_0\left(\frac{V}{2a}\sqrt{\xi^2 + (z-z')^2}\right) d\xi \right] dz'. \quad (50)$$

В этой формуле z и x - константы координаты точек в подвижных осях. Для того, чтобы воспользоваться полученным решением, в формулу необходимо подставить численные значения координаты точки В. Первое слагаемое формулы - определенный интеграл по переменной z' , которая меняется в пределах от $-h$ до $+h$. Второе слагаемое - двойной интеграл. Сначала вычисляем внутренний несобственный интеграл по переменной ξ , причем нижняя граница интегрирования - это координата точки В - x . Переменная z' при этом постоянная. Расчеты на ЭВМ показали быструю сходимость данного интеграла. Затем вычисляется наружный определенный интеграл по переменной z' . Сходимость интегралов обоснована в [1].

Удобно использовать полученное решение не в абсолютных, а в относительных координатах. Введем безразмерные комплексы

$$\Psi = \frac{V(z-z')}{2a}; \quad \frac{Vz}{2a} = Z; \quad \frac{Vx}{2a} = X; \quad \frac{Vh}{2a} = H.$$

Тогда

$$d\Psi = -\frac{V}{2a} dz'; \quad dz' = -\frac{2a}{V} d\Psi;$$

$$\Psi_H = \frac{V(z+h)}{2a} = \frac{Vz}{2a} + \frac{Vh}{2a} = Z + H;$$

$$\Psi_B = \frac{V(z-h)}{2a} = \frac{Vz}{2a} - \frac{Vh}{2a} = Z - H.$$

Подставляя безразмерные параметры в (50), получим

$$\begin{aligned} T(X, Z) = & \int_{Z+H}^{Z-H} \exp\{-\Psi\} \frac{q}{\pi\lambda} K_0 \left(\sqrt{\frac{V^2 x^2}{4a^2} + \frac{V^2}{4a^2} (z-z')^2} \right) \left(-\frac{2a}{V} \right) d\Psi - \\ & - \frac{\alpha}{\lambda} \int_{Z+H}^{Z-H} \frac{q}{\pi\lambda} \exp\left\{-\Psi + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{2a}{V} X\right\} \left[\int_X^\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda} \frac{2a}{V} \xi\right) K_0 \left(\sqrt{\frac{\xi^2 V^2}{4a^2} + \frac{V^2}{4a^2} (z-z')^2} \right) \right] * \\ & * \frac{2a}{V} d\xi \left[\left(-\frac{2a}{V} \right) d\Psi. \right. \end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле введены следующие комплексы:

$$\frac{V\xi}{2a} = \zeta; \quad d\zeta = \frac{V}{2a} d\xi; \quad \zeta_H = \frac{Vx}{2a} = X; \quad \zeta_B = \frac{V\infty}{2a} = \infty.$$

Окончательно в безразмерных координатах решение запишется таким образом:

$$T(X, Z) = \frac{2qa}{\pi\lambda V} \left[\int_{Z-H}^{Z+H} \exp\{-\Psi\} K_0 \left(\sqrt{X^2 + \Psi^2} \right) d\Psi - \frac{2a\alpha}{\lambda V} \exp\left(\frac{2a\alpha}{V\lambda} X\right) \int_{Z-H}^{Z+H} \exp\{-\Psi\} * \right.$$

$$* \left[\int_x^\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda} \frac{2a}{V} \zeta\right) K_0\left(\sqrt{\zeta^2 + \Psi^2}\right) d\zeta d\Psi \right]. \quad (51)$$

2.5. Шлифование тонких пластин

Если бесконечно удаленная плоскость приближена к плоскости, по которой движется источник тепла, то ее влияние на температуру становится существенным. Такой объект назовем тонкой пластиной.

Задача формулируется следующим образом. По поверхности бесконечной пластины толщиной d в положительном направлении оси Z (рис. 12) движется бесконечно длинный полосовой источник шириной $2h$ с постоянной скоростью V . Теплообмен на плоскостях $x=0$ и $x=d$ отсутствует. Плотность теплового потока $q = \text{const}$. Математическая постановка задачи сводится к решению уравнения (42) с начальными и граничными условиями.

$$T|_{t=0} = 0; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0, |z|<h} = q; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0, |z|<h} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d} = 0.$$

При решении данной, а также следующей задач на клин используется ранее сформулированное правило (см. (21)).

Если на граничной плоскости выполняется условие второго рода $\partial T / \partial x|_{x=0} = 0$, то для построения функции источника источник, удовлетворяющий как дифференциальному уравнению, так и указанному граничному условию, точечный источник, необходимо отобразить зеркально-симметрично относительно адиабатической

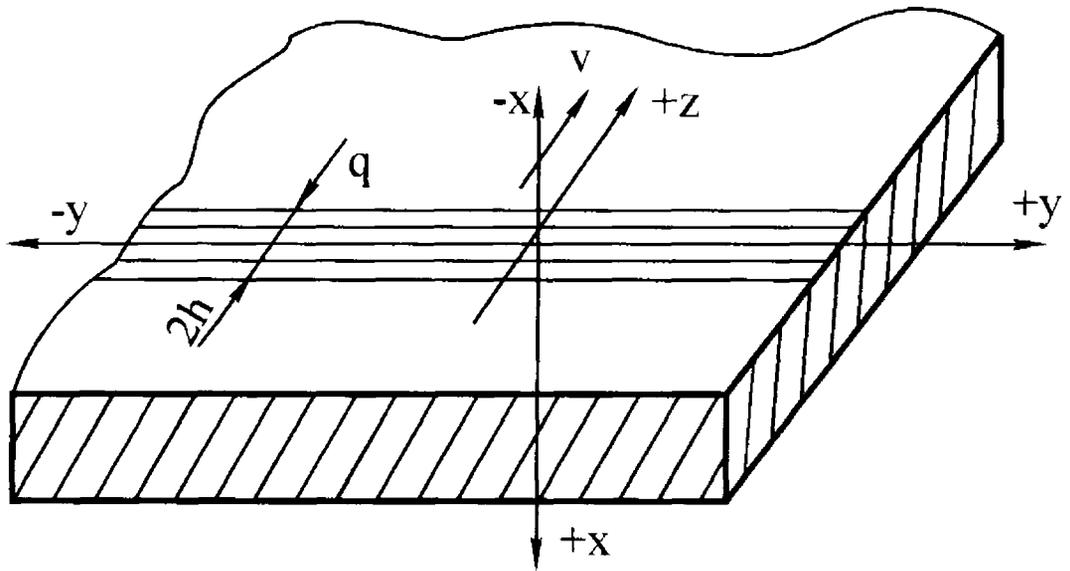


Рис.12. Расчетная схема шлифования тонкостенной пластины

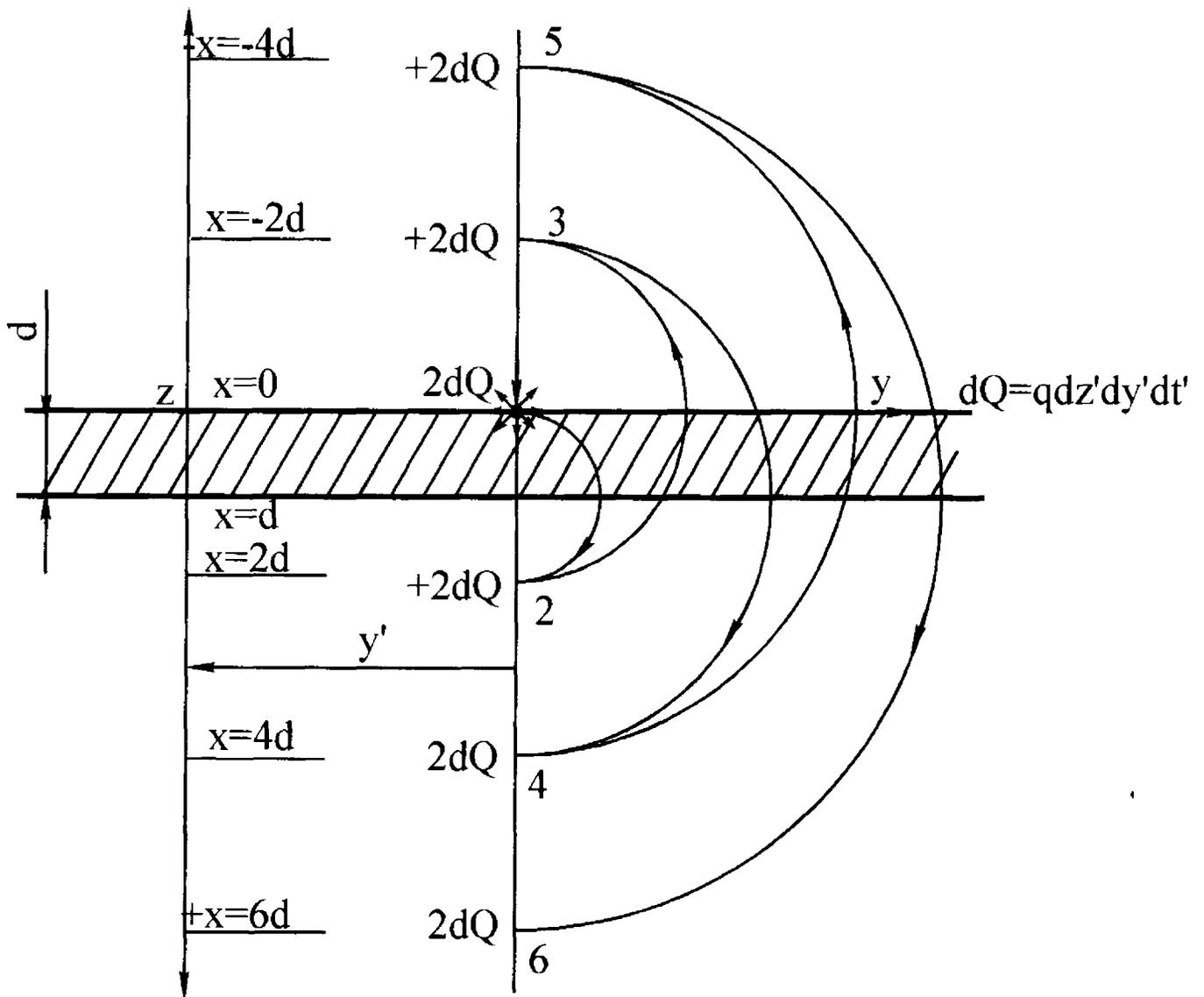


Рис.13. Схема отраженных источников

плоскости. Т.е. с противоположной стороны плоскости задать точечный источник такой же интенсивности, при этом считается, что среда с противоположной стороны стенки имеет такую же теплопроводимость, как и тело. Если источник q движется по поверхности адиабатической стенки, то отраженный источник совпадает с исходным, т.е. мощность источника удваивается.

Решение поставленной задачи ищем в системе координат, связанной с источником. При этом применяем метод источников плюс метод изображений. Схема построения приведена на рис. 13.

Сущность построения сводится к следующим действиям: пусть на плоскости ZOY ($x=0$) задан точечный движущийся источник dQ . В соответствии с упомянутым выше принципом для выполнения условия $\partial T / \partial x|_{x=0} = 0$ необходимо удвоить его мощность $2dQ$. Но необходимо одновременно обеспечить и выполнение условия $\partial T / \partial x = 0$ на плоскости $x=d$. Поэтому относительно плоскости $x=d$ строим зеркально-симметрично такой же источник $+2dQ$ (точка 2). Тогда условие $\partial T / \partial x|_{x=d} = 0$ выполняется. Однако источник в точке 2 ($x = -2d$) изменит граничное условие на плоскости $x=0$ (внесет искажение в условие $\partial T / \partial x|_{x=0} = 0$). В соответствии с правилом относительно плоскости $x=0$ строим отраженный источник ($x = -2d$), точка 3. Условие $\partial T / \partial x|_{x=0} = 0$ выполняется. Однако нарушается условие $\partial T / \partial x|_{x=d} = 0$. Как следует из рассуждений, таких отраженных источников необходимо построить бесконечное

множество, т.е. бесконечный ряд функций отраженных источников - есть суперпозиция поставленной задачи.

Для источника, находящегося на поверхности пластины $x' = 0$, координаты зеркально-отраженных источников выразятся в виде

$$x' = \pm 2nd; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Произведя суммирование по всем n , получим

$$dT = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2q(t')dy'dz'dt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-2dn)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}\right]. \quad (53)$$

Для определения температуры от бесконечного полосового движущегося источника интегрируем выражение (53) по y' в пределах $(-\infty, +\infty)$, по z' в интервале $(Vt' - h)$ и $(Vt' + h)$ и по времени от 0 до t

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t q(t')dt' \int_{Vt'-h}^{Vt'+h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dy'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} * \exp\left[-\frac{(x-2dn)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}\right]. \quad (54)$$

После некоторых преобразований функция распределения температуры в пластине примет вид

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2C\gamma\sqrt{\pi a}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(x-2dn)^2}{4a(t-t')}\right] q(t') \left[\operatorname{erf}\left(\frac{z+h-Vt'}{2\sqrt{a(t-t')}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z-h-Vt'}{2\sqrt{a(t-t')}}\right) \right] \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}. \quad (55)$$

Для вычислений и анализа установившегося режима удобно перейти к системе отсчета, связанной с серединой движущегося

источника тепла. Переход осуществляется заменой переменной z на $z + Vt$. Координата z входит лишь в функцию erf, поэтому перепишем их разность с учетом замены

$$\operatorname{erf}\left(\frac{z + h + V(t - t')}{2\sqrt{a(t - t')}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z - h + V(t - t')}{2\sqrt{a(t - t')}}\right). \quad (56)$$

Выражение (55) с учетом (56) примет вид

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2C\gamma\sqrt{\pi a}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(x - 2dn)^2}{4at'}\right] \Phi(z, t') q(t') \frac{dt'}{\sqrt{t - t'}}, \quad (57)$$

где

$$\Phi(z, t') = \operatorname{erf}\left(\frac{z + h + V(t - t')}{2\sqrt{a(t - t')}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z - h + V(t - t')}{2\sqrt{a(t - t')}}\right).$$

Полученное выражение (57) описывает распределение температуры в пластине толщиной d и может быть использовано для расчета температур при заданных значениях параметров. Однако в такой форме решение не позволяет сделать обобщенных выводов.

Переход к безразмерным величинам уменьшает число неизвестных параметров и позволяет распространить результаты исследований на большой класс подобных явлений.

Введем безразмерные координаты и комплексы:

$\xi = z/h$ - безразмерная координата вдоль оси Z (направление движения источника);

$X = x/h$ - безразмерная координата вдоль оси x (в глубину пластины);

$U = \frac{V}{a}h$ - безразмерная скорость источника (число Пекле);

$\tau = at'/h^2$ - безразмерный параметр времени действия источника;

$F_0 = at/h^2$ - число Фурье;

$l = d/h$ - безразмерная толщина пластины.

$$\operatorname{erf}\left(\frac{z+h+Vt'}{2\sqrt{at'}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\xi+1+U\tau}{2\sqrt{\tau}}\right);$$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{z-h+Vt'}{2\sqrt{at'}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\xi-1+U\tau}{2\sqrt{\tau}}\right);$$

$$-\frac{(x-2dn)^2}{4at'} = \frac{(X-2ln)^2}{4\tau};$$

$$q(t-t') = q(F_0 - \tau).$$

Решение в безразмерных величинах имеет вид

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{F_0} \exp\left[-\frac{(X-2nl)^2}{4\tau}\right] \Phi(\xi, \tau) q(F_0 - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}, \quad (58)$$

где

$$\theta = \frac{\lambda}{q_0 h} T.$$

Преобразуем решение (58)

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{F_0} \exp\left[-\frac{(X-2nl)^2}{4\tau}\right] \Phi(\xi, \tau) q(F_0 - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(X-2nl)^2}{4\tau}\right] * \Phi(\xi, \tau) q(F_0 - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_0^{F_0} \exp\left[-\frac{(X-2nl)^2}{4\tau}\right] \Phi(\xi, \tau) q(F_0 - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \right]. \quad (59)$$

Вынесем за знак первой суммы нулевой член ($n=0$)

$$\theta = \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n, \quad (60)$$

где

$$\theta_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{F_0} \exp\left[-\frac{X^2}{4\tau}\right] \Phi(\xi, \tau) q(F_0 - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}};$$

$$\theta_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{F_0} q(F_0 - \tau) \Phi(\xi, \tau) \tau_n(X, \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}};$$

$$\tau_n(X, \tau) = \exp\left[-\frac{(X + 2n\ell)^2}{4\tau}\right] + \exp\left[-\frac{(X - 2n\ell)^2}{4\tau}\right].$$

Второе слагаемое в (60) характеризует результат действия отраженных источников вследствие ограниченной толщины пластины.

Влияние нижней границы пластины на распределение температуры можно учесть коэффициентом

$$K = \frac{1}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n. \quad (61)$$

Тогда безразмерная температура θ для пластины запишется в виде

$$\theta = \theta_0(1 + K). \quad (62)$$

Коэффициент K является сложной функцией

$$K = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{F_0} \Phi(\xi, \tau) q(F_0 - \tau) \tau_n(X, \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}}{\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{F_0} \Phi(\xi, \tau) q(F_0 - \tau) \tau_0(X, \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}}. \quad (63)$$

Введем замену

$$X = \eta\ell; \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (64)$$

Для установившегося режима в функции $F(X, \tau)$ текущее время τ заменим на максимальное, соответствующее времени теплового насыщения F_{0H} .

Эта замена приведет к некоторому завышению K . С учетом замены (64) преобразуем (63) к виду

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\int_0^{F_0} \Phi(\xi, \tau) q(F_{0H} - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(\eta + 2n)^2 \ell^2}{4F_{0H}}\right] + \exp\left[-\frac{(\eta - 2n)^2 \ell^2}{4F_{0H}}\right] \right\}}{\int_0^{F_0} \Phi(\xi, \tau) q(F_{0H} - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{\eta^2 \ell^2}{4F_{0H}}\right)} = \\
 &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{\eta^2 \ell^2 + 4\eta n \ell^2 + 4n^2 \ell^2}{4F_{0H}}\right] + \exp\left[-\frac{\eta^2 \ell^2 - 4\eta n \ell^2 + 4n^2 \ell^2}{4F_{0H}}\right] \right\}}{\exp\left(-\frac{\eta^2 \ell^2}{4F_{0H}}\right)} = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{F_{0H}}\right) \left[\exp\left(-\frac{\eta n \ell^2}{F_{0H}}\right) + \exp\left(\frac{\eta n \ell^2}{F_{0H}}\right) \right]. \quad (65)
 \end{aligned}$$

Из анализа (65) следует, что на коэффициент K наибольшее влияние оказывает толщина пластины. Для поверхности пластины ($\eta = 0$) в любой момент времени коэффициент K определяется суммой

$$K = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{F_{0H}}\right). \quad (66)$$

Так как ℓ^2/F_{0H} практически всегда больше единицы, то для упрощения анализа в сумме (66) можно ограничиться первым членом ряда $n=1$. Тогда

$$K = 2 \exp\left(-\frac{l^2}{F_{0H}}\right). \quad (67)$$

Полученное выражение (67) позволяет определить толщину пластины, начиная с которой, вклад даже первого отраженного источника очень мал, т.е. с этого момента пластинку практически можно считать бесконечным телом.

Например, если $K=0,1$, то температура пластины толщиной l при выбранной скорости отличается от температуры полубесконечного тела на 10%. Для $K=0,05$ и $0,01$ это отличие составляет 5 и 1% соответственно.

Если верхний предел F_0 в интеграле положить равным половине времени теплового насыщения, то получим для нахождения предельной безразмерной толщины пластины следующие выражения [14]:

$$l_{\infty} = \frac{2,12}{U} \sqrt{U+1}, \quad K=0,1;$$

$$l_{\infty} = \frac{2,36}{U} \sqrt{U+1}, \quad K=0,05;$$

$$l_{\infty} = \frac{2,82}{U} \sqrt{U+1}, \quad K=0,01.$$

В табл.2.1 приведены значения безразмерных предельных толщин [14].

Таблица 2.1

$K \backslash U$	1	10	25	50	100	200
0,01	4,0	0,89	0,516	0,39	0,28	0,20
0,05	3,32	0,75	0,47	0,33	0,213	0,167
0,01	3,0	0,67	0,42	0,30	0,21	0,155

На противоположной плоскости пластины ($\eta=1$) формула для расчета коэффициента K имеет вид

$$K = 1 + \exp\left(-\frac{2\ell^2}{F_0}\right), \quad n=1. \quad (68)$$

Из сопоставления (67) и (68) видно, что коэффициенты K на нижней грани больше, чем на верхней. Таким образом, температура на нижней грани пластины в два и более раз превышает температуру в полубесконечном теле на глубине, равной толщине пластины $X=\ell$. При $\ell \rightarrow \infty$

$$K|_{\eta=0} = 0; \quad K|_{\eta=1} = 1.$$

Для режимов шлифования, при которых комплекс $U = \frac{V}{a}h \geq 1$, значения предельных толщин в размерном виде запишутся как

$$d_\infty = 2,12 \sqrt{\frac{ah}{V} + \frac{q^2}{V^2}}, \quad K = 0,1;$$

$$d_\infty = 2,36 \sqrt{\frac{ah}{V} + \frac{q^2}{V^2}}, \quad K = 0,05;$$

$$d_\infty = 2,82 \sqrt{\frac{ah}{V} + \frac{q^2}{V^2}}, \quad K = 0,01.$$

Из анализа приведенных формул следует, что чем больше скорость детали, тем при меньшей толщине пластину можно принимать за полубесконечное тело.

На рис. 14 представлена зависимость коэффициента K от толщины пластины для различных чисел Пекле.

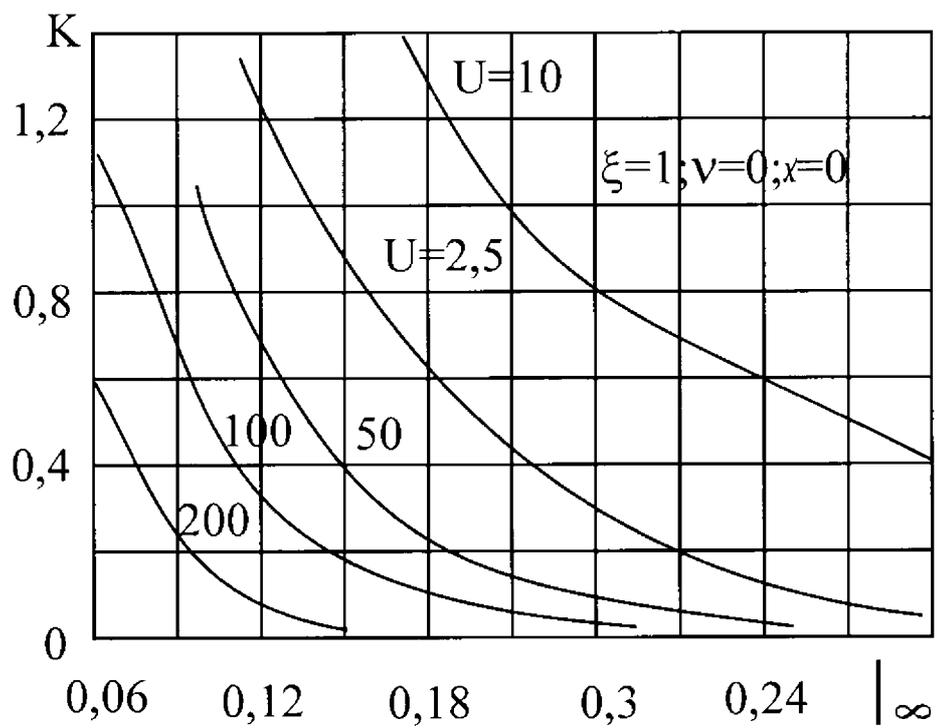
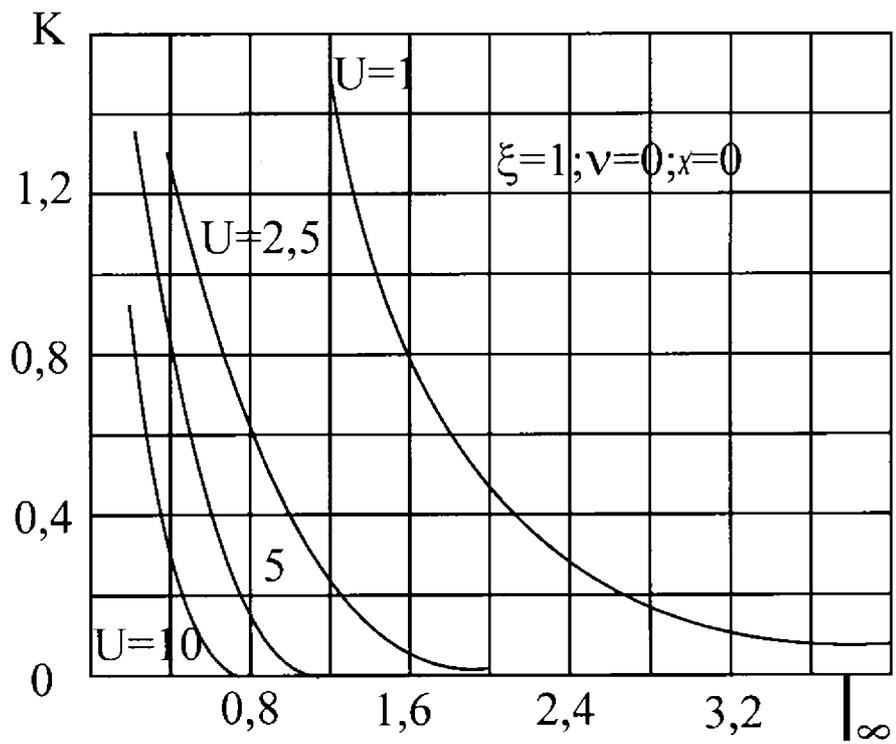


Рис.14. Зависимость коэффициента K от толщины пластины для различных чисел Пекле U

Коэффициент K с увеличением толщины пластины понижается. Физически это означает, что пластина с некоторых значений l становится полубесконечным телом.

На рис. 15,а представлены кривые распределения температур на поверхности пластины (сплошные кривые) и полубесконечного тела (пунктирные). Кривые построены для различных моментов времени $F_0 = 10^{-2}$ и $2 \cdot 10^{-2}$. Безразмерные скорости и толщина l равны соответственно 200 и 0,075.

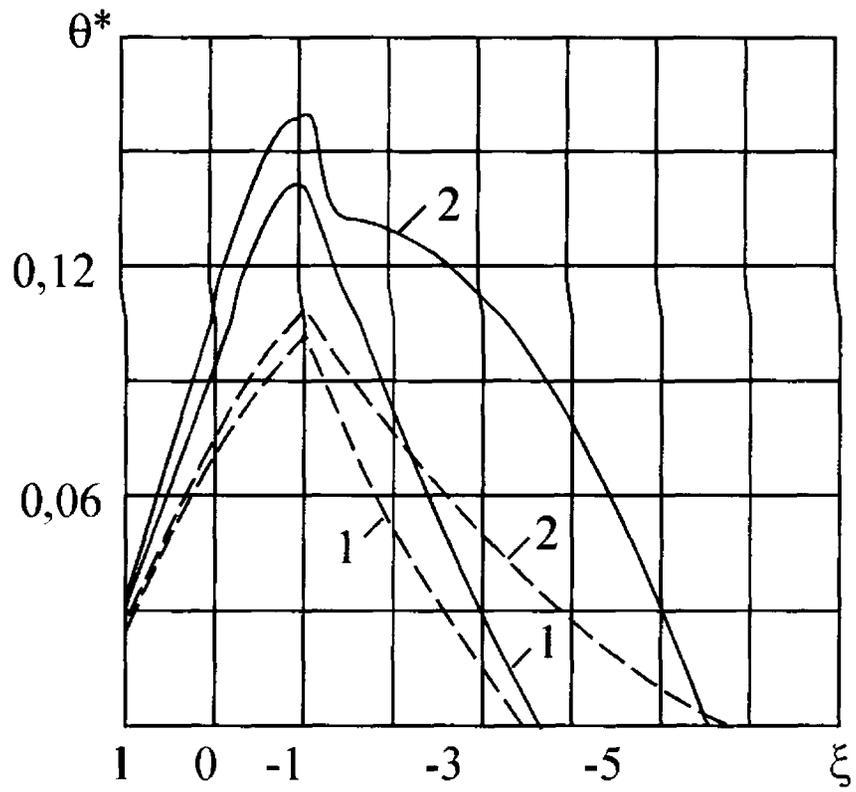
На рис. 15,б приведены кривые распределения температуры на нижней грани пластины $X=l$. За тепловым источником до координаты $\xi = -2,5$ наблюдается возрастание температуры.

Для количественной оценки анализируемых процессов проследим за характером изменения коэффициента K вдоль движения источника тепла и вглубь пластины в разные моменты времени F_0 .

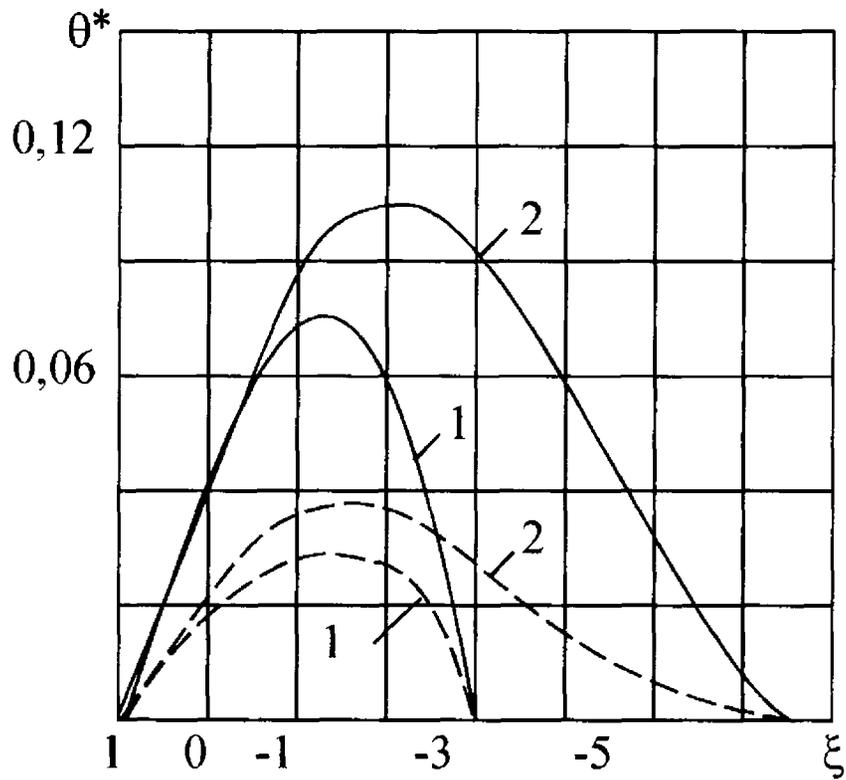
На рис. 16 представлена зависимость коэффициента K от положения движущейся точки поверхности $K = K(\xi, X, F_0)$.

Сплошные кривые показывают изменение коэффициента K на нижней грани пластины $X=0,1$; пунктирные - на поверхности движения теплового источника ($X=0$).

На поверхности коэффициент K всегда меньше, чем на глубине. На передней кромке теплового источника ($\xi = 1$) различие коэффициента K максимально. На задней кромке зоны контакта ($\xi = -1$) происходит скачок в темпе роста коэффициента K ,



А



Б

Рис.15. Кривые расположения температур
А-на поверхности; Б-на нижней грани пластины

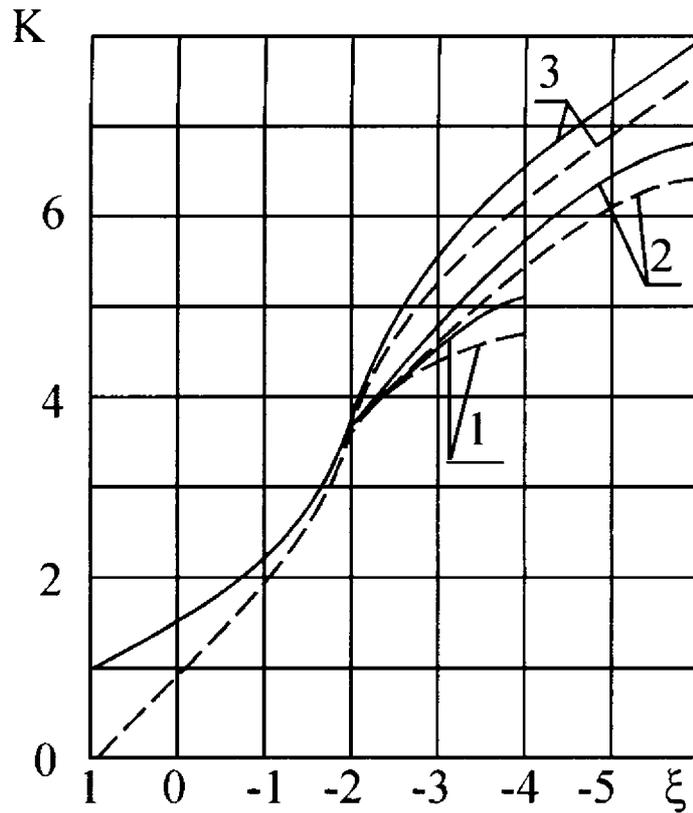


Рис.16. Зависимость коэффициента K от времени F_0 и положения точки (ξ, X) . Сплошные линии $X=0,1$, пунктирные $X=0$. ($F_0 = 0,01$) кривая 1; ($F_0 = 0,02$) кривая 2; ($F_0 = 0,03$) кривая 3 ($U=25$)

вызванный резким уменьшением величины θ_0 . В точке $\xi = -3$, $X = 0$ в момент времени $F_0 = 0,2$ коэффициент K достигает $K = 5,1$.

Расчет температур при шлифовании тонкостенных деталей осуществляется по (62).

Величина θ_0 вычисляется из соотношения, описывающего температурное поле для полубесконечного тела. Например:

$$\theta_0 = \frac{2qa}{\pi\lambda V} \int_{Z-H}^{Z+H} \exp(-\xi) K_0 \sqrt{X^2 + \xi^2} d\xi \quad (69)$$

или по аппроксимирующей зависимости

$$\theta_0 = \frac{1,6}{\sqrt{U}} - \frac{0,16}{U}. \quad (70)$$

Определяется безразмерная толщина пластины $l = d/h$. По значениям безразмерной скорости U и толщине пластины l , используя кривые (рис. 14), определяется коэффициент K . По данным θ_0 и K определяется максимальная температура θ_{\max} в пластине по (62). В размерных величинах

$$T = \frac{q_0 h}{\lambda} \theta_0 (1 - K). \quad (71)$$

Температурные поля в пластине можно также рассчитывать по выражению, представляющему решение для полубесконечного тела, умноженное на функцию, характеризующую ограниченность теплопроводящего пространства [1]

$$T = \frac{2qa}{\pi\lambda V} \int_{Z-H}^{Z+H} \exp(-\xi) K_0 \sqrt{X^2 + \xi^2} \frac{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_0 \left[\sqrt{(X - 2Dn)^2 + \xi^2} \right]}{K_0 \sqrt{X^2 + \xi^2}} d\xi, \quad (72)$$

где

$$D = \frac{dV}{2a}; \quad X = \frac{Vx}{2a}; \quad Z = \frac{Vz}{2a}; \quad H = \frac{Vh}{2a}; \quad \xi = \frac{V(z+z')}{2a}.$$

Обозначив множитель, характеризующий влияние толщины пластины на температурное поле

$$M(X, D, \xi) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_0 \left[\sqrt{(X - 2Dn)^2 + \xi^2} \right]}{K_0 \left(\sqrt{X^2 + \xi^2} \right)}, \quad (73)$$

получим

$$T = \frac{2qa}{\pi\lambda a} \int_{Z-H}^{Z+H} M(X, D, \xi) \exp(-\xi) K_0 \sqrt{X^2 + \xi^2} d\xi. \quad (74)$$

Для поверхности пластины $X=0$ множитель, учитывающий влияние толщины пластины, имеет вид

$$M(X, D, \xi) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_0 \left[\sqrt{(2Dn)^2 + \xi^2} \right]}{K_0(\xi)}. \quad (75)$$

На рис. 17 показано температурное поле в пластине $D=1$, $H=1$ при $X=0$; $X=0,5$; $X=1,0$.

Сплошными линиями показано изменение температуры при шлифовании пластины, штриховыми - при шлифовании полубесконечного тела.

Следует заметить, что за тепловым источником (в области отрицательных значений Z) происходит выравнивание температуры по всей толщине пластины. При достаточно больших значениях Z температура не зависит от X , и задачу можно считать одномерной.

Если ограничиться расчетом влияния толщины пластины на максимальную температуру, то формулу для расчета температур можно значительно упростить [1]. Множитель M , соответствующий максимальной температуре, приобретает конкретное значение, и его можно вынести за знак интеграла. В этом случае расчетная формула для тонкостенной пластины будет отличаться от расчетной формулы для полубесконечного тела только наличием постоянного множителя $M(X, D, \xi)$. Обозначим этот постоянный множитель $N(D, H)$, тогда формула для расчета температур в пластине имеет вид

$$\frac{\pi \lambda V T}{2 q a} = N(D, H) \int_{Z-H}^{Z+H} \exp(-\xi) K_0 \sqrt{X^2 + \xi^2} d\xi. \quad (76)$$

Зависимость множителя $N(D, H)$ от параметров D и H показана на рис. 18 [1].

При толщине пластины $D > 6$ практически для всех режимов плоского шлифования для H , не превышающих 20, множитель $N(D, H) = 1$. Следовательно, все детали $D > 6$ считаются полубесконечным телом.

Например, при шлифовании пластины толщиной 1,2 мм из быстрорежущей стали P18 ($a = 0,065 \text{ см}^2/\text{с}$) при скорости $V = 6 \text{ м/мин}$ пластина считается полубесконечным телом. Если увеличить скорость V , то условию полубесконечного тела будут удовлетворять пластины еще меньшей толщины. Таким образом, подбирая режимы обработки, можно в значительных пределах относительную толщину изменять и шлифование осуществлять так,

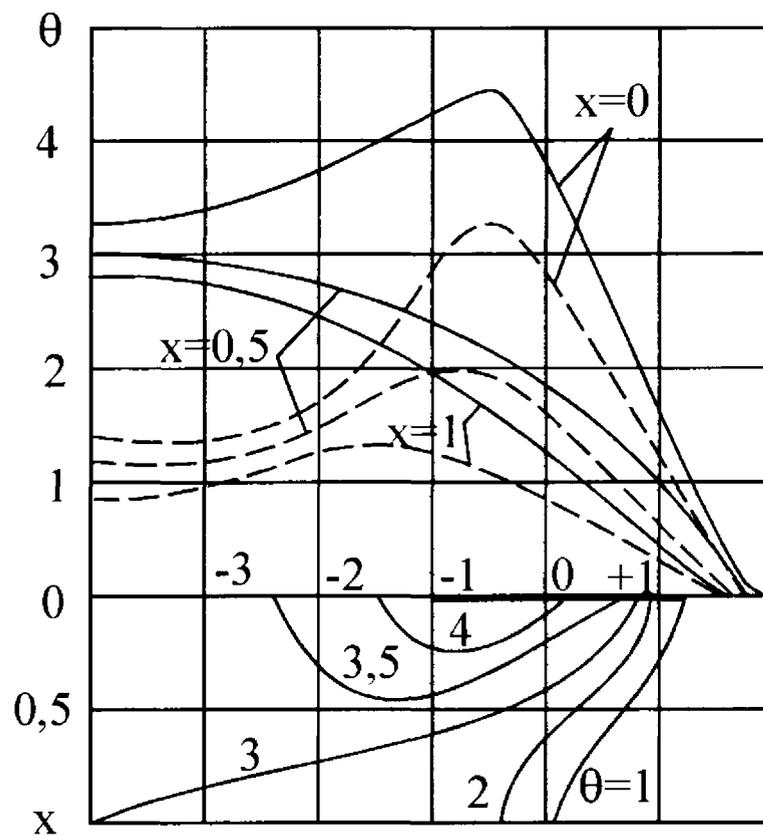


Рис.17. Влияние ограниченности размеров деталей на температурное поле. Сплошные линии-пластина($D=1, H=1$); штриховые-полубесконечное тело

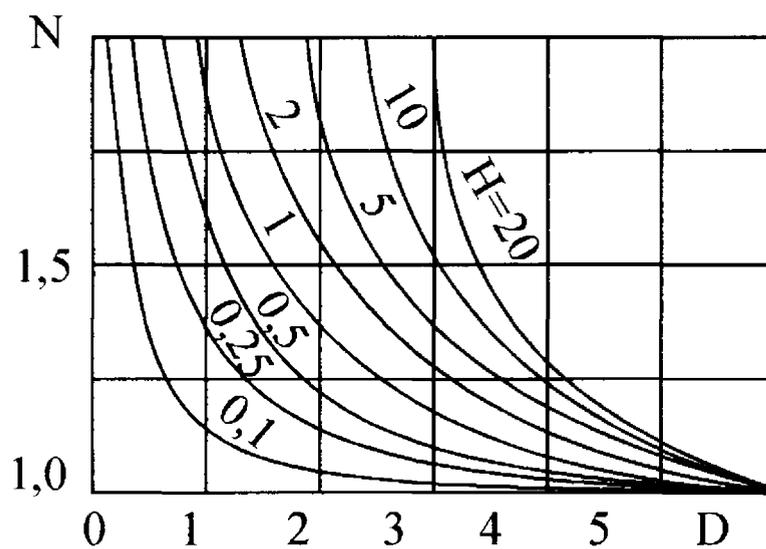


Рис.18. Зависимость множителя N от параметров D и H

чтобы температура шлифования из-за ограниченности размеров не повышалась.

Для случая заданных граничных условий 3-го рода

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha T|_{x=0} = 0; \quad \alpha \neq 0;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha T|_{x=d} = 0$$

построение системы отраженных источников затруднительно. Так, если на поверхности $x=0$, дадим точечный источник $+q$, то для выполнения условия $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha T|_{x=d} = 0$ необходимо с противоположной стороны задать системы отрицательных стоков $-Q'(x)$ и, кроме того, дополнительный сток такой же интенсивности $-q$ в точке $x=-2d$ (рис. 19). Но каждый из этих элементарных стоков внесет искажение в условие $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha T|_{x=0} = 0$ и потребуются бесконечная система бесконечных отрицательных стоков при $x > 0$.

Решение такой задачи методом построения функции Грина весьма затруднительно.

2.6. Шлифование клиновидных деталей

2.6.1. Односторонний источник

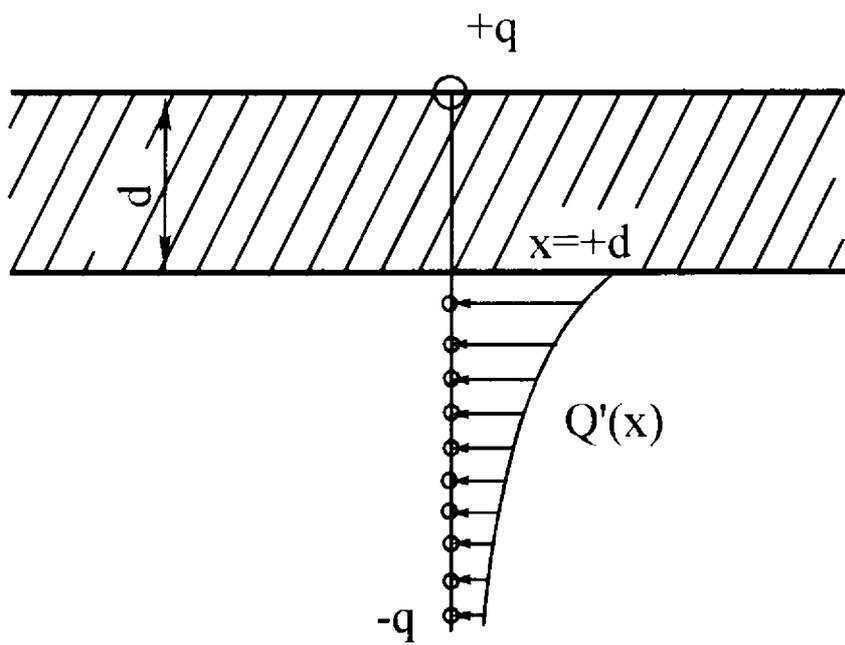


Рис.19. Расчетная схема

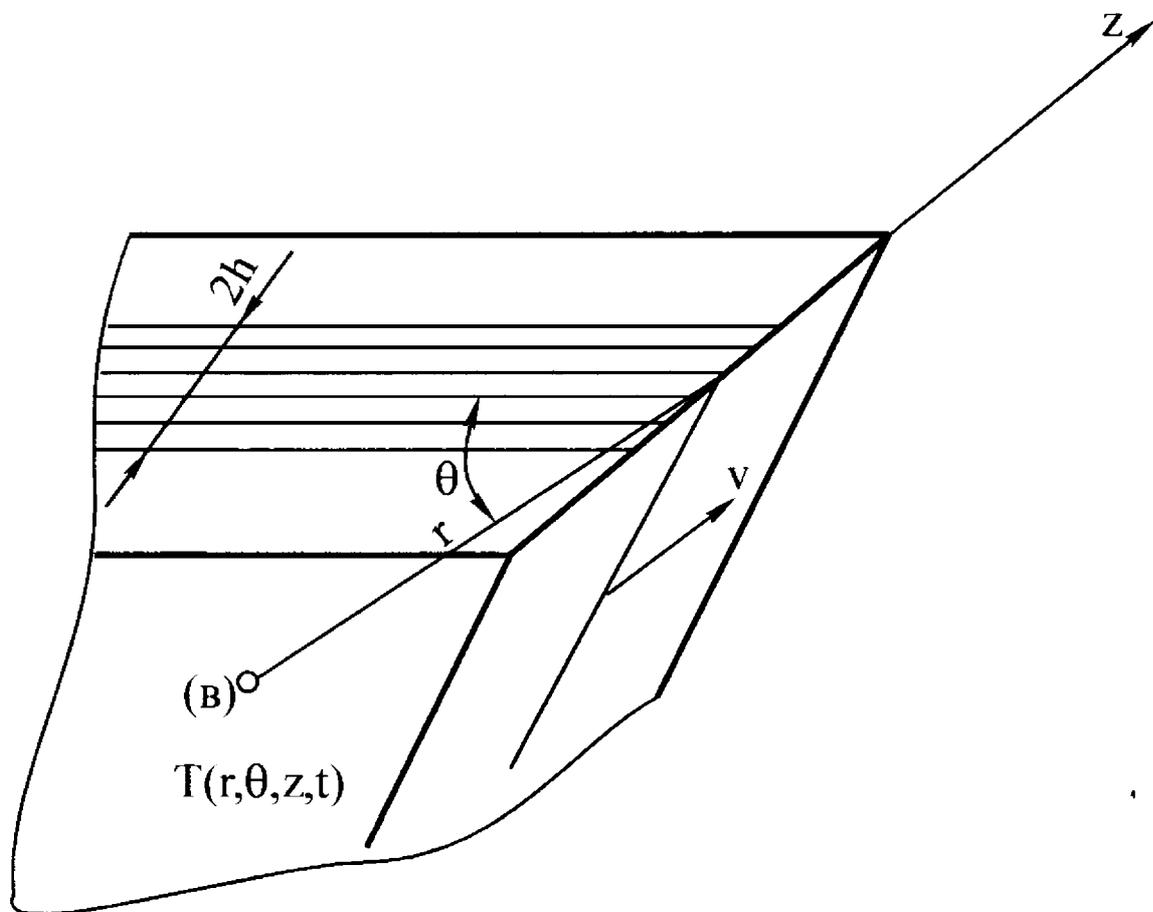


Рис.20. Схема шлифования клиновидных деталей

Если две плоскости пересекаются и по одной (или двум одновременно) движутся тепловые источники, то имеет место третий тип задач, так называемые задачи на клин. На практике - это задачи, связанные с описанием тепловых полей при заточке инструмента и шлифовании треугольных резцов.

Пусть по одной из граней бесконечно длинного клина в положительном направлении оси Z с постоянной скоростью V движется нормально ориентированный к ребру клина полосовой источник тепла, шириной $2h$ (рис. 20). Интенсивность теплового потока постоянна по всей поверхности и равна q . Угол раствора клина будет считаться равным $180^\circ/m$, где m - целое число, кратное 180; $\alpha = \frac{180}{m}$. На гранях клина теплообмен отсутствует ($\alpha = 0$). Решение задачи будем искать в цилиндрической системе координат.

Требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + V \frac{\partial T}{\partial z} \quad (77)$$

с краевыми условиями:

$$T|_{t=0} = 0; \quad \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, |z|<h} = q; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, |z|>h} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\alpha} = 0. \quad (78)$$

Применим, как и в предыдущем случае, метод источников плюс метод изображений. Схема построения приведена на рис. 21,а,б для углов клина $\alpha = 60^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$.

Сущность построения заключается в следующем. Примем угол клина $\alpha = 60^\circ$ ($m=3$) (рис. 21,а). Продолжим адиабатические

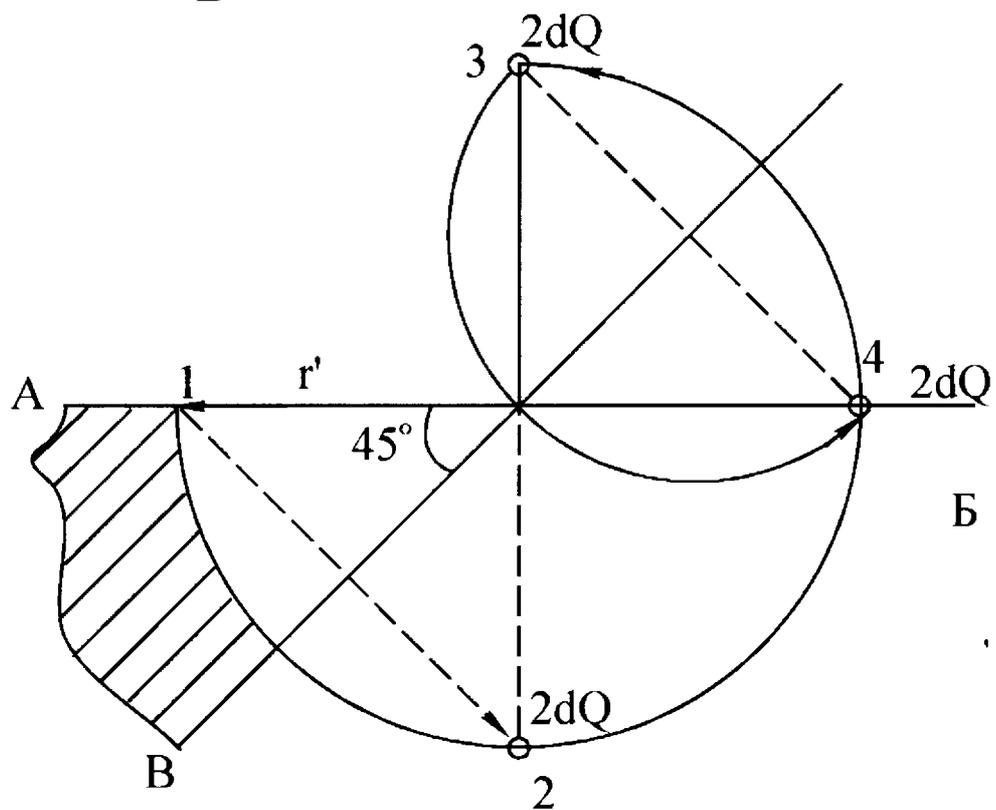
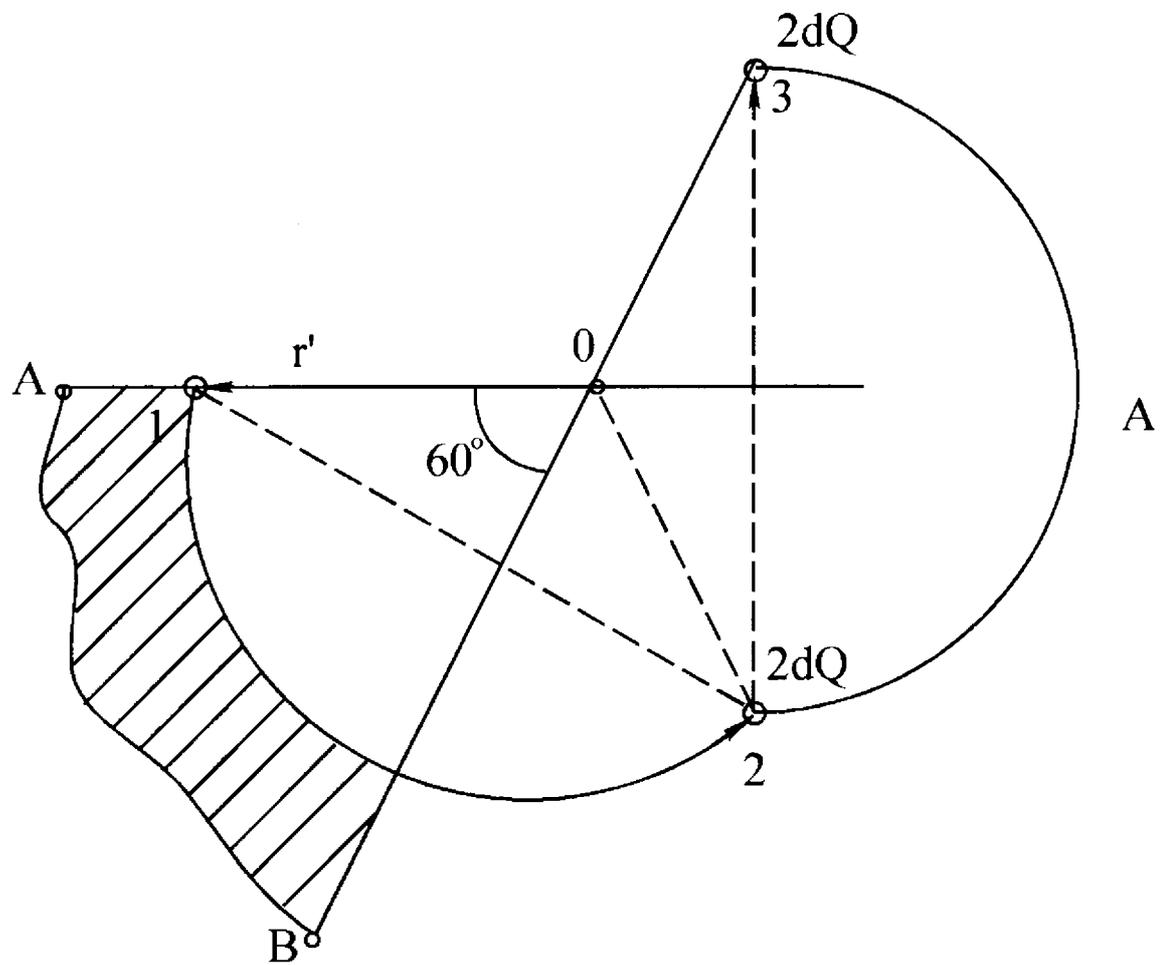


Рис.21. Схема построения отраженных источников для углов клина
 $A-\alpha=60^\circ$; $B-\alpha=45^\circ$

плоскости ОА и ОВ от точки пересечения в обе стороны. Поместим точечный источник на ребре клина ОА. Тогда для выполнения граничного условия $\left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \right|_{\theta=0, |z|>h} = 0$ удвоим мощность источника: $2dQ$.

Но на грани ОВ $\left(\theta = \frac{\pi}{3} \right)$ также необходимо обеспечить выполнение

условия $\left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0$. Поэтому изобразим источник $2dQ$ относительно

плоскости ОВ - точки 2. Отражая источник $2dQ$ относительно плоскости ОА, получим точку 3. Условие $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ при $\theta = 0$ будет

выполнено. Нарушения же условия $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ при $\theta = \frac{\pi}{3}$ не произойдет,

так как источник 3 расположен в плоскости ОВ и совпадает со своим отраженным источником. Построение окончено. На рис. 21,б в качестве примера приведено построение отраженных источников для $\alpha = 45^\circ$.

В случае угла клина, не являющегося целой частью π , угол α необходимо округлять до ближайшего кратного числа.

Тепловое поле от единичного движущегося по поверхности полубесконечного тела источника тепла q в прямоугольной подвижной системе координат описывается формулой

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{2q dt'}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + (y-y')^2 + [z-z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} \right\}. \quad (79)$$

Расчетная схема задачи приведена на рис.22, где точка А с координатами θ ; y' ; z' определяет положение точечного источника;

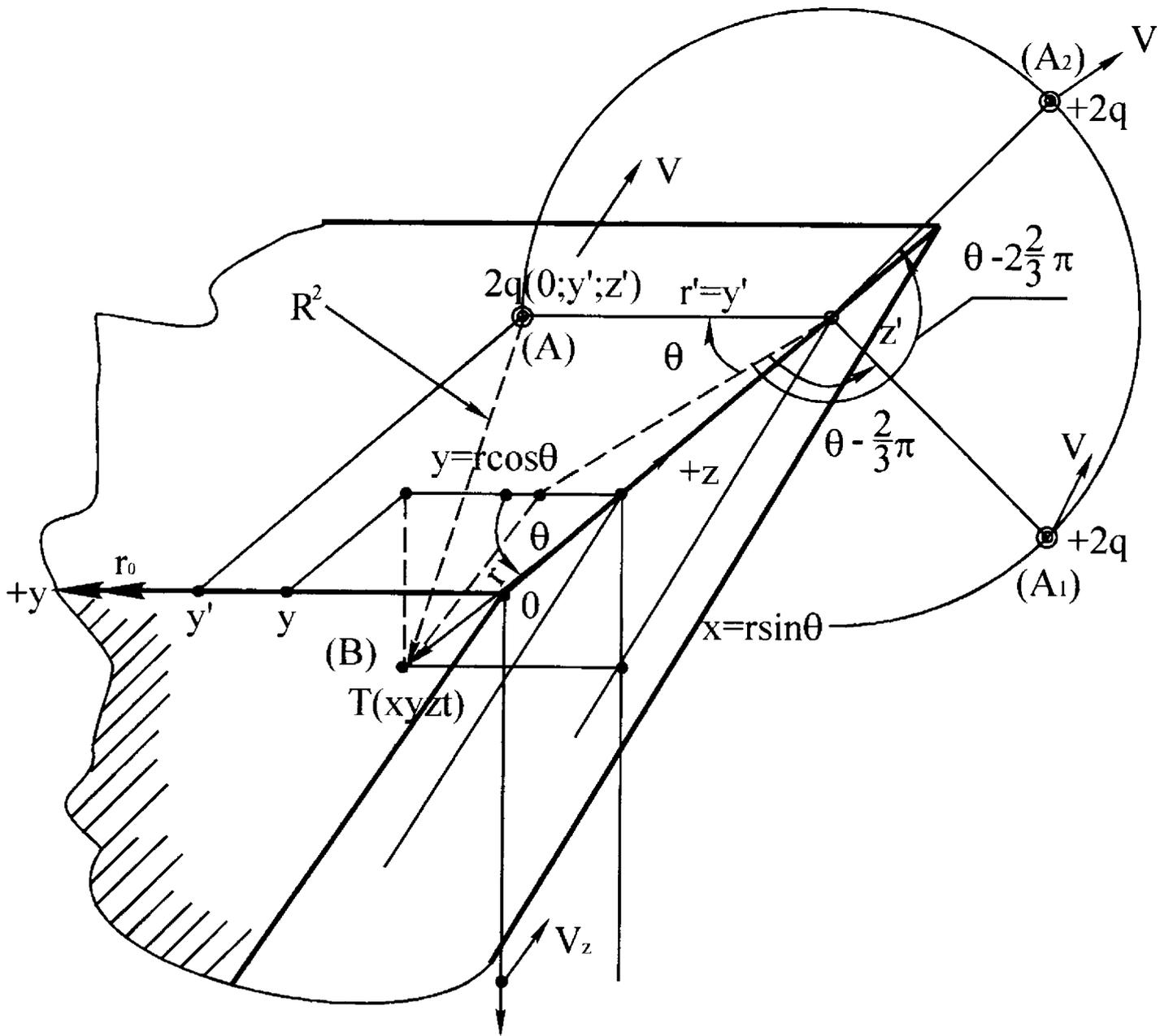


Рис.22. Расчетная схема

точка **B** с координатами x ; y ; z указывает положение точки, в которой определяется температура.

Запишем (79) в цилиндрических координатах, переход к которым осуществляется по формуле

$$y = r \cos \theta; \quad x = r \sin \theta; \quad z = z.$$

Тогда квадрат расстояния от **B** до **A** определится так:

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + (y - y')^2 + (z - z' + V(t - t'))^2 = r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - r')^2 + \\ &+ (z - z' + V(t - t'))^2 = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta - 2r r' \cos \theta + (r')^2 + (z - z' + V(t - t'))^2 = \\ &= r^2 + (r')^2 - 2r r' \cos \theta + (z - z' + V(t - t'))^2. \end{aligned}$$

Температура в точке **B** $T(r, \theta, z, t)$

$$T = \int_0^t \frac{2q dt'}{C \gamma [4\pi a(t - t')]^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{r^2 + (r')^2 - 2r r' \cos \theta + (z - z' + V(t - t'))^2}{4a(t - t')} \right\}. \quad (80)$$

Как видно из приведенных построений, для случая клина температура в точке **B** определится суперпозицией трех точечных подвижных источников, т.е.

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Причем функции для T_2 и T_3 отличаются квадратами расстояний от точки **B** до точек A_1 и A_2 .

Указанная величина для точки A_1 (см. рис. 23 - вид со стороны оси **Z**) запишется таким образом:

$$R^2 = r^2 + (r')^2 - 2r r' \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) + (z + z' + V(t - t'))^2.$$

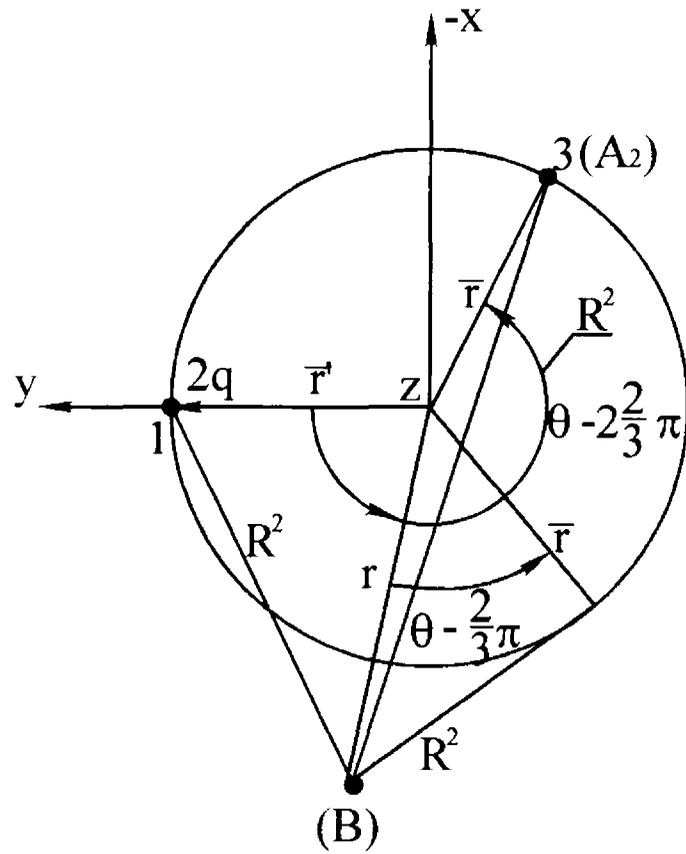


Рис.23. Схема суперпозиции температур

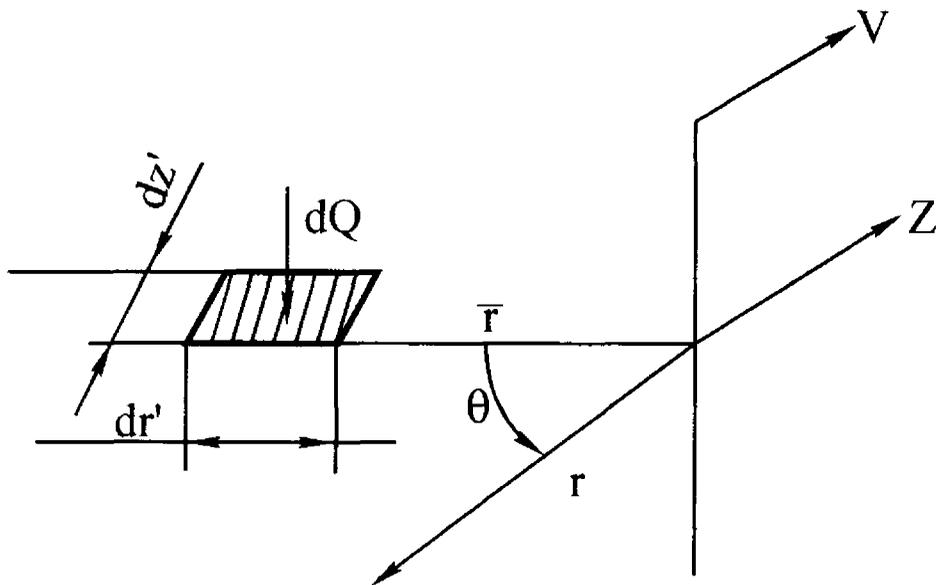


Рис.24. Схема движения элементарного источника по поверхности клина

и соответственно для точки A_2

$$R^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - 2\frac{2}{3}\pi\right) + (z - z' + V(t - t'))^2.$$

Аргумент функции косинус - угол между радиус-векторами r и r' в проекции на плоскость OXY .

Формула суперпозиций такова

$$\begin{aligned} T = & \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \left[\exp\left\{ -\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\theta + [z - z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} \right\} + \right. \\ & + \exp\left\{ -\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + [z - z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} \right\} + \exp\left\{ -\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) + [z - z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} \right\} \\ & \left. - \frac{2rr' \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) + [z - z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} \right] = \sum_{n=0}^2 \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} * \\ & * \exp\left\{ -\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + [z - z' + V(t-t')]^2}{4a(t-t')} \right\}. \end{aligned}$$

В общем случае выражение для подвижного источника для угла

клина $\alpha = \frac{\pi}{m}$ таково

$$T(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t-t')]^{3/2}} *$$

$$*\exp\left\{-\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + [z - z' + V(t - t')]^2}{4a(t - t')}\right\}.$$

В случае полосового источника элементарная мгновенная мощность: $dQ = 2qdr'dz'dt'$ (рис. 24).

Тогда мгновенная температура точки В (рис. 24) может быть представлена в виде

$$d\Gamma = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2qdr'dz'dt'}{C\gamma[4\pi a(t - t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) - \frac{(z - z' + V(t - t'))^2}{4a(t - t')}}{4a(t - t')}\right\}. \quad (81)$$

Решение поставленной задачи есть интеграл функции (81)

$$\Gamma(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^{+h} dr' \int_{-h}^{+h} dz' \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2q}{C\gamma[4\pi a(t - t')]^{3/2}} * \exp\left\{-\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z - z' + V(t - t'))^2}{4a(t - t')}\right\} dt'. \quad (82)$$

При $t \rightarrow \infty$ температурное поле квазистационарное.

Осуществим интегрирование по времени t' .

$$\int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2qdt'}{C\gamma[4\pi a(t - t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) - \frac{(z - z' + V(t - t'))^2}{4a(t - t')}}{4a(t - t')}\right\} =$$

$$= \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{2q dt'}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{m} n \right)}{4a(t-t')} - \frac{(z-z')^2 + 2V(z-z')(t-t') + V^2(t-t')^2}{4a(t-t')} \right\}.$$

Обозначим $r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{m} n \right) = R^2$. Введем новую переменную: $t' \rightarrow \xi$

$$\xi = \frac{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{m} n \right) + (z-z')^2}}{2\sqrt{a(t-t')}} = \frac{R}{2\sqrt{a(t-t')}};$$

$$d\xi = \frac{(-1)R(-1)dt'}{2\sqrt{a}2(t-t')^{3/2}} = \frac{Rdt'}{4\sqrt{a}(t-t')^{3/2}};$$

$$dt' = \frac{4\sqrt{a}(t-t')^{3/2}}{R} d\xi; \quad \xi^3 = \frac{R^3}{8a\sqrt{a}(t-t')^{3/2}};$$

$$(t-t')^{3/2} = \frac{R^3}{8a\sqrt{a}\xi^3}; \quad dt' = \frac{4\sqrt{a}}{R} \frac{R^3}{8a\sqrt{a}\xi^3} d\xi = \frac{R^2}{2a\xi^3} d\xi;$$

$$\xi_H = \frac{R}{2\sqrt{a\infty}} = 0; \quad \xi_B = \frac{R}{2\sqrt{a(t-t')}} = \infty.$$

Учитывая, что $C\gamma a = \lambda$, получим

$$\int_0^\infty \frac{2q}{C\gamma [4\pi a]^{3/2}} \frac{8a\sqrt{a}\xi^3}{R^3} \frac{R^2}{2a\xi^3} d\xi \exp \left\{ - \left(\xi^2 + \frac{V(z-z')}{2a} + \frac{V^2 R^2}{4a 4a\xi^2} \right) \right\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{qd\xi}{R\lambda\pi^{3/2}} \exp \left\{ - \left(\xi^2 + \frac{V(z-z')}{2a} + \frac{V^2 R^2}{16a^2\xi^2} \right) \right\} = \exp \left\{ - \frac{V}{2a}(z-z') \right\}^*$$

$$* \int_0^{\infty} \frac{q}{R\lambda\pi^{3/2}} \exp\left\{-\left(\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2}\right)\right\} d\xi,$$

но интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{q}{R\lambda\pi^{3/2}} \exp\left\{-\left(\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2}\right)\right\} d\xi$$

вычисляется в задаче 4 (формула 37)

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2}\right)\right\} d\xi = \exp\left(-\frac{VR}{2a}\right) \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(\xi + \frac{VR}{4a\xi}\right)^2\right\} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{VR}{2a}\right\}.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} \int_0^{\infty} \frac{q}{R\lambda\pi^{3/2}} \exp\left\{-\left(\xi^2 + \frac{V^2 R^2}{16a^2 \xi^2}\right)\right\} d\xi = \\ & = \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z') - \frac{VR}{2a}\right\} \frac{q}{R\lambda\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{q}{2\pi R\lambda} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(R+(z-z'))\right\}. \end{aligned} \quad (83)$$

Подставляя (62) в (61), получим

$$\begin{aligned} T(r, \theta, z) &= \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^{\infty} dr' \int_{-h}^{+h} dz' \frac{q}{2\pi R\lambda} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(R+z-z')\right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{-h}^{+h} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} dz' \int_0^{\infty} \frac{1}{R} \exp\left\{-\frac{VR}{2a}\right\} dr' = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{-h}^{+h} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} dz' * \\ & * \left(\frac{V}{2a}\right) \int_0^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{V}{2a} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2}\right\}}{\left(\frac{V}{2a}\right) \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2}} dr'. \end{aligned}$$

Выделяем полный квадрат

$$r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) = (r')^2 - 2rr' \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + r^2 \cos^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) -$$

$$-r^2 \cos^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + r^2 = \left[r' - r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)\right]^2 + r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right).$$

Тогда решение запишется в виде

$$\Gamma = \sum_{n=0-h}^{m-1+h} \int \frac{q}{2\pi\lambda} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} dz' \frac{V}{2a} * \\ \int_0^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{V}{2a} \sqrt{\left[r' - r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)\right]^2 + r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2}\right\}}{\frac{V}{2a} \sqrt{\left[r' - r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)\right]^2 + r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2}} dr'.$$

Заменяем переменную

$$\frac{V}{2a} \left[r' - r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)\right] = \eta;$$

$$\eta_H = -\frac{V}{2a} r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right); \quad \eta_B = \frac{V}{2a} \infty = \infty; \quad d\eta = \frac{V}{2a} dr'.$$

Получим

$$\frac{V}{2a} \int_{-\frac{Vr}{2a} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{V}{2a} \sqrt{\frac{4a^2}{V^2} \eta^2 + r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2}\right\} \frac{2a}{V}}{\frac{V}{2a} \sqrt{\frac{4a^2}{V^2} \eta^2 + r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2}} d\eta = \\ = \int_{-\frac{Vr}{2a} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\sqrt{\eta^2 + \frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2\right]}\right\}}{\sqrt{\eta^2 + \frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2\right]}} d\eta. \quad (84)$$

В интеграле (84) обозначим

$$-\frac{Vr}{2a} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) = -b; \quad \frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z-z')^2\right] = A^2.$$

Тогда интеграл (84) запишется в такой форме:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\infty} \frac{\exp\{-\sqrt{\eta^2 + A^2}\}}{\sqrt{\eta^2 + A^2}} d\eta &= \int_{-b}^0 \frac{\exp\{-\sqrt{\eta^2 + A^2}\}}{\sqrt{\eta^2 + A^2}} d\eta + \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-\sqrt{\eta^2 + A^2}\}}{\sqrt{\eta^2 + A^2}} d\eta = \\ &= \int_0^b \frac{\exp\{-\sqrt{\eta^2 + A^2}\}}{\sqrt{\eta^2 + A^2}} d\eta + \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-\sqrt{\eta^2 + A^2}\}}{\sqrt{\eta^2 + A^2}} d\eta. \end{aligned}$$

Вычислим второй интеграл суммы.

Из теории цилиндрических функций известно интегральное представление модифицированной функции Бесселя мнимого аргумента [4]

$$K_0(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{+1}^{\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

В частности, если $\nu=0$,

$$K_0(z) = \int_{+1}^{\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Произведем замену переменной

$$(\eta^2 + A^2)^{\frac{1}{2}} = At \Rightarrow \eta^2 + A^2 = A^2 t^2;$$

$$\eta = A\sqrt{t^2 - 1}; \quad A dt = \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 + A^2}};$$

$$t_H = 1; \quad t_B = \infty; \quad d\eta = A \frac{\sqrt{\eta^2 + A^2}}{\eta} dt.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\left\{-\sqrt{\eta^2 + A^2}\right\}}{\sqrt{\eta^2 + A^2}} d\eta = \int_1^{\infty} \frac{\exp\{-At\} A \sqrt{\eta^2 + A^2}}{\sqrt{\eta^2 + A^2} \cdot \eta} dt = \int_1^{\infty} \frac{\exp\{-At\} A dt}{A \sqrt{t^2 - 1}} =$$

$$= \int_1^{\infty} e^{-At} (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} dt = K_0(A).$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\left\{-\sqrt{\eta^2 + A^2}\right\}}{\sqrt{\eta^2 + A^2}} d\eta = K_0\left(\frac{V}{2a} \sqrt{r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z - z')^2}\right).$$

Окончательно решение примет вид

$$T(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{-h}^{+h} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z - z')\right\} dz' \left[K_0\left\{\frac{V}{2a} \sqrt{r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z - z')^2}\right\} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{Vr}{2a} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)} \frac{\exp\left\{-\sqrt{\eta^2 + \frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z - z')^2\right]}\right\}}{\sqrt{\eta^2 + \frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + (z - z')^2\right]}} d\eta \right]. \quad (85)$$

Вычисление по (85) выполняется следующим образом. В формулу подставляются координаты точки В в цилиндрических осях r , θ , $z = \text{const}$. Берем $n=0$. Вычисляются внутренний интеграл по переменной η и значение функции Бесселя K_0 , при этом z' считается постоянной, а затем вычисляется наружный интеграл по переменной z' .

Алгоритм повторяется для $n=1$, $n=2$ и т.д. до $n=m-1$. Решение (85) целесообразно представить в безразмерных координатах. Для этого введем безразмерные комплексы.

$$\rho = \frac{Vr}{2a}; \quad Z = \frac{Vz}{2a}; \quad H = \frac{Vh}{2a};$$

$$\xi = \frac{V}{2a}(z - z'); \quad d\xi = -\frac{V}{2a}dz'; \quad dz' = -\frac{2a}{V}d\xi;$$

$$\xi_H = Z + H; \quad \xi_B = Z - H.$$

Тогда

$$T = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{Z-H}^{Z+H} \exp\{-\xi\} \frac{2a}{V} d\xi \left[K_0 \left\{ \sqrt{\frac{V^2 r^2}{4a^2} \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + \frac{V^2}{4a^2}(z - z')^2} \right\} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\rho \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)} \frac{\exp\left\{-\sqrt{\eta^2 + \frac{V^2 r^2}{4a^2} \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + \frac{V^2}{4a^2}(z - z')^2}\right\}}{\sqrt{\eta^2 + \frac{V^2 r^2}{4a^2} \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + \frac{V^2}{4a^2}(z - z')^2}} d\eta \right].$$

Окончательно

$$T = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{qa}{\pi\lambda V} \int_{Z-H}^{Z+H} \exp\{-\xi\} d\xi \left[K_0 \left\{ \sqrt{\rho^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + \xi^2} \right\} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\rho \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right)} \frac{\exp\left\{-\sqrt{\eta^2 + \rho^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + \xi^2}\right\}}{\sqrt{\eta^2 + \rho^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{m}n\right) + \xi^2}} d\eta \right]. \quad (86)$$

Полученное решение на учитывает теплообмена на поверхности клина ($\alpha = 0$). Применение метода источников для $\alpha \neq 0$ затруднительно по вышеприведенным соображениям. Решение (86) можно представить в виде произведения хорошо изученного выражения для полубесконечного тела на некоторую функцию $M(\rho, \theta, \xi, m)$, характеризующую влияние ограниченности размеров детали [1].

$$T = \frac{2qa}{\pi\lambda V} \int_{Z-H}^{Z+H} M(\rho, \theta, \xi, m) \exp(-\xi) K\left(\sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta + \xi^2}\right) d\xi. \quad (87)$$

Анализ решения (87), проведенный Сипайловым В.А. [1], показал, что для ребра клина и точек, непосредственно близких к ребру ($\rho=0$), множитель M принимает значение $m/2$. Для ребра клина с углом раствора $\alpha = \pi/m$ решение имеет вид

$$T = \frac{2qa}{\pi\lambda V} \frac{m}{2} \int_{Z-H}^{Z+H} \exp(-\xi) K_0(\xi) d\xi. \quad (88)$$

Закон распределения температуры вдоль ребра клина будет таким же, как и на поверхности полубесконечного тела. Но абсолютные значения температур будут в $m/2$ раза выше, чем в соответствующих точках полубесконечного тела при тех же условиях. Например, для угла клина $\alpha = 60^\circ$ ($m=3$) множитель перед интегралом 1,5. При $\alpha = 30^\circ$ ($m=6$) множитель $m/2 = 3$.

Поскольку (88) допускает любые значения углов, ее можно записать так:

$$T = \frac{2qa}{\pi\lambda V} \frac{90^\circ}{\alpha^\circ} \int_{Z-H}^{Z+H} \exp(-\xi) K_0(\xi) d\xi. \quad (89)$$

Здесь α - любой угол клина, выраженный в градусах.

Интеграл, представленный в виде функции

$$J(U, \rho, \theta) = \int_0^U M(\rho, \theta, \xi) \exp(-\xi) K_0\left(\sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta + \xi^2}\right) d\xi,$$

протабулирован в [1] для $\theta = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$ и $\rho = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Относительная температура может быть вычислена как разность этих функций соответственно при верхнем и нижнем пределах

$$\theta = J(Z + H) - J(Z - H). \quad (90)$$

2.6.2. Двухсторонний источник

Используя полную аналогию с предыдущей схемой, можно построить математическую модель охватывающего источника тепла (рис. 25). Математически задача формулируется в следующем виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + V \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (91)$$

Граничные условия:

$$T|_{t=0} = 0; \quad \pm \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=\alpha \\ \theta=0 \\ |z|<h}} = q;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=0 \\ |z|>h}} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (\text{теплообмен отсутствует}) \quad \alpha = 0.$$

Так же, как и в предыдущей задаче, применим метод источников плюс метод отражений. Пусть на поверхности клина действуют два движущихся точечных источника P_0 и P'_0 (рис. 26.).

Для выполнения граничного условия $\frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \theta=\alpha}} = 0$ удваиваем

мощности источников $P_0 \rightarrow 2dQ$ и $P'_0 \rightarrow 2dQ$.

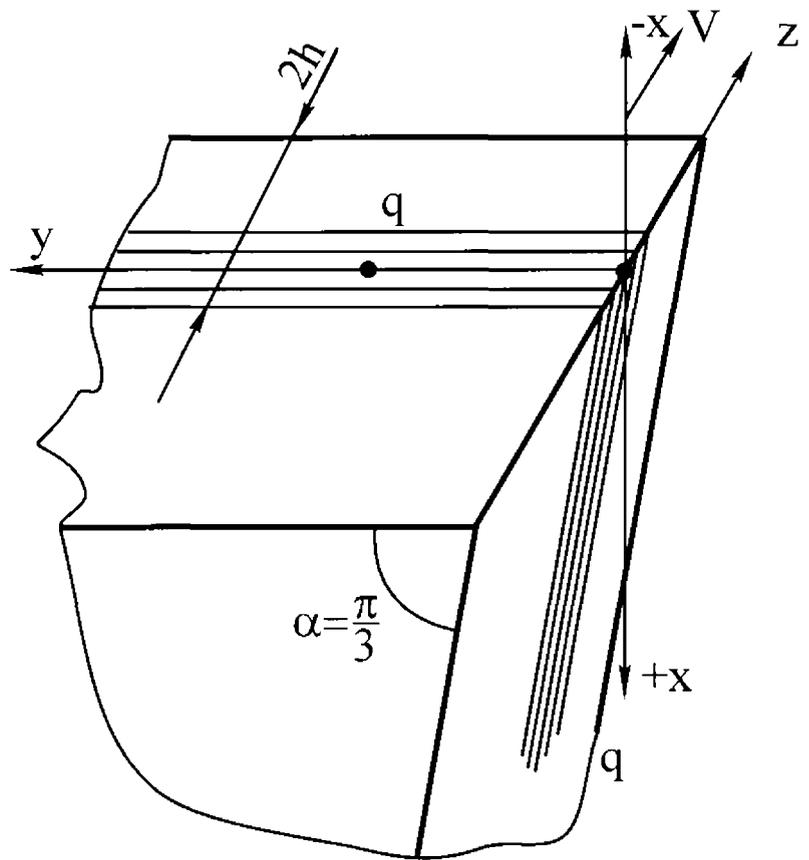


Рис.25. Расчетная схема движения охватывающего источника тепла

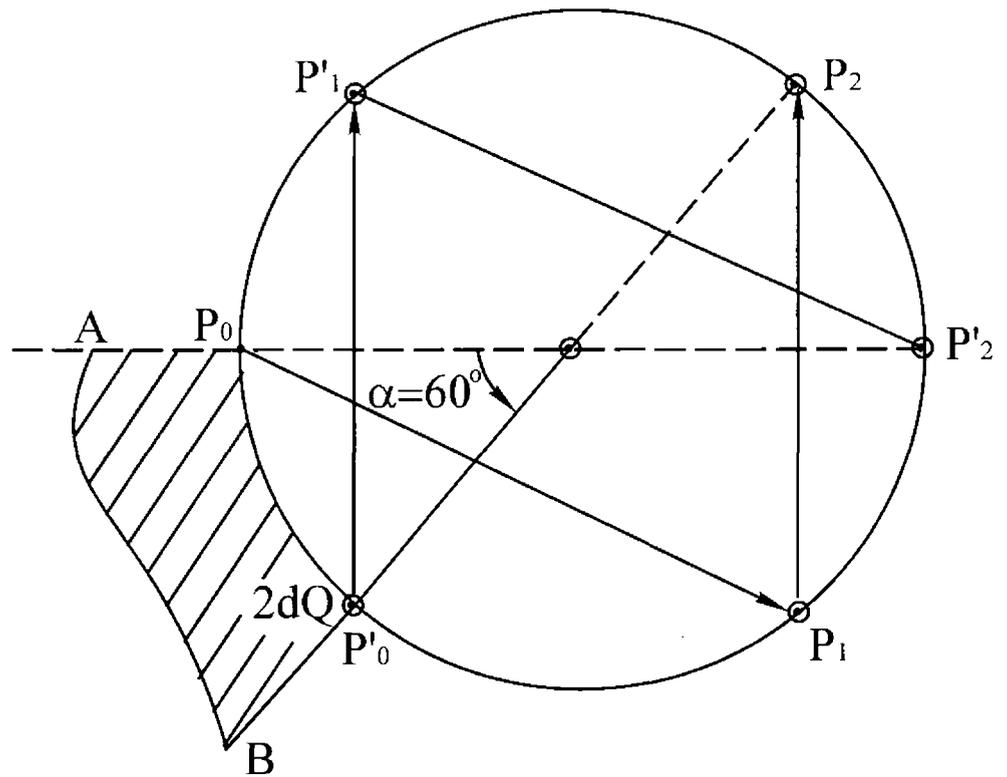


Рис.26. Схема построения отраженных источников для двухсторонней схемы

Однако источник P_0 будет нарушать условие $\frac{\partial T}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\alpha} = 0$ на ребре OB клина, а источник P'_0 - соответственно условие $\frac{\partial T}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0$ на ребре OA клина. Поэтому зеркально-симметрично произведем построение двух отраженных источников P_1 и P'_1 . Но P_1 нарушает граничное условие на ребре клина OA , а P'_1 - на ребре OB клина. Поэтому производим построение зеркально-симметричных источников P_2 и P'_2 , которые совпадают с противоположными гранями клина, т.е. со своими отраженными источниками. Построение закончено.

Следовательно, в данной задаче при $\alpha = 60^\circ$ температура в точке B клина определится суперпозицией действия шести движущихся источников тепла:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6.$$

Таким образом, для двухсторонней схемы количество источников удваивается.

$$\begin{aligned}
 T(r, \theta, z) = & \sum_{n=0}^2 \int_{-h}^{+h} \frac{q}{2\pi\lambda} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z-z')\right\} dz' \left[K_0 \left\{ \frac{V}{2a} \sqrt{r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi n\right) + (z-z')^2} \right\} + \right. \\
 & + \frac{Vr}{2a} \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi n\right) \exp\left\{-\sqrt{\frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi n\right) + (z-z')^2 \right] + \eta^2} \right\} \\
 & \left. \int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi n\right) + (z-z')^2 \right] + \eta^2}} \right] + \\
 & + K_0 \left\{ \frac{V}{2a} \sqrt{r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi n - \frac{\pi}{3}\right) + (z-z')^2} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{\frac{Vr}{2a} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi n\right)} \exp\left\{-\sqrt{\frac{V^2}{4a^2} \left[r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi n\right) + (z - z')^2 \right] + \eta^2}\right\} d\eta. \quad (92)$$

Формула (92) может быть существенно упрощена. Учитывая, что слагаемые суммы отличаются только аргументами тригонометрических функций,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \sin^2(\theta - \pi); \\ \sin^2\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) &= \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right); \\ \sin^2\left(\theta - \frac{5}{3}\pi\right) &= \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right); \\ \cos(\theta - \pi) &= -\cos\theta; \\ \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) &= -\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right); \\ \cos\left(\theta - \frac{5}{3}\pi\right) &= -\cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right), \end{aligned}$$

кроме того, учитывая четность подынтегральных функций, можно доказать справедливость окончательного решения (интегралы в (92) взаимно вычитаются):

$$\begin{aligned} T(r, \theta, z) &= \int_{-h}^{+h} \frac{q}{\pi\lambda} \exp\left\{-\frac{V}{2a}(z - z')\right\} dz' \left[K_0 \left\{ \frac{V}{2a} \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + (z - z')^2} \right\} + \right. \\ &+ K_0 \left\{ \frac{V}{2a} \sqrt{r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + (z - z')^2} \right\} + K_0 \left\{ \frac{V}{2a} \sqrt{r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + (z - z')^2} \right\} \left. \right]. \quad (93) \end{aligned}$$

Решение (93) может быть использовано для моделирования тепловых полей при шлифовании метрических резьб ($\alpha = 60^\circ$). На

вершине нитки резьбы $\alpha = 60^\circ$, шлифуемой многоконтурным кругом, температура в 3 раза выше по сравнению с температурой полубесконечного тела. Как и в предыдущей задаче, теплообмен на поверхности клина не учитывается.

В случае, если поверхность резьбы криволинейная (рис. 27), то мощность отраженного источника q' (расположенного на нормали к поверхности) не равна мощности действующего q как для плоского случая. Необходимо так подобрать систему отраженных источников, чтобы на поверхности резьбы (шариковинтовые передачи) выполнялось ГУ $\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R_p} = 0$ в случае отсутствия теплообмена.

Для криволинейных адиабатических поверхностей применение метода источников затруднительно. Что касается приведенной задачи, то в [5] установлена возможность применения формулы (51), умноженной на поправочный коэффициент, учитывающий криволинейность поверхности резьбы. В целом для решения подобных задач применяются другие методы. Например, метод интегральных преобразований.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1 (рис. 28). На поверхности полубесконечного тела в момент времени $t' = 0$ начинает действовать мгновенный точечный источник A_1 (координаты $x' = 0$; $y' = 0$; $z' = 0$) система неподвижна, $V=0$. В момент времени $t' = \Delta$ начинает действовать второй

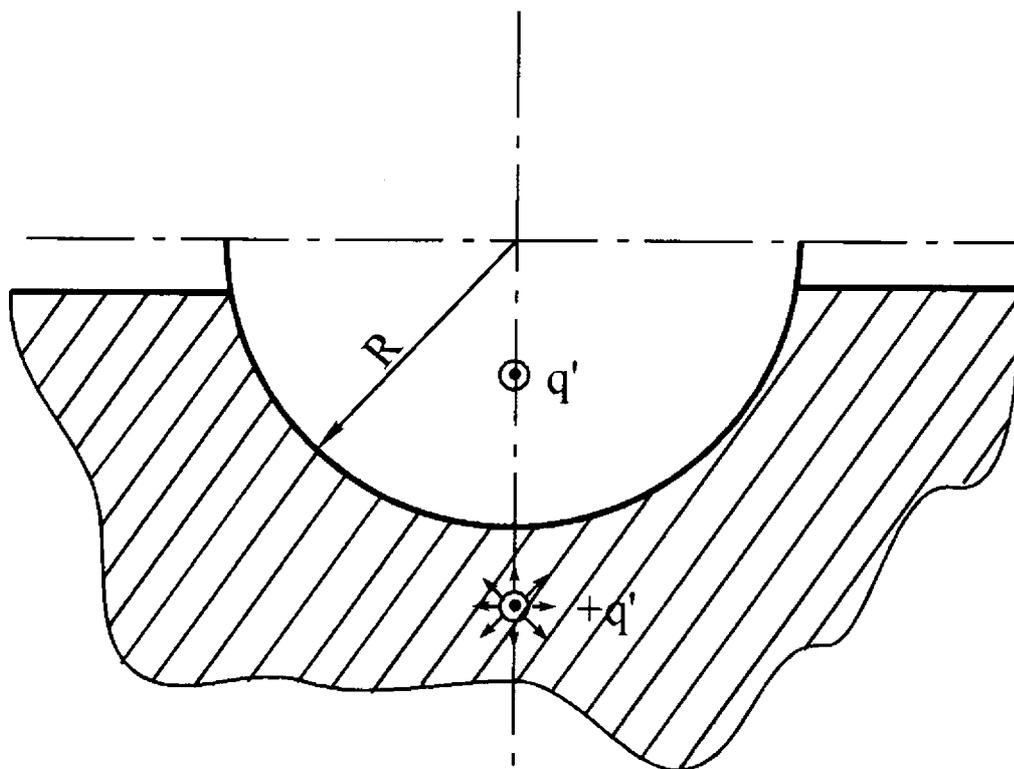


Рис.27. Расчетная схема

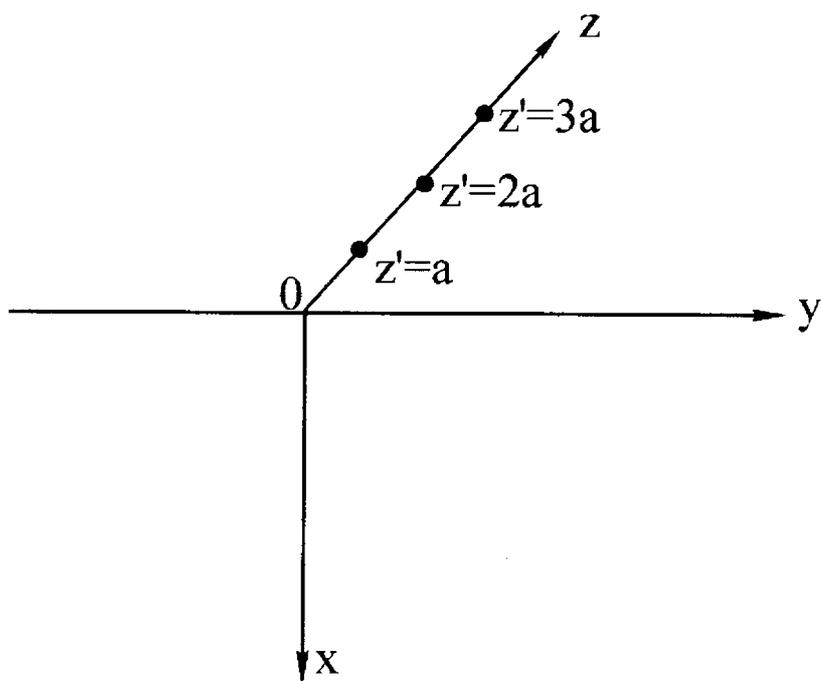


Рис.28. Расчетная схема

мгновенный источник тепла в точке $z' = a; x' = 0; y' = 0$. В момент времени $t' = 2\Delta$ начинает действовать мгновенный источник в точке $z' = 2a; x' = 0; y' = 0$ и т.д. до $z' = 9a$ число “вспышек” источников $n=10$. Найти $T(x, y, z, t)$ для любой точки полубесконечного тела, если на поверхности задано условие $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ для момента времени $t > 9\Delta$.

Задача 2 (рис. 29). На поверхности полубесконечного тела в момент времени $t' = 0$ начинает действовать линейный источник тепла ($z' = 0; x' = 0$), распределенный вдоль оси Y с плотностью потока $-q$. Источник движется со скоростью V . В момент времени $t' = t$ начинает действовать второй линейный источник, смещенный относительно первого $z' = +a$ с плотностью q , который также движется со скоростью V . Найти $T(x, y, z, t)$ для $\tau > t$, если на поверхности задано ГУ $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$.

Задача 3. Решить задачу 2 для случая, если линейные источники движутся по поверхности клина.

Задача 4. Внутри проводящей среды в объеме V в момент времени $t' = 0$ начинают действовать источники с плотностью потока q . Источники распределены в сфере радиуса R (рис. 30). Найти функцию Грина, если на поверхности задано граничное условие $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ ($q = 0$ система неподвижна).

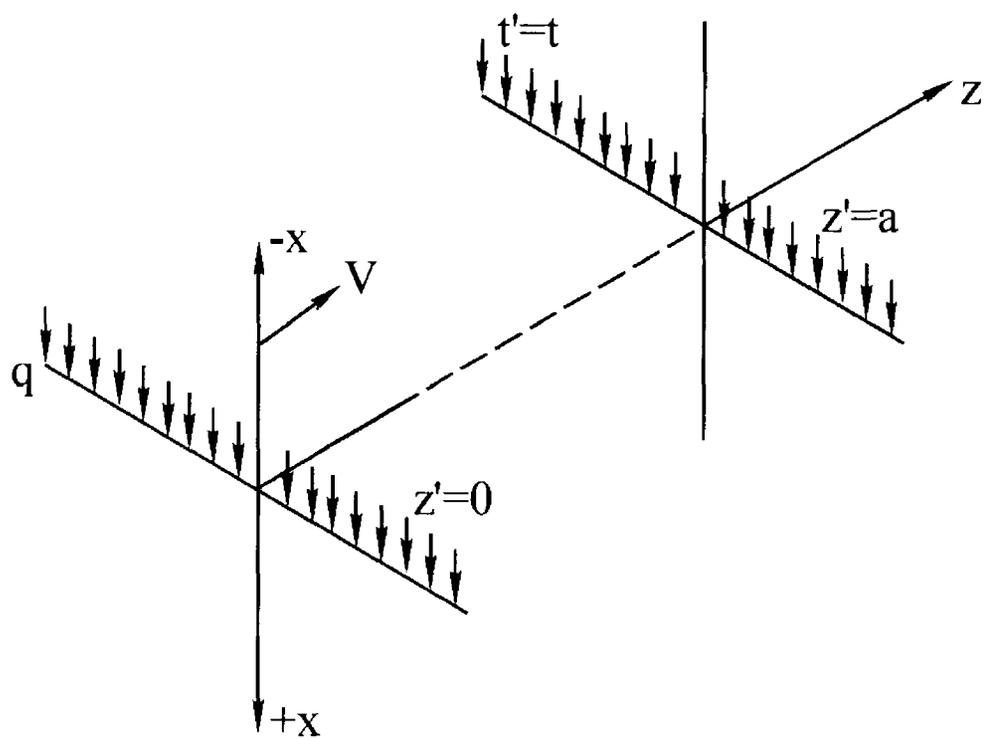


Рис.29. Расчетная схема

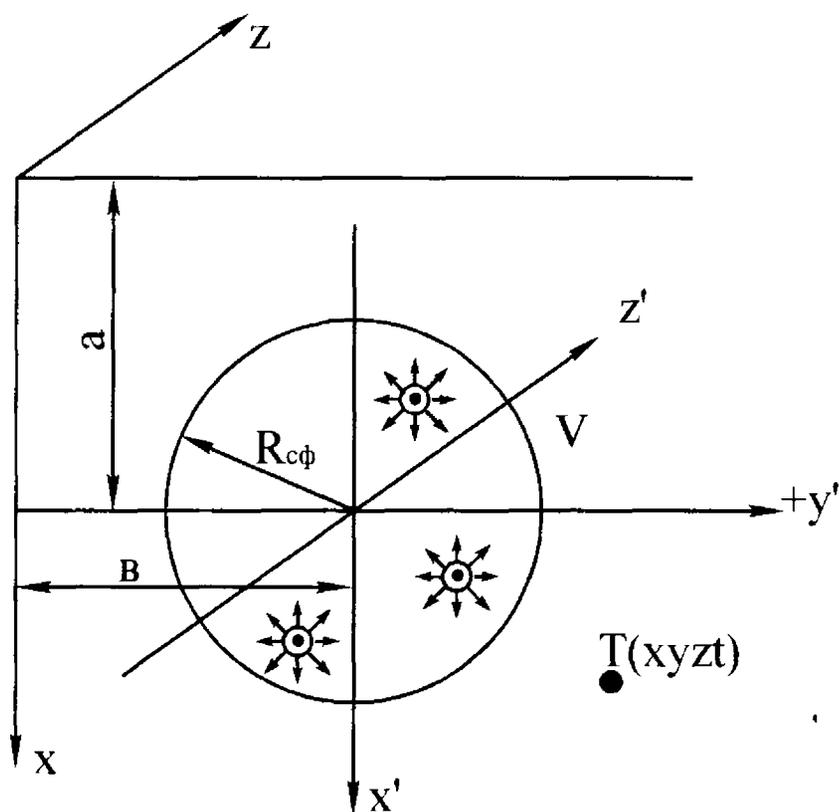


Рис.30. Расчетная схема

2.7. Исследование нестационарного температурного поля

Результаты исследования температурных полей, изложенные в предыдущих разделах, представлены только для стационарных режимов, которые наступают вскоре после начала процесса шлифования.

От момента начала процесса шлифования до установления предельного состояния имеется хотя и малый, но физически ощутимый промежуток времени, в течение которого процесс шлифования протекает в нестационарном режиме. Аналитическое исследование нестационарного температурного поля открывает принципиальную возможность понижения контактных температур за счет периодического прерывания процесса.

Периодическое прерывание процесса шлифования можно осуществить, если режущую поверхность круга разбить на ряд чередующихся выступов и впадин. Длина режущего выступа, очевидно, должна быть определена с учетом временной зависимости максимальной температуры.

Геометрические параметры прерывистых кругов можно определить на основе исследования нестационарного процесса и выявления его основных закономерностей.

При исследовании нестационарных температурных полей была принята расчетная схема (рис. 31).

По поверхности полубесконечного тела в положительном направлении оси Z движется со скоростью V бесконечно длинный

(по оси Y) полосовой источник шириной $2h$. Ось X направлена внутрь тела. Начальная температура всюду равна нулю. С окружающей средой, имеющей нулевую температуру, происходит теплообмен. Плотность теплового потока изменяется со временем по некоторому закону. Требуется найти распределение температуры при $t > 0$.

Используем функцию Грина для мгновенно действующего в момент времени $t = t'$ точечного источника, расположенного на поверхности в точках O, y', z' при наличии теплообмена.

Формула распределения температуры в полубесконечном массиве от точечного источника, мгновенно выделившего количество тепла Q , имеет вид

$$T = \frac{2Q}{C\gamma [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4a(t-t')}\right) - \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{R_1^2}{4a(t-t')} - \frac{\alpha}{\lambda} x''\right] dx'', \quad (94)$$

где

$$R^2 = x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

$$R_1^2 = (x - x'')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Допустим, что тепловые источники распределены на поверхности в бесконечной (по оси Y) полосе шириной $2h$ и действуют непрерывно. Пусть $q(t')$ - мощность источников, выделяемая единицей площади. Тогда количество тепла, выделенного в момент времени t' за время dt' на площади $dzdy$,

$$dQ = q(t') dy' dz' dt'. \quad (95)$$

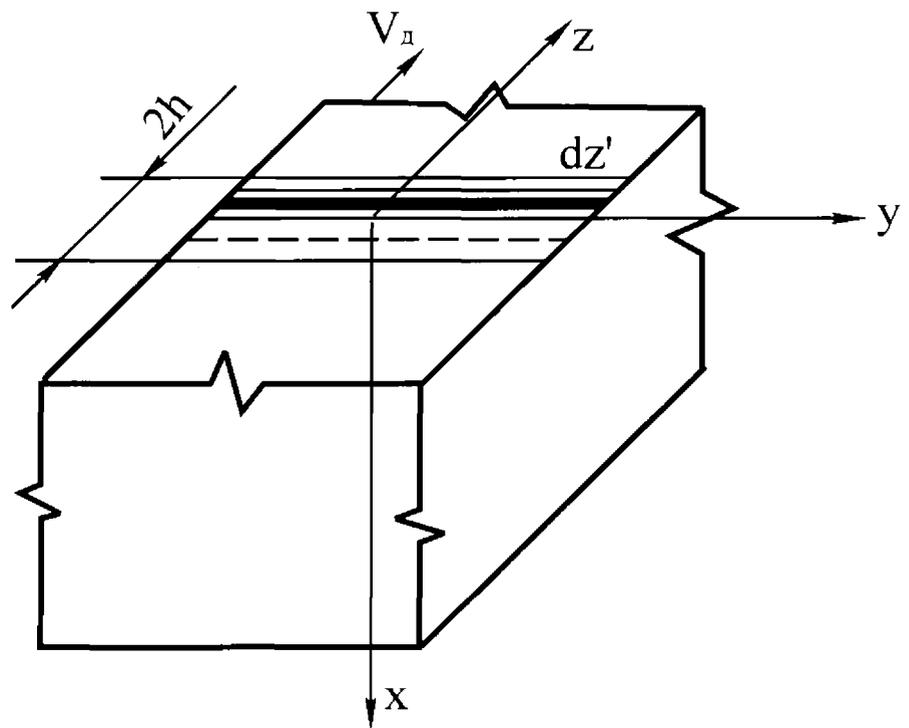


Рис.31. Расчетная схема нестационарных температурных полей

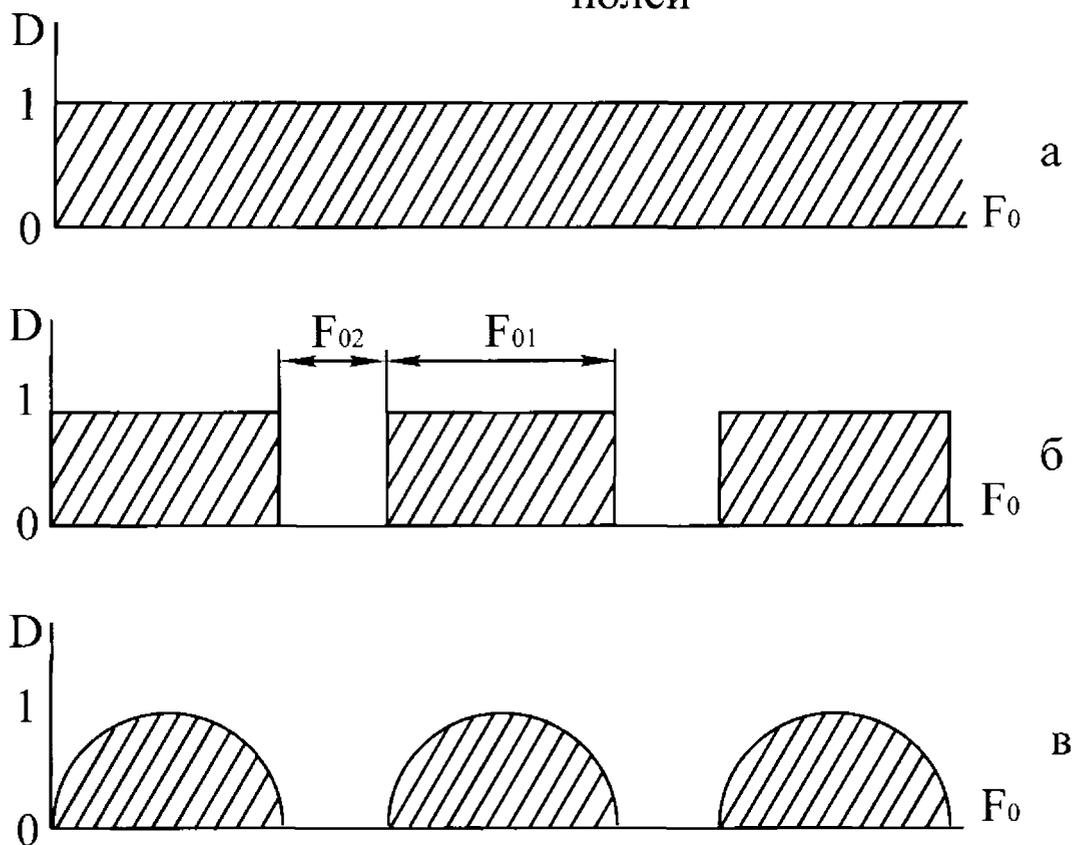


Рис.32. Схема формирования тепловых импульсов от работы отдельных режущих выступов прерывистого круга

Если область действия источников движется в направлении оси Z со скоростью V , а середина источника совпадает с началом отсчета, то координаты точек области его действия будут изменяться с течением времени в соответствии с неравенством

$$-h + Vt' < z' < h + Vt'. \quad (96)$$

Подставляя (95) в (94) и выполняя интегрирование по x'' , y' , z' с учетом неравенства (96), получим

$$T = \frac{1}{2C\gamma\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right] \Phi_1(z, t-t') q(t') M(x, t-t') \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}},$$

где

$$\Phi_1(z, t-t') = \operatorname{erf}\left(\frac{z+h-Vt}{2\sqrt{a(t-t')}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z-h-Vt}{2\sqrt{a(t-t')}}\right);$$

$$M(x, t-t') = 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\pi a(t-t')} \exp\left[\frac{b}{16a(t-t')}\right] \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{b}{4\sqrt{a(t-t')}}\right)\right];$$

$$b = 4\frac{\alpha}{\lambda} a(t-t') + 2x,$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$ - функция ошибок Гаусса.

Перейдем к системе отсчета, связанной с движущимся

источником. Для этого заменим координату z на $z + Vt$. Тогда

$$\Phi(z, t-t') = \operatorname{erf}\left(\frac{z+h+V(t-t')}{2\sqrt{a(t-t')}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z-h+V(t-t')}{2\sqrt{a(t-t')}}\right).$$

Переходя к безразмерным величинам, решение можно привести к виду

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{F_0} \exp\left(-\frac{X}{4\tau}\right) \Phi(\xi, \tau) M(X, \tau) D(F_0 - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}},$$

(97)

где

$$\theta = \frac{\lambda}{q_0 h} T;$$

$$\Phi(\xi, \tau) = \operatorname{erf}\left(\frac{\xi + U\tau + 1}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi + U\tau - 1}{2\sqrt{\tau}}\right);$$

$$M(X, \tau) = 1 - B\sqrt{\pi\tau} \exp\left[\frac{(2B\tau + X)^2}{4\tau}\right] \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{2B\tau + X}{2\sqrt{\tau}}\right)\right];$$

$$\operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-X^2} dX;$$

$$F_0 = \frac{a}{h^2}; \quad \tau = \frac{a}{h^2} t'; \quad U = \frac{V}{a} h; \quad B = \frac{\alpha}{\lambda} h; \quad \xi = \frac{z}{h}; \quad X = \frac{x}{h}.$$

Решение (97) описывает температурное поле от полосового источника в системе отсчета, движущейся вместе с источником.

В формуле (97) функция $D(F_0 - \tau)$ определяет форму теплового импульса, а q_0 - его амплитудное значение. В случае шлифования сплошным кругом тепловой импульс будет непрерывным. Соответственно функция, задающая форму теплового импульса,

$$D(F_0 - \tau) = 1.$$

а q_0 - его амплитудное значение. В случае шлифования сплошным кругом тепловой импульс будет непрерывным. Соответственно функция, задающая форму теплового импульса, $D(F_0 - \tau) = 1$. Прямоугольная форма единичного выступа прерывистого круга показана на рис. 32.

$$D(F_0 - \tau) = \begin{cases} 1; F_{0_1} \geq \tau \geq 0 \\ 0; F_{0_1} < \tau < F_{0_1} + F_{0_2} \end{cases},$$

где F_{0_1} - безразмерное время действия теплового импульса, соответствующего времени прохождения режущего выступа ℓ_1 под зоной контакта круга с деталью;

F_{0_2} - безразмерное время прерывания процесса, соответствующее прохождению впадины ℓ_2 .

Возможны и другие условия взаимодействия. В качестве рабочей гипотезы импульс может иметь синусоидальную форму. Математически она представляется в виде

$$D(F_0 - \tau) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{F_{0_1}} \tau; F_{0_1} \geq \tau \geq 0 \\ 0; F_{0_1} < \tau < F_{0_1} + F_{0_2} \end{cases}.$$

Она может быть реализована при шлифовании эксцентричным кругом.

Возможно также задание любого другого закона изменения плотности теплового потока на промежутке времени F_{0_2} .

Например, форма теплового импульса может быть

представлена так:

$$D(F_0 - \tau) = \begin{cases} b_i, \frac{F_0 - \tau}{F_{0_1}(1+n)} < 1 + \frac{1}{n} \\ \rho, k + \frac{1}{1+n} < \frac{F_0 - \tau}{F_{0_1}(1+n)} < k + 1 \end{cases},$$

где $n = \frac{F_{0_2}}{F_{0_1}}$;

k - целое число интервалов $F_{0_1} + F_{0_2}$ на отрезке интегрирования $(0, F_0 - \tau)$

и находится как целая часть дроби

$$k = E \left[\frac{F_0 - \tau}{F_{0_1}(1+n)} \right];$$

ρ - задает форму импульса на промежутке “паузы” - F_{0_2} .

Изменение температуры во времени определяется главным образом функцией

$$\Phi(\xi, \tau) = \operatorname{erf} \left(\frac{\xi - U\tau + 1}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi + U\tau - 1}{2\sqrt{\tau}} \right). \quad (98)$$

При заданных режимах шлифования V , h и свойства обрабатываемого материала a - комплекс $U = \frac{V}{a}h$ будет иметь конкретное значение. По мере перемещения теплового источника аргумент функции erf будет возрастать за счет τ . Известно, что при возрастании аргумента функция erf стремится к единице. Например, при

$$\frac{\xi \pm 1 + U\tau}{2\sqrt{\tau}} = 3$$

значение erf отличается от единицы на 0,002%. С возрастанием параметра τ функция $\Phi(\xi; \tau)$ стремится к нулю, а безразмерная температура θ - к максимальной предельной температуре [13].

Момент теплового насыщения зависит от скорости перемещения теплового источника.

В табл. 2.2 представлены аргументы второй функции erf выражения (98).

Таблица 2.2

ξ	$U = 1$	$U = 100$
-1	1,36	1,44
-9	1,28	1,36

Из таблицы видно, что в интервале изменения параметра U от 1 до 100 аргумент второй функции не превышает 1,5. Поэтому время теплового насыщения на поверхности полубесконечного тела при действии теплового источника постоянной интенсивности приближенно можно найти из выражения

$$\frac{\xi + UF_{0H} - 1}{2\sqrt{F_{0H}}} = A,$$

откуда

$$F_{0H} = \frac{4A^2 + 2U(1 - \xi) + 2A\sqrt{4A^2 + 4U(1 - \xi)}}{2U^2}.$$

Принимая $A=1,5$, получим

$$F_{0H} = \frac{9 + 2U(1 - \xi) + 2A\sqrt{4U(1 - \xi) + 9}}{2U^2}. \quad (99)$$

Для задней кромки теплового источника $\xi = -1$ формула для нахождения времени теплового насыщения определяется выражением

$$F_{0H} = \frac{9 + 4U + 3\sqrt{8U + 9}}{2U^2}. \quad (100)$$

Для произвольной точки детали размерное время насыщения

$$t_H = \frac{h^2}{a} F_{0H};$$

для принятого условия $A=1,5$ с учетом (99) размерное время насыщения

$$t_H = \frac{9a}{2V^2} + \frac{h(1 \pm \xi)}{V} + \frac{3a}{2V^2} \sqrt{4 \frac{Vh}{a} (1 \pm \xi) + 9},$$

где $\xi = z/h$; z - координата точки; знак “-“ берется для точек, лежащих между передней кромкой источника и его серединой, а “+” - для точек, расположенных от середины источника к задней кромке и далее за ней.

Для $\xi = 1$; $t_H = \frac{9a}{V^2}$;

для $\xi = -1$; $t_H = \frac{9a}{2V} + \frac{2h}{V} + \frac{3a}{2V^2} \sqrt{8 \frac{Vh}{a} + 9}$.

Как видно, время насыщения зависит от положения точки на поверхности тела, скорости перемещения источника тепла, V , области его действия $(-h, +h)$ и температуропроводности материала.

3. Метод интегральных преобразований

3.1. Сущность метода

Метод интегральных преобразований заключается в непосредственном интегрировании уравнения теплопроводности. При этом используются граничные и начальные условия.

Пусть задано дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + b_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + c = \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial t}. \quad (101)$$

Функция U зависит от переменных x_1 , x_2 и времени t . Сущность метода заключается в последовательном применении к (101) интегральных операторов вида

$$\bar{F}(\lambda, x_2, t) = \frac{1}{C_\lambda} \int_a^b f(x_1, x_2, t) \rho(x_1) K_\lambda(x_1, \lambda) dx_1,$$

позволяющих исключить операцию дифференцирования сначала по переменной x_1 (где a и b - интервалы изменения переменной x_1 , могут быть и бесконечными).

Уравнение (101) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\lambda} \int_a^b \left(a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + b_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + c \right) \rho(x_1) K_\lambda(x_1, \lambda) dx_1 = \\ = \frac{1}{C_\lambda} \int_a^b \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial t} \rho(x_1) K_\lambda(x_1, \lambda) dx_1. \end{aligned}$$

После интегрирования:

$$-\lambda^2 \bar{U}(\lambda, x_2, t) + a_2 \frac{\partial^2 \bar{U}(\lambda, x_2, t)}{\partial x_2^2} + b_2 \frac{\partial \bar{U}(\lambda, x_2, t)}{\partial x_2} + \bar{c}(\lambda, x_2, t) = \frac{\partial \bar{f}(\lambda, x_2, t)}{\partial t}, \quad (102)$$

где $\bar{U}(\lambda, x_2, t)$ оператор.

Затем по переменной x_2 - преобразование вида

$$\tilde{F}(\lambda, \gamma, t) = \frac{1}{C_\lambda} \int_c^d \bar{f}(\lambda, x_2, t) \rho(x_2) K_\gamma(x_2, \gamma) dx_2.$$

Тогда уравнение (102) запишется так:

$$\frac{1}{C_\lambda} \int_c^d \left\{ -\lambda^2 \bar{U}(\lambda, x_2, t) + a_{22} \frac{\partial^2 \bar{U}(\lambda, x_2, t)}{\partial x_2^2} + b_2 \frac{\partial \bar{U}(\lambda, x_2, t)}{\partial x_2} + \bar{c}(\lambda, x_2, t) \right\} \rho(x_2) * K_\gamma(x_2, \gamma) dx_2 = \frac{1}{C_\lambda} \int_c^d \frac{\partial \bar{f}(\lambda, x_2, t)}{\partial t} \rho(x_2) K_\gamma(x_2, \gamma) dx_2. \quad (103)$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\lambda^2 \tilde{U}(\lambda, \gamma, t) - \gamma^2 \tilde{U}(\lambda, \gamma, t) + \tilde{c}(\lambda, \gamma, t) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\lambda, \gamma, t).$$

Решая это уравнение, находим $\tilde{U}(\lambda, \gamma, t)$ - оператор; λ и γ - собственные числа задачи.

Затем совершаются обратные интегральные преобразования. Для случая интегрирования в конечных пределах формулы перехода имеют вид

$$\bar{U}(\lambda, x_2, t) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \tilde{U}(\lambda, \gamma, t) K_\gamma(x_2, \gamma) \quad (104)$$

и

$$U(x_1, x_2, t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \bar{U}(\lambda, x_2, t) K_{\lambda}(x_1, \lambda) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \tilde{U}(\lambda, \gamma, t) K_{\gamma}(x_2, \gamma) K_{\lambda}(x_1, \lambda), \quad (105)$$

где K_{γ} и K_{λ} - собственные функции преобразования; $\rho(x_1)$ и $\rho(x_2)$ - весовые функции; C_{γ} и C_{λ} - нормирующие делители.

Для того, чтобы осуществить интегральное преобразование, например - по координате x_1 , необходимо выполнить действия в такой последовательности:

1. Выделить в дифференциальном уравнении дифференциальное выражение, зависящее только от переменной x_1 .

В общем виде выражение записано так:

$$\mu_{jU} = a_{11}(x_1) \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + b_1(x_1) \frac{\partial U}{\partial x_1} + c(x_1) U.$$

2. Найти весовую функцию $\rho(x_1)$ как решение дифференциального уравнения

$$b_1(x_1) \rho(x_1) = \frac{d}{dx_1} (a_{11}(x_1) \rho(x_1)).$$

3. Найти ядро прямого преобразования

$$K_{\lambda}(x_1, \lambda) = \frac{1}{C_{\lambda}} \rho(x_1) K_{\lambda}(x_1),$$

где C_{λ} - нормирующий делитель определится по формуле

$$C_{\lambda} = \int_a^b \rho(x_1) [K_{\lambda}(x_1)]^2 dx_1,$$

а $K_\lambda(x_1)$ - собственная функция, которая определится как решение дифференциального уравнения (граничная задача Штурма-Лиувилля)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(p \frac{\partial K_\lambda}{\partial x_1} \right) - qK_\lambda + \lambda^2 \rho(x_1) K_\lambda = 0,$$

где

$$q = -c(x_1)\rho(x_1); \quad p = a_{11}(x_1)\rho(x_1),$$

причем

1. K_λ - удовлетворяет граничным условиям задачи.
2. Любые две собственные функции ряда (см. формулы (104) и (105)) попарно ортогональны с весом $\rho(x_1)$, что важно при определении постоянной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b \rho(x_1) K_\lambda(x_1, \lambda) K_\xi(x_1, \xi) dx_1 = 0;$$

для всех $\lambda \neq \xi$ и не равно нулю при $\lambda = \xi$, аналогично для $K_\gamma(x_2, \gamma)$

$$\int_c^d \rho(x_2) K_\gamma(x_2, \gamma) K_r(x_2, r) dx_2 = 0; \quad \text{при } \gamma = r.$$

При интегрировании в бесконечных пределах подход аналогичен [2].

3.2. Пример применения метода

Для пояснения приведенных формул рассмотрим задачу из лекционного курса “Уравнения в частных производных” [2].

Задача 1. Необходимо найти распределение тепла в прямоугольном параллелепипеде $0 \leq x_1 \leq a$; $0 \leq x_2 \leq b$; $0 \leq x_3 \leq c$, если на боковых поверхностях поддерживается постоянная температура $T_0 = \text{const}$. Начальная температура $T|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3)$ (рис. 33). Необходимо решить уравнение

$$\frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \quad (106)$$

при граничных и начальных условиях

$$T|_{x_1=0} = T|_{x_1=a} = T|_{x_2=0} = T|_{x_2=b} = T|_{x_3=0} = T|_{x_3=c} = T_0. \quad (107)$$

Сведем задачу подстановкой

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = T(x_1, x_2, x_3, t) - T_0$$

к нулевому граничному условию.

$$\theta|_{x_1=0} = \theta|_{x_1=a} = \theta|_{x_2=0} = \theta|_{x_2=b} = \theta|_{x_3=0} = \theta|_{x_3=c} = 0;$$

$$\theta|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3) - T_0.$$

1. Исключим дифференцирование по переменной x_1 .

1.1. Выделяем в дифференциальном уравнении дифференциальное выражение, зависящее только от x_1 .

$$\mu_{1U} = a_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + b_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + c(x_1)\theta = 1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + 0 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 0 \cdot \theta,$$

тогда $a_{11} = 1$; $b_1 = 0$; $c = 0$.

1.2. Находим весовую функцию $\rho(x_1)$

$$0 \cdot \rho(x_1) = \frac{d}{dx_1}(1 \cdot \rho(x_1)),$$

отсюда

$$\frac{d\rho(x_1)}{dx_1} = 0; \quad \rho(x_1) = C.$$

Примем $C = 1$.

1.3. Находим собственную функцию $\bar{K}_1(x_1)$ из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(p \frac{d\bar{K}_1}{dx_1} \right) - q\bar{K}_1 + m_\gamma^2 \rho(x_1) \bar{K}_1 = 0,$$

где

$$q = -C\rho(x_1) = 0; \quad p = a_{11}\rho(x_1) = 1.$$

Тогда получим

$$\frac{d^2 \bar{K}_1}{dx_1^2} + m_\gamma^2 \bar{K}_1 = 0,$$

где $m_\gamma > 0$.

Решение линейного уравнения:

$$\bar{K}_1 = A_m \cos m_\gamma x_1 + B_m \sin m_\gamma x_1,$$

причем \bar{K}_1 удовлетворяет граничным условиям задачи.

$$\bar{K}_1|_{x_1=0} = \bar{K}_1|_{x_1=a} = 0.$$

Подставляя первое условие, получим

$$A_m \cdot 1 + B_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_m = 0;$$

подставляем второе условие

$$B_m \sin m_\gamma a = 0;$$

примем $B_m = 1$;

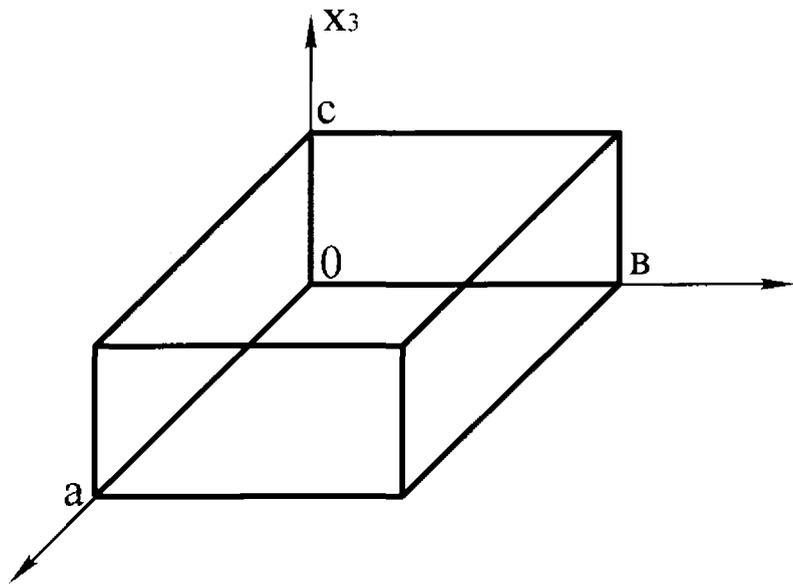


Рис.33. Расчетная схема

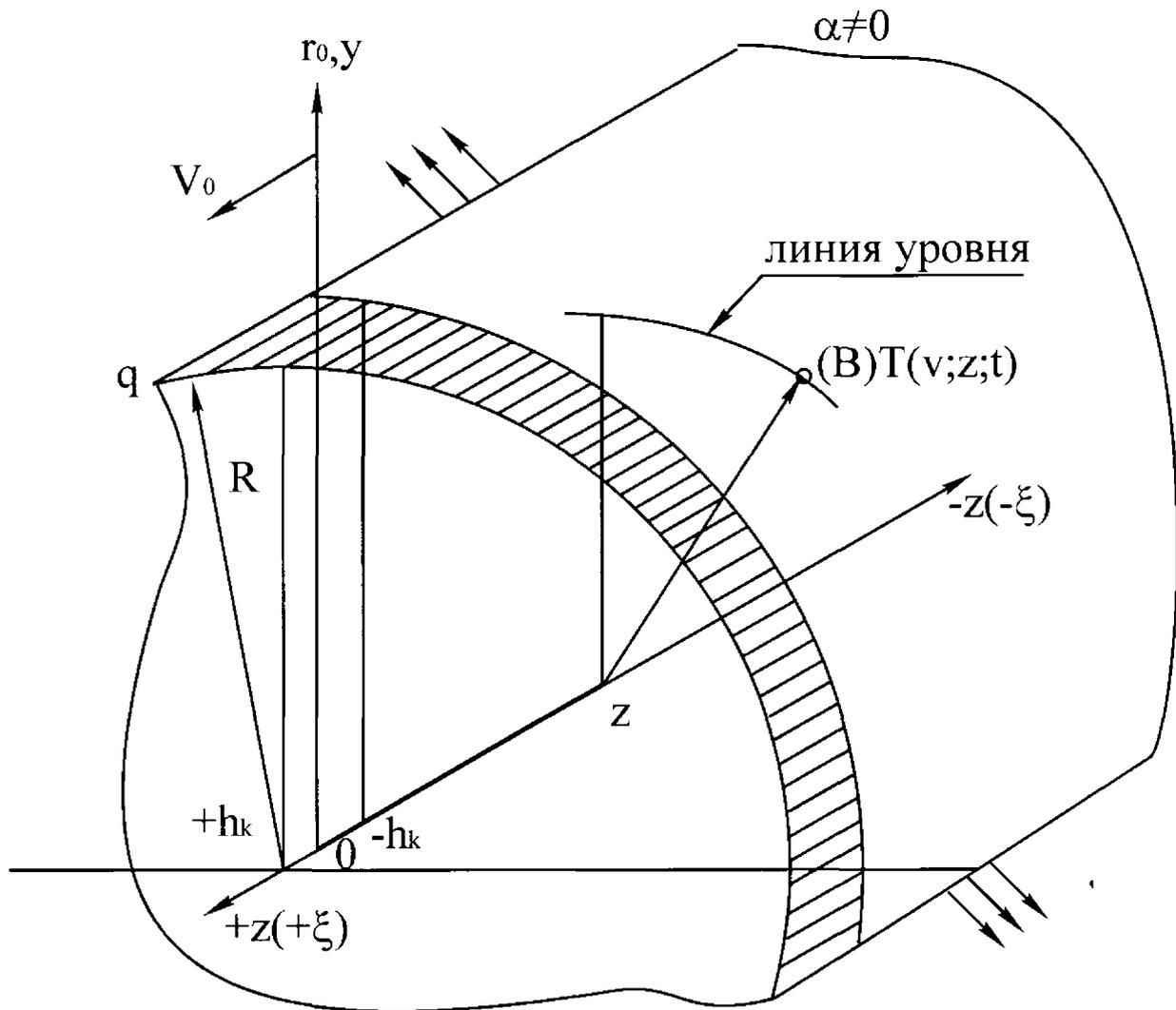


Рис.34. Расчетная схема шлифования цилиндрических деталей (кольцевой источник тепла)

$m_\gamma a = \pi m$ - корни характеристического уравнения;

$m_\gamma = \frac{\pi m}{a}$ - собственные числа задачи, где $m = 1, 2, 3, \dots$

Тогда собственная функция запишется таким образом:

$$\bar{K}_1 = \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right).$$

1.4. Нормирующий делитель:

$$C_\gamma = \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = \frac{a}{2}.$$

1.5. Ядро преобразования:

$$\bar{K}_1(x_1, \gamma) = \frac{1}{C_\gamma} \rho(x_1) \bar{K}_1 = \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right).$$

1.6. Осуществим интегральное преобразование

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 &= \frac{2}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 + \frac{2}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 + \\ &+ \frac{2}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1. \end{aligned} \quad (108)$$

Учитывая, что формула перехода к изображению

$$\bar{\theta}(\gamma, x_2, x_3, t) = \frac{2}{a} \int_0^a \theta(x_1, x_2, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1,$$

тогда первый интеграл

$$\frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2}{a} \int_0^a \theta(x_1, x_2, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 \right] = \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}.$$

Второй и третий интегралы

$$\frac{2}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\frac{2}{a} \int_0^a \theta(x_1, x_2, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 \right] = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_2^2};$$

$$\frac{2}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left[\frac{2}{a} \int_0^a \theta(x_1, x_2, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 \right] = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_3^2}.$$

Вычислим, интегрируя по частям, последний интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} dx_1 &= \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} dx_1 = dV; \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) = U \\ V = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}; dU = \frac{\pi m}{a} \cos\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 \end{aligned} \right|; \\ &= \frac{2}{a} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) \right]_0^a - \frac{\pi m}{a} \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cos\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = \\ &= -\frac{2}{a} \frac{\pi m}{a} \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cos\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = \left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx_1 = dV; U = \cos\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) \\ V = \theta; dU = -\frac{\pi m}{a} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 \end{aligned} \right| = \\ &= -\frac{2}{a} \frac{\pi m}{a} \left[\theta \cos\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) \right]_0^a + \frac{\pi m}{a} \int_0^a \theta \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1; \quad \theta|_{x_1=a} = \theta|_{x_1=0} = 0, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 &= -\frac{2}{a} \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \int_0^a \theta \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = \\ &= -\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \int_0^a \theta \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 = -m_\gamma^2 \tilde{\theta}(\gamma, x_2, x_3, t). \end{aligned}$$

Уравнение (106) запишется в таком виде

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -m_{\gamma}^2 \bar{\theta} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_3^2}. \quad (109)$$

2. Исключаем дифференцирование по переменной x_2 .

2.1. Выделяем дифференциальное выражение, зависящее только от x_2 .

$$\mu_{2U} = a_{22}(x_2) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x_2^2} + b_2(x_2) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} + c(x_2) \tilde{\theta};$$

$$a_{22} = 1; \quad b_2 = 0; \quad c = 0.$$

2.2. По аналогии весовая функция $\rho(x_2) = 1$.

2.3. Собственная функция - $\bar{K}_2(x_2)$

$$\frac{d^2 \bar{K}}{dx_2^2} + n_{\eta}^2 \bar{K}(x_2) = 0,$$

где $n_{\eta} > 0$.

Решение

$$\bar{K}_2(x_2) = A_n \cos(n_{\eta} x_2) + B_n \sin(n_{\eta} x_2)$$

$\bar{K}_2(x_2)$ - удовлетворяет граничным условиям задачи.

$$\bar{K}_2(x_2)|_{x_2=0} = \bar{K}_2(x_2)|_{x_2=b} = 0.$$

Подставляя в решение, получим

$$A_n = 0; \quad \sin n_{\eta} b = 0; \quad B_n \neq 0.$$

Собственные числа задачи

$$n_{\eta} b = \pi n; \quad n_{\eta} = \frac{\pi n}{b},$$

где n - целое число; $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Принимая $V_n = 1$, получим собственную функцию задачи:

$$\bar{K}_2(x_2) = \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right).$$

2.4. Нормирующий делитель:

$$C_\eta = \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) dx_2 = \frac{b}{2}.$$

2.5. Ядро преобразования:

$$\bar{K}_2(x_2, \eta) = \frac{1}{C_\eta} \rho(x_2) \bar{K}_2(x_2) = \frac{2}{b} \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right).$$

Тогда формула перехода к изображению такова:

$$\tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t) = \frac{2}{b} \int_0^b \bar{\theta}(\gamma, x_2, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) dx_2.$$

2.6. Осуществляем установленное интегральное преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{2}{b} \int_0^b \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) dx_2 &= \frac{2}{b} \int_0^b \left(-m_\gamma^2\right) \bar{\theta}(\gamma, x_2, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) dx_2 + \\ &+ \frac{2}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_2^2} \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) dx_2 + \frac{2}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_3^2} \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) dx_2. \end{aligned} \quad (110)$$

Вычислим аналогично интегралы и получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t)}{\partial t} &= -m_\gamma^2 \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t) - n_\eta^2 \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t) + \\ &+ \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t)}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (111)$$

3. Исключаем дифференцирование по переменной x_3 .

3.1. Выделим дифференциальное выражение:

$$\mu_{3U} = a_{33} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_3} + c(x_3) \tilde{\theta};$$

$$a_{33} = 1; \quad b_3 = 0; \quad c = 0.$$

3.2. Весовая функция $\rho(x_3) = 1$.

3.3. Собственная функция как решение уравнения:

$$\frac{d^2 \bar{K}_3(x_3)}{dx_3^2} + s_\xi^2 \bar{K}_3(x_3) = 0,$$

где $\bar{K}_3(x_3)$ удовлетворяет граничным условиям задачи

$$\bar{K}_3|_{x_3=0} = \bar{K}_3|_{x_3=c} = 0.$$

Получим собственные числа задачи:

$$s_\xi C = \pi s,$$

где $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

$$\bar{K}_3(x_3) = \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right).$$

3.4. Нормирующий делитель:

$$C_\xi = \int_0^c \sin^2\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) dx_3 = \frac{c}{2}.$$

3.5. Ядро преобразования:

$$\bar{K}_3(x_3) = \frac{1}{C_\xi} \rho(x_3) \bar{K}_3(x_3) = \frac{2}{c} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right).$$

3.6. Осуществляем преобразование в установленных пределах, учитывая, что переход к изображению осуществляется по формуле

$$\tilde{\theta}(\gamma, \eta, \xi, t) = \frac{2}{c} \int_0^c \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) dx_3.$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{c} \int_0^c \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) dx_3 = -\frac{2}{c} \int_0^c \left(m_\gamma^2 + n_\eta^2\right) \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t) \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) dx_3 + \\ + \frac{2}{c} \int_0^c \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t)}{\partial x_3^2} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) dx_3. \end{aligned} \quad (112)$$

4. Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, где $\tilde{\theta}(\gamma, \eta, \xi, t)$ - оператор.

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{\theta}(\gamma, \eta, \xi, t)}{\partial t} = -\left(m_\gamma^2 + n_\eta^2 + s_\xi^2\right) \tilde{\theta}(\gamma, \eta, \xi, t),$$

где

$$m_\gamma = \frac{\pi m}{a}; \quad n_\eta = \frac{\pi n}{b}; \quad s_\xi = \frac{\pi s}{c}.$$

Решение уравнения имеет вид

$$\tilde{\theta}(\gamma, \eta, \xi, t) = C_{mns} e^{-k(m_\gamma^2 + n_\eta^2 + s_\xi^2)t},$$

где C_{mns} - постоянная интегрирования.

Осуществляем обратные переходы в такой последовательности:

$$\tilde{\theta}(\gamma, \eta, \xi, t) \rightarrow \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t) \rightarrow \bar{\theta}(\gamma, x_2, x_3, t) \rightarrow \theta(x_1, x_2, x_3, t);$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\gamma, \eta, x_3, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{\theta} \bar{K}_3(x_3) = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} C_{mns} e^{-k(m_\gamma^2 + n_\eta^2 + s_\xi^2)t} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right); \end{aligned} \quad (113)$$

$$\bar{\theta}(\gamma, x_2, x_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_{mns} e^{-k(m_\gamma^2 + n_\eta^2 + s_\xi^2)t} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right); \quad (114)$$

и, наконец, оригинал

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}(\gamma, x_2, x_3, t) \bar{K}_1(x_1) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_{mns} e^{-k(m_\gamma^2 + n_\eta^2 + s_\xi^2)t} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right). \end{aligned} \quad (115)$$

В случае бесконечных пределов интегрирования вместо сумм применяются интегральные суммы [2].

В решении (115) C_{mns} - постоянная интегрирования.

Для ее нахождения используем начальное условие задачи:

$$\theta_0 = f(x_1, x_2, x_3) - T_0$$

и ее свойство ортогональности собственных функций

$$K_1 = \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right); \quad K_2 = \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right); \quad K_3 = \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right),$$

которое заключается в следующих условиях:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m_1}{a} x_1\right) dx_1 &= \begin{cases} 0; m_1 \neq m \\ \frac{a}{2}; m_1 = m \end{cases}; \\ \int_0^b \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n_1}{b} x_2\right) dx_2 &= \begin{cases} 0; n_1 \neq n \\ \frac{b}{2}; n_1 = n \end{cases}; \\ \int_0^c \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) \sin\left(\frac{\pi s_1}{c} x_3\right) dx_3 &= \begin{cases} 0; s_1 \neq s \\ \frac{c}{2}; s_1 = s \end{cases}. \end{aligned} \quad (116)$$

Подставив в (115) $t = 0$, получим

$$f(x_1, x_2, x_3) - T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_{mns} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right). \quad (117)$$

В правой части (117) находится бесконечное количество неизвестных C_{nms} . Однако их можно определить, используя (116).

Умножим правую и левую части (117) на комплекс, например:

$$\sin\left(\frac{\pi}{c}x_3\right)\sin\left(\frac{2\pi}{b}x_2\right)\sin\left(\frac{3\pi}{a}x_1\right),$$

где $s=1$; $n=2$; $m=3$ и возьмем от левой и правой частей полученной формулы тройной интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \int_0^c [f(x_1, x_2, x_3) - T_0] \sin\left(\frac{\pi}{c}x_3\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}x_2\right) \sin\left(\frac{3\pi}{a}x_1\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_{nms} \int_0^a \sin\left(\frac{3\pi}{a}x_1\right) dx_1 \int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}x_2\right) dx_2 * \\ & * \int_0^c \sin\left(\frac{\pi}{c}x_3\right) \sin\left(\frac{\pi s}{c}x_3\right) dx_3. \end{aligned} \quad (118)$$

Из всех бесконечных сумм, состоящих из тройных интегралов, в правой части останется одно слагаемое, соответствующее $m=3$; $n=2$; $s=1$, т.е.

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c [f(x_1, x_2, x_3) - T_0] \sin\left(\frac{\pi}{c}x_3\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}x_2\right) \sin\left(\frac{3\pi}{a}x_1\right) dx_1 dx_2 dx_3 = C_{231} \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2}.$$

Обобщая проведенные рассуждения для любого n , m и s , можно записать формулу определения произвольных постоянных интегрирования:

$$C_{nms} = \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c [f(x_1, x_2, x_3) - T_0] \sin\left(\frac{\pi m}{a}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}x_2\right) \sin\left(\frac{\pi s}{c}x_3\right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (119)$$

Тогда задача решается так:

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c [f(x_1, x_2, x_3) - T_0] \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) * \right. \\ \left. * \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) dx_1 dx_2 dx_3 \right\} e^{-k\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{s^2}{c^2}\right) t} \sin\left(\frac{\pi s}{c} x_3\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right). \quad (120)$$

Вернемся к рассмотрению задач на движущиеся полосовые источники тепла.

4. Шлифование цилиндрических деталей (кольцевой источник тепла)

4.1. Шлифование сплошных деталей

Необходимо сразу заметить, что при шлифовании цилиндрических деталей источник в виде пятна контакта движется по винтовой поверхности. Кольцевая же схема не соответствует реальной схеме шлифования. Исследования выводимого ниже решения в [6] показали, что для оценки среднеинтегральных по объему температур, предопределяющих тепловые деформации цилиндрических деталей, данное решение имеет приемлемую точность.

На рис. 34 представлена схема движения кольцевого источника по поверхности цилиндра.

Задача формулируется таким образом.

Пусть кольцевой источник тепла шириной $2h_K$ движется в положительном направлении от Z (плотность теплового потока q)

по поверхности бесконечного цилиндра радиуса R со скоростью V . На поверхности бесконечного цилиндра задан теплообмен $\alpha \neq 0$. Источник подействовал в момент времени $\tau = 0$. Необходимо определить температуру в точке B в цилиндрических подвижных координатах в момент времени $\tau = t$ от начала движения. Как и в предыдущем разделе, задачу будем решать в подвижной системе координат.

Ось Y проходит через середину теплового кольца.

Для решения задачи удобно перейти к цилиндрическим координатам. Учитывая симметричность задачи, координату φ исключаем.

Дифференциальное уравнение теплопроводности в относительных координатах запишется так:

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + P_0. \quad (121)$$

Начальные и граничные условия:

$$\theta|_{F_0=0} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B_i \theta(\rho, \xi, F_0)|_{\rho=1} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pm\infty} = 0, \quad (122)$$

где $\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$ - безразмерная температура;

$F_0 = \frac{a\tau}{R^2}$ - число Фурье;

$U = \frac{V}{a} R$ - безразмерный комплекс, характеризующий

движение, критерий Пекле;

$B_1 = \frac{\alpha}{\lambda} R$ - критерий Био, характеризующий теплообмен;

$\rho = \frac{r}{R}$; $\xi = \frac{z}{R}$ - безразмерные координаты.

Источник тепла описывается критерием Померанцева:

$$P_0 = \frac{K_1(\tau)}{1 - \rho_1} \delta(\xi) \delta(\rho),$$

где $K_1(\tau) = q(\tau)R/(\lambda T_0)$ - критерий Кирпичева;

$q(\tau)$ - плотность теплового потока;

$\delta(\xi)$; $\delta(\rho)$ - дельта функции.

Причем

$$\delta(\xi) = \begin{cases} 1; & |\xi| \leq h \\ 0; & |\xi| > h \end{cases},$$

где $h = \frac{h_k}{R}$;

$$\delta(\rho) = \begin{cases} 1; & \rho_1 < \rho < 1 \\ 0; & \rho < \rho_1 \end{cases},$$

где $\rho_1 \rightarrow 1$.

Применим метод интегральных преобразований для решения поставленной задачи.

Последовательность решения

1. Преобразование по координате ρ .
2. Преобразование по координате ξ .
3. Решение дифференциального уравнения.
4. Обратный переход по координате ξ .
5. Обратное преобразование по координате ρ .

1. Исключаем дифференцирование по переменной ρ .

Выделяем в (121) дифференциальное выражение только от ρ вида

$$\mu_{i\rho} = a_{\rho\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + b_{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + c(\rho)\theta.$$

Это выражение имеет вид

$$\mu_{i\rho} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \right] = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho};$$

$$a_{\rho\rho} = 1; \quad b_{\rho} = \frac{1}{\rho}; \quad c(\rho) = 0.$$

Находим весовую функцию $P(\rho)$:

$$b_{\rho} P(\rho) = \frac{d}{d\rho} (a_{\rho\rho} P(\rho));$$

$$\frac{1}{\rho} P(\rho) = \frac{d}{d\rho} (P(\rho)); \quad \frac{P(\rho)}{\rho} = \frac{dP}{d\rho};$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow P(\rho) = \rho.$$

Находим собственную функцию $\bar{K}_1(\rho)$ из уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(P(\rho) \frac{d\bar{K}_1}{d\rho} \right) - q\bar{K}_1 + S_{\gamma}^2 P(\rho)\bar{K}_1 = 0.$$

$$q = -C(\rho)\rho = 0; \quad P = a_{\rho\rho} P(\rho) = \rho;$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{d\bar{K}_1}{d\rho} \right) + S_{\gamma}^2 \rho \bar{K}_1 = 0;$$

ИЛИ

$$\rho \frac{d^2 \bar{K}_1}{d\rho^2} + \frac{d\bar{K}_1}{d\rho} + S_{\gamma}^2 \rho \bar{K}_1 = 0,$$

или

$$\rho^2 \frac{d^2 \bar{K}_1}{d\rho^2} + \rho \frac{d\bar{K}_1}{d\rho} + S_\gamma^2 \rho^2 \bar{K}_1 = 0.$$

При решении многих задач математической физики приходят к уравнению Бесселя:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (k^2 x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

где ν и k - константы.

Решение данного уравнения есть функция

$$y = C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx),$$

где $J_\nu(kx)$ - функция Бесселя 1-го рода; ν -го порядка;

$Y_\nu(kx)$ - функция Бесселя 2-го рода; ν -го порядка (функция Вебера).

В нашем случае $\nu=0$, поэтому решение запишется таким образом:

$$\bar{K}_1(\rho) = C_1 J_0(S\rho) + C_2 Y_0(S\rho),$$

причем собственная функция $\bar{K}_1(\rho)$ удовлетворяет граничным условиям задачи. Из физического смысла задачи следует, что температура на оси детали $\rho=0$ ограничена, т.е. $\theta|_{\rho=0} \neq \infty$, но тогда и $\bar{K}_1|_{\rho=0} \neq \infty$, а $Y(0) \rightarrow -\infty$, поэтому второе слагаемое решения следует отбросить.

Получим $\bar{K}_1(\rho) = C_1 J_0(S\rho)$; принимаем $C_1 = 1$. Второе граничное условие задачи:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B_i \theta|_{\rho=1} = 0,$$

поэтому

$$\frac{\partial \bar{K}_1}{\partial \rho} + B_i \bar{K}_1 \Big|_{\rho=1} = 0.$$

Получим характеристическое уравнение для определения собственных чисел S_n

$$B_i J_0(S) + [J_0(S\rho)]' \Big|_{\rho=1} = 0,$$

или

$$B_i J_0(S) - S J_1(S) = 0,$$

откуда находим $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ $n \rightarrow \infty$ - корни характеристического уравнения, причем $S_n > 0$.

Тогда собственная функция имеет вид

$$\bar{K}_1 = J_0(S_n \rho).$$

Определим нормирующий делитель в соответствии с формулой

$$C_1 = \int_0^1 P(\rho) [\bar{K}_1(\rho)]^2 d\rho = \int_0^1 \rho J_0^2(S_n \rho) d\rho.$$

Из теории Бесселевых функций [2] известно значение интеграла:

$$\int_0^l x J_\nu^2\left(\mu \frac{x}{l}\right) dx = \frac{l^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 \nu^2}{\beta^2 \mu^2}\right) J_\nu^2(\mu),$$

где μ - один из корней характеристического уравнения

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0.$$

Вычислим

$$\int_0^1 \rho J_0^2(S_n \rho) d\rho = \left| \begin{array}{l} \rho = \frac{r}{R}; r_n = 0; r_b = R \\ d\rho = \frac{1}{R} dr \end{array} \right| = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2\left(S_n \frac{r}{R}\right) dr$$

при $B_i J_0(S) - S J_1(S) = 0$.

По аналогии в нашем случае

$$\frac{S_n}{R} \rightarrow \frac{\mu}{\ell}; \quad R \rightarrow \ell; \quad \nu = 0; \quad B_i \rightarrow \alpha; \quad \beta = 1; \quad S_n \rightarrow \mu; \quad S \rightarrow x,$$

ПОЭТОМУ

$$\frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2 \left(S_n \frac{r}{R} \right) dr = \frac{1}{R^2} \frac{R^2}{2} \left(1 + \frac{B_i^2 - 1 \cdot 0}{1 \cdot S_n^2} \right) J_0^2(S_n).$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{B_i^2}{S_n^2} \right) J_0^2(S_n).$$

Ядро преобразования:

$$\bar{K}_1(\rho, S) = \frac{1}{C_1} J_0(S_n \rho) \rho.$$

Осуществим интегральное преобразование по переменной ρ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int_0^1 \left[\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + P_0 \right] \rho J_0(S_n \rho) d\rho = \\ = \frac{1}{C_1} \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial F_0} \rho J_0(S_n \rho) d\rho. \end{aligned} \quad (124)$$

Формула перехода к изображению

$$\bar{T}_H(S, \xi, F_0) = \frac{1}{C_1} \int_0^1 \theta(\rho, \xi, F_0) J_0(S_n \rho) \rho d\rho.$$

Вычислим интегралы в (124):

$$\frac{1}{C_1} \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial F_0} J_0(S_n \rho) \rho d\rho = \frac{\partial}{\partial F_0} \left\{ \frac{1}{C_1} \int_0^1 \theta J_0(S_n \rho) \rho d\rho \right\} = \frac{\partial \bar{T}_H}{\partial F_0};$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_1} \int_0^1 P_0 J_0(S_n \rho) d\rho &= \bar{P}_0(S, \rho, F_0)_H; \\
\frac{1}{C_1} \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \rho J_0(S_n \rho) d\rho &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{C_1} \int_0^1 \theta J_0(S_n \rho) \rho d\rho \right] = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2}; \\
\frac{1}{C_1} \int_0^1 \rho J_0(S_n \rho) \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right]'_p d\rho &= \left. \begin{aligned} J_0(S_n \rho) = U; \left[\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right]'_p d\rho = dV \\ dU = -S_n J_1(S_n \rho) d\rho; V = \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \end{aligned} \right| = \\
&= \frac{1}{C_1} \left[J_0(S_n \rho) \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_0^1 + S_n \int_0^1 \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} J_1(S_n \rho) d\rho \right] = \\
&= \frac{1}{C_1} \left[J_0(S_n) \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(1, \xi, F_0) + S_n \int_0^1 \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} J_1(S_n \rho) d\rho \right]. \tag{125}
\end{aligned}$$

Из теории функций Бесселя известно тождество [2]

$$\frac{d}{dx} \left[x^{v+1} J_{v+1}(\lambda x) \right] = x^{v+1} J_v(\lambda x) \lambda,$$

или для $v=0$

$$x J_0(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \left[x J_1(\lambda x) \right]'_x.$$

Применим указанную формулу для вычисления интеграла в скобках. Интегрируя по частям, получим

$$\left. \begin{aligned} \rho J_1(S_n \rho) = U; \frac{\partial \theta}{\partial \rho} d\rho = dV \\ dU = \left[\rho J_1(S_n \rho) \right]'_p = S_n \rho J_0(S_n \rho) d\rho; V = \theta \end{aligned} \right| = \frac{1}{C_1} \left[J_0(S_n) \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(1, \xi, F_0) + \right.$$

$$+ S_n \left(\theta \rho J_1(S_n \rho) \Big|_0^1 - S_n \int_0^1 \theta \rho J_0(S_n \rho) d\rho \right) = \frac{1}{C_1} \left[J_0(S_n) \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(1, \xi, F_0) + S_n \theta(1, \xi, F_0) J_1(S_n) \right] - S_n^2 \frac{1}{C_1} \int_0^1 \theta(\rho, \xi, F_0) J_0(S_n \rho) \rho d\rho,$$

но $J_1(S_n) S_n = B_1 J_0(S_n)$ из характеристического уравнения, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int_0^1 \rho J_0(S_n \rho) \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right]_{\rho} d\rho &= \frac{1}{C_1} \left[J_0(S_n) \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(1, \xi, F_0) + B_1 J_0(S_n) \theta(1, \xi, F_0) \right] - S_n^2 \bar{T}_H = \\ &= \frac{1}{C_1} J_0(S_n) \left[\frac{\partial \theta}{\partial \rho}(1, \xi, F_0) + B_1 \theta(1, \xi, F_0) \right] - S_n^2 \bar{T}_H, \end{aligned}$$

но

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B_1 \theta \Big|_{\rho=1} = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int_0^1 \rho J_0(S_n \rho) \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right]_{\rho} d\rho &= -S_n^2 \bar{T}_H(S, \xi, F_0); \\ \frac{1}{C_1} \int_0^1 \rho J_0(S_n \rho) U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\rho &= U \frac{\partial \bar{T}_H}{\partial \xi}(S, \xi, F_0). \end{aligned}$$

Уравнение (124) после интегрирования запишется так:

$$\frac{\partial \bar{T}_H}{\partial F_0} = -S_n^2 \bar{T}_H(S, \xi, F_0) + \frac{\partial^2 \bar{T}_H}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \bar{T}_H}{\partial \xi} + \bar{P}_{0H}. \quad (126)$$

2. Исключаем дифференцирование по переменной ξ . Переменная ξ изменяется в бесконечных пределах $-\infty$ до $+\infty$. В данном случае применяется комплексное преобразование Фурье. Формула прямого преобразования имеет вид

$$\bar{T}_{\text{HC}}(S, \rho, F_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\text{H}}(S, \xi, F_0) e^{-ip\xi} d\xi.$$

Применим данное преобразование к уравнению (126)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-S_n^2 \bar{T}_{\text{H}} + \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi} + \bar{P}_{0\text{H}} \right) e^{-ip\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial F_0} e^{-ip\xi} d\xi, \quad (127)$$

где

$$\bar{P}_{0\text{H}}(S, p, F_0) = \frac{1}{C_1} \int_0^1 P_0 J_0(S_n \rho) \rho d\rho.$$

Вычислим интегралы в (127)

$$\frac{\partial}{\partial F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_{\text{H}}(S, \xi, F_0) e^{-ip\xi} d\xi = \frac{\partial \bar{T}_{\text{HC}}(S, p, F_0)}{\partial F_0},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_{0\text{H}} e^{-ip\xi} d\xi = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^1 P_0 \rho J_0(S_n \rho) d\rho \right] e^{-ip\xi} d\xi = \bar{P}_{0\text{HC}}(S, p, F_0);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi^2} e^{-ip\xi} d\xi = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{H}}(S, \xi, F_0)}{\partial \xi^2} = dV; U = e^{-ip\xi} \\ V = \frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi}; dU = -ipe^{-ip\xi} d\xi \end{array} \right| = e^{-ip\xi} \frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi} ip e^{-ip\xi} d\xi.$$

Учитывая $\frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pm\infty} = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi^2} e^{-ip\xi} d\xi &= ip \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi} e^{-ip\xi} d\xi = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{T}_{\text{H}}}{\partial \xi} d\xi = dV; U = e^{-ip\xi} \\ V = \bar{T}_{\text{H}}; dU = -ipe^{-ip\xi} d\xi \end{array} \right| = \\ &= ip \left[\bar{T}_{\text{H}} e^{-ip\xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + ip \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_{\text{H}} e^{-ip\xi} d\xi \right], \end{aligned}$$

но $\bar{T}_H|_{\xi=\pm\infty} = 0$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{T}_H}{\partial \xi^2} e^{-ip\xi} d\xi = -p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_H e^{-ip\xi} d\xi = -p^2 \bar{T}_{HC};$$

$$U \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{T}_H}{\partial \xi} e^{-ip\xi} d\xi = U \left[\bar{T}_H e^{-ip\xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + ip \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_H e^{-ip\xi} d\xi \right] = ipU \bar{T}_{HC}(S, p, F_0);$$

$$-S_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_H e^{-ip\xi} d\xi = -S_n^2 \bar{T}_{HC}(S, p, F_0).$$

3. Уравнение (127) запишется в виде

$$\frac{d\bar{T}_{HC}}{dF_0} = -S_n^2 \bar{T}_{HC} - p^2 \bar{T}_{HC} + Uip \bar{T}_{HC} + \bar{P}_{0HC}$$

или

$$\frac{d\bar{T}_{HC}}{dF_0} + (S_n^2 + p^2 - Uip) \bar{T}_{HC} - \bar{P}_{0HC} = 0, \quad (128)$$

где \bar{T}_{HC} - изображение.

Решаем линейное уравнение (126). Решение ищем в виде

$$\bar{T}_{HC} = X(F_0)Y(F_0).$$

$$X'Y + Y'X + XY(S_n^2 + p^2 - Uip) - \bar{P}_{0HC} = 0;$$

$$\frac{dY}{dF_0} = Y(S_n^2 + p^2 - Uip) \Rightarrow Y(F_0) = e^{-(S_n^2 + p^2 - Uip)F_0};$$

$$\frac{dX}{dF_0} e^{-(S_n^2 + p^2 - Uip)F_0} = \bar{P}_{0HC};$$

$$X(F_0) = \int_0^{F_0} e^{(S_n^2 + p^2 - Uip)\tau} \bar{P}_{0HC} d\tau + C.$$

Отсюда

$$\bar{T}_{\text{НС}} = e^{-(S_n^2 + p^2 - U_p)F_0} \left[\int_0^{F_0} e^{\tau(S_n^2 + p^2 - U_p)} \bar{P}_{0\text{НС}} d\tau + C \right].$$

Учитывая, что $\theta|_{F_0=0} = 0$ и $\bar{T}_{\text{НС}}|_{F_0=0} = 0$, получим

$$0 = e^0 \left[\int_0^0 e^{\tau(S_n^2 + p^2 - U_p)} \bar{P}_{0\text{НС}} d\tau + C \right] \Rightarrow C = 0.$$

Получим решение (128) в виде

$$\bar{T}_{\text{НС}} = \int_0^{F_0} e^{(\tau - F_0)(S_n^2 + p^2 - U_p)} \bar{P}_{0\text{НС}} d\tau, \quad (129)$$

где τ - переменная интегрирования.

4. Осуществим обратный переход по переменной ξ ($p \rightarrow \xi$). Для этого применим обратное комплексное преобразование Фурье.

$$\bar{T}_{\text{Н}}(S, \xi, F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi} \bar{T}_{\text{НС}}(S, p, F_0) dp. \quad (130)$$

Подставляя в (129) (130), получим

$$\bar{T}_{\text{Н}}(S, \xi, F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi} \left[\int_0^{F_0} e^{(\tau - F_0)(S_n^2 + p^2 - U_p)} \bar{P}_{0\text{НС}} d\tau \right] dp.$$

Изменим порядок интегрирования, тогда

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\text{Н}}(S, \xi, F_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\tau - F_0)S_n^2} e^{(\tau - F_0)(p^2 - U_p)} e^{ip\xi} \bar{P}_{0\text{НС}} dp d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{(\tau - F_0)S_n^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\tau - F_0)(p^2 - U_p) + ip\xi} \bar{P}_{0\text{НС}} dp \right] d\tau. \end{aligned}$$

Осуществим замену переменной:

$$\begin{cases} F_0 - \tau = t; t_H = F_0 \\ -d\tau = dt; t_B = 0 \end{cases}.$$

Получим

$$\bar{T}_H(S, \xi, F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2 - Up) + ip\xi} \bar{P}_0(S, p, F_0)_{\text{HC}} dp \right] dt.$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2 - Up) + ip\xi} \bar{P}_0 \text{HC} dp &= \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2 - Up) + ip\xi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} \left[\int_0^1 \frac{K_1(F_0 - \tau)}{1 - \rho_1} \delta(\rho) \delta(\xi) * \right. \right. \\ &\quad \left. \left. * J_0(S_n \rho) \rho d\rho \right] d\xi \right] dp. \end{aligned}$$

Вычислим тройной интеграл:

$$\begin{aligned} \delta(\xi) \int_0^1 \frac{K_1(F_0 - t)}{1 - \rho_1} \delta(\rho) J_0(S_n \rho) \rho d\rho &= \delta(\xi) K_1 \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{\int_0^{\rho_1} \delta(\rho) J_0(S_n \rho) \rho d\rho + \int_0^1 \delta(\rho) J_0(S_n \rho) \rho d\rho}{1 - \rho_1} = \\ &= \delta(\xi) K_1 \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{\int_0^1 J_0(S_n \rho) \rho d\rho}{1 - \rho_1}. \end{aligned}$$

Данная дробь представляет неопределенность вида 0/0, раскрываем по правилу Лопиталья

$$\delta(\xi) K_1 \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{d\rho_1} \int_0^{\rho_1} J_0(S_n \rho) \rho d\rho}{\frac{d}{d\rho_1} (1 - \rho_1)} = \delta(\xi) K_1 \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{J_0(S_n \rho_1) \rho_1}{(-1)} = -\delta(\xi) K_1 J_0(S_n);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} [-\delta(\xi)] K_i J_0(S_n) d\xi = \int_{-\infty}^{-h} \dots d\xi + \int_{-h}^{+h} \dots d\xi + \int_{+h}^{+\infty} \dots d\xi;$$

учитывая, что $\delta(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq h$ и $\delta(\xi) = 0$ при $|\xi| > h$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} [-\delta(\xi)] K_i J_0(S_n) d\xi = K_i J_0(S_n) \int_{-h}^{+h} (-1) e^{-ip\xi} d\xi =$$

$$= \left. \begin{array}{l} -ip\xi = z \\ dz = -ipd\xi \\ z_H = +iph; z_B = -iph \end{array} \right\} = K_i J_0(S_n) \int_{+iph}^{-iph} e^z \frac{dz}{ip} = K_i J_0(S_n) \frac{1}{ip} [e^{-iph} - e^{+iph}]$$

и, наконец,

$$\frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2 - uip) + ip\xi} \frac{K_i J_0(S_n)}{ip} [e^{-iph} - e^{+iph}] dp =$$

$$= \frac{K_i J_0(S_n)}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ip} e^{-t(p^2 - uip) + ip\xi} [e^{-iph} - e^{+iph}] dp =$$

$$= \frac{K_i J_0(S_n)}{C_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t(p^2 - uip) + ip\xi - iph}}{ip} dp - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t(p^2 - uip) + ip\xi + iph}}{ip} dp \right].$$

Осуществляем замену переменной

$$p = \frac{z}{\sqrt{t}}; \quad dp = \frac{1}{\sqrt{t}} dz; \quad z_H = -\infty; \quad z_B = +\infty.$$

$$\frac{K_i J_0(S_n)}{C_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tp^2 - ip(h - \xi - u)}}{ip} dp - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tp^2 - ip(-h - \xi - u)}}{ip} dp \right] =$$

$$= \frac{K_i J_0(S_n)}{C_1} \left[\int_{-\infty i \frac{z}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{z} e^{-z^2 - i \frac{z}{\sqrt{t}}(h - \xi - u)} \frac{dz}{\sqrt{t}} - \int_{-\infty i \frac{z}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{z} e^{-z^2 - i \frac{z}{\sqrt{t}}(-h - \xi - u)} \frac{dz}{\sqrt{t}} \right] =$$

$$= \frac{K_i J_0(S_n)}{C_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iz} e^{-z^2} e^{-iz \left(\frac{h-\xi-ut}{\sqrt{t}} \right)} dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iz} e^{-z^2} e^{-iz \left(\frac{-h-\xi-ut}{\sqrt{t}} \right)} dz \right];$$

Известно следующее интегральное соотношение [2]:

$$\frac{1}{2C} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{U}_1(\gamma)}{i\gamma} e^{-i\gamma\xi} d\gamma = \frac{1}{2C} \int_a^\xi U_1(\zeta) d\zeta.$$

Два последних интеграла могут быть вычислены по указанной формуле, если принять

$$\gamma \Rightarrow z; \quad \bar{U}_1(\gamma) \Rightarrow e^{-z^2}; \quad C=1;$$

в первом интеграле: $\xi = \frac{h-\xi-ut}{\sqrt{t}};$

во втором интеграле: $\xi = \frac{-h-\xi-ut}{\sqrt{t}}.$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{K_i J_0(S_n)}{C_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iz} e^{-z^2} e^{-iz \left(\frac{h-\xi-ut}{\sqrt{t}} \right)} dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iz} e^{-z^2} e^{-iz \left(\frac{-h-\xi-ut}{\sqrt{t}} \right)} dz \right] = \\ & = \frac{K_i J_0(S_n)}{C_1} \left[\int_a^{\frac{h-\xi-ut}{\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta - \int_a^{\frac{-h-\xi-ut}{\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta \right], \end{aligned}$$

где a - произвольная константа. Примем $a=0$, получим окончательно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2-utp)+ip\xi} \frac{K_i J_0(S_n)}{ip} [e^{-iph} - e^{+iph}] dp = \\ & = \frac{K_i J_0(S_n) \sqrt{\pi}}{C_1} \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{h-\xi-Ut}{\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-h-\xi-Ut}{\sqrt{t}} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{K_i J_0(S_n) \sqrt{\pi}}{C_1} \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{h - \xi - Ut}{\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{h + \xi + Ut}{\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (131)$$

Подставляя (131) в (130), получим

$$\bar{T}_H(\mathcal{S}, \xi, F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} \frac{1}{C_1} \frac{1}{1} \frac{K_i J_0(S_n) \sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{h - \xi - Ut}{\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{h + \xi + Ut}{\sqrt{t}} \right) \right] dt,$$

или

$$\bar{T}_H(\mathcal{S}, \xi, F_0) = \frac{1}{C_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} K_i J_0(S_n) \Phi(\xi, t) dt,$$

где

$$\Phi(\xi, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{h - \xi - Ut}{\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{h + \xi + Ut}{\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (132)$$

5. Осуществим обратный переход по координате ρ . В соответствии с (104) и (105) формула перехода запишется так:

$$\theta(\rho, \xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_H(\mathcal{S}, \xi, F_0) \bar{K}_1(\rho), \quad (133)$$

где $K_1(\rho) = J_0(S_n \rho)$, т.е. необходимо учесть сумму по всем собственным числам задачи.

Учитывая, что

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{S_n^2 + B_1^2}{S_n^2} \right) J_0^2(S_n),$$

где S_n - корни уравнения,

$$B_1 J_0(S) - S J_1(S) = 0, \quad (S_1, S_2, \dots, S_n, \dots).$$

Подставляя (132) в (133), получим решение задачи

$$\theta(\rho, \xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} K_i J_0(S_n) \Phi(\xi, t) dt \cdot J_0(S_n \rho) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^2 J_0(S_n \rho)}{(S_n^2 + B_i^2) J_0^2(S_n)} \frac{1}{\pi} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} K_1 J_0(S_n) \Phi(\xi, t) dt,$$

или

$$\theta(\rho, \xi, F_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^2 J_0(S_n \rho)}{(S_n^2 + B_i^2) J_0^2(S_n)} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} K_1 \Phi(\xi, t) dt, \quad (134)$$

где

$$\Phi(\xi, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{h - \xi - Ut}{\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{h + \xi + Ut}{\sqrt{t}} \right) \right], \quad (135)$$

где t - безразмерная переменная интегрирования.

Формула (134) и есть решение поставленной задачи. Для расчета по (134) необходимо задаться временем Фурье. Например, необходимо определить температуры в цилиндрической заготовке длиной L после прохождения теплового источника по всей поверхности детали. Тогда в решение (134) подставляем $F_0 = aL / (R^2 V_0)$, где V_0 - осевая скорость движения источника.

Далее задаемся координатой сечения $z = z_1$ ($z_1 < 0$) за источником и радиусом $r = r_1$ окружности в сечении (линия уровня). Подставляем в формулу

$$\rho = \frac{r_1}{R}; \quad \xi = \frac{z_1}{R}; \quad U = \frac{V_0}{a} R; \quad h = \frac{h_k}{R}$$

и вычисляем первых 5-6 слагаемых ряда, используя корни S_1, S_2, \dots, S_6 характеристического уравнения. Анализ решения показал быструю сходимость бесконечного ряда. На основании данного решения в [6] получена модель, используемая для прогнозирования осевых тепловых деформаций при резьбошлифовании ходовых винтов.

Необходимо заметить, что (134) дает заниженные результаты, так как не учитывает наличия адиабатических стенок при $z=0$ и $z=-L$.

4.2. Шлифование полых деталей

Пусть кольцевой источник тепла шириной $2hk$ движется в положительном направлении оси Z по поверхности бесконечного полого цилиндра $R_H = R_2$, $R_B = R_1$ ($R_2 > R_1$) со скоростью V . На поверхности цилиндра задан теплообмен $\alpha \neq 0$; на внутреннем диаметре теплообмен отсутствует $\alpha = 0$. Источник подействовал в момент времени τ . Необходимо найти распределение температуры в цилиндре в момент времени $\tau = t$ от начала движения.

Как и предыдущая, данная задача решается в цилиндрических подвижных осях координат (рис. 35).

Дифференциальное уравнение теплопроводности в относительных координатах запишется так:

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + P_0. \quad (136)$$

Начальные и граничные условия:

$$\theta|_{F_0=0} = 0; \quad \text{и} \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} (\rho, \xi, F_0) + B_i \theta (\rho, \xi, F_0) \right|_{\rho=1} = 0 \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} = 0 \end{cases};$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=\pm\infty} = 0; \quad \theta|_{\xi=\pm\infty} = 0. \quad (137)$$

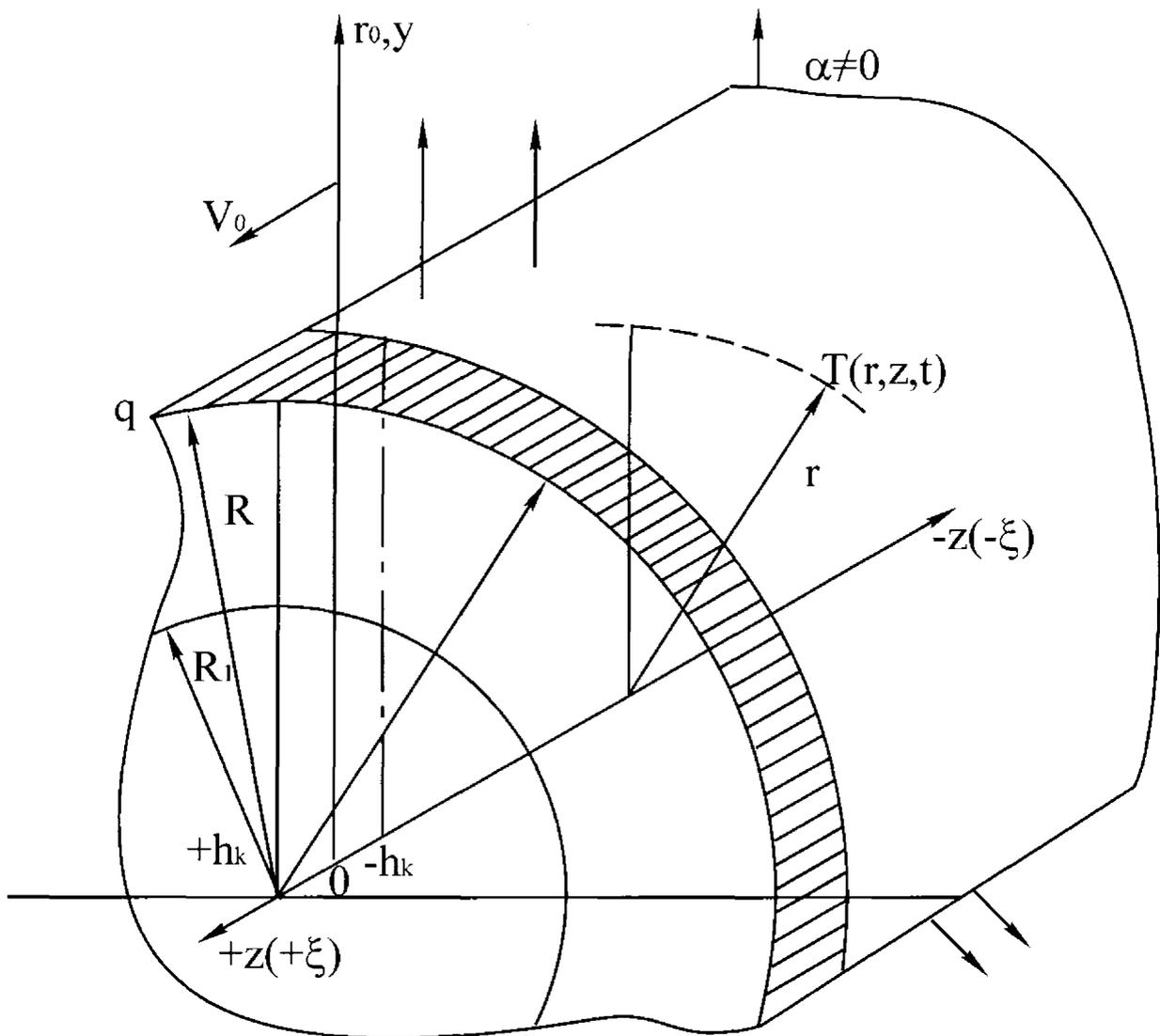


Рис.35. Расчетная схема шлифования цилиндрических деталей с внутренним отверстием (кольцевой источник тепла)

Все остальные данные аналогичны предыдущей задаче, за исключением относительной координаты $\rho = \frac{r}{R_2} \leq 1$.

Критерий Померанцева:

$$P_0 = \frac{K_i}{1 - \rho_1} \delta(\xi) \delta(\rho),$$

где

$$\delta(\xi) = \begin{cases} 1; & |\xi| \leq h \\ 0; & |\xi| > h \end{cases};$$

$$\delta(\rho) = \begin{cases} 1; & \rho_1 \leq \rho \leq 1 \\ 0; & \rho \leq \rho_1; \rho_1 \rightarrow 1 \end{cases}.$$

Последовательность решения задачи такая же:

1. Исключим дифференцирование по ρ . Собственные функции задачи включают и второе слагаемое решения уравнения Бесселя

$$\bar{K}_1(\rho) = C_1 J_0(S\rho) + C_2 Y_0(S\rho).$$

Так как при $\rho = 0$ задача физического смысла не имеет, то функция Вебера $Y_0(S\rho)$ имеет место.

Подчиним $\bar{K}_1(\rho)$ граничным условиям (137) задачи.

Учитывая, что

$$\frac{\partial \bar{K}_1(\rho)}{\partial \rho} = C_1 S J'_0(S\rho) + C_2 S Y'_0(S\rho),$$

получим

$$\begin{cases} C_1 S J'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right) + C_2 Y'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right) S = 0 \\ C_1 [S J'_0(S) + B_i J_0(S)] + C_2 [S Y'_0(S) + B_i Y_0(S)] = 0 \end{cases} \quad (138)$$

Данная система имеет решение, отличное от тривиального $C_1 = C_2 = 0$, когда определитель

$$\begin{vmatrix} SJ'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right) & SY'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right) \\ SJ'_0(S) + B_1 J_0(S) & SY'_0(S) + B_1 Y_0(S) \end{vmatrix} = 0;$$

или

$$J'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right)[SY'_0(S) + B_1 Y_0(S)] - Y'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right)[SJ'_0(S) + B_1 J_0(S)] = 0. \quad (139)$$

Из данного уравнения определяем корни S_n - собственные числа задачи $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$, где $S_n > 0$.

Сравнивая второе уравнение системы (138) и характеристическое уравнение (139), можно записать:

$$C_1 = -Y'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right); \quad C_2 = J'_0\left(S \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Таким образом, получим

$$\bar{K}_1(\rho) = -J_0(S_n \rho) Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) + J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) Y_0(S_n \rho)$$

- собственные функции задачи.

Нормирующий делитель.

$$C_\gamma = \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho \left[Y_0(S_n \rho) J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) - J_0(S_n \rho) Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) \right]^2 d\rho.$$

Обозначим $\bar{K}_1(\rho) = V_0(S_n \rho)$;

$$V_0(S_n \rho) = Y_0(S_n \rho) J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) - J_0(S_n \rho) Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right),$$

причем $\bar{K}_1(\rho)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho V_0(S_n \rho) V_0(S_k \rho) d\rho = 0 \text{ при всех } k \neq n.$$

Вычислим нормирующий делитель.

Если функции $V_m(\lambda_m r)$ и $V_n(\lambda_n r)$ взаимно ортогональны с весом r , то можно доказать интеграл [2]

$$\int_a^b r V_m^2(\lambda r) dr = \frac{r^2}{2} \left[V_m^2(\lambda r) + V_{m+1}^2(\lambda r) \right]_a^b.$$

Учитывая, что

$$\left[V_0(S_n \rho) \right]' = V_1(S_n \rho) = S_n Y_0'(S_n \rho) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - S_n J_0'(S_n \rho) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right),$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho V_0^2(S_n \rho) d\rho &= \frac{\rho^2}{2} \left[V_0^2(S_n \rho) + V_1^2(S_n \rho) \right]_{\frac{R_1}{R_2}}^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left[V_0^2(S_n) + V_1^2(S_n) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \left[V_0^2 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) + V_1^2 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left\{ Y_0(S_n) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0(S_n) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right\}^2 + S_n^2 \left\{ Y_0'(S_n) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - J_0'(S_n) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right\}^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{R_1^2}{R_2^2} \left[\left\{ Y_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right\}^2 + \right. \\ &\left. + S_n^2 \left\{ Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right\}^2 \right]. \end{aligned}$$

Учитывая известное из теории Бесселевых функций тождество [2]

$$J'_m(\lambda x)Y_m(\lambda x) - J_m(\lambda x)Y'_m(\lambda x) = \frac{2}{\pi \lambda x},$$

а также характеристическое уравнение задачи

$$J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right)Y'_0(S_n) - Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right)J'_0(S_n) = \frac{B_i}{S_n} \left(J_0(S_n)Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) - J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right)Y_0(S_n) \right),$$

получим окончательно

$$\begin{aligned} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho V_0^2(S_n \rho) d\rho &= \frac{1}{2} \left[\left\{ Y_0(S_n)J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) - J_0(S_n)Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) \right\}^2 + \right. \\ &+ S_n^2 \frac{B_i^2}{S_n^2} \left. \left\{ J_0(S_n)Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) - J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right)Y_0(S_n) \right\}^2 \right] - \\ &- \frac{1}{2} \frac{R_1^2}{R_2^2} \frac{4R_2^2}{\pi^2 S_n^2 R_1^2} = \frac{1}{2} (1 + B_i^2) V_0^2(S_n) - \frac{2}{\pi^2 S_n^2}, \end{aligned}$$

где

$$V_0(S_n) = Y_0(S_n)J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) - J_0(S_n)Y'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Нормирующий делитель:

$$C_\gamma = \frac{\pi^2 S_n^2 (1 + B_i^2) V_0^2(S_n) - 4}{2\pi^2 S_n^2}.$$

Осуществим интегральное преобразование:

$$\frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \left\{ \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + P_0 \right\} \rho \left[Y_0(S_n \rho)J'_0\left(S_n \frac{R_1}{R_2}\right) - \right.$$

$$-J_0(S_n \rho) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \Big] d\rho = \frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho \left[Y_0(S_n \rho) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0(S_n \rho) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial F_0} d\rho.$$

1. Вычисляем интегралы преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) V_0(S_n \rho) d\rho &= \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) d\rho &= dU; \quad V = V_0(S_n \rho) \\ U &= \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho}; \quad dV = S_n V_0'(S_n \rho) d\rho \end{aligned} \right| = \\ &= \frac{1}{C_\gamma} \left[\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} V_0(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 - \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \left\{ -S_n Y_1(S_n \rho) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) + S_n J_1(S_n \rho) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right\} d\rho \right]. \end{aligned}$$

Используем известные тождества [2]

$$\frac{d}{dx} [x J_1(S_n x)] = x J_0(S_n x) S_n;$$

$$\frac{d}{dx} [x Y_1(S_n x)] = x Y_0(S_n x) S_n.$$

Последний интеграл запишется так:

$$-S_n J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} Y_1(S_n \rho) d\rho + S_n Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} J_1(S_n \rho) d\rho.$$

Вычисляя по частям два последних интеграла, получим

$$\left. \begin{aligned} \rho Y_1(S_n \rho) &= V; & \frac{\partial \theta}{\partial \rho} d\rho &= dU \\ dV &= \frac{d}{d\rho} (\rho Y_1(S_n \rho)) = \rho S_n Y_0(S_n \rho) d\rho; & U &= \theta \end{aligned} \right| .$$

И

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} \rho J_1(S_n \rho) = V; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} d\rho = dU \\ dV = \rho J_0(S_n \rho) S_n d\rho; \quad U = \theta \end{array} \right| = \\
 & = -S_n J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \left\{ \theta \rho Y_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 - S_n \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \theta \rho Y_0(S_n \rho) d\rho \right\} + \\
 & + S_n Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \left\{ \theta \rho J_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 - S_n \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \theta \rho J_0(S_n \rho) d\rho \right\} = -S_n J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) * \\
 & * \theta \rho Y_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 + S_n Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \rho J_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 + S_n^2 \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \theta \rho \left[J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_0(S_n \rho) - \right. \\
 & \left. - Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_0(S_n \rho) \right] d\rho.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) V_0(S_n \rho) d\rho &= \frac{1}{C_\gamma} \left\{ \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} V_0(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 + S_n J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \rho Y_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 - \right. \\
 & \left. - S_n Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \rho J_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 - S_n^2 \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \theta \rho V_0(S_n \rho) d\rho \right\} = -S_n^2 \tilde{\theta}(S, \xi, F_0) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{C_\gamma} \left\{ \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} V_0(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 + S_n J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \rho Y_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 - S_n Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \rho J_1(S_n \rho) \Big|_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \right\} = \\
& = -S_n^2 \tilde{\theta} + \frac{1}{C_\gamma} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} \left[Y_0(S_n) J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0(S_n) Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] - \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} \frac{R_1}{R_2} * \right. \\
& * \left[Y_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] + S_n J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \Big|_{\rho=1} Y_1(S_n) - \\
& - S_n J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \Big|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} \frac{R_1}{R_2} Y_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - S_n Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \Big|_{\rho=1} J_1(S_n) + \\
& \left. + S_n Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \theta \Big|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} \frac{R_1}{R_2} J_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right\};
\end{aligned}$$

но $\frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} = 0$ - граничное условие задачи.

Получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) V_0(S_n \rho) d\rho & = \frac{1}{C_\gamma} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} \left[Y_0(S_n) J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0(S_n) Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] + \right. \\
& + S_n \theta \Big|_{\rho=1} \left[J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_1(S_n) - Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_1(S_n) \right] + \\
& \left. + \left(\frac{R_1}{R_2} \right) S_n \theta \Big|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} \left[Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \right\} - S_n^2 \tilde{\theta};
\end{aligned}$$

НО

$$\begin{aligned} & Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) = \\ & = -Y_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) + J_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_1 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, используя граничное условие,

$$J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_0'(S_n) - Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_0'(S_n) = \frac{B_i}{S_n} \left(J_0(S_n) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_0(S_n) \right).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} & J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_1(S_n) - Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_1(S_n) = -J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_0'(S_n) + Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) J_0'(S_n) = \\ & = \frac{B_i}{S_n} \left(J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) Y_0(S_n) - J_0(S_n) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right), \end{aligned}$$

окончательно имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) V_0(S_n \rho) d\rho = -S_n^2 \tilde{\theta} + \frac{1}{C_\gamma} \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} + B_i \theta \Big|_{\rho=1} \right\} * \\ & * \left[Y_0(S_n) J_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0(S_n) Y_0' \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] = -S_n^2 \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) V_0(S_n \rho) d\rho = -S_n^2 \bar{\theta}_H(S, \xi, F_0);$$

$$\frac{1}{C_\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \rho V_0(S_n \rho) d\rho = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_H}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{1}{C\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 U \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} \rho V_0(S_n \rho) d\rho = U \frac{\partial \bar{\theta}_H}{\partial \xi};$$

$$\frac{1}{C\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 P_0 \rho V_0(S_n \rho) d\rho = \bar{P}_{0H};$$

$$\frac{1}{C\gamma} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial F_0} \rho V_0(S_n \rho) d\rho = \frac{\partial \bar{\theta}_H}{\partial F_0}.$$

Тогда уравнение (136) запишется в виде

$$-S_n^2 \bar{\theta}(S, \xi, F_0) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}_H}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \bar{\theta}_H}{\partial \xi} + \bar{P}_{0H} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial F_0}. \quad (140)$$

Дальнейшее решение аналогично задаче разд. 4.1.

2. По координате ξ применим комплексное преобразование Фурье:

$$\tilde{\theta}_{Hc}(S, p, F_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\theta}_H(S, \xi, F_0) e^{-ip\xi} d\xi.$$

Тогда получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tilde{\theta}_{Hc}}{dF_0} + \tilde{\theta}_{Hc} (S_n^2 + p^2 - Uip) - \tilde{P}_{0Hc} = 0. \quad (141)$$

3. Решение данного уравнения запишется в виде

$$\tilde{\theta}_{Hc} = \int_0^{F_0} e^{(\tau - F_0)(S_n^2 + p^2 - Uip)} \tilde{P}_{0Hc} d\tau.$$

4. Обратное комплексное преобразование Фурье:

$$\bar{\theta}_H(S, \xi, F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\theta}_{Hc}(S, p, F_0) e^{ip\xi} dp,$$

или, подставляя значение $\tilde{\theta}_{\text{нс}}$, получим

$$\bar{\theta}_{\text{н}}(S, \xi, F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{-S^2 n t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2 - Uip) + ip\xi} \tilde{P}_{0\text{нс}}(S, p, F_0) dp \right] dt.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\frac{1}{C_\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2 - Uip) + ip\xi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{K_i}{1 - \rho_1} \delta(\rho) \delta(\xi) \left[Y_0(S_n \rho) J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - J_0(S_n \rho) Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \rho d\rho d\xi \right] dp.$$

Интегрируя по переменной ρ , получим

$$\delta(\xi) \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 \frac{K_i}{1 - \rho_1} \delta(\rho) V_0(S_n \rho) \rho d\rho = \delta(\xi) K_i \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{\int_{\frac{R_1}{R_2}}^{\rho_1} 0 \cdot V_0(S_n \rho) \rho d\rho + \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 1 \cdot V_0(S_n \rho) \rho d\rho}{1 - \rho_1} = \\ = \delta(\xi) K_i \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial}{\partial \rho_1} \int_{\rho_1}^1 \left[Y_0(S_n \rho) J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0(S_n \rho) Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \rho d\rho}{\frac{\partial}{\partial \rho_1} (1 - \rho_1)} = \\ = -\delta(\xi) K_i \left[Y_0(S_n) J'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) - J_0(S_n) Y'_0 \left(S_n \frac{R_1}{R_2} \right) \right] = -\delta(\xi) K_i V_0(S_n).$$

По переменной ξ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} (-\delta(\xi)) K_i V_0(S_n) d\xi = \frac{K_i V_0(S_n)}{ip} (e^{-iph} - e^{+iph});$$

и, наконец, по переменной p получим формулу

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_n(S, \xi, F_0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{C_\gamma} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} \frac{K_1 V_0(S_n)}{1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{h - \xi - Ut}{\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{h + \xi + Ut}{\sqrt{t}}\right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi C_\gamma} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} K_1 V_0(S_n) \Phi(\xi, t) dt,\end{aligned}$$

где

$$\Phi(\xi, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{h - \xi - Ut}{\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{h + \xi + Ut}{\sqrt{t}}\right) \right].$$

Переход от изображения $\bar{\theta}_n$ к оригиналу $\theta(\rho, \xi, F_0)$ осуществим по формуле

$$\theta(\rho, \xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}_n(S, \xi, F_0) \bar{K}_1(\rho).$$

Тогда решение поставленной задачи запишется в таком виде:

$$\theta(\rho, \xi, F_0) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^2 V_0(S_n) V_0(S_n \rho)}{\pi^2 S_n^2 (1 + B_1^2) V_0^2(S_n) - 4} \int_0^{F_0} e^{-S_n^2 t} K_1 \Phi(\xi, t) dt. \quad (142)$$

Данная модель может быть применена для оценки среднеинтегральных температур при шлифовании длинных цилиндрических деталей, например полых винтов.

5. Шлифование цилиндрических деталей с винтовым источником тепла

Расчетная схема задачи максимально приближена к реальной схеме (рис. 36). Источник тепла - прямоугольник шириной L и длиной $2hk$ - движется по винтовой линии. Угловая скорость перемещения источника w , осевая V , радиус цилиндра R .

На поверхности цилиндра задан теплообмен ($\alpha \neq 0$). Источник подействовал и одновременно начал движение в момент времени $\tau = 0$. Необходимо найти температуру в момент времени $\tau = t$ от начала движения. Как и предыдущая, данная задача решается в цилиндрических подвижных осях координат. Полярная ось r_0 проходит через центр площадки ($2hk \times L$) и движется вместе с источником, т.е. ось r_0 описывает поверхность прямого геликоида. Температурное поле задачи несимметричное, поэтому имеет место координата φ .

Дифференциальное уравнение теплопроводности в относительных координатах запишется в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right)' + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \Omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + P_0. \quad (143)$$

Начальные и граничные условия задачи записываются так:

$$\theta|_{F_0} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B_1 \theta(\rho, \varphi, \xi, F_0)|_{\rho=1} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pm\infty} = 0;$$

$$\theta|_{\varphi=0} = \theta|_{\varphi=2\pi}, \quad (144)$$

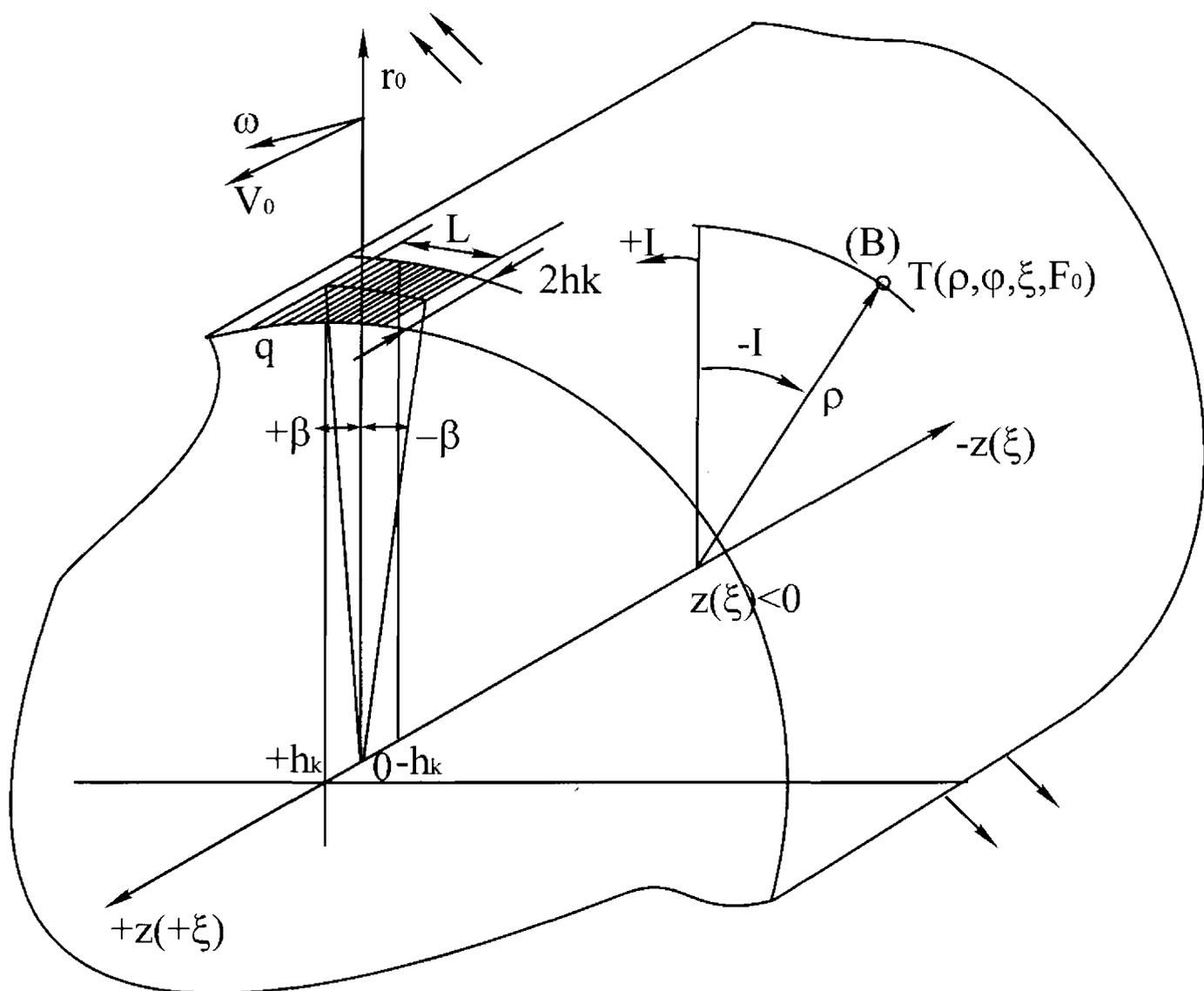


Рис.36. Расчетная схема шлифования цилиндрических деталей с винтовым источником тепла

где $\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$ - безразмерная температура;

$F_0 = \frac{a\tau}{R^2}$ - число Фурье;

$\Omega = \frac{W}{a} R^2$ - безразмерный комплекс, характеризующий скорость вращения;

$U = \frac{V}{a} R$ - безразмерный комплекс, характеризующий движение вдоль оси;

$B_i = \frac{\alpha}{\lambda} R$ - критерий Био;

$\rho = \frac{r}{R}$; $\xi = \frac{z}{R}$ - относительные координаты.

Источник тепла описывается критерием Померанцева:

$$P_0 = \frac{K_i}{1 - \rho_1} \delta(\varphi) \delta(\xi) \delta(\rho),$$

где $K_i = \frac{qR}{\lambda T_0}$ - критерий Кирпичева;

$\delta(\varphi)$; $\delta(\xi)$; $\delta(\rho)$ - дельта функции,

причем

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} 1; & |\varphi| \leq \beta; \\ 0; & |\varphi| > \beta; \end{cases}$$

$$\delta(\xi) = \begin{cases} 1; & |\xi| \leq h, \\ 0; & |\xi| > h, \end{cases} \text{ где } h = \frac{hk}{R};$$

$$\delta(\rho) = \begin{cases} 1; & \rho_1 \leq \rho \leq 1, \\ 0; & \rho < \rho_1, \end{cases} \text{ если } \rho_1 \rightarrow 1.$$

Последовательность решения задачи

1. Преобразование по координате φ .
2. Преобразование по координате ρ .
3. Преобразование по координате ξ .
4. Решение обыкновенного дифференциального уравнения.
5. Обратный переход по координате ξ .
6. Обратный переход по координате ρ .
7. Обратный переход по φ .

Предлагаем читателям самостоятельно вывести решение задачи. Некоторые опорные формулы при решении задачи имеют вид

А. Преобразование по координате φ осуществляется с ядром

$$\bar{K}_\varphi = \cos m(\varphi + \Omega\tau), \text{ где } m=0, 1, 2, \dots, \infty.$$

После преобразования уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial \bar{T}_c}{\partial F_0} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \bar{T}_c}{\partial \rho} \right) \right] - \frac{m^2}{\rho^2} \bar{T}_c + \frac{\partial^2 \bar{T}_c}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \bar{T}_c}{\partial \xi} + \bar{P}_{0c}. \quad (145)$$

Б. Собственные функции преобразования по координате ρ находятся из уравнения

$$\rho^2 \frac{d^2 \bar{K}_s}{d\rho^2} + \rho \frac{d\bar{K}_s}{d\rho} + \bar{K}_s [\rho^2 S_m^2 - m^2] = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$B_i J_m(S_m) + [J_m(S_m \rho)]_{\rho=1} = 0,$$

где каждому m соответствует бесконечное множество положительных корней S_{mn} , например,

$m=0$:

$$S_{01}, S_{02}, S_{03} \dots S_{0n} \dots \quad (\text{собственные числа.})$$

Собственная функция преобразования по ρ такова:

$$\bar{K}_s = J_m(S_{mm}\rho).$$

Нормирующий делитель:

$$C_s = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{mm}^2 + B_i^2 - m^2}{S_{mm}^2} \right) J_m^2(S_{mm}).$$

После преобразования по координате ρ уравнение (143) запишется таким образом:

$$\frac{\partial \bar{T}_{\text{CH}}}{\partial F_0} = -S_{mm}^2 \bar{T}_{\text{CH}} + \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{CH}}}{\partial \xi^2} + U \frac{\partial \bar{T}_{\text{CH}}}{\partial \xi} + \bar{P}_{0\text{CH}}. \quad (146)$$

В. По координате ξ применяется комплексное преобразование Фурье:

$$\tilde{T}_{\text{CHC}'}(S, m, p, F_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_{\text{CH}}(S, m, \xi, F_0) e^{-ip\xi} d\xi,$$

тогда получим операторное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{T}_{\text{CHC}'}}{\partial F_0} + (S_{mm}^2 + p^2 - Uip) \tilde{T}_{\text{CHC}'} - \tilde{P}_{0\text{CHC}'} = 0.$$

Г. Решение уравнения:

$$\tilde{T}_{\text{CHC}'} = \int_0^{F_0} e^{(\tau-F_0)(S_{mm}^2 + p^2 - Uip)} \tilde{P}_{0\text{CHC}'} d\tau.$$

Д. Обратное комплексное преобразование Фурье:

$$\bar{T}_{\text{CH}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{\text{CHC}'} e^{+ip\xi} dp.$$

Тогда после преобразования получим

$$\bar{T}_{\text{сн}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{-S_{\text{mn}}^2 t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(p^2 - Up) + ip\xi} \tilde{F}_{0\text{снс}} dp \right] dt,$$

или после вычисления интегралов:

$$\bar{T}_{\text{сн}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_0} e^{-S_{\text{mn}}^2 t} \frac{2K_i \sin m\beta}{mC_s} \Phi(\xi, t) dt,$$

где

$$\Phi(\xi, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{h - \xi - Ut}{\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{h + \xi + Ut}{\sqrt{t}}\right) \right].$$

Е. Обратное преобразование Ханкеля осуществляется по формуле

$$\theta(\rho, \varphi, \xi, F_0) = \frac{1}{\pi} \bar{T}_c|_{m=0} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_c \cos m(\varphi + \Omega\tau).$$

Решение задачи имеет вид

$$\theta = \frac{2\beta}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{0n}^2 J_0(S_{0n}\rho)}{J_0^2(S_{0n})(S_{0n}^2 + B_i^2)} \int_0^{F_0} e^{-S_{0n}^2(F_0 - \tau)} K_1 \Phi(\xi, F_0 - \tau) d\tau + \right. \quad (147)$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\beta}{m\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{mn}^2 J_m(S_{mn}\rho)}{J_m^2(S_{mn})(S_{mn}^2 + B_i^2 - m^2)} \int_0^{F_0} e^{-S_{mn}^2(F_0 - \tau)} K_1 \Phi(\xi, F_0 - \tau) \cos m(\varphi + \Omega\tau) d\tau \right\}.$$

Для расчета температур по (147) необходимо определить безразмерное время Фурье. Например, требуется рассчитать температуры в цилиндрической заготовке длиной L в момент окончания обработки. Тогда в решение (147) подставляем $F_0 = aL/(R^2 V_0)$. Будем считать, что в момент времени F_0 полярная ось находится в вертикальной плоскости осевого сечения цилиндра, координата точки B откладывается в конечном положении

подвижных осей: $\xi = \frac{z}{R}$ ($\xi < 0$); $\rho = \frac{r}{R}$; $\varphi > 0$ - против часовой стрелки от вертикального луча; $\varphi < 0$ - по часовой стрелке.

Данное решение, как и предыдущее, не учитывает адиабатических торцевых поверхностей детали при $\xi = 0$ и $\xi = -\frac{L\rho}{R}$.

Приложение

Задача 1. Установить закон распространения тепла в прямоугольном параллелепипеде (рис. 37) $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$, $0 \leq x_3 \leq c$. Начальная температура $T|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3)$. Параллелепипед помещен в охлаждающую среду, на поверхности осуществляется теплообмен.

Дифференциальное уравнение, граничные и начальные условия запишутся так:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} - hT|_{x_1=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} - hT|_{x_1=a} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} - hT|_{x_2=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} - hT|_{x_2=b} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} - hT|_{x_3=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} - hT|_{x_3=c} = 0;$$

$$T_0 = f(x_1, x_2, x_3).$$

Задача 2. Решить задачу 1 при следующих граничных и начальных условиях (совмещенные)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_1} - hT|_{x_1} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial x_1} + hT|_{x_1=a} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} - hT|_{x_2} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial x_2} + hT|_{x_2=b} &= 0; \\ T|_{x_3=0} &= 0; & T|_{x_3=c} &= 0. \end{aligned}$$

Задача 3. Решить задачу разд. 4.2 (рис. 38) при условии наличия теплообмена на внутреннем диаметре цилиндра, т.е. при ГУ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(\rho, \xi, F_0) + B_1 \theta(\rho, \xi, F_0)|_{\rho=1} &= 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(\rho, \xi, F_0) - B_1 \theta(\rho, \xi, F_0)|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} &= 0. \end{aligned}$$

Остальные данные задачи аналогичны.

Задача 4. Решить задачу 3 при условии движения источника тепла по внутренней поверхности бесконечного цилиндра и ГУ

(рис. 39)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(\rho, \xi, F_0) + B_1 \theta(\rho, \xi, F_0)|_{\rho=1} &= 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho}(\rho, \xi, F_0) - B_1 \theta(\rho, \xi, F_0)|_{\rho=\frac{R_1}{R_2}} &= 0. \end{aligned}$$

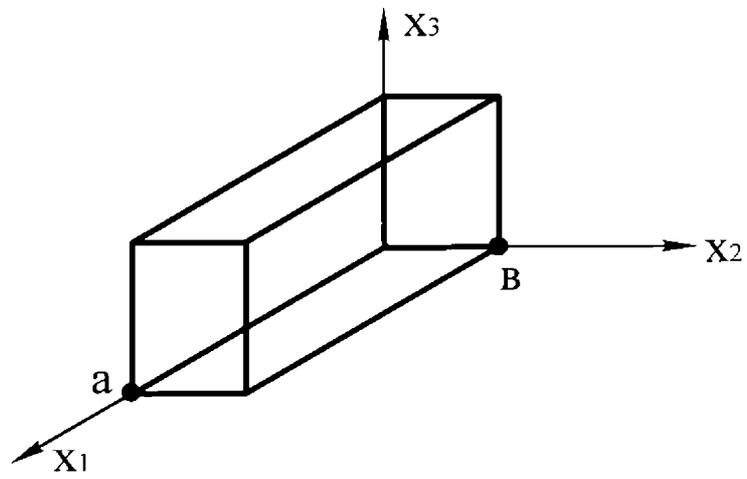


Рис.37. Расчетная схема

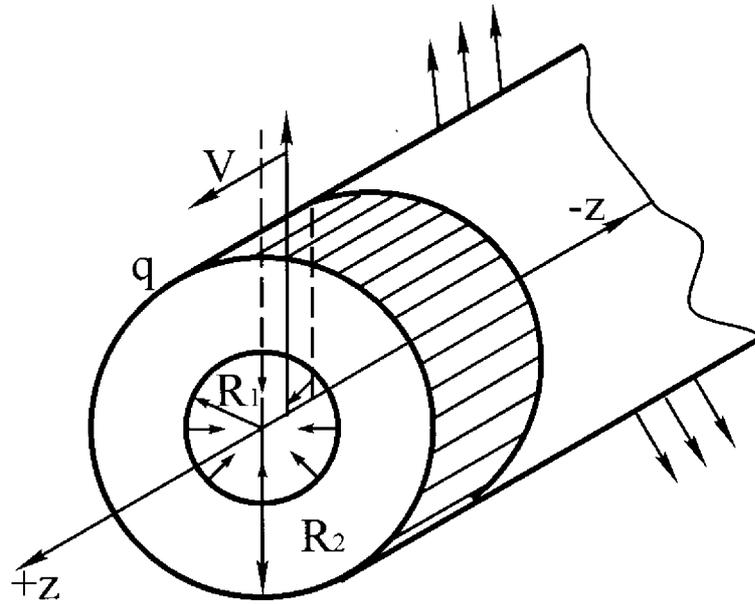


Рис.38. Расчетная схема

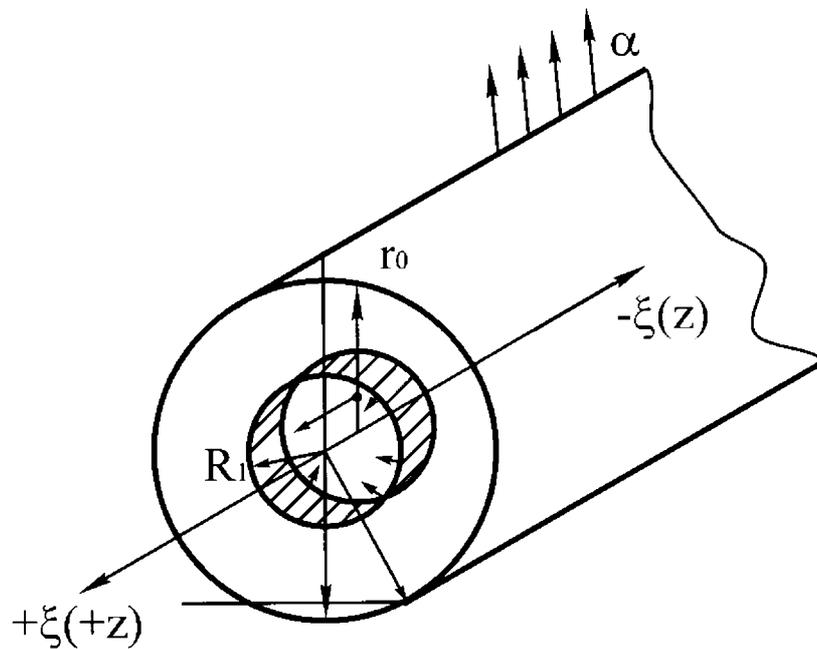


Рис.39. Расчетная схема

6. Численные методы решения дифференциальных уравнений теплопроводности

Одним из наиболее распространенных численных методов решения задач теории теплопроводности является метод разностных схем, который, в свою очередь, основывается на положениях теории конечных разностей. Теория конечных разностей, первоначально имевшая основным своим приложением лишь приближенные вычисления, в XX в. оформилась в направление математики - дискретный анализ. Предварительно рассмотрим некоторые интересующие нас положения теории. Если $y=f(x)$ - функция одной переменной задана в явном виде, то, как известно, производная от данной функции

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

т.е. определяет тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ (рис. 40).

Эту непрерывную величину можно заменить дискретной разностью

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = y_x^+ = \Delta y_i. \quad (148)$$

Берется разность значений функции $f(x)$ в двух соседних точках, отстоящих на величину шага h . Данное выражение называется правой конечной разностью первого порядка, записанной для точки x_i .

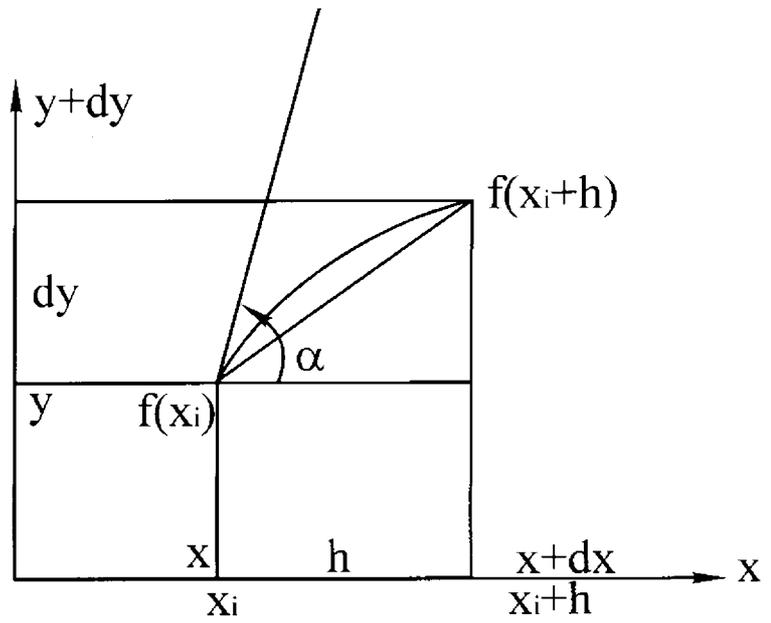


Рис.40. Геометрическая схема конечной разности

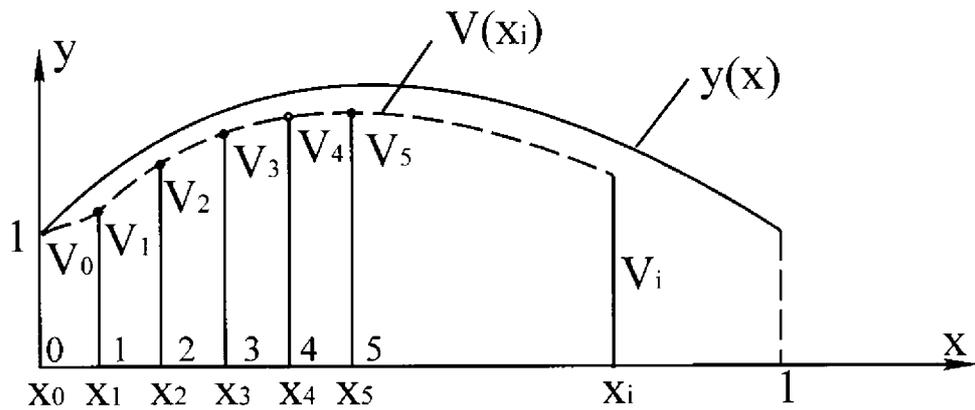


Рис.41. Схема задачи интерполяции

Однако производная в точке x_i может быть представлена и другими разностными схемами, например:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} = y_x^- = \nabla y_i. \quad (149)$$

Это выражение также определяет производную и называется левой конечной разностью первого порядка. Кроме того, возможна и другая аппроксимация:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} = y_x^0, \quad (150)$$

которая называется центральной разностной производной. Возникает вопрос: какая разностная схема наиболее точная?

Для конкретной постановки задачи пригодны только такие разностные схемы, в которых при уменьшении шага h (шаг сетки) решение разностного уравнения стремится к решению дифференциального исходного уравнения.

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение записывается разностным уравнением. Одновременно начальные и граничные условия задачи также представляются разностными уравнениями. Подставляя в разностное уравнение значение функции $f(x)$ в узловых точках x_1, x_2, \dots, x_i ($i=n$), получаем систему алгебраических линейных уравнений. Решая данную систему, находим не функцию $f(x)$, как в случае дифференциального уравнения, а значение приближенной функции $V(x_i)$ в $i=n$ точках. Разностная схема считается приемлемой, если $V(x_i) - y(x) \rightarrow 0$ при уменьшении шага h разностной схемы. Ошибка, допускаемая при использовании той или иной разностной схемы, зависит от

физической схемы решаемой задачи. В зависимости от вида задачи (задача теплопроводности, волновая задача, задача теории упругости) применяются различные аппроксимации. В зависимости от применяемой разностной схемы сходимость задачи различная. Методы анализа сходимости решений рассматриваются в [14].

Рассмотрим пример применения теории разностных схем.

Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{5}y(x) = f(x), \quad (151)$$

удовлетворяющее НУ: $y(0)=1$.

Будем искать решение задачи на интересующем нас интервале, например от $x=0$ до $x=1$.

1. Разделим интервал от $x=0$ до $x=1$ на n равных частей

$$h = \frac{1}{n}.$$

2. Заменяем оператор дифференцирования разностной схемой, например правой конечной разностью. Получим уравнение:

$$\frac{V(x_i + h) - V(x_i)}{h} + \frac{1}{5}V(x_i) = f(x_i), \quad (152)$$

где $y(x)$ заменено $V(x_i)$, или (152) запишется в виде

$$V(x_i + h) - V(x_i) + \frac{1}{5}hV(x_i) = hf(x_i). \quad (153)$$

Начальное условие $V(0)=1$. На рис. 41 приведена разностная сетка решаемой задачи.

Уравнение (153) называется разностным уравнением, эквивалентным (151). Подставив в (153) первый “узел” схемы $x=x_0$, получим

$$V(x_0 + h) - V(x_0) + \frac{1}{5}hV(x_0) = hf(x_0),$$

но $V(x_0 + h) = V_1$, а $V(x_0) = V_0$, тогда первое уравнение системы запишется так:

$$V_1 - V_0 + \frac{1}{5}hV_0 = hf(x_0).$$

Далее подставляем в (153) второй “узел” схемы $x=x_1$, получим уравнение

$$V_2 - V_1 + \frac{1}{5}hV_1 = hf(x_1) \text{ и т.д.}$$

Система запишется таким образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 - V_0 + \frac{1}{5}hV_0 = hf(x_0) \\ V_2 - V_1 + \frac{1}{5}hV_1 = hf(x_1) \\ V_3 - V_2 + \frac{1}{5}hV_2 = hf(x_2) \\ \dots\dots \\ V_{i+1} - V_i + \frac{1}{5}hV_i = hf(x_i) \\ V_n - V_{n-1} + \frac{1}{5}hV_{n-1} = hf(x_{n-1}) \end{array} \right. \quad (154)$$

Учитывая, что $V_0 = V(x_0) = 1$, из первого уравнения получим

$$V_1 = hf(x_0) + V_0 - \frac{1}{5}hV_0 = hf(x_0) + 1 - \frac{1}{5}h.$$

Тогда из второго уравнения

$$V_2 = hf(x_1) + V_1 - \frac{1}{5}hV_1 = hf(x_1) + \left[hf(x_0) + 1 - \frac{1}{5}h \right] - \frac{1}{5}h \left[hf(x_0) + 1 - \frac{1}{5}h \right].$$

Такой метод последовательного нахождения значений функции $V(x_i)$ в теории разностных схем получил название метода “прогонки”. Для оценки сходимости полученного решения уменьшаем шаг сетки, например $h = \frac{1}{n+10}$, и повторим алгоритм. Если полученные значения $V(x_i)$ отличаются от предыдущих не более чем на 5%, то можно считать решение приемлемым.

Однако наиболее эффективно применение разностных уравнений для решения задач математической физики. При этом аппроксимируются дифференциальные уравнения в частных производных. Соответственно приходится искать функции двух или трех переменных, заданных на сетке, т.е. на дискретном множестве точек. Число этих точек достигает десятков и даже сотен тысяч. В результате получаем систему такого же количества разностных уравнений.

Прежде чем переходить к рассмотрению уравнений в частных производных, рассмотрим аппроксимации производных более высоких порядков.

Найдем аппроксимацию второй разностной производной двух переменных $U(x,y)$. Будем для простоты разностную функцию обозначать U .

Разложим функцию $U(x,y)$ по степеням h переменной x в ряд Тейлора:

$$U(x+h,y) - U(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_x h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_x h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_x h^3 + \dots$$

Теперь подставим вместо h значение $(-h)$. Имеем

$$U(x-h, y) - U(x, y) = -\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_x h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_x h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\bigg|_x h^3 + \dots$$

Сложим эти два выражения. Учитывая, что шаг сетки $h \rightarrow 0$, можно отбросить производные четвертого и высшего порядков.

Получим

$$U(x+h, y) - 2U(x, y) + U(x-h, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_x h^2 + g(h), \text{ где } g(h) \rightarrow 0.$$

Теперь

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} [U(x+h, y) - 2U(x, y) + U(x-h, y)]. \quad (155)$$

По аналогии

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h_1^2} [U(x, y+h_1) - 2U(x, y) + U(x, y-h_1)],$$

где h - шаг сетки по координате x , а h_1 - шаг сетки по координате y .

Таким образом, вторая производная в точке $x = x_i$ сводится к трехточечному шаблону, например для $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, схема имеет вид, как

на рис. 42.

Найдем разностную аппроксимацию смешанной производной второго порядка: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$. В [14] установлено, что наибольшая точность

приближения будет в том случае, если вычислять указанную разность по формуле

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left[\left(U_x^- \right)^+ y + \left(U_x^+ \right)^- y \right], \quad (156)$$

где $(U_x^-)^+$ означает следующее.

От U находится левая конечная разность по переменной x , а затем от полученного выражения берется правая конечная разность от переменной y ;

$(U_x^+)^-$ - правая конечная разность по x , а затем левая конечная

разность по y .

Учитывая, что шаг сетки по переменной $x - h_1$, а по переменной $y - h_2$, получим

$$U_x^- \approx \frac{U(x, y) - U(x - h_1, y)}{h_1};$$

$$\begin{aligned} (U_x^-)^+ &\approx \frac{1}{h_1} [\Delta_y U(x, y) - \Delta_y U(x - h_1, y)] = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} [U(x, y + h_2) - U(x, y) - U(x - h_1, y + h_2) + U(x - h_1, y)] \end{aligned} \quad (157)$$

Беря левую разность, получим

$$\begin{aligned} (U_x^+)^- &\approx \frac{1}{h_1} [\nabla_y U(x, y) - \nabla_y U(x - h_1, y)] = \\ &= \frac{1}{h_1} \left[\frac{U(x + h_1, y) - U(x + h_1, y - h_2)}{h_2} - \frac{U(x, y) - U(x, y - h_2)}{h_2} \right] = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} [U(x + h_1, y) - U(x + h_1, y - h_2) - U(x, y) + U(x, y - h_2)]. \end{aligned} \quad (158)$$

Складывая (157) и (158) и подставляя в (156), получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{2h_1 h_2} [U(x, y + h_2) + U(x - h_1, y) + U(x + h_1, y) + U(x, y - h_2) -$$

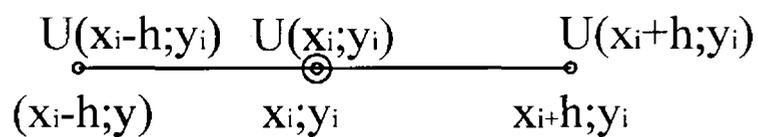


Рис.42. Двухточечный шаблон

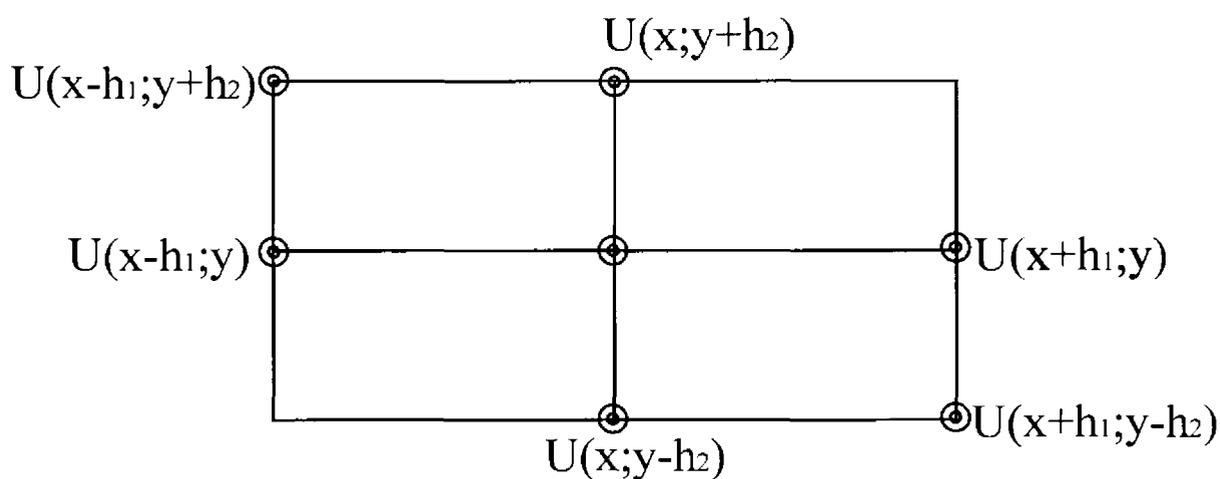


Рис.43. Семиточечшаблонный

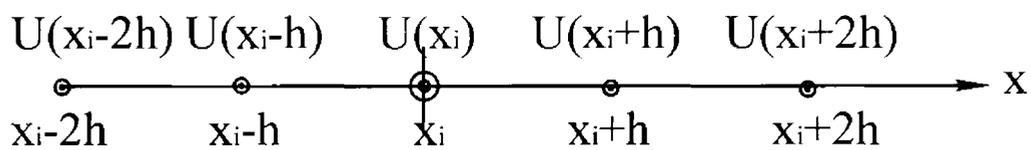


Рис.44. Пятиточечный шаблон

$$- 2U(x, y) - U(x - h_1, y + h_2) - U(x + h_1, y - h_2)] \quad (159)$$

Таким образом, вторая смешанная производная в точке (x, y) сводится к семиточечному шаблону вида (рис. 43).

Разностная аппроксимация третьей производной $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$. Для нахождения конечной разности разложим в ряд Тейлора первую производную от $\frac{\partial U}{\partial x}$ по степеням h :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x + h) - \frac{\partial U}{\partial x}(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_x h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_x h^2 + \dots$$

Заменяя h на $-h$, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x - h) - \frac{\partial U}{\partial x}(x) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_x h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_x h^2 - \dots$$

Сложим полученные выражения. Пренебрегая большими степенями, можно записать

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \approx \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial U}{\partial x}(x + h) - 2 \frac{\partial U}{\partial x}(x) + \frac{\partial U}{\partial x}(x - h) \right]. \quad (160)$$

Заменяем производную в квадратных скобках центральными двухсторонними разностями по (150).

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &\approx U_x^0 = \frac{U(x + h) - U(x - h)}{2h}; \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x + h) &\approx \frac{U(x + h + h) - U(x + h - h)}{2h} = \frac{U(x + 2h) - U(x)}{2h}; \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x - h) &\approx \frac{U(x - h + h) - U(x - h - h)}{2h} = \frac{U(x) - U(x - 2h)}{2h}. \end{aligned}$$

Подставляя в (160), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} &\approx \frac{1}{h^2} \left[\frac{U(x+2h) - U(x)}{2h} - 2 \frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h} + \frac{U(x) - U(x-2h)}{2h} \right] = \\ &= \frac{1}{2h^3} [U(x+2h) + 2U(x-h) - 2U(x+h) - U(x-2h)], \end{aligned}$$

или для случая функции двух переменных:

$$\frac{\partial^3 U(x,y)}{\partial x^3} \approx \frac{1}{2h^3} [U(x+2h,y) + 2U(x-h,y) - 2U(x+h,y) - U(x-2h,y)]. \quad (161)$$

Третья производная в точке x, y сводится к четырехточечному шаблону вида как на рис. 44.

Разностная производная четвертого порядка: $\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$.

Воспользуемся формулой (155). Известна следующая аппроксимация:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} = U_{xx},$$

где U_{xx} обозначим разностную аппроксимацию второй производной от функции $U(x,y)$ (координату y для простоты не пишем).

Учитывая, что $\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$, получим

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \approx \frac{1}{h^2} [U_{xx}(x+h) - 2U_{xx}(x) + U_{xx}(x-h)]. \quad (162)$$

Тогда в соответствии с (155) имеем

$$U_{xx}(x+h) = \frac{1}{h^2} [U(x+h+h) - 2U(x+h) + U(x+h-h)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^2} [U(x+2h) - 2U(x+h) + U(x)]; \\
U_{xx}(x) &= \frac{1}{h^2} [U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)]; \\
U_{xx}(x-h) &= \frac{1}{h^2} [U(x-h+h) - 2U(x-h) + U(x-h-h)] = \\
&= \frac{1}{h^2} [U(x) - 2U(x-h) + U(x-2h)].
\end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в (162):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} &\approx \frac{1}{h^4} [U(x+2h) - 2U(x+h) + U(x) - 2U(x+h) + 4U(x) - 2U(x-h) + \\
&+ U(x) - 2U(x-h) + U(x-2h)] = \frac{1}{h^4} [U(x+2h, y) - 4U(x+h, y) + 6U(x, y) - \\
&- 4U(x-h, y) + U(x-2h, y)]. \tag{163}
\end{aligned}$$

Наконец, вычислим последнюю смешанную производную:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right).$$

Шаг сетки по переменной $y \rightarrow h_2$, а по переменной $x \rightarrow h_1$.

Производная $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ аппроксимируется выражением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h_2^2} [U(x, y+h_2) - 2U(x, y) + U(x, y-h_2)].$$

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \approx \frac{1}{h_1^2} [U_{xx}(x, y+h_2) - 2U_{xx}(x, y) + U_{xx}(x, y-h_2)], \tag{164}$$

где U_{xx} - разностная аппроксимация второй производной по переменной x от функции U . Запишем эти разностные аппроксимации:

$$U_{xx}(x, y + h_2) = \frac{1}{h_1^2} [U(x + h_1, y + h_2) - 2U(x, y + h_2) + U(x - h_1, y + h_2)];$$

$$U_{xx}(x, y) = \frac{1}{h_1^2} [U(x + h_1, y) - 2U(x, y) + U(x - h_1, y)]; \text{ и}$$

$$U_{xx}(x, y - h_2) = \frac{1}{h_1^2} [U(x + h_1, y - h_2) - 2U(x, y - h_2) + U(x - h_1, y - h_2)].$$

Подставляем в (164):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [& U(x - h_1, y - h_2) - 2U(x, y - h_2) + U(x + h_1, y - h_2) + \\ & + 4U(x, y) - 2U(x - h_1, y) - 2U(x + h_1, y) + U(x + h_1, y + h_2) - 2U(x, y + h_2) + \\ & + U(x - h_1, y + h_2)]. \end{aligned} \quad (165)$$

Указанная производная аппроксимируется девятиточечным шаблоном (см. рис. 45).

Формулы разностных аппроксимаций производных более высоких порядков приведены в [15].

Рассмотрим применение теории разностных схем на примерах конкретных задач. Начнем с теории упругости.

Задача 1. Определить напряжения, образующиеся в стержне прямоугольного сечения, если угол закручивания свободного конца V ; длина стержня l ; сечение стержня $a \times b$, материал сталь 45.

Известно, что теория плоских сечений неприемлема при кручении стержней некруглого сечения. Сопротивление материалов основывается на гипотезе недеформированных плоских сечений.

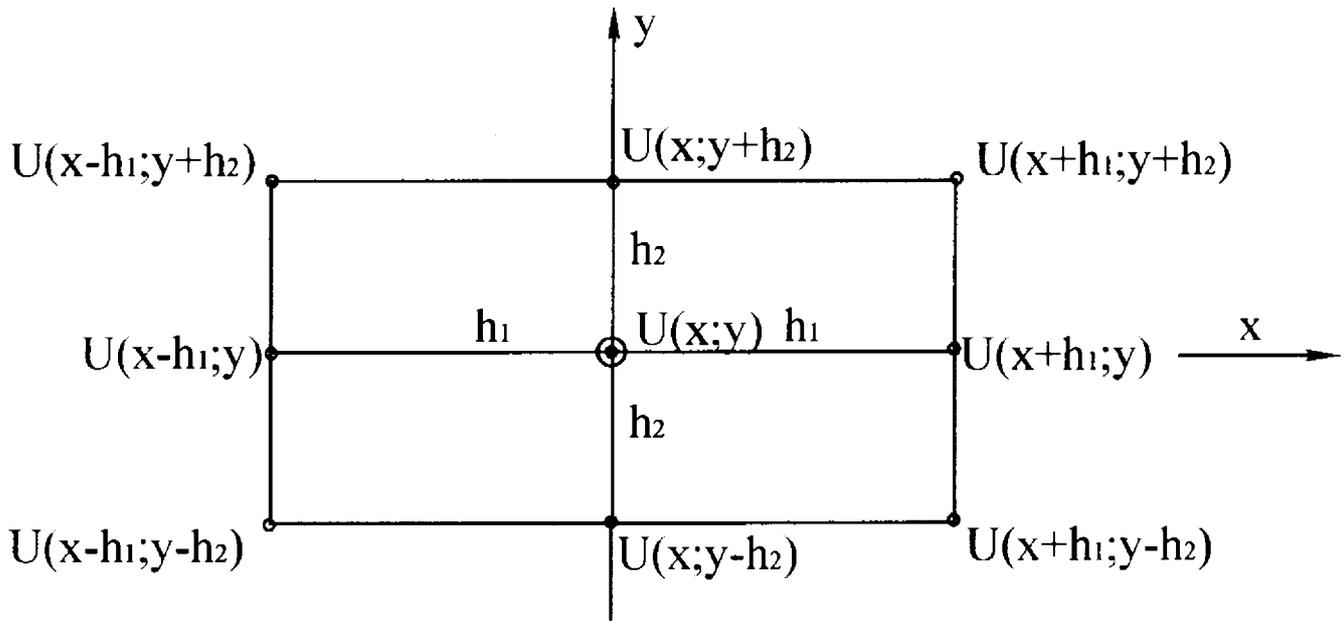


Рис.45. Девятизначный шаблон

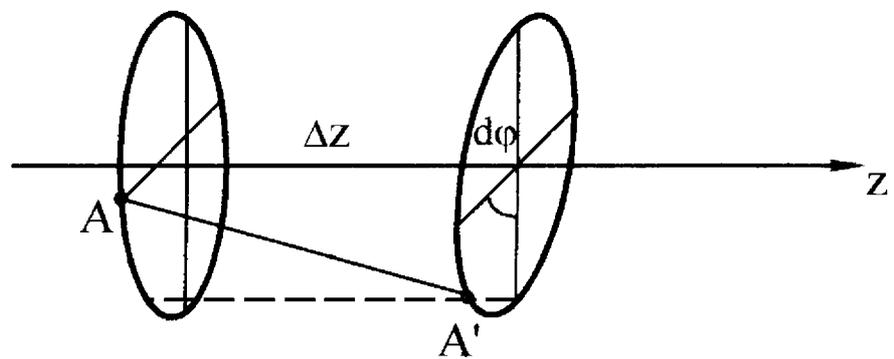


Рис.46. Деформация круглого стержня при кручении

При кручении круглого бруса любое поперечное сечение остается плоским (не деформируется). Все точки сечения поворачиваются вокруг оси как одно целое (см. рис. 46). Касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_a = \mu_{кр} r / J_p,$$

где J_p - полярный момент инерции.

При кручении же некруглых стержней поперечные сечения обязательно деформируются. Согласно теории Сен-Венана, точки перемещаются, но проекция деформированного сечения на плоскость, перпендикулярную оси Z , сохраняет первоначальную форму сечения (рис. 47). Если выделить в стержне элементарный объем в виде бесконечно малого параллелепипеда, то, как известно из курса сопротивления материалов, на гранях этого параллелепипеда действуют шесть составляющих тензора напряжений:

$$\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - нормальные напряжения.

Индекс у этого напряжения указывает ту ось, параллельно которой направлено напряжение.

$\tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ - касательные напряжения.

Первый индекс указывает, в направлении какой оси действует данное напряжение, второй индекс обозначает нормаль к данной площадке. Например: τ_{xy} - касательное напряжение, имеющее направление, параллельное оси X и действующее на площадке,

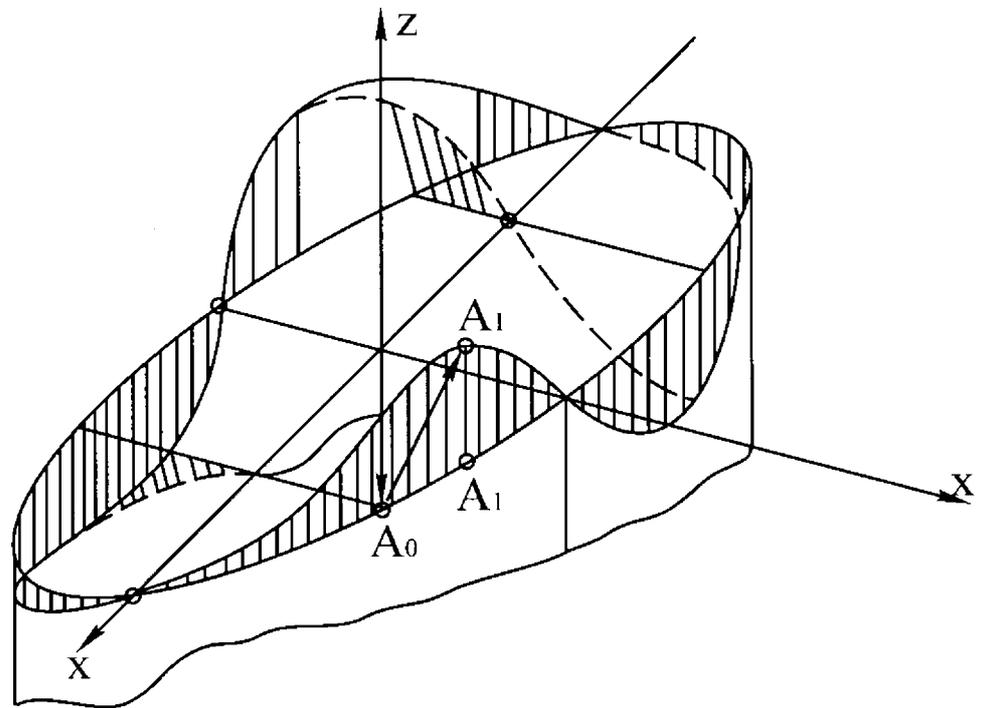


Рис.47. Депланация эллиптического сечения при кручении

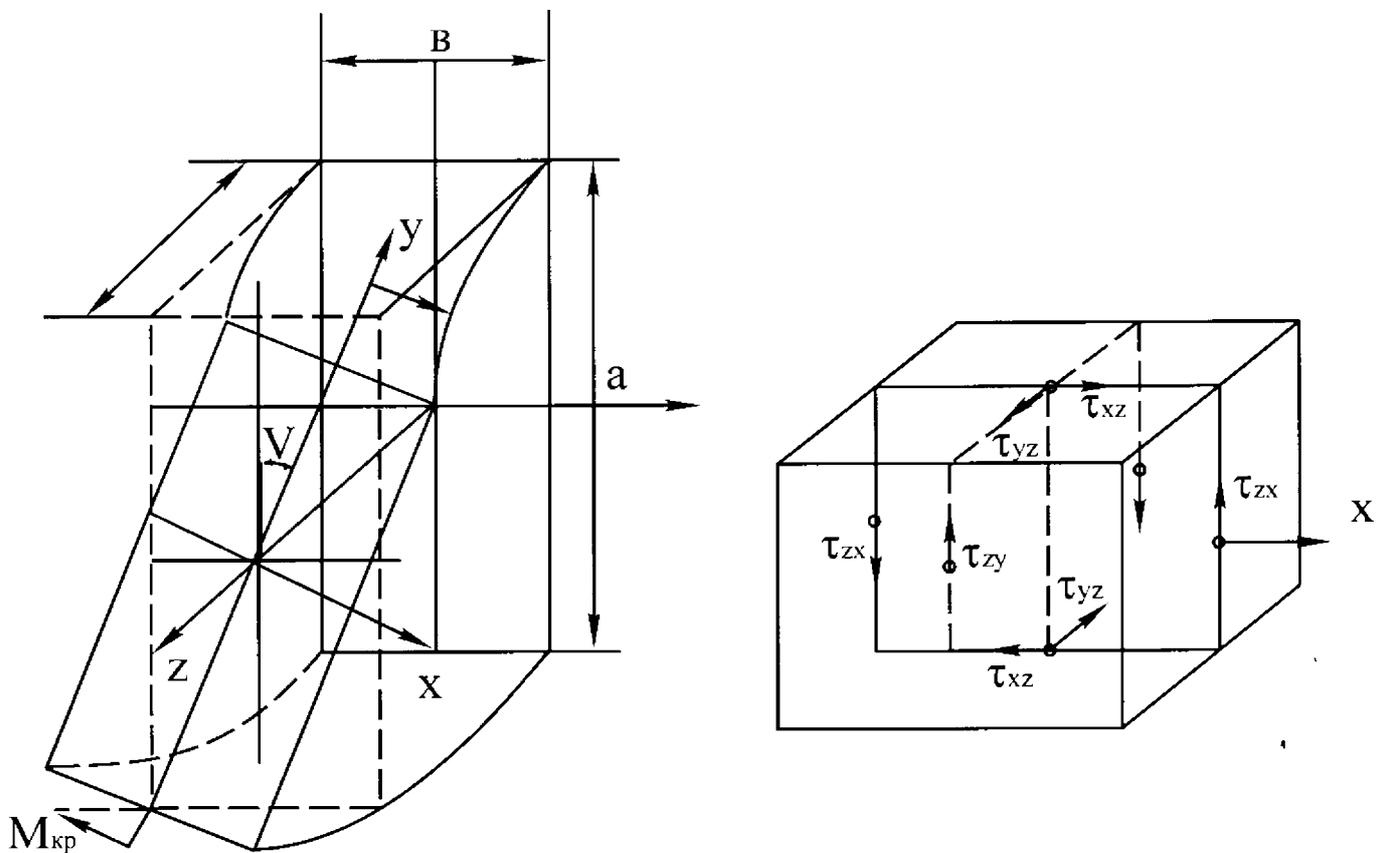


Рис.48. Расчетная схема при кручении стержня с прямоугольным профилем сечения

нормаль к которой параллельна оси Y. Для кручения некруглых стержней установлено, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0;$$

$$\tau_{xy} = 0; \quad \text{а } \tau_{yz} = -G \frac{V}{\rho} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}; \quad \tau_{xz} = G \frac{V}{\rho} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}, \quad (166)$$

где $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ - модуль упругости второго рода;

μ - коэффициент Пуассона;

$F(x, y)$ - функция напряжений - функция Прандтля, которая во всех точках контура равна нулю $F_s(x, y) = 0$, а внутри контура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = -2. \quad (167)$$

Компоненты напряжения зависят от положения точки внутри сечения (x, y) и не зависят от координаты z .

Схема нагружения и тензор напряжений приведены на рис. 48.

Таким образом, решив уравнение

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = -2; \quad \text{с ГУ } F_s(x, y) = 0$$

и учитывая, что V , G и ρ - известные величины, можно найти τ_{yz} и τ_{zx} .

Запишем (167) в конечных разностях, используя формулы:

$$F(x + h, y) - 2F(x, y) + F(x - h, y) + F(x, y + h) - 2F(x, y) + F(x, y - h) = -2h^2$$

ИЛИ

$$4F(x, y) - F(x + h, y) - F(x - h, y) - F(x, y + h) - F(x, y - h) = 2h^2. \quad (168)$$

Таким образом, (167) заменяется разностным уравнением (168).

Алгоритм решения

1. Заменяем непрерывную область изменения аргументов x, y областью дискретного изменения x_i, y_i .

2. Заменяем дифференциальные выражения некоторыми разностными операторами, а также формируем разностный аналог ГУ и НУ.

3. Составляем систему алгебраических уравнений. При численном решении, как указывалось выше, нельзя воспроизвести разностное решение для всех значений аргументов x и y , поэтому выбираем некоторое конечное множество точек и ищем приближенное решение только в этих точках. Такое множество точек называется сеткой, а отдельные точки - узлами сетки. Функция, определенная в узлах сетки $F(x_i, y_i)$, - сеточная функция.

Разбиваем сечение стержня на участки двумя системами перпендикулярных линий (рис.49). Для наглядности решения задачи будем считать, что шаги сетки h вдоль x и y одинаковы и достаточно велики (узлов относительно мало). Кроме того, известно, что функция напряжений $F(x, y)$ - гармоническая, обладает осевой и центральной симметрией.

Тогда

$$F_4 = F_{16}; \quad F_1 = F_{18}; \quad F_4 = F_{23}; \quad F_{21} = F_{16}; \quad F_{26} = F_7,$$

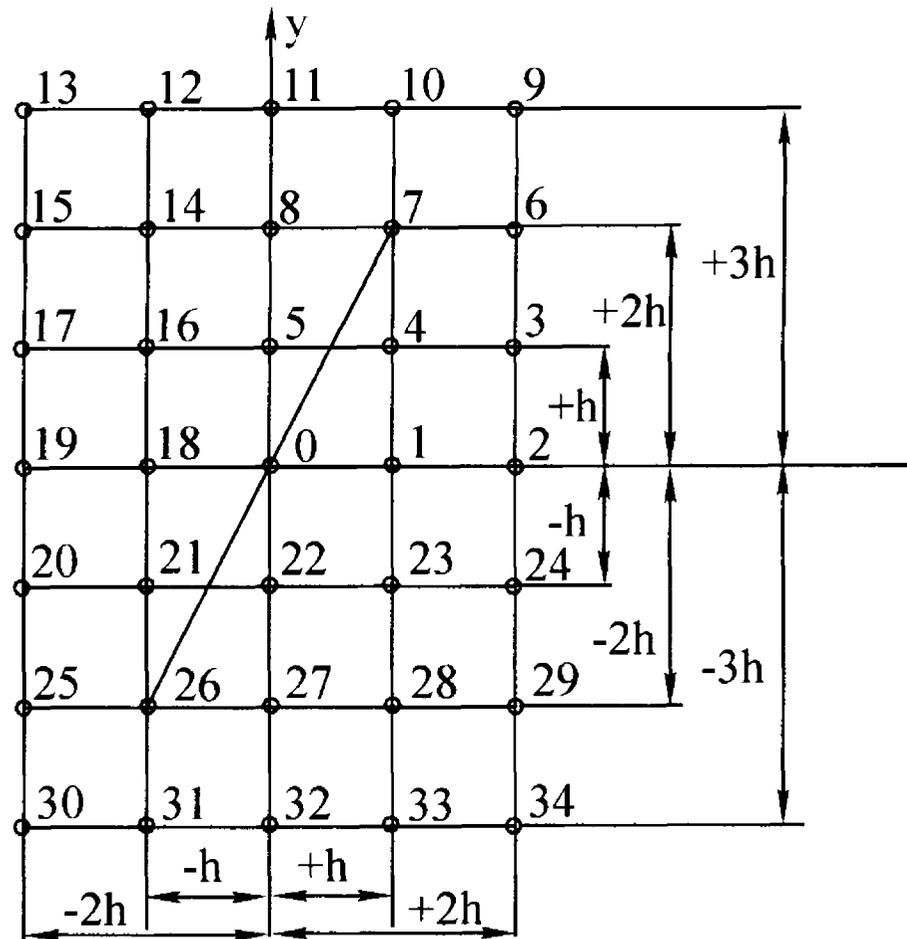


Рис.49. Расчетная схема отыскания функции Прандтля для прямоугольной области

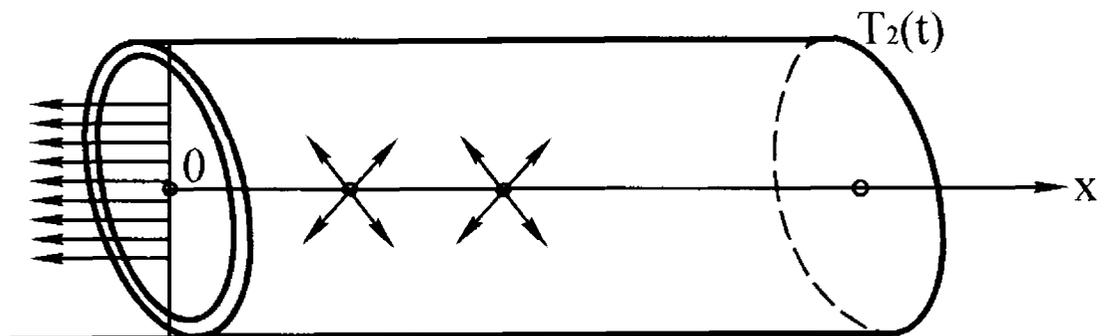


Рис.50. Расчетная схема тепловой задачи

т.е. достаточно составить разностные уравнения для точек в первой четверти сечения стержня.

Граничное условие задачи $F_s(x, y) = 0$ имеет вид

$$F_2 = F_3 = F_6 = F_9 = F_{10} = 0.$$

Это значит, что значение сеточной функции на границе равно нулю.

Составляем разностное уравнение для нулевого узла $0,0$:

$$4F(0,0) - F(0+h,0) - F(0-h,0) - F(0,0+h) - F(0,0-h) = 2h^2,$$

или, учитывая, что

$$F(0,0) = F_0; \quad F(h,0) = F_1; \quad F(-h,0) = F_{18};$$

$$F(0,h) = F_5; \quad F(0,-h) = F_{22},$$

но

$$F_{18} = F_1; \quad F_{22} = F_5,$$

тогда для нулевого узла разностное уравнение запишется так:

$$4F_0 - F_1 - F_1 - F_5 - F_5 = 2h^2.$$

Для узла № 1 с координатами $+h, 0$ разностное уравнение имеет вид

$$4F(h,0) - F(h+h,0) - F(h-h,0) - F(h,0+h) - F(h,0-h) = 2h^2.$$

Учитывая, что

$$F(h,0) = F_1; \quad F(2h,0) = F_2 = 0; \quad F(0,0) = F_0; \quad F(h,h) = F_4; \quad F(h,-h) = F_{23} = F_4,$$

получим

$$4F_1 - 0 - F_0 - F_4 - F_4 = 2h^2.$$

Для контурных точек разностные уравнения записывать не будем.

Тогда получим следующую систему:

№ узла	Разностное уравнение
0	$4F_0 - F_1 - F_1 - F_5 - F_5 = 2h^2$
1	$4F_1 - F_2 - F_0 - F_4 - F_4 = 2h^2$
4	$4F_4 - F_3 - F_5 - F_7 - F_1 = 2h^2$
5	$4F_5 - F_4 - F_4 - F_8 - F_0 = 2h^2$
7	$4F_7 - F_6 - F_8 - F_{10} - F_4 = 2h^2$
8	$4F_8 - F_7 - F_7 - F_{11} - F_5 = 2h^2$

Учитывая, что $F_2 = F_3 = F_6 = F_{10} = F_{11} = 0$, получим окончательную систему уравнений:

$$\begin{cases} 4F_0 - 2F_1 - 2F_5 = 2h^2 \\ 4F_1 - F_0 - 2F_4 = 2h^2 \\ 4F_4 - F_5 - F_7 - F_1 = 2h^2 \\ 4F_5 - 2F_4 - F_8 - F_0 = 2h^2 \\ 4F_7 - F_8 - F_4 = 2h^2 \\ 4F_8 - 2F_7 - F_5 = 2h^2 \end{cases}$$

Решая вышеприведенную систему методом Гаусса, получим эквивалентную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 - \frac{1}{2}F_1 + 0 \cdot F_4 - \frac{1}{2}F_5 + 0 \cdot F_7 + 0 \cdot F_8 = \frac{h^2}{2} \\ F_1 - \frac{8}{7}F_4 - \frac{1}{7}F_5 + 0 \cdot F_7 + 0 \cdot F_8 = \frac{5}{7}h^2 \\ F_4 - \frac{2}{5}F_5 - \frac{7}{20}F_7 + 0 \cdot F_8 = \frac{19}{20}h^2 \\ \frac{84}{35}F_5 - \frac{9}{10}F_7 - F_8 = \frac{371}{70}h^2 \\ F_7 - 0,3F_8 = 1,095h^2 \\ 2,791F_8 = 6,81h^2 \end{array} \right. \quad (169)$$

Решая систему (169), получим значения функции $F(x_i, y_i)$ в узлах сетки

$$F_0 = 4,93h^2; \quad F_1 = 4,92h^2; \quad F_4 = 3,193h^2; \quad F_5 = 3,94h^2;$$

$$F_7 = 1,908h^2; \quad F_8 = 2,439h^2.$$

Касательные напряжения вычисляются по (166). Заменяя производные разностными выражениями вида

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x, y) - F(x - h, y)}{h} = F_x;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \approx \frac{F(x, y) - F(x, y - h)}{h} = F_y,$$

получим

$$\tau_{yz} \approx -G \frac{V}{l} \frac{F(x, y) - F(x - h, y)}{h};$$

$$\tau_{xz} \approx G \frac{V}{l} \frac{F(x, y) - F(x, y - h)}{h}.$$

Тогда, например для узла № 7 $+h, +2h$, имеем

$$\tau_{yz(\tau)} \approx -G \frac{V F(h, 2h) - F(0, 2h)}{l h} \approx -G \frac{V F_7 - F_8}{l h};$$

$$\tau_{xz(\tau)} \approx G \frac{V F(h, 2h) - F(h, h)}{l h} \approx G \frac{V F_7 - F_4}{l h}.$$

С уменьшением шага сетки h точность решения задачи увеличивается, однако количество уравнений возрастает. В данной задаче нахождение сеточных функций методом “прогонки”, т.е. последовательно из каждого уравнения системы, невозможно. В задаче приходится решать систему N линейных уравнений. Такое решение возможно только на основе применения ЭВМ.

Для повышения точности решаемых задач в теории разностных схем применяются некоторые дополнительные приемы, в частности связанные с представлением граничных условий задачи. Как указывалось в разд. 1, граничное условие - это задание функции на границе S исследуемой области. В случае, если граничное условие задано в виде

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x_s, y_s, z_s, t) = \text{const} \text{ или } \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s + \sigma T|_s = 0,$$

существует возможность повысить точность задачи (либо увеличить шаг сетки без потери точности), применяя некоторые искусственные приемы в представлении граничного условия. Рассмотрим на примерах.

Задача 2. Задан стержень длиной l , боковая поверхность которого теплоизолирована. На торце $x = 0$ действует охлаждение. На торце $x = l$ температура изменяется по закону $T_2(t)$. Внутри стержня действуют источники тепла с плотностью $f(x, t)$ (рис. 50).

Начальная температура $T(x,0) = T_0(x)$; $0 \leq x \leq l$. Найти закон распределения $T(x, t)$ в стержне.

Запишем задачу в безразмерных координатах:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad F_0 = \frac{at}{l^2}; \quad \theta = \frac{T(x,t) - T_0}{T_0}; \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0}(\xi, F_0) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(\xi, F_0) + \bar{f}(\xi, F_0).$$

Граничные условия:

$$\theta(1, F_0) = \mu_2(F_0); \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, F_0) - \frac{\alpha}{\lambda} l \cdot \theta(0, F_0) = 0. \quad (170)$$

Начальное условие:

$$\theta(\xi, 0) = 0.$$

Заменяем дифференциальное уравнение, а также граничные и начальные условия разностными аналогами.

Обозначим символом $y(\xi_i, F_{0i})$ сеточную функцию. τ - шаг сетки по безразмерному времени F_0 , а h - шаг сетки по безразмерной координате ξ . Тогда дифференциальное уравнение запишется в виде разностного уравнения

$$\frac{y(\xi_i, F_{0i} + \tau) - y(\xi_i, F_{0i})}{\tau} = \frac{y(\xi_i + h, F_{0i}) - 2y(\xi_i, F_{0i}) + y(\xi_i - h, F_{0i})}{h^2} + \bar{f}(\xi_i, F_{0i}), \quad (171)$$

где ξ_i и F_{0i} - дискретные переменные.

Начальное условие запишется так: $y(\xi_i, 0) = 0$.

Граничные условия: $y(1, F_{0i}) = \mu_2(F_{0i})$.

Второе граничное условие можно аппроксимировать разностным уравнением:

$$\frac{y(\xi_i + h, F_{0i}) - y(\xi_i, F_{0i})}{h^2} + \frac{\alpha}{\lambda} \bar{f}y(\xi_i, F_{0i}) \Big|_{\xi_i=0} = 0.$$

Погрешность такой разностной схемы равна шагу сетки [14]. Можно уменьшить эту погрешность, заменив приведенную разностную схему другой.

Разложим функцию $y(\xi_i, F_{0i})$ в ряд Тейлора по степеням h :

$$y(\xi_i + h, F_{0i}) - y(\xi_i, F_{0i}) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_i} h + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\xi_i} + \dots$$

Разделим на h левую и правую части разложения:

$$\frac{y(\xi_i + h, F_{0i}) - y(\xi_i, F_{0i})}{h} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_i} + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\xi_i} + \dots$$

Подставим $\xi_i = 0$ (на границе стержня):

$$\frac{y(h, F_{0i}) - y(0, F_{0i})}{h} = \frac{\partial y(0, F_{0i})}{\partial \xi} + 0,5h \frac{\partial^2 y(0, F_{0i})}{\partial \xi^2} + \dots$$

Учитывая, что $h < 1$, отбросим все слагаемые разложения, кроме первых двух. Тогда

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(0, F_{0i}) = \frac{y(h, F_{0i}) - y(0, F_{0i})}{h} - 0,5h \frac{\partial^2 y(0, F_{0i})}{\partial \xi^2}. \quad (172)$$

Выражение для $\partial^2 y / \partial \xi^2$ подставим из уравнения теплопроводности, учитывая, что y - сеточный аналог θ .

$$\frac{\partial^2 y(0, F_0)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial y(0, F_0)}{\partial \xi} - \bar{f}(0, F_0). \quad (173)$$

Подставив (173) в (172), получим

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(0, F_{oi}) = \frac{y(h, F_{oi}) - y(0, F_{oi})}{h} - 0,5h \left[\frac{\partial y(0, F_o)}{\partial F_o} - \bar{f}(0, F_o) \right]. \quad (174)$$

Заменяя $\frac{\partial y}{\partial F_o}(0, F_o)$ конечной разностью по формуле

$$\frac{\partial y}{\partial F_o} \approx \frac{y(0, F_{oi} + \tau) - y(0, F_{oi})}{\tau},$$

и подставляя ее в (174), получим

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(0, F_{oi}) = \frac{y(h, F_{oi}) - y(0, F_{oi})}{h} - 0,5h \left[\frac{y(0, F_{oi} + \tau) - y(0, F_{oi})}{\tau} - \bar{f}(0, F_{oi}) \right]. \quad (175)$$

Тогда второе граничное условие аппроксимируется выражением

$$\begin{aligned} \frac{y(h, F_{oi}) - y(0, F_{oi})}{h} - 0,5h \left[\frac{y(0, F_{oi} + \tau) - y(0, F_{oi})}{\tau} \right] + 0,5h \bar{f}(0, F_{oi}) - \\ - \frac{\alpha}{\lambda} \ell y(0, F_{oi}) = 0. \end{aligned} \quad (176)$$

Разностная схема имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y(\xi_i, F_{oi} + \tau) - y(\xi_i, F_{oi})}{\tau} &= \frac{y(\xi_i + h, F_{oi}) - 2y(\xi_i, F_{oi}) + y(\xi_i - h, F_{oi})}{h^2} + \bar{f}(\xi_i, F_{oi}) \\ y(\xi_i, 0) &= 0 \\ y(1, F_{oi}) &= \mu_2 y(F_{oi}) \\ \frac{y(h, F_{oi}) - y(0, F_{oi})}{h} - 0,5h \left[\frac{y(0, F_{oi} + \tau) - y(0, F_{oi})}{\tau} \right] + 0,5h \bar{f}(0, F_{oi}) - \frac{\alpha}{\lambda} \ell y(0, F_{oi}) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (177)$$

Погрешность такой аппроксимации равна квадрату шага сетки [14]. Так как шаг - величина меньше единицы, то точность существенно увеличивается.

Заменяем непрерывную область изменения аргументов ξ и F , где $0 \leq \xi \leq 1$; $0 \leq F_o$, область дискретного изменения аргументов ξ_i и

F_{0i} . Для простоты изложения разобьем стержень на четыре интервала - пять узловых точек (рис. 51).

Ось ординат соответствует безразмерному времени Фурье. По координате F_{0i} схема ограничений не имеет. Например, узлы №№ 2, 7, 12, 17 характеризуют температуру в сечении стержня $\xi_i = 2h$ в моменты времени $F_0 = 0$; $F_0 = \tau$; $F_0 = 2\tau$ и $F_0 = 3\tau$ соответственно.

На основе системы уравнений (177) составляется алгоритм решения задачи на ЭВМ.

Алгоритм программы

Используя условие $y(\xi_i, 0) = 0$, найдем значение сеточной функции в узлах №№ 0, 1, 2, 3, 4.

$$y_0(\xi_0, 0) = y_1(\xi_1, 0) = y_2(\xi_2, 0) = y_3(\xi_3, 0) = y_4(\xi_4, 0) = 0,$$

причем первое граничное условие не должно противоречить начальному условию задачи, т.е.

$$y(1, F_{0i}) \Big|_{F_{0i}=0} = y_4(\xi_4, 0) = \mu_2(0) = 0.$$

Теперь применим к внутренним узлам контура №№ 1, 2, 3 уравнение (171), а к граничному узлу № 0 - (176). Для узла № 0 с координатой 0, 0 (176) запишется в виде

$$\frac{y(h, 0) - y(0, 0)}{h} - 0,5h \left[\frac{y(0, 0 + \tau) - y(0, 0)}{\tau} \right] + 0,5h \bar{f}(0, 0) - \frac{\alpha}{\lambda} y(0, 0) = 0.$$

Учитывая, что $y(h, 0) = y_1$, $y(0, 0) = y_0$, $y(0, \tau) = y_9$, значения сеточных функций в соответствующих узлах, кроме того, $y_0 = y_1 = 0$, получим

$$y_9 = \tau \cdot \bar{f}(0, 0).$$

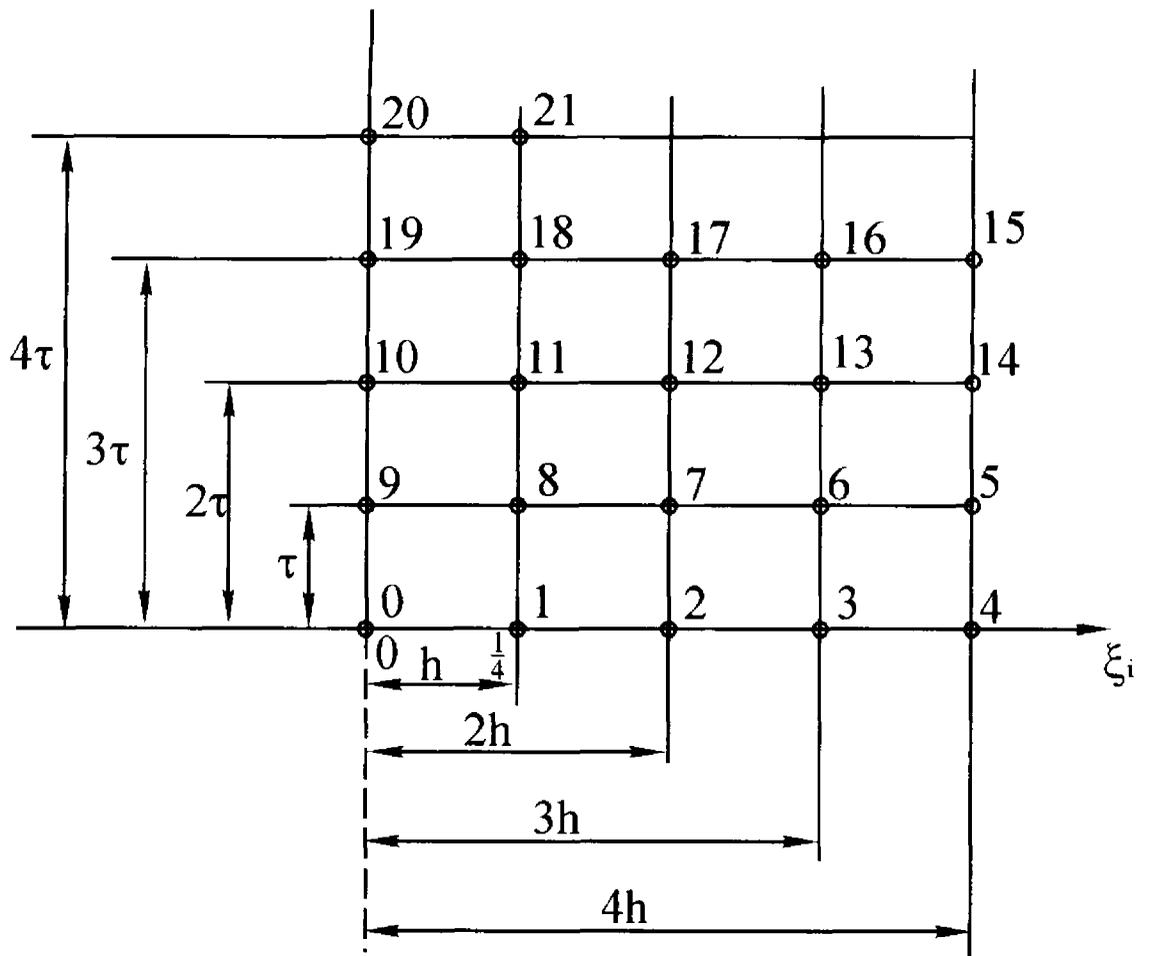


Рис.51. Расчетная схема к определению температуры методом сеток

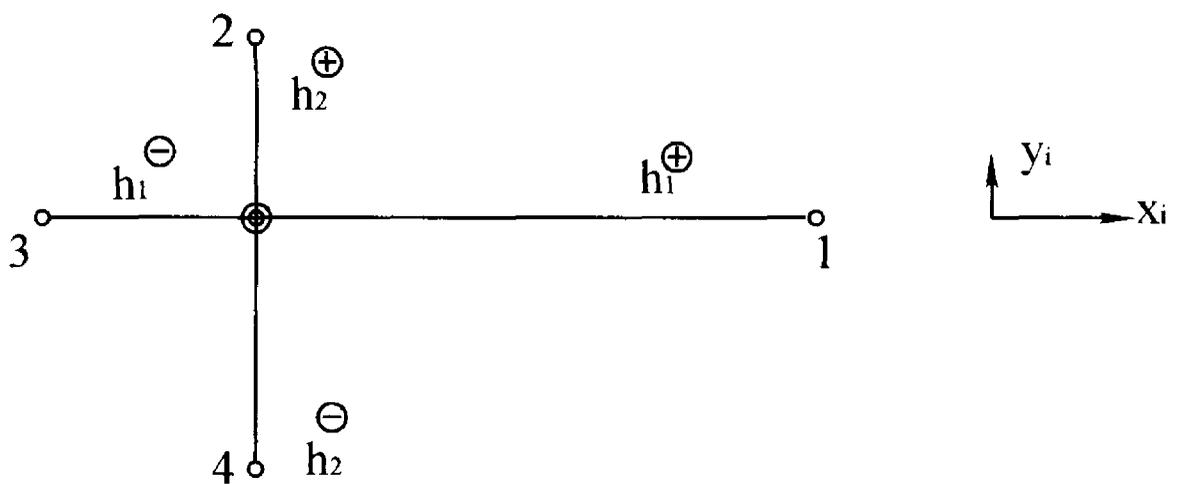


Рис.52. Схема нерегулярного шаблона

Для узла № 1 с координатой $(h, 0)$ (171) запишется так:

$$\frac{y(h, \tau) - y(h, 0)}{\tau} = \frac{y(h + h, 0) - 2y(h, 0) + y(h - h, F_{0i})}{h^2} + \bar{f}(h, 0).$$

$y(h, \tau) = y_8$, $y(h, 0) = y_1 = 0$, $y(2h, 0) = y_2 = 0$, $y(0, 0) = y_0 = 0$, получим

$$y_8 = \tau \cdot \bar{f}(h, 0).$$

Аналогично, записав уравнения для узлов №№ 2 и 3, определяем сеточные функции y_7 и y_6 , а значение $y_5 = y_5(1, \tau) = \mu_2(\tau)$ определим из граничного условия.

Далее к внутренним узлам №№ 8, 7, 6 применяем уравнение (171), а к узлу № 9- (176) и находим величины сеточных функций в узлах №№ 10, 11, 12, 13. Например, для узла № 8 с координатой (h, τ) получим

$$\frac{y(h, \tau + \tau) - y(h, \tau)}{\tau} = \frac{y(h + h, \tau) - 2y(h, \tau) + y(h - h, \tau)}{h^2} + \bar{f}(h, \tau).$$

Учитывая, что $y(h, 2\tau) = y_{11}$, $y(h, \tau) = y_8$, $y(2h, \tau) = y_7$, $y(0, \tau) = y_9$, имеем

$$\frac{y_{11} - y_8}{\tau} = \frac{y_7 - 2y_8 + y_9}{h^2} + \bar{f}(h, \tau),$$

откуда находим y_{11} .

Отличие задачи № 2 от задачи № 1 заключается в последовательном вычислении сеточных функций (нет необходимости решать систему линейных уравнений).

Если граничная область задачи не является прямолинейной, например окружность, применяются нерегулярные шаблоны, т.е. сетки с переменным шагом.

Аппроксимации частных производных второго порядка на нерегулярных шаблонах имеют вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\hbar_1} \left[\frac{U(x_i + h_1^{\oplus}, y_i, t_i) - U(x_i, y_i, t_i)}{h_1^{\oplus}} - \frac{U(x_i, y_i, t_i) - U(x_i - h_1^{(-)}, y_i, t_i)}{h_1^{(-)}} \right], \quad (178)$$

где $\hbar_1 = \frac{1}{2}(h_1^{\oplus} + h_1^{(-)})$;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\hbar_2} \left[\frac{U(x_i, y_i + h_2^{\oplus}, t_i) - U(x_i, y_i, t_i)}{h_2^{\oplus}} - \frac{U(x_i, y_i, t_i) - U(x_i, y_i - h_2^{(-)}, t_i)}{h_2^{(-)}} \right],$$

где $\hbar_2 = \frac{1}{2}(h_2^{\oplus} + h_2^{(-)})$;

h_1^{\oplus} - шаг вправо по координате x_i ,

$h_1^{(-)}$ - шаг влево по координате x_i ,

h_2^{\oplus} и $h_2^{(-)}$ - аналогично для координаты y_i .

Данные производные представляются шаблоном, приведенным на рис. 52.

В качестве примера решим следующую задачу.

Задача 3. Задан бесконечный цилиндра радиуса R . На боковой поверхности цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Фурье. Построить разностную схему задачи.

В цилиндрических координатах задача записывается таким образом:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right);$$

$$\Gamma(r, 0) = \varphi(r) \quad - \text{начальное условие};$$

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\alpha}{\lambda} \Gamma(r) \right|_{r=R} = 0 \quad - \text{граничное условие.}$$

Перейдем от цилиндрических координат к прямоугольным. Тогда задача запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (179)$$

Начальное условие:

$$T(x, y, 0) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Граничное условие запишется, если производную по направлению

$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}$ представить в декартовых координатах:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

учитывая, что x и y - это координаты поверхности цилиндра, получим

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial T}{\partial x}(x_S, y_S, t) \frac{x_S}{R} + \frac{\partial T}{\partial y}(x_S, y_S, t) \frac{y_S}{R}.$$

Тогда граничное условие запишется так:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \frac{x_S}{R} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{y_S}{R} + \frac{\alpha}{\lambda} T(x_S, y_S, t) = 0. \quad (180)$$

В произвольном поперечном сечении цилиндра строим сетку.

Сначала проводим систему вертикальных и горизонтальных линий одинакового шага до пересечения с контуром L . Так как температурное поле в данной задаче обладает центральной и осевой симметрией, то достаточно рассмотреть только первый квадрант. Далее от точек пересечения линий с контуром проводим дополнительные горизонтальные или вертикальные линии до пересечения с осями координат x_i и y_i - получим нерегулярную

сетку (см. рис. 53). Производные $\partial T/\partial x$ и $\partial T/\partial y$ аппроксимируем левыми конечными разностями вида (149)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx T_x = \frac{T(x_i, y_i, t_i) - T(x_i - h_1^{(-)}, y_i, t_i)}{h_1^{(-)}};$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx T_y = \frac{T(x_i, y_i, t_i) - T(x_i, y_i - h_2^{(-)}, t_i)}{h_2^{(-)}}.$$

Сеточную функцию также обозначим символом T .

Тогда разностная аппроксимация уравнения (179) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{T(x_i, y_i, t_i + \tau) - T(x_i, y_i, t_i)}{\tau} = a \left[\frac{1}{\tilde{h}_1} \left(\frac{T(x_i + h_1^{\oplus}, y_i, t_i) - T(x_i, y_i, t_i)}{h_1^{\oplus}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T(x_i, y_i, t_i) - T(x_i - h_1^{(-)}, y_i, t_i)}{h_1^{(-)}} \right) + \frac{1}{\tilde{h}_2} \left(\frac{T(x_i, y_i + h_2^{\oplus}, t_i) - T(x_i, y_i, t_i)}{h_2^{\oplus}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T(x_i, y_i, t_i) - T(x_i, y_i - h_2^{(-)}, t_i)}{h_2^{(-)}} \right) \right], \end{aligned} \quad (181)$$

где $\tilde{h}_1 = 0,5(h_1^{\oplus} + h_1^{(-)})$; $\tilde{h}_2 = 0,5(h_2^{\oplus} + h_2^{(-)})$.

Для точек контура уравнение (180) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{T(x_i, y_i, t_i) - T(x_i - h_1^{(-)}, y_i, t_i)}{h_1^{(-)}} \frac{x_i}{R} + \frac{T(x_i, y_i, t_i) - T(x_i, y_i - h_2^{(-)}, t_i)}{h_2^{(-)}} \frac{y_i}{R} + \\ + \frac{\alpha}{\lambda} T(x_i, y_i, t_i) = 0. \end{aligned} \quad (182)$$

В формуле (182) x_i и y_i - координаты узлов, принадлежащих контуру L .

α - коэффициент теплоотдачи;

λ - коэффициент теплопроводности;

R - радиус цилиндра.

Начальное условие запишется таким образом:

$$T(x_i, y_i, 0) = \varphi\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2}\right). \quad (183)$$

Формулы (181) и (182) описывают разностную схему задачи. На основе уравнений составляется алгоритм решения задачи на ЭВМ. Алгоритм заключается в следующем.

Для начального момента времени $t_i = 0$ по (183) вычисляем начальные температуры в 35-ти узлах первого квадранта. Для этого же момента времени (сечение $t_i = 0$, см. рис. 53) для каждого внутреннего узла №№ 1, 2, ..., 33 записываем разностное уравнение (181) и рассчитываем сеточные функции в параллельной временной плоскости $t_1 = \tau$. Например, записав уравнение для узла 0 в момент времени $t_0 = 0$, определяем сеточную функцию в этом же узле, но в момент времени $t_1 = \tau$. Для контурных точек №№ 7, 8, 20, 21, 29, 30, 34, 35 разностное уравнение не записываем, так как уравнение (182) не позволяет определить сеточную функцию в параллельной временной плоскости $t_1 = \tau$. Только определив на основании (181) сеточные функции во всех внутренних узлах временного сечения $t_1 = \tau$, находим сеточные функции в узлах на контуре по (182). Далее для внутренних узлов сечения $t_1 = \tau$ записываем (181) и определяем сеточные функции для параллельного времени сечения $t_2 = 2\tau$. Используя значение сеточной функции во внутренних

узлах, определяем значения $T(x_i, y_i, t_i)$ на контуре для $t_2 = 2\tau$, далее алгоритм повторяется.

Для пояснения запишем несколько разностных уравнений. Узел № 0 с координатой 0, 0, 0. Уравнение (181) запишется таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{T(0,0,\tau) - T(0,0,0)}{\tau} = a \left[\frac{1}{0,5(|0;1| + |0;1|)} \left(\frac{T(h_1^{\oplus}, 0, 0) - T(0,0,0)}{|0;1|} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T(0,0,0) - T(-h_1^{(-)}, 0, 0)}{|0;1|} \right) + \frac{1}{(|0;14| + |0;14|)} \left(\frac{T(0, +h_2^{\oplus}, 0) - T(0,0,0)}{|0;14|} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T(0,0,0) - T(0, -h_2^{(-)}, 0)}{|0;14|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (184)$$

В формуле (184); $|0;1|$ - величина отрезка на рис. 53 между узлами №№ 0 и 1 и аналогично $|0;14|$,

$$T(h_1^{\oplus}, 0, 0) = T_1(\tau = 0) = T_1(0);$$

$$T(-h_1^{(-)}, 0, 0) = T_1(0) \quad - \quad \text{температура в узловой точке,}$$

расположенной симметрично узла № 1, на отрицательной оси x_1 .

Из-за симметричности задачи получим

$$T(h_1^{\oplus}, 0, 0) = T(-h_1^{(-)}, 0, 0) = T_1(0);$$

$$T(0, h_2^{\oplus}, 0) = T_{14}(\tau = 0) = T_{14}(0);$$

$$T(0, -h_2^{(-)}, 0) = T_{14}(\tau = 0) = T_{14}(0),$$

тогда уравнение (184) примет вид

тогда уравнение (184) примет вид

$$\frac{T_0(\tau) - T_0(0)}{\tau} = a \left[\frac{1}{0,5(|0;1| + |0;1|)} \left(\frac{T_1(0) - T_0(0)}{|0;1|} - \frac{T_0(0) - T_1(0)}{|0;1|} \right) + \frac{1}{0,5(|0;14| + |0;14|)} \left(\frac{T_{14}(0) - T_0(0)}{|0;14|} - \frac{T_0(0) - T_{14}(0)}{|0;14|} \right) \right].$$

Учитывая, что все $T_i(0)$ для $\tau_i = 0$ определены, по (183) находим $T_0(\tau)$ - сеточную функцию в узле № 0, но для момента времени $t_i = \tau$.

Узел № 18 для $\tau = 0$ имеет нерегулярную координату $(x_3, y_{15}, 0)$.

Уравнение (181) для данного узла запишется в виде

$$\frac{T(x_3, y_{15}, \tau) - T(x_3, y_{15}, 0)}{\tau} = a \left[\frac{1}{0,5(|18;19| + |17;18|)} \left(\frac{T(x_3 + h_1^{\oplus}, y_{15}, 0) - T(x_3, y_{15}, 0)}{|18;19|} - \frac{T(x_3, y_{15}, 0) - T(x_3 - h_1^{(-)}, y_{15}, 0)}{|17;18|} \right) + \frac{1}{0,5(|18;11| + |18;22|)} * \left(\frac{T(x_3, y_{15} + h_2^{\oplus}, 0) - T(x_3, y_{15}, 0)}{|18;22|} - \frac{T(x_3, y_{15}, 0) - T(x_3, y_{15} - h_2^{(-)}, 0)}{|18;11|} \right) \right], \quad (185)$$

где $|18;19|$; $|17;18|$, $|18;11|$ и $|18;22|$ - величины соответствующих отрезков на схеме, а:

$$T(x_3 + h_1^{\oplus}, y_{15}, 0) = T_{19}(\tau = 0) = T_{19}(0);$$

$$T(x_3, y_{15}, 0) = T_{18}(\tau = 0) = T_{18}(0);$$

$$T(x_3 - h_1^{(-)}, y_{15}, 0) = T_{17}(\tau = 0) = T_{17}(0);$$

$$T(x_3, y_{15} + h_2^{\oplus}, 0) = T_{22}(\tau = 0) = T_{22}(0);$$

$$T(x_3, y_{15} - h_2^{(-)}, 0) = T_{11}(\tau = 0) = T_{11}(0).$$

Из формулы (185) определяем $T_{18}(\tau)$. Таким образом находим $T_0(\tau)$, $T_1(\tau)$, ..., $T_{33}(\tau)$. Для определения $T_7(\tau)$, $T_8(\tau)$, $T_{20}(\tau)$, $T_{21}(\tau)$, $T_{35}(\tau)$ применим разностное уравнение (182) для узлов контура.

Например, для узла № 8 в плоскости $t_1 = \tau$ с координатой (x_6, y_{14}, τ)

$$\frac{T(x_6, y_{14}, \tau) - T(x_6 - h_1^{(-)}, y_{14}, \tau) |AB|}{|9;8| R} + \frac{T(x_6, y_{14}, \tau) - T(x_6, y_{14} - h_{21}^{(-)}, \tau) |CD|}{|8;6| R} + \frac{\alpha}{\lambda} T(x_6, y_{14}, \tau) = 0,$$

или

$$\frac{T_8(\tau) - T_9(\tau) |AB|}{|9;8| R} + \frac{T_8(\tau) - T_6(\tau) |CD|}{|8;6| R} + \frac{\alpha}{\lambda} T_8(\tau) = 0.$$

Из этого уравнения определяем $T_8(\tau)$ и далее по аналогии, алгоритм повторяется. Данная тепловая задача также решается методом “прогонки”.

Задача 4

Решим методом сеток задачу на движущийся полосовой источник тепла. Напомним читателям, что данная задача решалась методом источников в подразд. 2.4.

Условие задачи: по поверхности полубесконечного тела, на которой задан теплообмен по закону Ньютона, в положительном направлении оси Z с постоянной скоростью V движется полосовой источник тепла шириной H . Плотность теплового потока q по всей площади источника распределена равномерно. Температуру окружающей среды примем равной 0.

Специфика метода сеток заключается в том, что оси координат Oxz неподвижны и связаны с теплопроводящим телом. Положительное направление от X примем внутрь тела. В момент времени $t=0$ координата передней кромки источника l_0 , в момент времени τ эта координата определяется по формуле: $l = l_0 + V\tau$ (см. рис. 54).

Требуется решить уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (186)$$

с начальным условием:

$$T|_{t=0} = 0 \quad (187)$$

и граничным условием:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ z < l-H \\ z > l}} + \alpha T \Big|_{\substack{x=0 \\ z < l-H \\ z > l}} = 0; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ l-H < z < l}} = q. \quad (188)$$

Сеточная функция, соответствующая температуре $T(x, z, t) \rightarrow \theta(x_i, z_i, t_i)$. По координате x и z выбираем равномерный шаг h , по временной координате - шаг τ , причем $h = V\tau$, т.е. за время, равное шагу временной сетки, источник перемещается в положительном направлении оси Z на величину шага h .

Заменяем дифференциальное уравнение разностным, а также формируем разностный аналог для ГУ и НУ.

Получим

$$\frac{\theta(x_i, z_i, t_i + \tau) - \theta(x_i, z_i, t_i)}{\tau} = a \left[\frac{\theta(x_i + h, z_i, t_i) - 2\theta(x_i, z_i, t_i) + \theta(x_i - h, z_i, t_i)}{h^2} + \frac{\theta(x_i, z_i + h, t_i) - 2\theta(x_i, z_i, t_i) + \theta(x_i, z_i - h, t_i)}{h^2} \right]. \quad (189)$$

Можно аппроксимировать граничные условия задачи следующими разностными выражениями:

$$\begin{aligned}
 -\lambda \frac{\theta(x_i + h, z_i, t_i) - \theta(x_i, z_i, t_i)}{h} + \alpha \theta(x_i, z_i, t_i) \Big|_{x_i=0} &= 0; \\
 -\lambda \frac{\theta(x_i + h, z_i, t_i) - \theta(x_i, z_i, t_i)}{h} \Big|_{x_i=0} &= q. \quad (190)
 \end{aligned}$$

Погрешность такой аппроксимации равна шагу h сетки. Можно повысить точность задачи, заменив разностную схему (190) несколько отличным разностным выражением (методом повышения порядка аппроксимации разностной схемы). Разложим функцию $\theta(x_i, z_i, t_i)$ в ряд Тейлора по степеням h переменной x :

$$\theta(x_i + h, z_i, t_i) - \theta(x_i, z_i, t_i) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x_i} h + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \Big|_{x_i} + \dots,$$

отсюда

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x_i=0} \approx \frac{\theta(h, z_i, t_i) - \theta(0, z_i, t_i)}{h} - 0,5h \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \Big|_{x_i=0},$$

а значение $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \Big|_{x_i=0}$ подставим из уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \Big|_{x_i=0} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{x_i=0} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \Big|_{x_i=0} \approx \frac{1}{a} \left[\frac{\theta(x_i, z_i, t_i + \tau) - \theta(x_i, z_i, t_i)}{\tau} \right] \Big|_{x_i=0} - \\
 &\quad - \frac{\theta(x_i, z_i + h, t_i) - 2\theta(x_i, z_i, t_i) + \theta(x_i, z_i - h, t_i)}{h^2} \Big|_{x_i=0} = \\
 &= \frac{1}{a\tau} [\theta(0, z_i, t_i + \tau) - \theta(0, z_i, t_i)] - \frac{1}{h^2} [\theta(0, z_i + h, t_i) - 2\theta(0, z_i, t_i) + \theta(0, z_i - h, t_i)]
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x_i=0} = \frac{\theta(h, z_i, t_i) - \theta(0, z_i, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0, z_i, t_i + \tau) - \theta(0, z_i, t_i)] +$$

$$+ \frac{0,5}{h} [\theta(0, z_i + h, t_i) - 2\theta(0, z_i, t_i) + \theta(0, z_i - h, t_i)].$$

Подставляем полученное разностное выражение в ГУ задачи (188).

Разностная схема задачи запишется в виде системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\theta(x_i, z_i, t_i + \tau) - \theta(x_i, z_i, t_i)}{\tau} = a \left[\frac{\theta(x_i + h, z_i, t_i) - 2\theta(x_i, z_i, t_i) + \theta(x_i - h, z_i, t_i)}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{\theta(x_i, z_i + h, t_i) - 2\theta(x_i, z_i, t_i) + \theta(x_i, z_i - h, t_i)}{h^2} \right] \end{aligned} \right. \quad (191)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\theta(h, z_i, t_i) - \theta(0, z_i, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0, z_i, t_i + \tau) - \theta(0, z_i, t_i)] + \frac{0,5}{h} [\theta(0, z_i + h, t_i) - \\ - 2\theta(0, z_i, t_i) + \theta(0, z_i - h, t_i)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta(0, z_i, t_i) = 0 \end{aligned} \right. \quad (192)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\theta(h, z_i, t_i) - \theta(0, z_i, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0, z_i, t_i - \tau) - \theta(0, z_i, t_i)] + \frac{0,5}{h} [\theta(0, z_i + h, t_i) - \\ - 2\theta(0, z_i, t_i) + \theta(0, z_i - h, t_i)] - \frac{q}{\lambda} = 0 \end{aligned} \right. \quad (193)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta(x_i, z_i, 0) = 0 \end{aligned} \right. \quad (194)$$

Заменяем область изменения непрерывных переменных $x; z; t$ областью дискретных переменных x_i, z_i, t_i . Наносим отметку, в узловых точках которой ищем приближенное решение $\theta(x_i, z_i, t_i)$. Ограничимся рассмотрением $11 \times 3 = 33$ -х узловых точек в пространственных координатах x_i и z_i и 3-х временных координат: $t_1 = 0$; $t_2 = \tau = h/V$ и $t_3 = 2\tau = 2h/V$. На рис. 55, а, б, в приведены расчетные схемы задачи для t_1, t_2 и t_3 соответственно.

Будем обозначать значение сеточной функции в i -м узле в момент времени t_i с символом $\theta_i(t_i)$. Например, температура в узле № 25 в момент времени $t_i = 2\tau$ обозначается $\theta_{25}(2\tau)$.

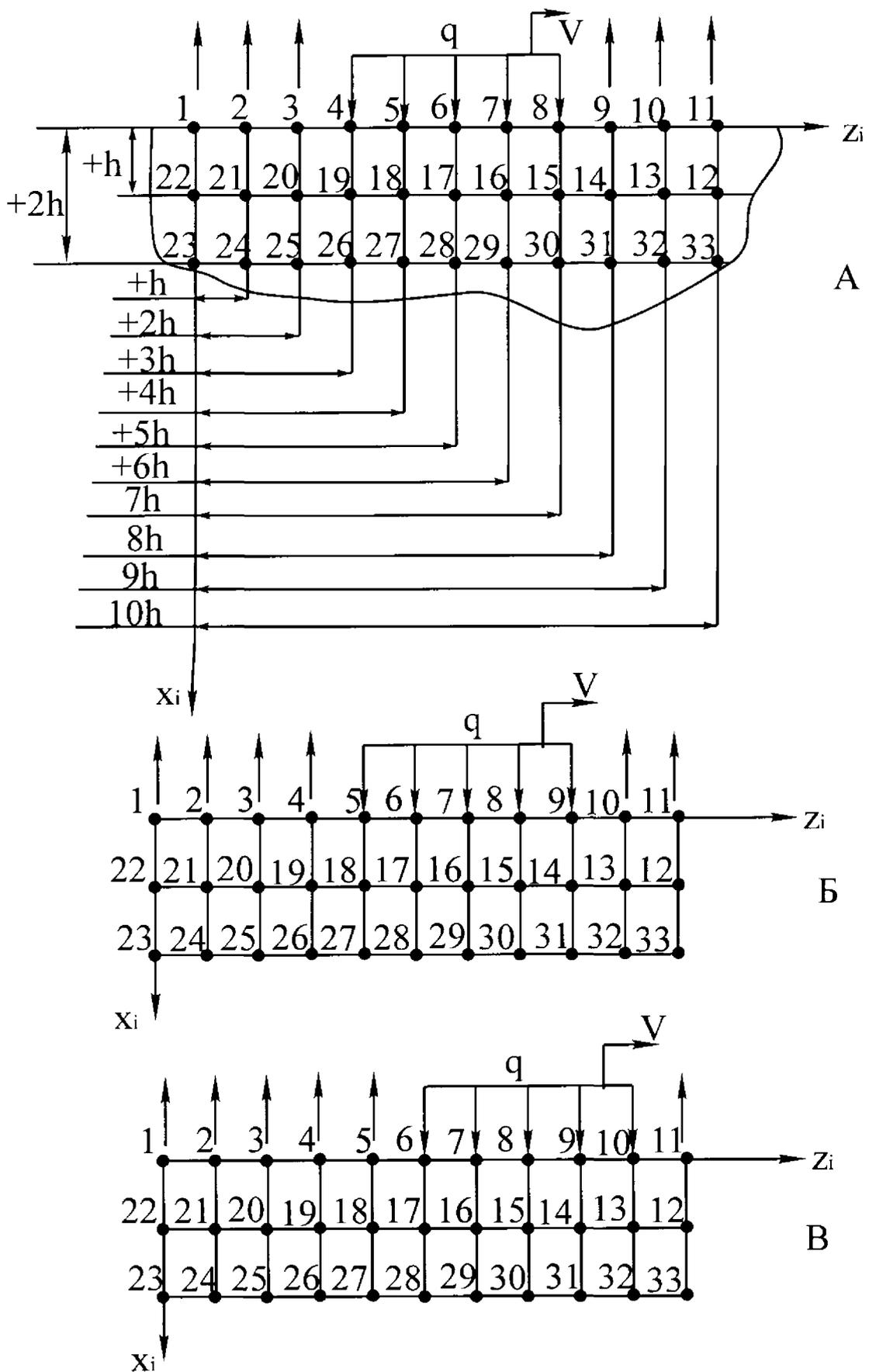


Рис.53. Расчетная схема к определению температуры методом сеток с подвижным тепловым источником
 $A-t=0$, $B-t=t$, $B-t=2t$

Алгоритм решения задачи

Для всех узлов сетки в момент времени $t_1 = 0$ вычисляем значение сеточных функций $\theta_i(0)$, используя (194).

В данном случае

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dots = \theta_{33}(0) = 0.$$

Для этой же временной координаты $t_1 = 0$ (рис. 55,а) для каждого узла сетки запишем соответствующее разностное уравнение. Причем для узлов №№ 4, 5, 6, 7, 8 применяем уравнение (193) (действует источник тепла); для узлов №№ 1, 2, 3, 9, 10 и 11 применяем уравнение (192) (теплообмен с окружающей средой), а для всех остальных узлов сечения - уравнение (191). Таким образом, получаем 33 уравнения. Из каждого уравнения, записанного для $t_1 = 0$, определяем значение сеточной функции θ в этом же узле, но для момента времени $t_2 = \tau$, т.е. для узлов схемы на рис. 55,б.

Далее повторяем процедуру для сетки с временной координатой $t_2 = \tau$. Для каждого узла записываются разностные уравнения. Необходимо учитывать, что узел № 4 освободился от действия теплового источника, для данного узла применяем уравнение (192). Для узла № 9 следует записать уравнение (193). Из 33-х разностных уравнений определяем значения сеточных функций для момента времени $t_3 = 2\tau$.

Переходим к сетке с временной координатой $t_3 = 2\tau$. Алгоритм расчета не сложен, однако, учитывая, что структура разностного уравнения формируется по программе в зависимости

от номера узла, кроме того, узлы в граничной области находятся под воздействием переменных ГУ, разработка программы вычисления $\theta(x_i, z_i, t_i)$ - довольно трудоемкая процедура.

Приведем в качестве примера разностные уравнения для ряда узлов.

1. Временная координата $t_1 = 0$. Запишем уравнение для узла № 1 с координатой $(0, 0, 0)$. Состояние узла описывается разностным уравнением (192).

$$\frac{\theta(h,0,0) - \theta(0,0,0)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0,0,\tau) - \theta(0,0,0)] + \frac{0,5}{h} [\theta(0,h,0) - 2\theta(0,0,0) + \theta(0,-h,0)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta(0,0,0) = 0,$$

или

$$\frac{\theta_{22}(0) - \theta_1(0)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_1(\tau) - \theta_1(0)] + \frac{0,5}{h} [\theta_2(0) - 2\theta_1(0) + \theta(0,-h,0)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta_1(0) = 0.$$

Учитывая, что $\theta_{22}(0) = \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta(0,-h,0) = 0$, получим

$$\theta_1(\tau) = 0.$$

Аналогично, записывая разностные уравнения для узлов №№ 2 и 3, имеем

$$\theta_2(\tau) = \theta_3(\tau) = 0.$$

Запишем разностное уравнение для узла № 4 с координатой $(0, 3h, 0)$. Состояние узла описывается аппроксимацией (193)

$$\frac{\theta(h,3h,0) - \theta(0,3h,0)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0,3h,\tau) - \theta(0,3h,0)] + \frac{0,5}{h} [\theta(0,4h,0) - 2\theta(0,3h,0) + \theta(0,2h,0)] + \frac{q}{\lambda} = 0,$$

ИЛИ

$$\frac{\theta_{19}(0) - \theta_4(0)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_4(\tau) - \theta_4(0)] + \frac{0,5}{h} [\theta_5(0) - 2\theta_4(0) + \theta_3(0)] + \frac{q}{\lambda} = 0,$$

отсюда

$$\theta_4(\tau) = \frac{q \cdot a\tau}{0,5h\lambda}$$

Для узла № 5(0, 4h, 0) также применяем разностное уравнение (193):

$$\begin{aligned} \frac{\theta(h,4h,0) - \theta(0,4h,0)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0,4h,\tau) - \theta(0,4h,0)] + \\ + \frac{0,5}{h} [\theta(0,5h,0) - 2\theta(0,4h,0) + \theta(0,3h,0)] + \frac{q}{\lambda} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\theta_5(\tau) = \frac{q \cdot a\tau}{0,5h\lambda}.$$

Аналогично для узлов №№ 6, 7 и 8 получим

$$\theta_6(\tau) = \theta_7(\tau) = \theta_8(\tau) = \frac{q \cdot a\tau}{0,5h\lambda}.$$

Для узлов №№ 9, 10, 11 применяем уравнение (192):

$$\theta_9(\tau) = \theta_{10}(\tau) = \theta_{11}(\tau) = 0.$$

Для внутренних узлов применяем уравнение (191).

Например для узла № 18(h, 4h, 0), разностное уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\theta(h,4h,\tau) - \theta(h,4h,0)}{\tau} = a \left[\frac{\theta(2h,4h,0) - 2\theta(h,4h,0) + \theta(0,4h,0)}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{\theta(h,5h,0) - 2\theta(h,4h,0) + \theta(h,3h,0)}{h^2} \right], \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\frac{\theta_{18}(\tau) - \theta_{18}(0)}{\tau} = a \left[\frac{\theta_{27}(0) - 2\theta_{18}(0) + \theta_5(0)}{h^2} + \frac{\theta_{17}(0) - 2\theta_{18}(0) + \theta_{19}(0)}{h^2} \right],$$

отсюда

$$\theta_{18}(\tau) = 0.$$

Таким образом, сеточные функции $\theta(x_i, z_i, t_i)$ при $t_2 = \tau$ равны нулю во всех точках, кроме узлов №№ 4, 5, 6, 7, 8, где

$$\theta = \frac{q \cdot a\tau}{0,5h\lambda}.$$

2. Временная координата $t_2 = \tau$ (рис. 55, б).

Записывая разностные уравнения для узлов, определим $\theta_i(2\tau)$. В качестве примера определим температуры на поверхности проводящей среды $x_i = 0$. Для узла № 1 (0, 0, τ) применяем формулу (192)

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(h,0,\tau) - \theta(0,0,\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0,0,2\tau) - \theta(0,0,\tau)] + \\ & + \frac{0,5}{h} [\theta(0,h,\tau) - 2\theta(0,0,\tau) + \theta(0,-h,\tau)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta(0,0,\tau) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\theta_{22}(\tau) - \theta_1(\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_1(2\tau) - \theta_1(\tau)] + \frac{0,5}{h} [\theta_2(\tau) - 2\theta_1(\tau) + \theta(0,-h,\tau)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta_1(\tau) = 0.$$

Из предыдущего цикла расчета сеточной функции получено

$$\theta_{22}(\tau) = \theta_1(\tau) = \theta_2(\tau) = \theta(0,-h,\tau) = 0,$$

следовательно,

$$\theta_1(2\tau) = 0.$$

Аналогично можно убедиться, что $\theta_2(2\tau) = 0$.

Запишем разностное уравнение (192) для узла № 3 (0, 2h, τ):

$$\frac{\theta(h, 2h, \tau) - \theta(0, 2h, \tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta(0, 2h, 2\tau) - \theta(0, 2h, \tau)] + \\ + \frac{0,5}{h} [\theta(0, 3h, \tau) - 2\theta(0, 2h, \tau) + \theta(0, h, \tau)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta(0, 2h, \tau) = 0,$$

или

$$\frac{\theta_{20}(\tau) - \theta_3(\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_3(2\tau) - \theta_3(\tau)] + \frac{0,5}{h} [\theta_4(\tau) - 2\theta_3(\tau) + \theta_2(\tau)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta_3(\tau) = 0.$$

Учитывая, что $\theta_{20}(\tau) = \theta_3(\tau) = \theta_3(0) = \theta_2(\tau) = 0$, получим

$$\theta_3(2\tau) = \frac{2q(a\tau)^2}{\lambda h^3}$$

Для узла № 4 также применяем уравнение (192) (так как источник переместился на величину h в направлении оси Z). Имеем уравнение

$$\frac{\theta_{19}(\tau) - \theta_4(\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_4(2\tau) - \theta_4(\tau)] + \frac{0,5}{h} [\theta_5(\tau) - 2\theta_4(\tau) + \theta_3(\tau)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta_4(\tau) = 0.$$

Учитывая, что $\theta_{19}(\tau) = \theta_3(\tau) = 0$, а

$$\theta_4(\tau) = \theta_5(\tau) = \frac{q \cdot a\tau}{0,5h\lambda},$$

получим

$$\theta_4(2\tau) = \frac{q \cdot a\tau}{0,5h\lambda} \left[1 - 3 \frac{a\tau}{h^2} - 2 \frac{\alpha a\tau}{\lambda h} \right]$$

Для узла № 5 запишем уравнение (193)

$$\frac{\theta_{18}(\tau) - \theta_5(\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_5(2\tau) - \theta_5(\tau)] + \frac{0,5}{h} [\theta_6(\tau) - 2\theta_5(\tau) + \theta_4(\tau)] + \frac{q}{\lambda} = 0,$$

где

$$\theta_6(\tau) = \theta_4(\tau) = \theta_5(\tau) = \frac{q \cdot a\tau}{0,5h\lambda}; \quad \theta_{18}(\tau) = 0,$$

тогда

$$\theta_5(2\tau) = 4q \frac{a\tau}{h\lambda} \left[1 - \frac{a\tau}{h^2} \right].$$

Аналогично, записывая уравнение (193) для узлов №№ 6, 7, получим

$$\theta_6(2\tau) = \theta_7(2\tau) = 4q \frac{a\tau}{h\lambda} \left[1 - \frac{a\tau}{h^2} \right].$$

Для узла № 8 применим уравнение (193):

$$\frac{\theta_{15}(\tau) - \theta_8(\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_8(2\tau) - \theta_8(\tau)] + \frac{0,5}{h} [\theta_9(\tau) - 2\theta_8(\tau) + \theta_7(\tau)] + \frac{q}{\lambda} = 0,$$

отсюда

$$\theta_8(2\tau) = 4q \frac{a\tau}{h\lambda} \left[1 - \frac{3 a\tau}{2 h^2} \right].$$

Применяя для узла № 9 уравнение (193), имеем

$$\frac{\theta_{14}(\tau) - \theta_9(\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_9(2\tau) - \theta_9(\tau)] + \frac{0,5}{h} [\theta_{10}(\tau) - 2\theta_9(\tau) + \theta_8(\tau)] + \frac{q}{\lambda} = 0,$$

откуда

$$\theta_9(2\tau) = 2q \frac{a\tau}{h\lambda} \left[1 - \frac{a\tau}{h^2} \right].$$

Для узла № 10 с координатой $0, 9h, \tau$ применяем уравнение (192):

$$\frac{\theta_{13}(\tau) - \theta_{10}(\tau)}{h} - \frac{0,5h}{a\tau} [\theta_{10}(2\tau) - \theta_{10}(\tau)] + \frac{0,5}{h} [\theta_{11}(\tau) - 2\theta_{10}(\tau) + \theta_9(\tau)] - \frac{\alpha}{\lambda} \theta_{10}(\tau) = 0.$$

Получим $\theta_{10}(2\tau) = 0$.

Для всех остальных узлов на поверхности $x_i = 0$ получим нулевые значения функции θ . Для внутренних узлов применяем уравнение (191).

Задача 5. Решим методом сеток задачу с граничным условием 4-го рода. Задачи формулируются следующим образом. На поверхности полубесконечного тела задан тепловой поток q . Область пространства $0 \leq x < \Delta$ имеет теплофизические параметры: $\lambda_1; a_1$, а область $\Delta < x < \infty$ - $\lambda_2; a_2$. Необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & 0 < x < \Delta \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & \Delta < x < \infty \end{cases}, \quad (195)$$

с начальным условием:

$$\theta(x, 0) = U_0(x); \quad (196)$$

граничными условиями:

$$-\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = q; \quad \theta \Big|_{x=\Delta+\xi} = \theta \Big|_{x=\Delta-\xi; \xi \rightarrow 0}; \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\Delta} = \lambda_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\Delta}. \quad (197)$$

Источник тепла неподвижен (рис. 56).

Сеточная функция, соответствующая температуре, $\theta(x_i, t_i)$. По координате x выберем шаг h , а по координате t - шаг τ . Найдем

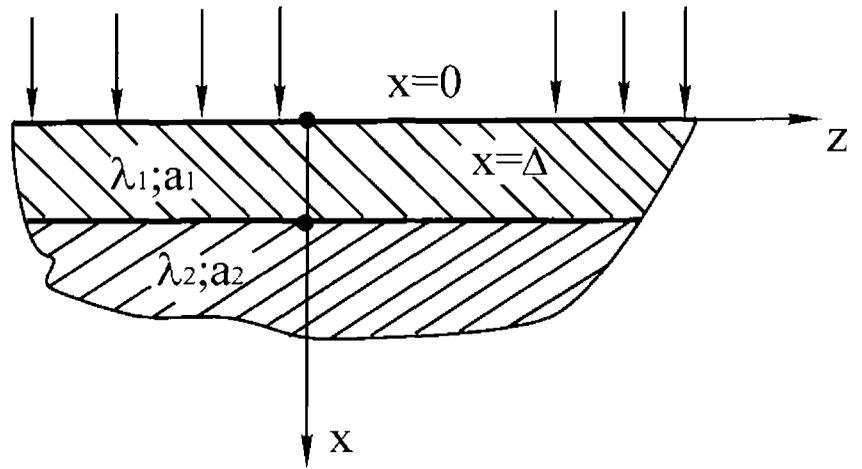


Рис.56. Расчетная схема тепловой задачи с граничным условием 4-го рода

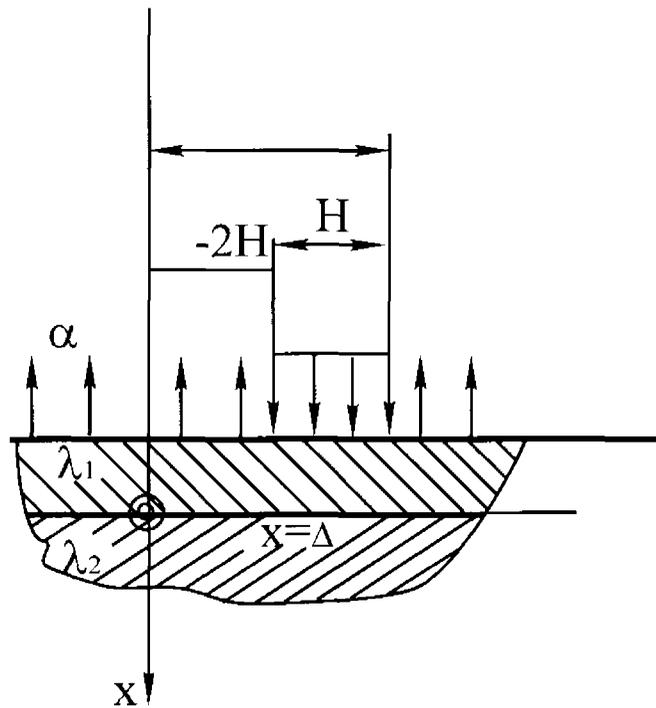


Рис.57. Расчетная схема шлифования покрытий

разностные аппроксимации ГУ (197). Разложим функцию $\theta(x_i, t_i)$ в ряд Тейлора:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x_i=0} = \frac{\theta(x_i + h, t_i) - \theta(x_i, t_i)}{h} \Big|_{x_i=0} \approx \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x_i=0} + 0,5h \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{x_i=0},$$

отсюда

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x_i=0} = \frac{\theta(h, t_i) - \theta(0, t_i)}{h} - 0,5h \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{x_i=0}.$$

Значение $\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{x=0}$ подставляем из уравнения теплопроводности:

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \approx \frac{1}{a_1} \left[\frac{\theta(0, t_i + \tau) - \theta(0, t_i)}{\tau} \right],$$

получаем граничное условие на поверхности среды:

$$\lambda_1 \left[\frac{\theta(h, t_i) - \theta(0, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a_1} \left(\frac{\theta(0, t_i + \tau) - \theta(0, t_i)}{\tau} \right) \right] = q.$$

Учитывая, что

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\Delta-\xi}^{\xi \rightarrow 0} \approx \frac{\theta(\Delta + h, t_i) - \theta(\Delta, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a_1} \left[\frac{\theta(\Delta, t_i + \tau) - \theta(\Delta, t_i)}{\tau} \right],$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\Delta+\xi}^{\xi \rightarrow 0} \approx \frac{\theta(\Delta + h, t_i) - \theta(\Delta, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a_2} \left[\frac{\theta(\Delta, t_i + \tau) - \theta(\Delta, t_i)}{\tau} \right],$$

разностную схему задачи можно записать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a_1} \frac{\theta(x_i, t_i + \tau) - \theta(x_i, t_i)}{\tau} = \frac{\theta(x_i + h, t_i) - 2\theta(x_i, t_i) + \theta(x_i - h, t_i)}{h^2}; \quad 0 < x_i < \Delta \quad (198) \\ \frac{1}{a_2} \frac{\theta(x_i, t_i + \tau) - \theta(x_i, t_i)}{\tau} = \frac{\theta(x_i + h, t_i) - 2\theta(x_i, t_i) + \theta(x_i - h, t_i)}{h^2}; \quad \Delta < x_i < \infty \quad (199) \\ \text{ГУ:} \\ -\lambda_1 \left[\frac{\theta(h, t_i) - \theta(0, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a_1} \left(\frac{\theta(0, t_i + \tau) - \theta(0, t_i)}{\tau} \right) \right] = q; \quad x_i = 0 \quad (200) \\ \lambda_1 \left[\frac{\theta(\Delta + h, t_i) - \theta(\Delta, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a_1} \left(\frac{\theta(\Delta, t_i + \tau) - \theta(\Delta, t_i)}{\tau} \right) \right] = \\ = \lambda_2 \left[\frac{\theta(\Delta + h, t_i) - \theta(\Delta, t_i)}{h} - \frac{0,5h}{a_2} \left(\frac{\theta(\Delta, t_i + \tau) - \theta(\Delta, t_i)}{\tau} \right) \right]; \quad x_i = \Delta \\ \theta(x_i, 0) = U(x_i) \end{array} \right.$$

Шаг сетки h выбираем так, чтобы раздел сред ($\lambda_1; a_1$ и $\lambda_2; a_2$) совпал с одним из узлов, т.е. $\Delta = h_i$, где i - целое число, в остальном расчетная схема аналогична задаче 2 данного раздела.

Задача 6. Используя выкладки задач 4 и 5, решить методом сеток задачу на построение математической модели, описывающей температурное поле при шлифовании покрытий.

Задача формулируется следующим образом.

По поверхности полубесконечного тела, на которой задан теплообмен по закону Ньютона, в положительном направлении оси Z с постоянной скоростью движется полосовой источник тепла шириной H . Плотность теплового потока - q . Температура окружающей среды - θ_c . Начальная температура - T_0 . Область

пространства $0 < x < \Delta$ имеет теплофизические параметры: λ_1 и a_1 , а область $\Delta < x < \infty$ - λ_2 , a_2 (рис. 57).

Необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} & 0 < x < \Delta \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} & \Delta < x < \infty \end{cases}, \quad (201)$$

с начальным условием:

$$\theta(x, z, 0) = T_0, \quad (202)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\ell-2H < z < \ell} &= q; \\ -\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\substack{z < \ell-2H \\ z > \ell}} + \alpha(\theta|_{x=0} - \theta_c) &; \end{aligned} \quad (203)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\Delta} = \lambda_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\Delta};$$

$$\theta|_{x=\Delta+\xi} = \theta|_{x=\Delta-\xi} \text{ при } \xi \rightarrow 0,$$

где $\ell = \ell_0 + V\tau$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Решить уравнение

$$(1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 4x^2 + 2,$$

если

$$y(-1) = 0; \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = 0.$$

Решение найти на интервале $-1 \leq x \leq 1$.

Задача 2. Решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = f(x),$$

если

$$y(0) = 1; \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2,$$

где $f(x)$ - аналитическая функция.

Решение на интервале $-1 \leq x \leq 1$.

Задача 3. Записать разностную аппроксимацию волновой задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial x^2} + f(x, t); \quad 0 < x < 1;$$

$$0 < t < t_0;$$

$$U(0, t) = U_1(t);$$

$$U(1, t) = U_2(t);$$

$$U(x, 0) = U_0(x);$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \bar{U}_0(x).$$

7. Прерывистое шлифование

За последние 30 лет появились два кардинальных пути решения проблемы повышения эффективности шлифования:

использование электро-физикохимических эффектов воздействия на абразивный инструмент;
прерывистое шлифование.

Основное достоинство первого направления - эффективная правка круга, обеспечивающая поддержание режущего рельефа круга во времени. Достоинство второго - эффективная правка круга и эффект прерывистости. Эффективная правка обеспечивает поддержание режущего рельефа круга во времени.

Прерывание процесса резания снижает температуру в зоне резания и возбуждает высокочастотные колебания в упругой системе, уменьшая тем самым энергоемкость процесса.

При прерывистом шлифовании уменьшение температуры происходит по двум каналам: за счет прерывания процесса резания до того момента, пока температура не достигла квазистационарного состояния, и за счет создания острого режущего рельефа.

Ни один из известных процессов шлифования не обладает таким двойным эффектом.

В данной работе рассматривается принципиально новый подход к управлению теплонапряженности шлифования за счет прерывистости.

Совмещение двух эффектов создает новое решение проблемы снижения теплонапряженности шлифования. Ни один из известных процессов шлифования по технологическим возможностям не может приблизиться к данному виду обработки.

Для оптимизации режимов и условий шлифования, обеспечивающих стабильное поддержание требуемой теплонапряженности процесса шлифования на протяжении всего цикла обработки, необходимо провести комплексное экспериментально-теоретическое исследование, включающее кинематику, физику, динамику процесса шлифования и тепловые явления.

Системный подход к решению данной проблемы позволяет установить передаточные функции между входными физическими и выходными технологическими параметрами процесса шлифования, установить доленой вклад работы шлифования, затрачиваемой на резание и трение в общем энергетическом балансе процесса обработки.

7.1. Тепловые явления при прерывистом шлифовании

При шлифовании прерывистыми кругами припуск удаляется отдельными слоями. На рис. 58 показана схема удаления припуска в поперечном сечении детали отдельными режущими выступами прерывистого круга. Согласно этой схеме, центр шлифовального круга совершает прямолинейное поступательное движение над

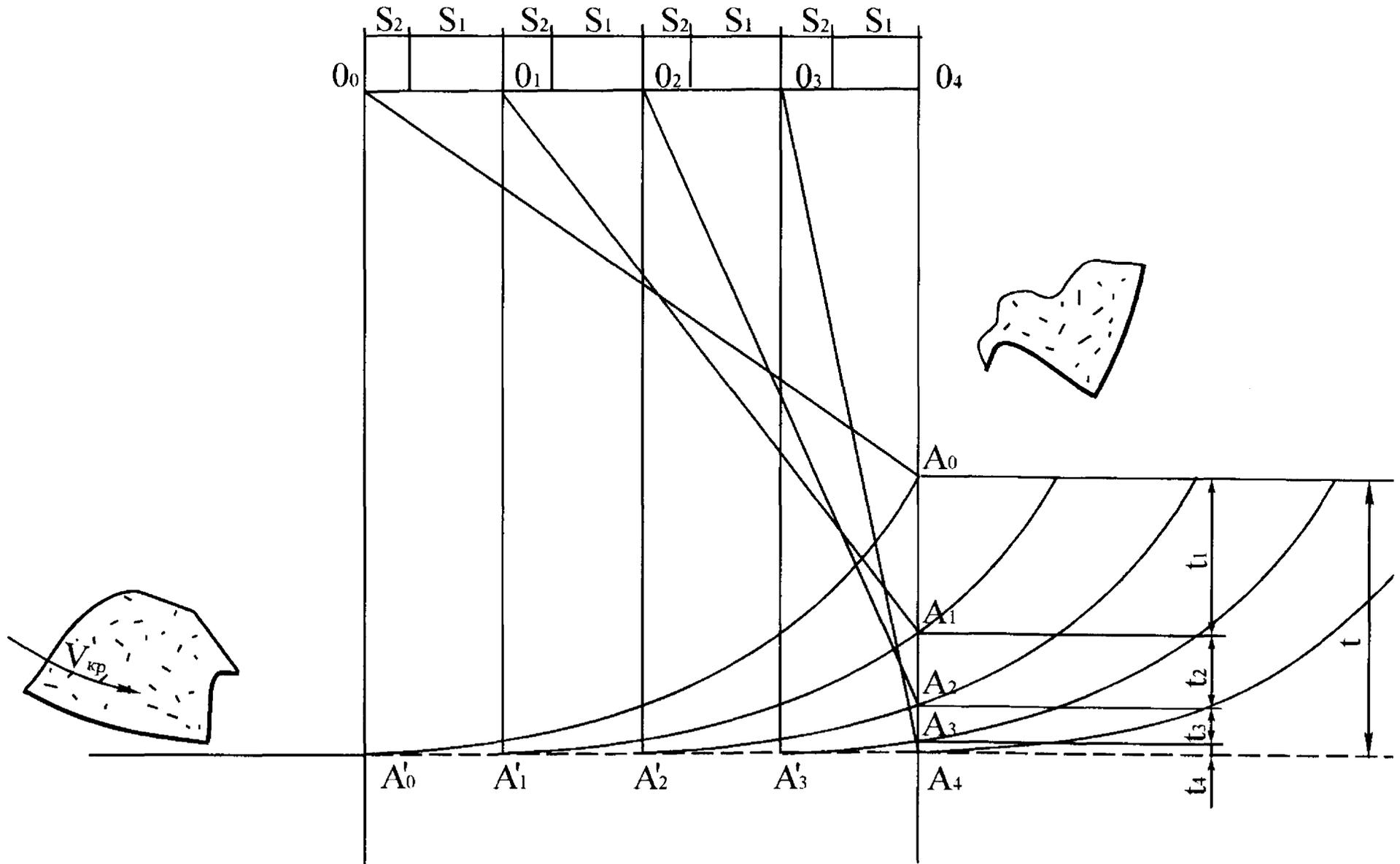


Рис.58. Схема послойного удаления припуска

неподвижной заготовкой в пределах зоны контакта. За время работы одного режущего выступа

$$\tau_1 = \frac{S_1}{V_{\text{заг}}} = \frac{l_1}{V_{\text{кр}}}$$

центр шлифовального круга перемещается на величину

$$S_1 = \frac{V_{\text{заг}} l_1}{V_{\text{кр}}},$$

а за время разрыва процесса резания

$$\Delta\tau = \frac{S_2}{V_{\text{заг}}} = \frac{l_2}{V_{\text{кр}}}$$

центр шлифовального круга перемещается на величину

$$S_2 = \frac{V_{\text{заг}} l_2}{V_{\text{кр}}},$$

где l_1 - длина режущего выступа;

l_2 - длина паза между выступами;

$V_{\text{кр}}$ - скорость круга;

$V_{\text{заг}}$ - скорость перемещения детали.

Число режущих выступов, контактирующих с металлом за время движения центра шлифовального круга над зоной контакта, определяется по формуле

$$n = \frac{\sqrt{Dt}}{(S_1 + S_2)} = \frac{\sqrt{Dt} \cdot V_{\text{кр}}}{V_{\text{заг}}(l_1 + l_2)}. \quad (204)$$

Глубины слоев металла, снимаемых различными режущими выступами шлифовального круга, определяются из $\Delta O_0 O_4 A_0$, $\Delta O_1 O_4 A_1$, $\Delta O_2 O_4 A_2$, $\Delta O_3 O_4 A_3$ и т.д. (рис. 58) и могут быть представлены в виде выражения

$$t_i = \begin{cases} \sqrt{R^2 - \left(\sqrt{Dt} - i \frac{V_{\text{заг}}}{V_{\text{кр}}} (l_1 + l_2) \right)^2} - \sqrt{R_2 - Dt}, & \text{если } i = 1 \\ \sqrt{R^2 - \left(\sqrt{Dt} - i \frac{V_{\text{заг}}}{V_{\text{кр}}} (l_1 + l_2) \right)^2} - \left(\sqrt{R_2 - Dt} - \sum_{j=1}^{i-1} t_j \right), & \text{если } i \geq 2 \end{cases}$$

Из рис. 58 видно, что толщины слоев в поперечном сечении детали t_1, t_2, t_3, t_4 , срезаемых отдельными режущими выступами, уменьшаются в пределах глубины t .

В качестве примера рассмотрим, как изменяются толщины срезаемых слоев при шлифовании прерывистым кругом ($D = 250$ мм, $l_1 = 40$ мм, $l_2 = 25,5$ мм) с 12 режущими выступами на режиме: $V_{\text{кр}} = 35$ м/с; $V_{\text{заг}} = 0,1$ м/с; $t = 0,05$ мм. За время движения круга над зоной контакта число режущих выступов

$$n = \frac{\sqrt{0,25 \cdot 0,00005 \cdot 35}}{0,1 \cdot 0,0655} = 18,9 \approx 19.$$

В табл. 7.1 приведены толщины слоев t_i , срезаемых режущими выступами по мере врезания круга в металл на глубину $t = 0,05$ мм.

Таблица 7.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i , мкм	5,24	4,19	4,61	4,32	4,05	3,81	3,48	3,27	2,98	2,71
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
t_i , мкм	2,37	2,14	1,83	1,54	1,27	1,02	0,69	0,48	0,19	

Из таблицы видно, что толщины слоев по мере внедрения круга в металл уменьшаются. Время работы одного режущего выступа (время воздействия теплового источника) τ_i можно представить в виде отношения толщины слоя t_i , удаляемого режущим выступом, к скорости внедрения зерен этого выступа в металл ω_i

$$\tau_i = \frac{t_i}{\omega_i} = \frac{l_i}{V_{кр}}. \quad (205)$$

Из полученного выражения (205) следует, что скорость внедрения режущих зерен в металл ω_i пропорциональна толщине срезаемого слоя t_i .

Сечение A_0A_4 (рис. 58) можно представить как адиабатический стержень, к которому в точке A_0 приложен тепловой источник постоянной интенсивности q . В этом случае дифференциальное уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (206)$$

При начальных и граничных условиях:

$$T_{(x,\tau)} \Big|_{\tau=0} = T_0; \quad T_{(x,\tau)} \Big|_{x=0} = T_u; \quad \frac{\partial T_{(x,\tau)}}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0.$$

Решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$T = 2q \sqrt{\frac{\tau}{C\rho_M \lambda}} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right), \quad (207)$$

где T_0 - начальная температура детали равна температуре среды, °С;

T_u - температура теплового источника (зоны контакта), °С;

C - теплоемкость обрабатываемого материала, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}$;

ρ_m - плотность обрабатываемого материала, $\text{кг}/\text{м}^3$;

λ - коэффициент теплопроводности, $\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{С}}$;

$a = \frac{\lambda}{C\rho_m}$ - коэффициент температуропроводности.

Для математического описания тепловых процессов, протекающих в зоне контакта прерывистого круга, рассмотрим тепловую схему, представленную на рис. 59. Для формирования теплового импульса применим принцип суперпозиции, т.е. сместив начало координат в направлении оси τ на величину $\tau_i = \frac{t_i}{\omega_i}$, соответствующую времени работы режущего выступа, приложим к поверхности отрицательный (мнимый) тепловой источник.

Температуру на глубине x от прохождения первого режущего выступа можно рассчитать, если сложить два выражения, описывающих температуры для положительного (q_1) и отрицательного ($-q_1$) тепловых источников

$$T_1 = 2q_1 \sqrt{\frac{\tau}{C\rho_m \lambda}} \text{ierfc}\left(\frac{x - t_1}{2\sqrt{a\tau}}\right); \quad (208)$$

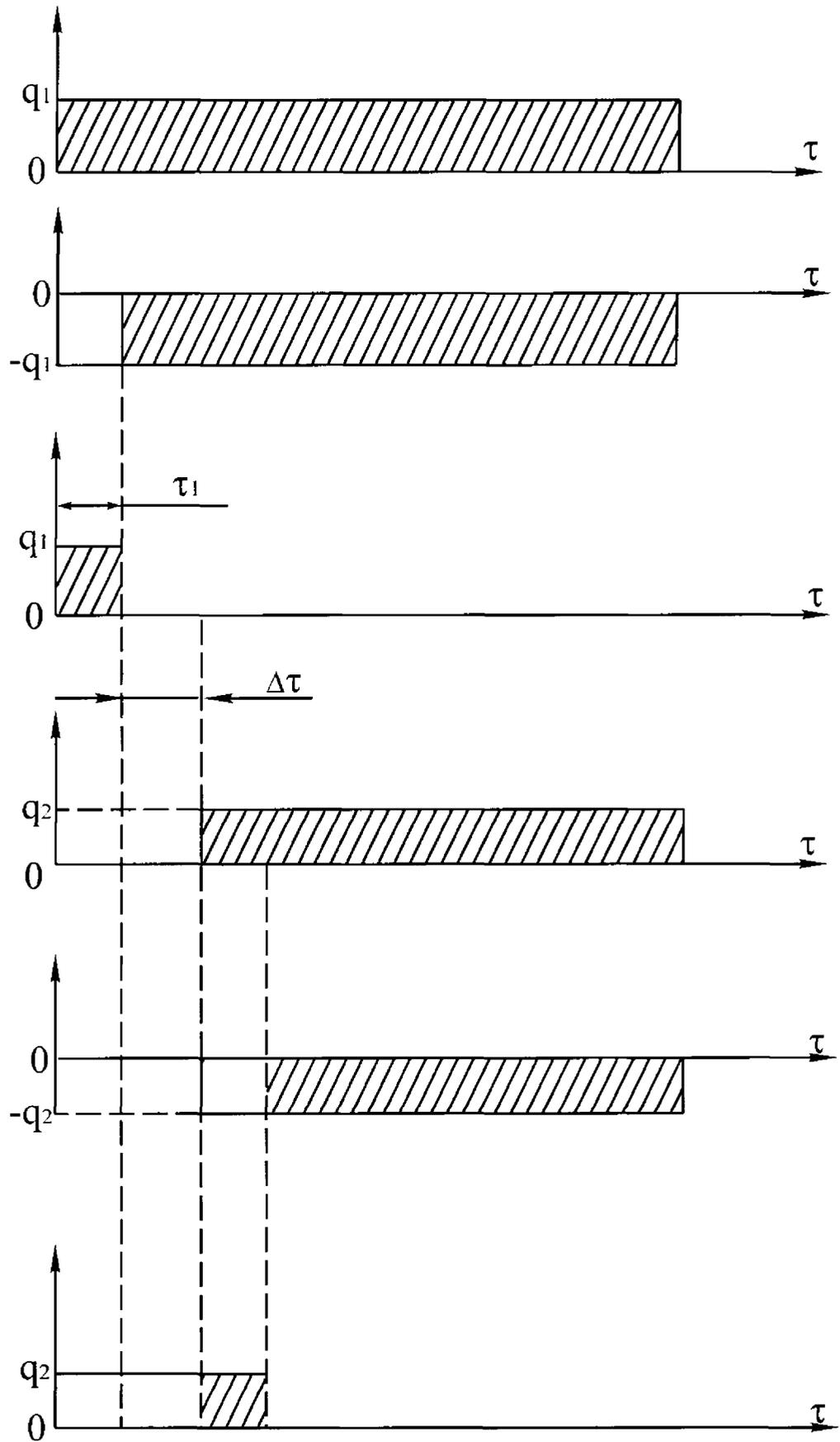


Рис.59. Формирование тепловых импульсов от работы от работы отдельных режущих выступов прерывистого круга

$$T_1 = -2q_1 \sqrt{\frac{\tau - \frac{t_1}{\omega_1}}{C\rho_M \lambda}} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x - t_1}{2\sqrt{a\left(\tau - \frac{t_1}{\omega_1}\right)}} \right). \quad (209)$$

После прохождения впадины, т.е. через время $\Delta\tau$, в работу вступает второй режущий выступ. Температура на глубине x от прохождения второго режущего выступа определится как сумма двух выражений:

$$T_2 = 2q_1 \sqrt{\frac{\tau - \frac{t_1}{\omega_1} - \Delta\tau}{C\rho_M \lambda}} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x - t_1 - t_2}{2\sqrt{a\left(\tau - \frac{t_1}{\omega_1} - \Delta\tau\right)}} \right); \quad (210)$$

$$T_2 = -2q_1 \sqrt{\frac{\tau - 2\frac{t_1}{\omega_1} - \Delta\tau}{C\rho_M \lambda}} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x - t_1 - t_2}{2\sqrt{a\left(\tau - 2\frac{t_1}{\omega_1} - \Delta\tau\right)}} \right). \quad (211)$$

Выражение для определения температуры на глубине x от воздействия K режущих выступов таково:

$$T_K = \frac{2}{\sqrt{C\rho_M \lambda}} \left[\sum_{i=1}^K q_i \sqrt{\tau - (i-1)\left(\frac{t_i}{\omega_i} + \Delta\tau\right)} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x - \sum_{i=1}^K t_i}{2\sqrt{a}\sqrt{\tau - (i-1)\left(\frac{t_i}{\omega_i} + \Delta\tau\right)}} \right) - \sum_{i=1}^K q_i \sqrt{\tau - i\frac{t_i}{\omega_i} - (i-1)\Delta\tau} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x - \sum_{i=1}^K t_i}{2\sqrt{a}\sqrt{\tau - i\frac{t_i}{\omega_i} - (i-1)\Delta\tau}} \right) \right]. \quad (212)$$

Линейные и временные параметры, входящие в данное уравнение, можно выразить через режимные параметры шлифования и геометрические параметры прерывистого круга

$$\tau = \frac{\sqrt{Dt}}{V_{\text{заг}}}; \quad \Delta\tau = \frac{l_2}{V_{\text{кр}}}; \quad \tau_1 = \frac{l_1}{V_{\text{кр}}} = \frac{t_i}{\omega_i}; \quad x = t.$$

После подстановки этих параметров в уравнение (212) получим

$$T_k = \frac{2}{\sqrt{C\rho_m\lambda}} \left[\sum_{i=1}^K q_i \sqrt{\frac{\sqrt{Dt}}{V_{\text{заг}}} - (i-1) \left(\frac{l_1 + l_2}{V_{\text{кр}}} \right)} * \right. \\ \left. * \text{ierfc} \left(\frac{t - \sum_{i=1}^K t_i}{2\sqrt{a} \sqrt{\frac{Dt}{V_{\text{заг}}} - (i-1) \left(\frac{l_1 + l_2}{V_{\text{кр}}} \right)}} \right) - \sum_{i=1}^K q_i \sqrt{\frac{\sqrt{Dt}}{V_{\text{заг}}} - i \frac{l_1}{V_{\text{кр}}} - (i-1) \frac{l_2}{V_{\text{кр}}}} * \right. \\ \left. * \text{ierfc} \left(\frac{t - \sum_{i=1}^K t_i}{2\sqrt{a} \sqrt{\frac{\sqrt{Dt}}{V_{\text{заг}}} - i \frac{l_1}{V_{\text{кр}}} - (i-1) \frac{l_2}{V_{\text{кр}}}}} \right) \right]. \quad (213)$$

Из [24] известно, что при прерывистом шлифовании сила F_z пропорциональна глубине резания $t^{0,855}$ ($F_z \equiv t^{0,855}$).

Плотность теплового потока q прямо пропорциональна силе резания F_z , следовательно, пропорциональна $t^{0,855}$,

$$q = \frac{F_z \cdot V_{\text{кр}} \cdot 0,8}{\sqrt{Dt} \cdot B}; \quad q \equiv \frac{t^{0,855}}{t^{0,5}}; \quad q \equiv t^{0,355}.$$

Если произвести измерение мощности, затрачиваемой на резание,

то можно рассчитать среднюю плотность теплового потока

$$q_{\text{ср}} = \frac{0,8N}{\sqrt{Dt} \cdot B},$$

где B - ширина образца, м;

N - мощность, затрачиваемая на резание, Вт (определяется экспериментально).

Плотность теплового потока q_i в различных точках по ширине зоны контакта рассчитывается по формуле

$$q_i = \frac{q_{\text{ср}} t_i^{0,355}}{t_{\text{ср}}^{0,355}},$$

где $t_{\text{ср}}$ - средняя толщина среза по ширине зоны контакта $2h$

$$t_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{t}{n}.$$

Для оценки теплонапряженности процессов сплошного и прерывистого шлифования были произведены расчеты. Исходные

данные для расчета: сталь 12Х2Н4А, $\lambda = 16,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}}$;

$a = \frac{\lambda}{C\rho_m} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $l_1 = 30 \text{ мм}$; $l_2 = 22,4 \text{ мм}$; круги 1А1 200×75×5×20

КР 160/125 Б1 100, режим шлифования: $V_{\text{кр}} = 30 \text{ м/с}$; $t = 0,015 \text{ мм}$;

$V_{\text{заг}} = 5 \text{ м/мин}$.

В табл. 7.2 представлены расчетные значения температур, возникающих на глубине срезаемого припуска t по мере удаления слоев в сечении A_0A_4 (рис. 58) различными режущими выступами.

Таблица 7.2

Номер срезаемого слоя К	Глубина срезаемого слоя t_i , м	$T_{сп}$, °С, сплошной круг	$T_{пр}$, °С, прерывистый круг	Степень понижения температуры L, %
1	$2,40 \cdot 10^{-6}$	295,7	230,9	21,9
2	$2,20 \cdot 10^{-6}$	433,5	321,4	25,8
3	$1,99 \cdot 10^{-6}$	526,6	384,2	27,0
4	$1,78 \cdot 10^{-6}$	597,6	432,7	27,6
5	$1,57 \cdot 10^{-6}$	654,5	470,4	28,1
6	$1,4 \cdot 10^{-6}$	698,8	498,5	28,7
7	$1,2 \cdot 10^{-6}$	733,1	519,6	29,1
8	$0,93 \cdot 10^{-6}$	755,9	533,4	29,4
9	$0,72 \cdot 10^{-6}$	767,4	538,6	29,8
10	$0,51 \cdot 10^{-6}$	767,3	534,9	30,3
11	$0,29 \cdot 10^{-6}$	750,0	518,6	30,9
12	$0,09 \cdot 10^{-6}$	702,4	479,8	31,7

Параметр $L = \left(1 - \frac{T_{пр}}{T_{сп}}\right) \cdot 100$ показывает, на сколько процентов

понижается температура при прерывистом шлифовании по сравнению с температурой сплошного шлифования. На рис. 60 показаны осциллограммы температур при сплошном и прерывистом шлифовании, полученные при скоростях развертки

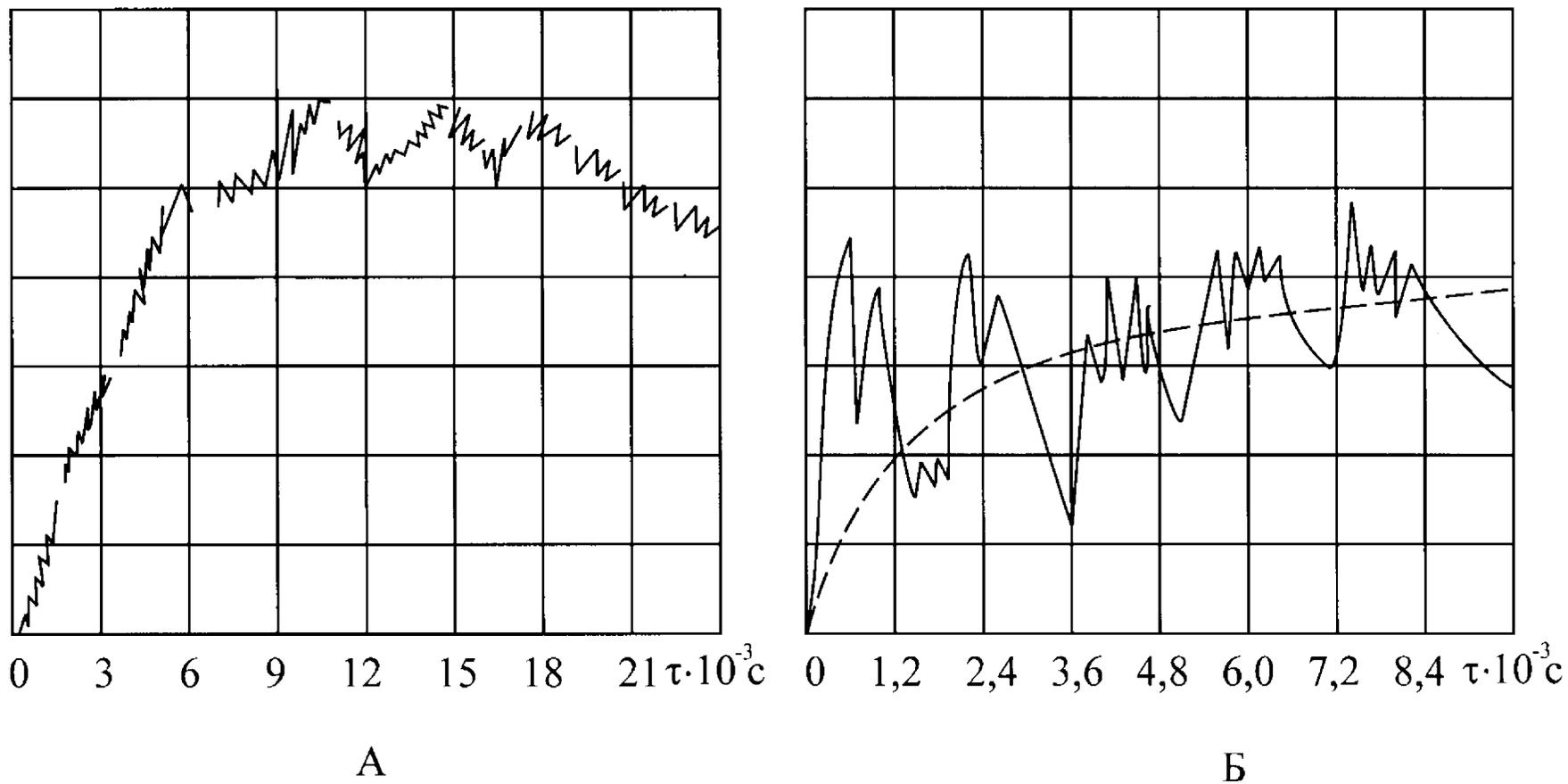


Рис.60. Осциллограммы изменения температуры на плоскости среза при обычном (А) и прерывистом (Б) шлифовании ($l_1=30$ мм, $l_2=22,4$ мм) $V_{кр}=30$ м/с; $V_{заг}=5$ м/мин; $t=0,15$ мм

луча осциллографа модели С 8-17, $9,6 \cdot 10^{-3}$ с/см и $1,2 \cdot 10^{-3}$ с/см. Уменьшение скорости развертки луча осциллографа при прерывистом шлифовании до $1,2 \cdot 10^{-3}$ с/см расширило плотность температурных всплесков на осциллограмме, но не позволило записать температурные всплески от всех 12 режущих выступов за время прохождения круга над зоной контакта. Следует заметить, что температурные всплески на осциллограммах соответствуют температурам, возникающим в зоне контакта круга с деталью при перерезании термопары.

Величина температурных всплесков на осциллограмме пропорциональна глубинам слоев t_i по мере врезания круга на величину срезаемого припуска t в сечении A_0A_4 (рис. 58).

Из анализа осциллограмм видно возрастание усредненной температуры детали (пунктирная кривая, рис. 60). При прохождении режущего выступа над термопарой происходит всплеск температуры, а при прохождении впадины – экспоненциальное ее понижение. Следует отметить, что за период прохождения впадины температура понижается примерно на 50-60% по сравнению с температурным импульсом от режущего выступа.

Например, при прохождении первого режущего выступа температурный всплеск на осциллограмме равен 67 мм, за период прохождения впадины температурный всплеск уменьшился на 33 мм. При прохождении второго режущего выступа относительный прирост температурного всплеска на осциллограмме равен 37 мм, а

величина понижения температуры равна 32 мм. После прохождения третьего и четвертого режущих выступов на фоне возрастающей усредненной температур температурные всплески равны 25 мм, а величины уменьшения температуры равны 18 мм. После прохождения пятого режущего выступа температурный всплеск 15 мм, а величина уменьшения температуры равна 14 мм.

Уменьшение температурных всплесков по мере врезания круга в металл в сечении A_0A_4 (рис. 58) связано с уменьшением толщины среза, а увеличение степени понижения температуры $\frac{\Delta T_{\text{нагр}}}{\Delta T_{\text{охл}}} \cdot 100$ связано с повышением температуры нагрева образца (пунктирная кривая рис. 60).

При обычном шлифовании (рис. 60, а) шлифовальный круг находится в постоянном контакте со срезаемой термопарой. Следовательно, происходит нагрев торца адиабатического стержня на протяжении всего периода прохождения круга над зоной контакта. Выделяющееся количество тепла в зоне резания пропорционально скорости погружения круга в металл. Скорость погружения режущих зерен круга в металл определяется по формуле

$$\omega_i = \frac{V_{\text{кр}} t_i}{l_1} \quad (214)$$

Из анализа формулы (214) видно, что скорость погружения зерен в металл ω_i пропорциональна толщине среза t_i . Толщина срезанного слоя, как видно из табл. 7.2, за период врезания круга на глубину t уменьшается.

7.2. Определение формы профиля фронтальной поверхности прерывистого круга, обеспечивающей минимальную теплонапряженность

От угла наклона фронтальной поверхности зависят кинематика образования срезов режущими зернами круга и работа, затрачиваемая на резание. Чтобы обеспечить максимальную производительность при минимальных энергетических затратах, необходимо найти оптимальную форму профиля фронтальной поверхности, при которой работа, затрачиваемая на резание, имеет наименьшее значение.

Для определения величины затылования рабочей поверхности режущего выступа прерывистого круга рассмотрим расчетную схему (рис.61).

Пусть система координат XOY связана с неподвижной обрабатываемой деталью, а система координат $X'O'Y'$ связана со шлифовальным кругом. Центр круга движется вдоль оси $O'Y'$ со скоростью V_d , а сам круг вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω .

Пусть в начальный момент времени $\tau = 0$ обе системы координат совмещены и оси X и X' совпадают с передней кромкой режущего выступа круга. Положение произвольной точки M на рабочей поверхности режущего выступа в системе координат $X'O'Y'$ определяется системой уравнений:

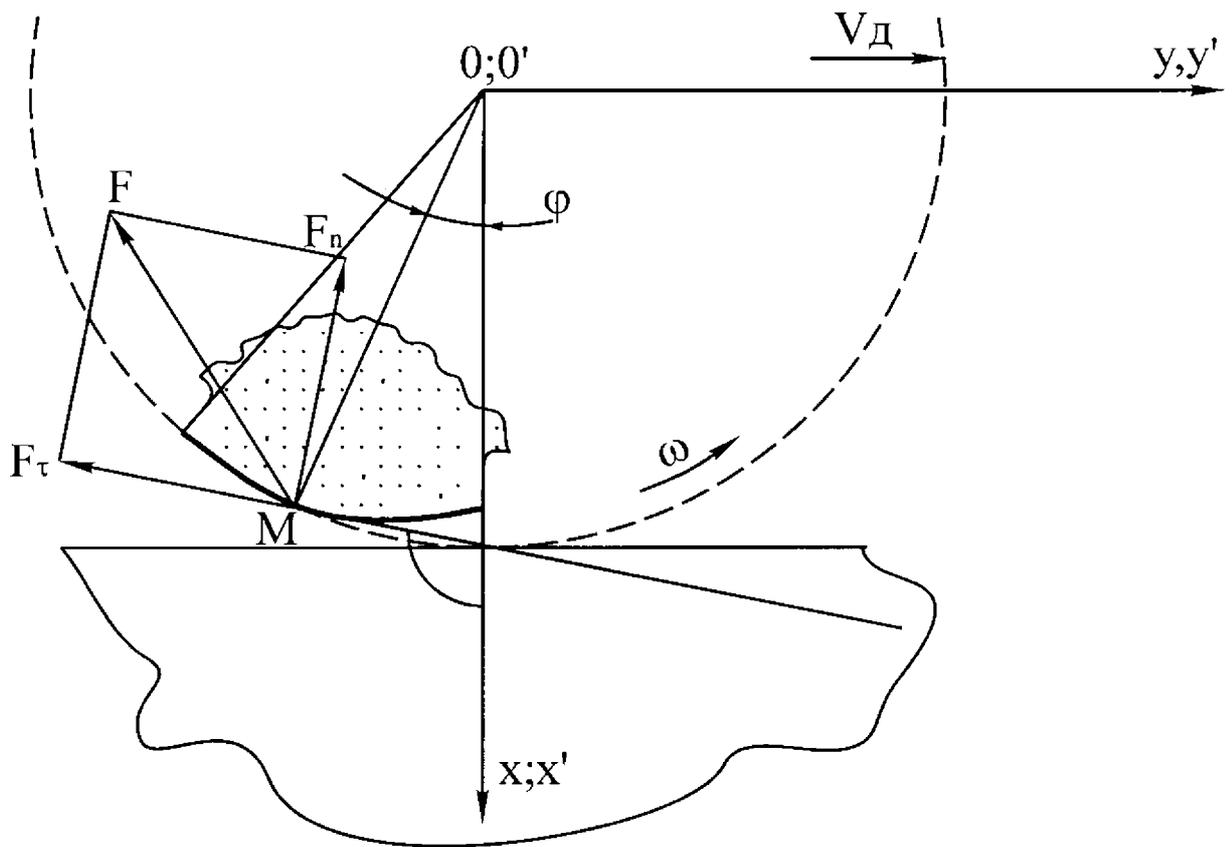


Рис.61. Расчетная схема

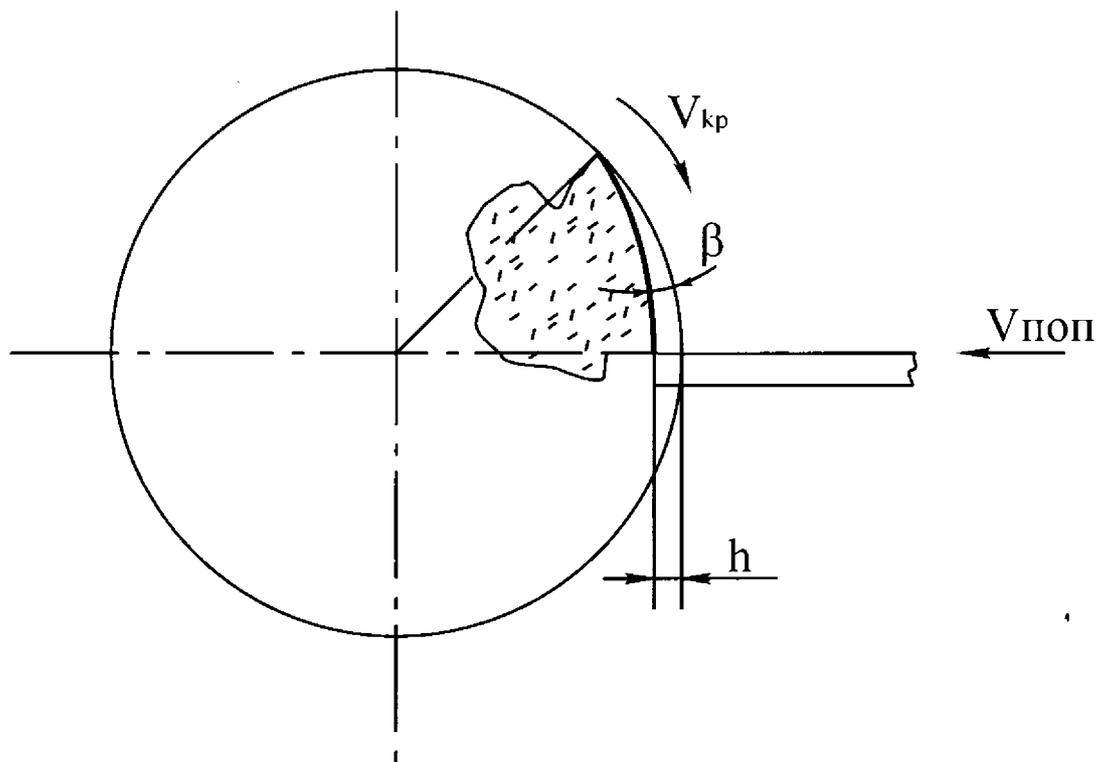


Рис.62. Расчетная схема для определения скорости внедрения зерен в металл

$$\left. \begin{aligned} X'_M &= \rho \cos(-\varphi) = \rho \cos\varphi \\ Y'_M &= \rho \sin(-\varphi) = -\rho \sin\varphi \end{aligned} \right\}$$

Положение точки М в системе координат ХОУ определяется системой уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} X_M &= X'_M \cos\omega\tau - Y'_M \sin\omega\tau = \rho \cos(\omega\tau - \varphi) \\ Y_M &= Y'_M \cos\omega\tau + X'_M \sin\omega\tau + V_q\tau = \rho \sin(\omega\tau - \varphi) + V_q\tau \end{aligned} \right. \quad (215)$$

Разложим силу F, приложенную в точке М, на две составляющие: касательную F_τ и нормальную F_n , тогда элементарную работу этой силы ΔA_M можно записать в виде

$$\Delta A_M = F \cdot d\tau = F_x dx + F_y dy. \quad (216)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_\tau \cos\alpha - F_n \sin\alpha \\ F_y &= -F_\tau \sin\alpha - F_n \cos\alpha \end{aligned} \right\}, \quad (217)$$

где $F_n = \frac{F_\tau}{f}$;

f - коэффициент трения;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}};$$

dx; dy; \dot{y} , \dot{x} - соответственно дифференциалы и производные по времени от выражения (215).

Обозначим $\operatorname{tg}\alpha = a$, тогда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Выражение (217) примет вид

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{F_\tau}{\sqrt{1+a^2}} \left(1 + \frac{a}{f}\right) \\ F_y &= -\frac{F_\tau}{\sqrt{1+a^2}} \left(a + \frac{f}{f}\right) \end{aligned} \right\}.$$

С учетом введенных обозначений выражение (216) примет вид

$$\Delta A_M = \frac{F_\tau}{\sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}} \left(\dot{x} - \frac{2}{f} \dot{y} - \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}} \right) d\tau.$$

Пусть каждая абразивная точка М на режущем выступе прерывистого круга за время прохождения зоны контакта $\tau_2 - \tau_1$ получает от обрабатываемой детали импульс силы

$$Q = F_\tau(\tau_2 - \tau_1) = \text{const}.$$

Тогда полная работа, производимая силой F,

$$A_M = \frac{Q}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\dot{x} - \frac{2}{f} \dot{y} - \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}} d\tau. \quad (218)$$

Экстремальным значениям работы соответствуют следующие уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \quad (219)$$

где

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \tau) = \frac{\dot{x} - \frac{2}{f} \dot{y} - \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}}. \quad (220)$$

Произведя дифференциальные операции, согласно уравнениям (219), над функцией (220), получим

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}^3}(\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}) \left[\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 + \frac{2\dot{y}}{f\dot{x}} - 1 \right] = 0;$$

$$\frac{3}{\dot{x}^3}(\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}) \left[\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 + \frac{2\dot{y}}{f\dot{x}} - 1 \right] = 0,$$

или

$$\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x} = 0;$$

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 + \frac{2\dot{y}}{f\dot{x}} + 1 = 0. \quad (221)$$

Подставляя производную от выражения (215) по времени в уравнения (221) и решая последние относительно ρ , получим выражение для расчета фронтальных поверхностей режущих выступов прерывистого круга

$$\rho_1 = C_1 - \frac{V_d}{\omega} \cos(\omega\tau - \varphi); \quad (222)$$

$$\rho_{2,3} = C_2 - \frac{V_d f}{\omega \left[f \cos(\omega\tau - \varphi) + \left(-1 \pm \sqrt{1 + f^2} \sin(\omega\tau - \varphi) \right) \right]}. \quad (223)$$

Принимая $C_1 = C_2 = R_{кр}$ - начальный радиус режущего выступа прерывистого круга после правки круга при $\tau = 0$ в системе координат $X'O'Y'$, получим

$$\rho_1 = R_{кр} - \frac{V_d}{\omega} \cos \varphi; \quad (224)$$

$$\rho_{2,3} = R_{кр} - \frac{V_d f}{\omega \left[f \cos \varphi - \left(1 \pm \sqrt{1 + f^2} \right) \sin \varphi \right]}; \quad (225)$$

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq 0,$$

где φ_1 - угловой размер режущего выступа прерывистого круга.

При $\varphi = 0$ полученные выражения (224) и (225) дают одинаковые значения, но для расчета профиля круга рекомендуется применять выражение, учитывающее коэффициент трения f . Минимальной работе (218) соответствует выражение (225), содержащее коэффициент трения f при радикале со знаком “плюс”.

Следовательно, искомый профиль режущего выступа прерывистого круга, обеспечивающий при минимальных энергетических затратах максимальную производительность и самозатачиваемость профиля (или правку круга по заданному профилю), может быть рассчитан по уравнению

$$\rho = R_{кр} \cdot \frac{V_d f}{\omega \left[f \cos \varphi - \left(\sqrt{1 + f^2} + 1 \right) \sin \varphi \right]}. \quad (226)$$

Из анализа приведенной формулы следует, что износ прерывистого круга более интенсивно протекает при больших скоростях детали V_d и малых угловых скоростях круга ω .

Однако следует заметить, что полученное уравнение не учитывает характеристику шлифовального круга. Следовательно, оно нуждается в экспериментальной корректировке. Экспериментальные исследования показали, что для круга 24A25CM26K5 коэффициент $C = 0,1$

$$\rho = R_{кр} \cdot \frac{C \cdot V_d f}{\omega \left[f \cos \varphi - \left(\sqrt{1 + f^2} + 1 \right) \sin \varphi \right]}. \quad (227)$$

В табл. 7.3 представлены расчетные значения профилей прерывистого круга для следующих условий:

$$D_{кр} = 200 \text{ мм}, \omega = 314 \text{ 1/с}; f = 0,2.$$

Таблица 7.3

Режим шлифования	φ°	-20°	-15°	-10°	-5°	-2°
$V_d=10 \text{ м/мин}$	$\rho, \text{ мм}$	99,988	99,985	99,981	99,972	99,961
$V_d=2 \text{ м/мин}$	$\rho, \text{ мм}$	99,976	99,970	99,960	99,944	99,922

По данным, приведенным в табл. 7.3, можно построить профиль фронтальной поверхности режущего выступа прерывистого круга. Отношение разности радиусов $\rho_{\max} - \rho_{\min}$ к длине режущего выступа l_1 равно тангенсу угла наклона фронтальной поверхности (рис. 62)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{l_1} = \frac{h}{l_1}.$$

Скорость поперечной подачи заготовки при шлифовании прерывистым кругом

$$V_{\text{поп.прер}} = V_{\text{поп}} + V_{\text{кр}} \operatorname{tg}\beta, \quad (228)$$

где

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{l_1}; \quad h = V_{\text{поп}} \tau; \quad \tau = \frac{l_2}{V_{\text{кр}}};$$

после подстановки выражение (228) имеет вид

$$V_{\text{поп.прер}} = V_{\text{поп}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right).$$

Скорость погружения зерен в металл является важным критерием, характеризующим физические процессы, происходящие в зоне контакта круга с изделием.

При обычном шлифовании скорость погружения зерен в металл определяется по выражению

$$V_{\text{поп}} = \frac{1000}{60} \frac{V_d}{\sqrt{Dt}}, \quad (229)$$

где t - глубина шлифования;

V_d - скорость перемещения детали;

\sqrt{Dt} - длина дуги контакта круга с изделием.

При прерывистом шлифовании скорость погружения зерен в металл определяется так:

$$V_{\text{поп}} = \frac{1000}{60} \frac{V_d}{\sqrt{Dt}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right). \quad (230)$$

От скорости внедрения зерен в металл зависит скорость подвода энергии к системе. Следует заметить, что между скоростью подвода энергии к системе и началом стружкообразования существует связь. Например, с увеличением скорости погружения зерен в металл уменьшается порог резания, т.е. отделение стружки становится возможным при меньших значениях az_m/ρ .

В табл. 7.4 представлены скорости погружения зерен в металл при сплошном и прерывистом шлифовании.

Таблица 7.4

Вид шлифования	Режимы шлифования			l_1 , мм	l_2 , мм	Скорость погружения
	$V_{дет}$, м/мин	$D_{кр}$, мм	t , мм			ω , мм/с
сплошной	15	200	0,02	-	-	2,49
	15	200	0,04	-	-	3,33
прерывистый	15	200	0,04	60	13,4	5,88

Из анализа данных видно, что при прерывистом шлифовании скорость погружения зерен в металл в 1,5-1,9 раза больше, чем при обычном. С увеличением ω возрастает скорость деформации, а это приводит к уменьшению расстояния между плоскостями скольжения и снижению возможной толщины среза.

7.3. Функциональные связи основных физических параметров процесса прерывистого шлифования

7.3.1. Приведенный режущий профиль прерывистого круга и его характеристики

При прерывистом шлифовании съем припуска происходит в результате одновременного участия в резании большого числа зерен, срезающих тончайшие по размерам микростружки. Описать кинематику такого сложного процесса резания чрезвычайно

сложно. По мнению ряда исследователей [16, 18, 21], условия работы зерен круга можно свести к идентичным условиям работы лезвийного инструмента, например резца при свободном резании, условно представив рабочую поверхность круга приведенным режущим профилем.

Под приведенным режущим профилем следует понимать область сплошного перекрытия от положения проекций зерен вращающегося круга на плоскость, движущуюся по нормали к его рабочей поверхности с постоянной скоростью.

Для описания механизма съема обрабатываемого материала режущими зернами прерывистого круга была принята расчетная схема с допущениями:

1. Плоскость, имитирующая нормальную составляющую бесконечно тонкого слоя снимаемого припуска, движется по нормали к рабочей поверхности круга. Вектор скорости внедрения плоскости в рабочую поверхность круга направлен под углом β к вектору скорости заготовки (рис.63).

2. Зерна, принимающие участие в резании, имеют вид усеченного конуса с углом при вершине 2γ . Верхнее основание усеченного конуса является площадкой износа режущего зерна.

3. Все зерна, принимающие участие в резании, независимо от высоты их выступания над уровнем связки, имеют одинаковую закономерность линейного износа. Отношение высоты изношенной части зерна к глубине внедрения этого условно-неизношенного зерна в металл для всех режущих зерен круга одинаково, т.е.

треугольники $\Delta A_1 B_1 C_1$, $\Delta A_2 B_2 C_2$ и т.д. подобны (рис. 64). Параметр η , равный отношению высоты изношенной части зерна к глубине погружения этого условно-неизношенного зерна в металл, имеет одинаковое значение для всех режущих зерен круга. Это отношение изменяется от 0 до 1 и характеризует линейный износ режущих зерен в момент объемного разрушения максимально выступающего зерна. Для максимально выступающего зерна параметр η

$$\eta = \frac{y_a}{y}, \quad (231)$$

где y_a - координата вершины изношенного максимально-выступающего над связкой зерна;

y - координата максимального внедрения пластины в рабочую поверхность круга, или величина внедрения максимально-выступающего условно-неизношенного зерна в металл, при котором происходит объемное разрушение этого зерна или вырывание его из связки.

4. Распределение высоты выступания условно-неизношенных зерен по высоте рабочей поверхности прерывистого шлифовального круга подчинено закону равной вероятности с плотностью вероятности (рис. 64):

$$f(y)_1 = \frac{1}{b}, \quad (232)$$

где b - координата уровня связки круга.

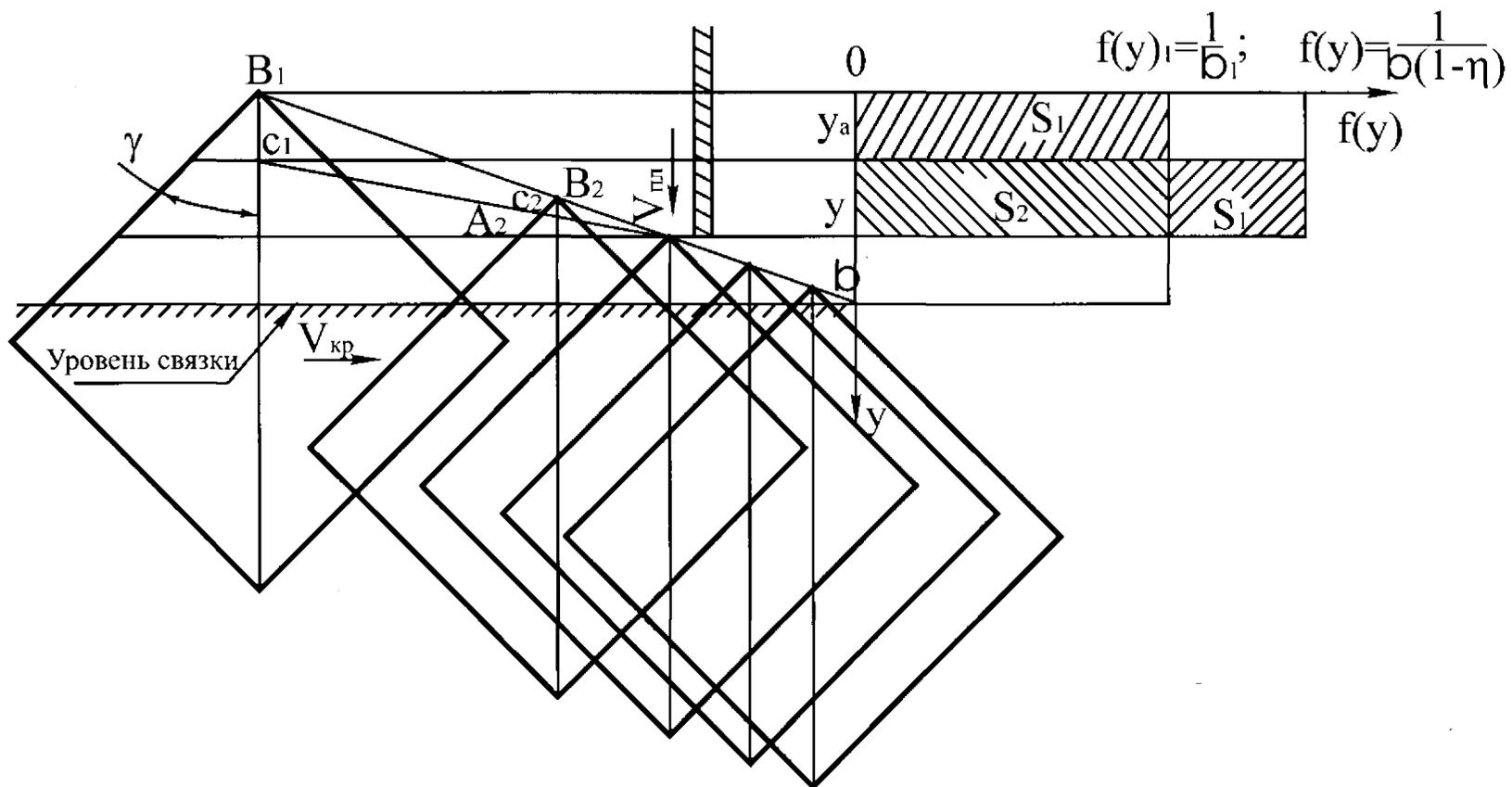


Рис.64. Схема распределения высоты выступания зерен над связкой

5. Распределение высоты выступания изношенных зерен по высоте рабочей поверхности шлифовального круга на участке $|y_a; y|$ подчинено закону равной вероятности с плотностью вероятности:

$$f(y)_2 = \frac{(S_1 + S_2)}{(y - y_a)}. \quad (233)$$

Учитывая, что $(S_1 + S_2) = \frac{y}{b}$, $\eta = \frac{y_0}{y}$, выражение (233) примет вид

$$f(y)_2 = \frac{1}{b(1 - \eta)}. \quad (234)$$

Основываясь на этих допущениях, можно определить относительную полноту профиля шлифовального круга.

Относительная полнота профиля от наложения проекций зерен в dy_i -м элементарном слое движущейся пластины (рис. 65) определяется из выражения

$$d\varepsilon_i = \frac{dn_i [a_s + 2tg\gamma(y - y_i)]}{B}, \quad (235)$$

где B - высота шлифовального круга;

a_s - диаметр площади износа режущего зерна, расположенного в dy_s -м элементарном слое шлифовального круга;

dn_i - число проекций вершин, расположенных в dy_s -м элементарном слое плоскости

$$dn_i = dn_s f(y)_{\text{пл}} dy_i;$$

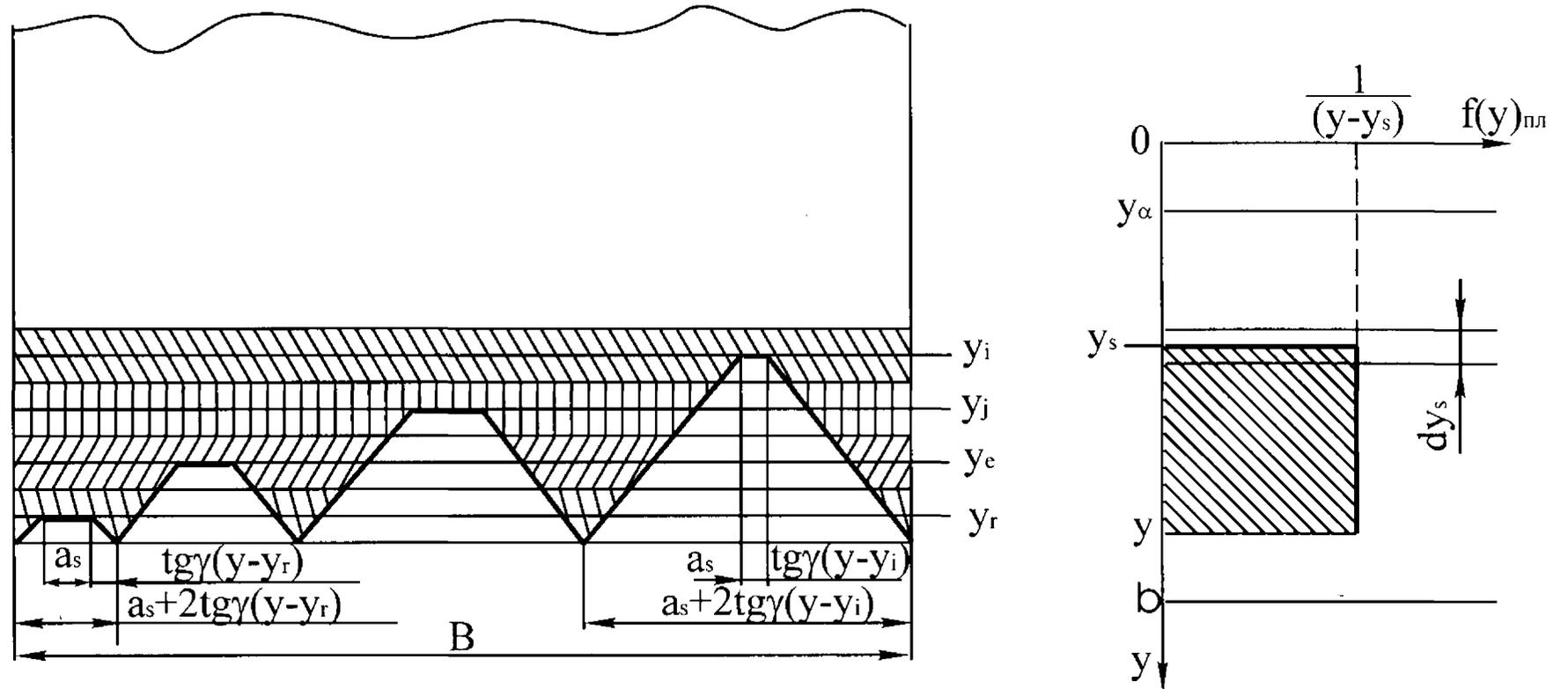


Рис.65. Распределение вершин проекций зерен на движущийся плоскости

$f(y)_{\text{пл}} = \frac{1}{(y - y_s)}$ - плотность вероятности распределения

проекций вершин зерен по высоте пластины на отрезке $|y_s; y|$;

dn_s - число вершин зерен, расположенных в dy_s -м элементарном слое шлифовального круга.

$$dn_s = nf(y)_{\text{кр}} dy_s;$$

$f(y)_{\text{кр}} = \frac{1}{(1 - \eta)b}$ - плотность вероятности распределения вершин

зерен по высоте рабочей поверхности шлифовального круга;

n - общее число режущих зерен, проконтактировавших с пластиной за время ее перемещения на величину $|y_s - y|$

$$n = kBV_{\text{кр}} \frac{y - y_s}{V_{\text{пл}}};$$

$\frac{y - y_s}{V_{\text{пл}}}$ - время, за которое плоскость переместится на величину $|y_s - y|$;

k - средневероятностное количество зерен, содержащихся на единице площади рабочей поверхности шлифовального круга, шт/м²;

$V_{\text{пл}}$ - скорость внедрения пластины в рабочую поверхность сплошного круга.

Скорость внедрения пластины в рабочую поверхность прерывистого круга определяется исходя из рис. 66. После правки прерывистого круга, когда фронтальные поверхности на режущих выступах еще не сформировались ($h = 0$), а также при сплошном

шлифовании скорость внедрения режущих зерен в металл равна скорости внедрения пластины в рабочую поверхность круга.

После формирования фронтальных поверхностей на режущих выступах прерывистого круга скорость внедрения режущих зерен в металл возрастает на величину (рис. 66)

$$V_{кр} \sin\beta = V_{кр} \frac{h}{l_1}. \quad (236)$$

Скорость шлифовального круга можно представить в виде

$$V_{кр} = \frac{l_2}{\tau}, \quad (237)$$

где l_1 и l_2 - длина режущего выступа и впадины соответственно;

τ - время прохождения впадины над пластиной.

Скорость внедрения режущих зерен прерывистого круга в металл с учетом (236) и (237) определяется по формуле

$$V_{вр.пр} = V_{пл} + \frac{h l_2}{\tau l_1}. \quad (238)$$

Если фронтальная поверхность распространяется по всей длине режущего выступа, т.е. $h = h_1$, $V_{пл} = \frac{h}{\tau}$, то выражение (238) примет

вид

$$V_{вр.прер} = V_{пл} \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right). \quad (239)$$

После несложных преобразований с учетом (239) формула (235), описывающая относительную полноту профиля dy_i -го

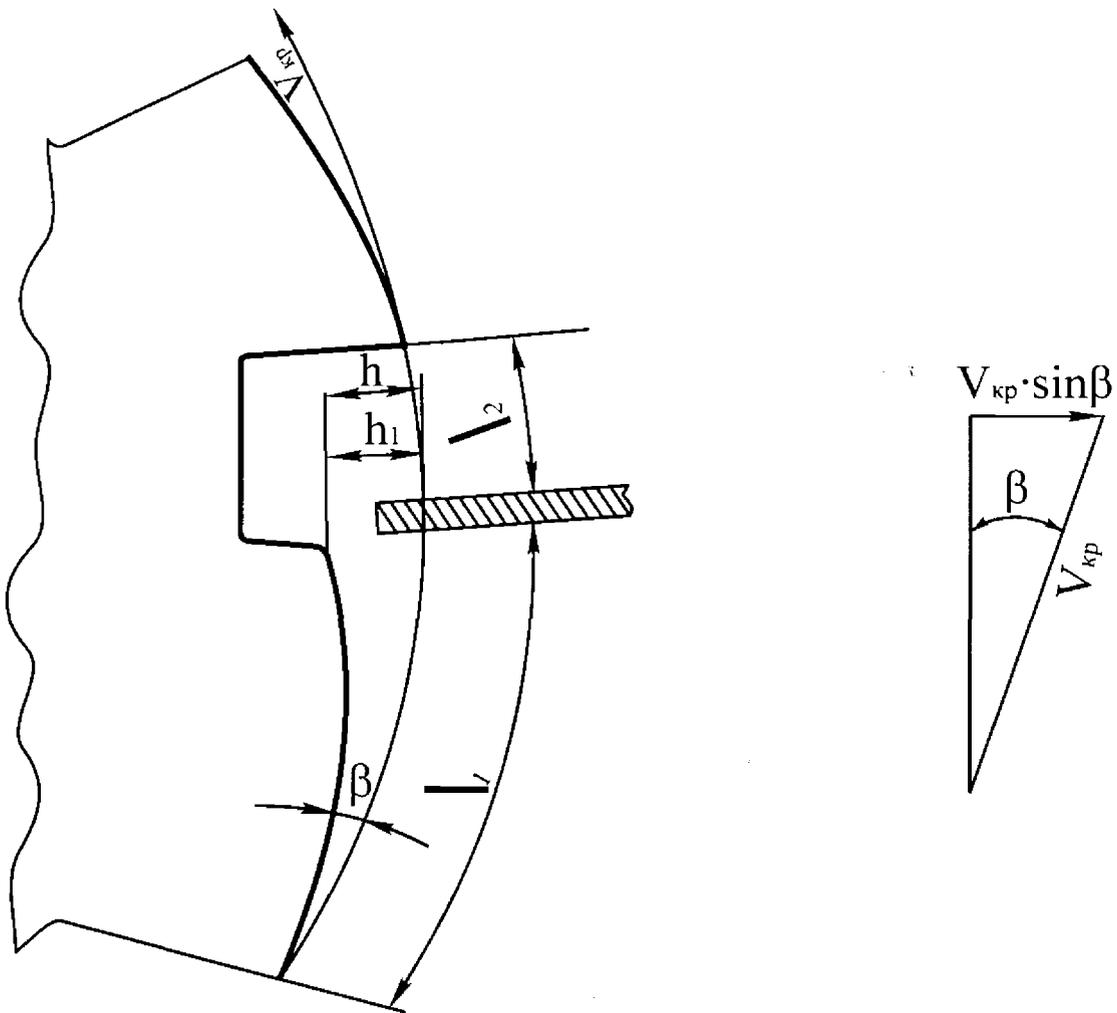


Рис.66. Схема врезания пластины в рабочую поверхность прерывистого круга

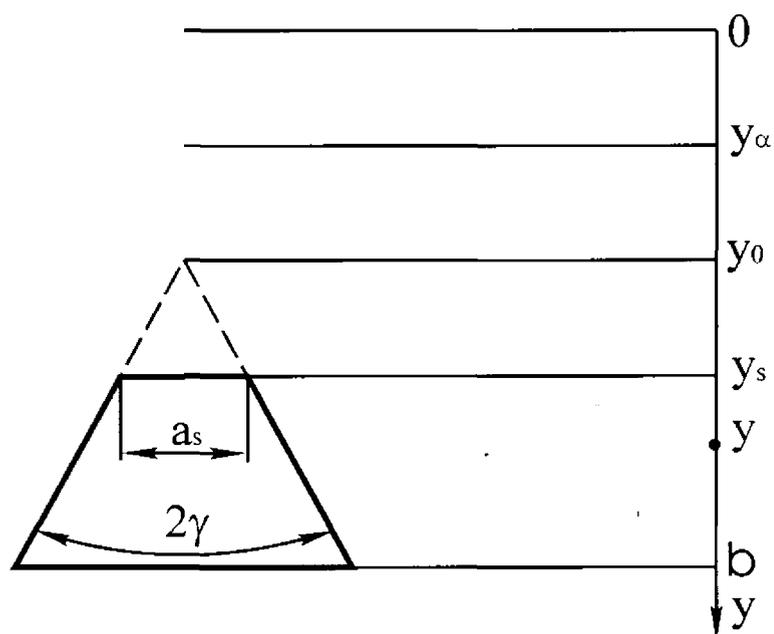


Рис.67. Расчетная схема площади износа зерна

элементарного слоя пластины $d\varepsilon_i(y)$, примет вид

$$d\varepsilon_i(y) = \frac{kV_{\text{кр}}}{V_{\text{пл}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) (1 - \eta)b} dy_s [a_s + 2\text{tg}\gamma(y - y_i)] dy_i. \quad (240)$$

Учитывая независимый характер наложения элементарных профилей, описываемых функцией $d\varepsilon_i(y)$, относительную полноту профиля пластины от положения проекций зерен dy_s -го слоя круга, получим, используя теорему умножения вероятностей независимых случайных событий [21]

$$d\varepsilon(y) = \prod_{i=1}^{\infty} d\varepsilon_i(y). \quad (241)$$

Переходя от вероятности события $d\varepsilon(y)$ к вероятности противоположного события $d\Phi(y)$ [21], получим

$$d\Phi(y) = \prod_{i=1}^{\infty} d\Phi_i(y) = \prod_{i=1}^{\infty} [1 - d\varepsilon_i(y)]. \quad (242)$$

После умножения

$$d\Phi(y) = 1 - [d\varepsilon_1(y) + d\varepsilon_2(y) + d\varepsilon_3(y) + \dots] + [d\varepsilon_1(y)d\varepsilon_2(y) + d\varepsilon_1(y)d\varepsilon_3(y) + d\varepsilon_1(y)d\varepsilon_4(y) + \dots] - [d\varepsilon_2(y)d\varepsilon_3(y) + d\varepsilon_2(y)d\varepsilon_4(y) + \dots] + [d\varepsilon_3(y)d\varepsilon_4(y) + \dots] - \dots \quad (243)$$

После вынесения за скобки общих множителей

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} d\varepsilon_i(y) + d\varepsilon_1(y) \sum_{j=2}^{\infty} d\varepsilon_j(y) - d\varepsilon_2(y) \sum_{j=3}^{\infty} d\varepsilon_j(y) + d\varepsilon_3(y) \sum_{j=4}^{\infty} d\varepsilon_j(y) - \dots = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} d\varepsilon_i(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} d\varepsilon_j(y) d\varepsilon_i(y) - \dots \end{aligned} \quad (244)$$

Заменяя суммирование бесконечно малых величин интегрированием, получим [24]

$$\begin{aligned}
 d\Phi(y) = & 1 - \int_{y_s=y_i}^y \frac{kV_{кр}}{V_{шт} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) (1-\eta)b} dy_s [a_s + 2tg\gamma(y - y_i)] dy_i + \\
 & + \int_{y_s=y_i}^y \frac{kV_{кр}}{V_{шт} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) (1-\eta)b} dy_s [a_s + 2tg\gamma(y - y_i)] * \\
 & * \int_{y_j}^y \frac{kV_{кр}}{V_{шт} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) (1-\eta)b} dy_s [a_s + 2tg\gamma(y - y_i)] dy_j dy_i. \quad (245)
 \end{aligned}$$

После интегрирования и несложных преобразований имеем

$$d\Phi(y) = \exp \left[- \frac{kV_{кр}}{V_{шт} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) (1-\eta)b} \left[a_s (y - y_s) + tg\gamma (y - y_s)^2 \right] dy_s \right]. \quad (246)$$

Исходя из рис. 67, величину площади износа зерна a_s можно определить $a_s = 2tg\gamma(y_s - y_0)$, где y_0 - координата вершины неизношенного зерна. Разность координат $(y_s - y_0)$ можно представить в виде $(y_s - y_0)\eta/(1-\eta)$. Зависимость (246) после подстановки в нее a_s примет вид

$$d\Phi(y) = \exp \left[- \frac{kV_{кр} tg\gamma (1 + \eta)}{V_{шт} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) (1-\eta)^2 b} (y - y_s)^2 dy_s \right]. \quad (247)$$

Полученная зависимость описывает относительную полноту профиля dy_s -го слоя круга $d\Phi(y)$.

Относительную полноту профиля круга от наложения всех зерен элементарных горизонтальных слоев рабочей поверхности шлифовального круга получим, используя теорему умножения вероятностей независимых случайных событий [21]

$$\Phi(y) = \prod_{s=1}^{\infty} d\Phi(y) = \exp \left(- \frac{kV_{кр} \operatorname{tg} \gamma (1 + \eta)}{V_{пл} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) (1 - \eta)^2 b} \sum_{s=1}^{\infty} (y - y_s)^2 dy_s \right). \quad (248)$$

Заменяя суммирование интегрированием в пределах $Y_a \dots Y$, функция (248) окончательно имеет вид

$$\Phi(y) = \exp \left(- \frac{kV_{кр} \operatorname{tg} \gamma (1 - \eta^2)}{V_{пл} 3b \left(1 - \frac{l_2}{l_1} \right)} y^3 \right). \quad (249)$$

Эта функция описывает относительную полноту профиля круга $\Phi(y)$ к вероятности противоположного события $\varepsilon(y)$

$$\varepsilon(y) = 1 - \exp \left(- \frac{kV_{кр} \operatorname{tg} \gamma (1 - \eta^2)}{3V_{пл} b \left(1 - \frac{l_2}{l_1} \right)} y^3 \right). \quad (250)$$

Выразим скорость радиально-движущейся пластины через скорость детали $V_{дет}$.

$$V_{пл} = V_{дет} \sin \alpha = V_{дет} \frac{\sqrt{2R_{кр} t}}{R_{кр}} = V_{дет} \sqrt{\frac{2t}{R_{кр}}}, \quad (251)$$

где $\sqrt{2R_{кр}t}$ - ширина зоны контакта круга с заготовкой, м;

$R_{кр}$ - радиус шлифовального круга, м;

$V_{дет}$ - скорость детали, м/с;

t - глубина шлифования, м.

Средневероятностное количество зерен, содержащихся на единице площади рабочей поверхности шлифовального круга, можно считать по формуле [20]

$$k = \frac{3m(1 - \varepsilon)}{200\pi\bar{X}^2}, \quad (252)$$

где ε - относительная критическая глубина заделки зерен (отношение глубины заделки зерна в связке к размеру зерна \bar{X} , при котором зерно выкрашивается из связки);

m - объемная концентрация зерен круга, %;

\bar{X} - зернистость круга, м

$$(1 - \varepsilon) = \frac{b}{\bar{X}}.$$

Подставляя выражения (251) и (252) в формулу (250), получим

$$\varepsilon(y) = 1 - \exp\left(-\frac{kV_{кр} \operatorname{tg}\gamma(1 - \eta^2)\sqrt{R}}{628\bar{X}^3 V_{зар}\sqrt{2t}\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)} y^3\right). \quad (253)$$

Эта функция описывает относительную полноту профиля пластины $\varepsilon(y)$ и соответствует относительной опорной длине микропрофиля обработанной поверхности. Функция $\varepsilon(y)$ изменяется по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к единице. На рис. 68 приняты следующие обозначения:

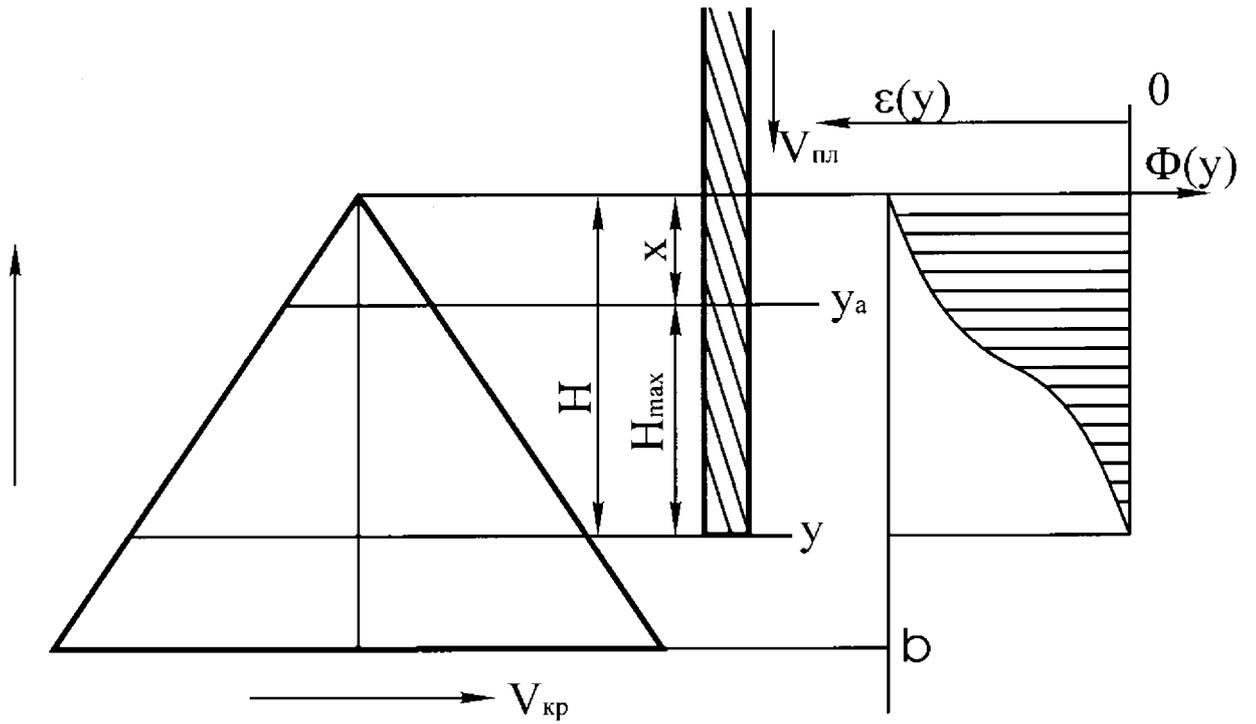


Рис.68. Относительная плотность профиля пластины $\varepsilon(y)$

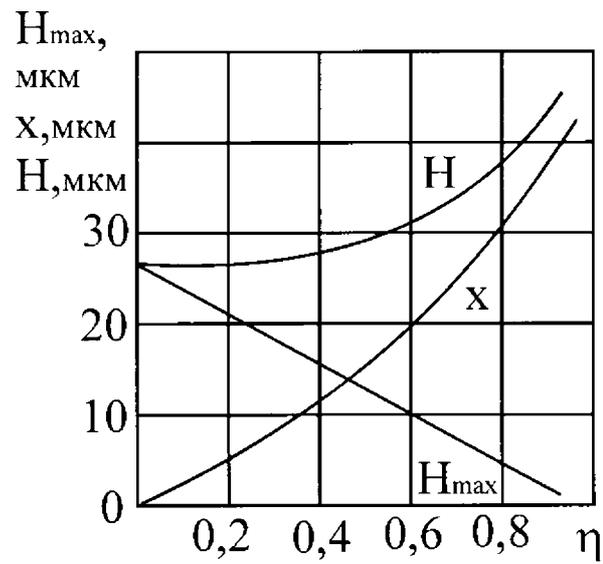


Рис.69. Зависимость параметров H , H_{max} и X от параметра η

H - максимальная глубина внедрения пластины в рабочую поверхность шлифовального круга;

H_{\max} - максимальная вероятностная толщина среза;

X - величина линейного износа максимально выступающего зерна.

Принимая $\varepsilon(y) = 0,9$ из формулы (253) при $y = H$, получим

$$\exp\left(-\frac{mV_{\text{кр}} \operatorname{tg}\gamma (1 - \eta^2) \sqrt{R}}{628\bar{X}^3 V_{\text{зар}} \sqrt{2t} \left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)} H^3\right) = 0,1; \quad (254)$$

$$\left(-\frac{mV_{\text{кр}} \operatorname{tg}\gamma (1 - \eta^2) \sqrt{R}}{628\bar{X}^3 V_{\text{зар}} \sqrt{2t} \left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)} H^3\right) \lg e = \lg 0,1. \quad (255)$$

После несложных преобразований получена формула для расчета максимальной глубины внедрения пластины в рабочую поверхность шлифовального круга:

$$H = \sqrt[3]{\frac{1444,4 V_{\text{зар}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) \sqrt{\frac{2t}{R}} \bar{X}^3}{mV_{\text{кр}} \operatorname{tg}\gamma (1 - \eta^2)}}. \quad (256)$$

Толщина среза H_{\max} определяется зависимостью

$$H_{\max} = (1 - \eta)H = \sqrt[3]{\frac{1444,4 V_{\text{зар}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) \sqrt{\frac{2t}{R}} \bar{X}^3 (1 - \eta^2)}{mV_{\text{кр}} \operatorname{tg}\gamma (1 + \eta)}}. \quad (257)$$

С увеличением η параметр H_{\max} снижается, что является следствием образования на круге более сглаженного рельефа. Это вытекает из

зависимости, описывающей величину линейного износа максимально выступающего зерна

$$X = \eta H = \sqrt[3]{\frac{1444,4 V_{\text{заг}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) \sqrt{\frac{2t}{R}} \eta^3 \bar{x}^3}{m V_{\text{кр}} \operatorname{tg} \gamma (1 - \eta^2)}}. \quad (258)$$

С увеличением параметра η от 0 до 0,9 параметр H_{max} уменьшается в шесть раз, что показывает существенное влияние износа зерен на характер приведенного режущего профиля круга (рис. 69).

В установившемся процессе шлифования для каждого режима резания, каждой характеристики круга существует вполне конкретный режущий рельеф, определяемый параметром η , поэтому возникает необходимость установления закономерностей изменения параметра η для различных условий обработки с позиций тепловой напряженности процесса шлифования.

При высокопроизводительном шлифовании наряду с обеспечением требуемой точности важное значение имеет управление теплонапряженностью процесса, позволяющее исключить появление прижогов и микротрещин. Поэтому выбор оптимальных условий обработки необходимо производить с учетом ограничений по температуре резания при шлифовании.

Для установления функциональных связей режимных параметров шлифования и состояния рабочей поверхности круга воспользуемся известными решениями: для определения максимальной температуры [23] и составляющей силы резания F_z [21]

$$T = \frac{F_z V_{кр}}{2S} \sqrt{\frac{2\pi h}{\lambda C \rho_M V_{заг}}} \quad (259)$$

$$F_z = \frac{1,32A \cdot B}{(3-n)(6-n)} \left[\frac{\text{tg}\gamma \cdot m(1+\eta)}{66,7\pi\bar{x}^3(1-\eta)^2} \right]^{\frac{n}{3}} \left(\frac{6,9V_{заг} \left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)}{V_{кр}} \right)^{\frac{3-n}{3}} (2t)^{\frac{6-n}{6}}, \quad (260)$$

при $n = 0,75$ после подстановки (260) в уравнение (259) получим

$$T = 2,04A \left[\frac{\text{tg}\gamma \cdot m V_{заг} t^{3,5} (1+\eta) V_{кр} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)^3}{\lambda^2 C^2 \rho_M^2 \bar{x}^2 (1-\eta)^2} \right]^{0,25} \quad (261)$$

Из анализа полученной зависимости следует, что наибольшее влияние на температуру оказывает параметр η .

Следовательно, управление теплонапряженностью процесса шлифования в неустановившемся режиме следует осуществлять параметром η . С изменением параметра η от 0,2 до 0,8 температура в зоне контакта увеличивается в 6 раз.

Режимы шлифования оказывают на температуру иное влияние, чем на силу F_z . Например, с увеличением $V_{заг}$ температура возрастает в меньшей степени, чем сила резания F_z . С увеличением скорости круга температура изменяется по зависимости $T \sim V_{кр}^{0,25}$, тогда как сила F_z с ростом $V_{кр}$ - уменьшается.

Приведенные на рис. 69 значения H , H_{max} и X для различных η свидетельствует об исключительной важности анализа процесса прерывистого шлифования с позиции изменения параметра η .

В связи с тем, что для каждой характеристики круга существует свой вполне конкретный режущий рельеф, определяемый параметром η , возникает необходимость установления закономерностей изменения параметра η для различных условий обработки с позиции силовой напряженности процесса прерывистого шлифования.

Формула для расчета параметра η имеет вид [24]

$$\eta = 1 - \left(\frac{2042,7 V_{\text{зар}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \sqrt{t\bar{x}}^3}{V_{\text{кр}} m \sqrt{R}} \right)^{\frac{2-n}{2n-1}} \left(\frac{A}{p} \right)^{\frac{3}{2n-1}} \operatorname{tg} \gamma^{\frac{n+1}{2n-1}}. \quad (262)$$

Экспериментально определен параметр “ n ”. Для стали Р6М5 параметр $n = 0,76$, для стали У8А - $n = 0,69$.

Принимая $n = 0,75$, формула для определения параметра η будет иметь вид

$$\eta = 1 - \left(\frac{2042,7 V_{\text{зар}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \sqrt{t\bar{x}}^3}{V_{\text{кр}} m \sqrt{R}} \right)^{2,5} \left(\frac{A}{p} \right)^6 \operatorname{tg} \gamma^{3,5}. \quad (263)$$

При прерывистом шлифовании параметр η меньше, чем при сплошном. Параметр A , входящий в выражение (263) и характеризующий прочностные свойства обрабатываемого материала, определяется по формуле [21]

$$A = \frac{0,67 F_z R_a^{0,62}}{B} \left(\frac{V_{\text{кр}}}{t V_{\text{зар}}} \right)^{0,988}, \quad (264)$$

где R_a - высота шероховатости обработанной поверхности, м.

Для решения задач, связанных с оптимизацией параметров глубинного шлифования, воспользуемся зависимостью (261), выражая в ней параметр $V_{\text{заг}}$ через величину $(1 - \eta)$ в соответствии с зависимостью (263). После несложных преобразований с учетом $\text{tg} \gamma = 1$ имеем

$$T = \frac{1,49 \cdot 10^{-4} A t^{0,75} (1 + \eta)^{0,25}}{(1 - \eta)^{0,4} R^{0,31}} \left(\frac{m V_{\text{кр}} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right)}{\lambda C p_M \bar{x}^3} \right)^{0,5} \left(\frac{P}{A} \right)^{0,6}. \quad (265)$$

Таким образом получена весьма важная для анализа и оптимизации процесса глубинного шлифования зависимость, устанавливающая функциональную связь между температурой резания T и всеми параметрами обработки для случая $P = \text{const}$, т.е. для случая, когда в максимальной степени используются свойства рабочей поверхности круга.

Для того, чтобы реализовать на практике такой режим работы зерен $P = \text{const}$, необходимо скорость заготовки по мере износа зерен изменять в соответствии с зависимостью

$$V_{\text{заг}} = 4,89 \cdot 10^{-4} \frac{m V_{\text{кр}} \sqrt{R} (1 - \eta)^{0,4}}{\left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \sqrt{t \bar{x}^3}} \left(\frac{P}{A} \right)^{2,4}. \quad (266)$$

Из зависимости (266) следует, что по мере износа зерен, т.е. с увеличением параметра η , скорость заготовки должна уменьшаться.

Из режимных параметров, оказывающих существенное влияние на температуру, являются скорость круга $V_{кр}$ и глубина шлифования t .

Глубину резания в условиях глубинного шлифования обычно устанавливают равной величине снимаемого припуска, а параметром управления следует рассматривать скорость круга.

Для уменьшения температуры скорость круга необходимо уменьшать. При этом скорость круга для обеспечения заданного значения T необходимо устанавливать в соответствии с зависимостью

$$V_{кр} = \frac{67,1\lambda C_{pM}\bar{x}^3 T^2 (1-\eta)^{0,8}}{mA^2 t^{1,5} (1+\eta)^{0,5} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)} \left(\frac{A}{P}\right)^{1,2}. \quad (267)$$

Из приведенной зависимости следует, что чем больше глубина шлифования t , тем меньше должна быть скорость круга $V_{кр}$. С увеличением прочности обрабатываемого материала, т.е. с увеличением параметра A , скорость круга $V_{кр}$ должна быть уменьшена.

Параметр η характеризует степень износа режущих зерен шлифовального круга. С увеличением износа зерен возрастает доля энергии, затрачиваемой на трение. Следует заметить, что энергия, затрачиваемая на трение, полностью переходит в тепло.

Поэтому для управления теплонапряженностью процесса шлифования надо иметь представление о распределении работы, затрачиваемой на резание и трение.

7.3.2. Долевой вклад работ, затрачиваемых на резание и трение, в общем энергетическом балансе процесса шлифования

Энергоемкость процесса шлифования зависит от распределения работ, затрачиваемых на резание и трение.

При движении режущего зерна круга со скоростью $V_{кр}$ возникает тангенциальная сила резания F_z , которую можно представить в виде

$$F_z = F_{z \text{ тр}} + F_{z \text{ рез}}, \quad (268)$$

где $F_{z \text{ тр}}$ и $F_{z \text{ рез}}$ соответственно составляющие тангенциальной силы

$$F_{z \text{ тр}} = f \cdot F_y; \quad (269)$$

$$F_{z \text{ рез}} = \sigma \cdot S, \quad (270)$$

где f - коэффициент трения зерна с обрабатываемым материалом;

σ - условное напряжение резания, Н/м^2 ;

S - площадь сечения стружки, м^2 .

Из работ Новикова Ф.В. [21] известно, что

$$F_{z \text{ рез}} = \frac{2[\sigma]_{сж}}{K_{ш \text{ рез}}} S, \quad (271)$$

где $[\sigma]_{сж}$ - предел прочности материала на сжатие, Н/м^2 .

После подстановки выражений (269) и (271) в уравнение (268) получим

$$F_z = f \cdot F_y + \frac{2[\sigma]_{\text{сж}} S}{K_{\text{ш рез}}} \quad (272)$$

Разделив слагаемые (272) на F_y , получим

$$K_{\text{ш}} = f + \frac{2[\sigma]_{\text{сж}} S}{K_{\text{ш рез}} F_y} \quad (273)$$

Преобразуем зависимость (273) к виду

$$F_y = \frac{2[\sigma]_{\text{сж}} S}{(K_{\text{ш}} - f) K_{\text{ш рез}}} = \frac{2[\sigma]_{\text{сж}} S}{(K_{\text{ш}} - f)^2} \quad (274)$$

Принимая суммарную площадь среза всеми работающими зернами S в виде отношения производительности Q к скорости резания $V_{\text{кр}}$, (274) можно представить в виде

$$Q = \frac{F_y V_{\text{кр}} (K_{\text{ш}} - f)^2}{2[\sigma]_{\text{сж}}} \quad (275)$$

В (275), наряду с параметрами режима шлифования F_y и $V_{\text{кр}}$, входит физический параметр $K_{\text{ш}}$, который в свою очередь зависит от режимов. Следовательно, производительность шлифования имеет неоднозначную взаимосвязь с режимом обработки. С увеличением F_y и $V_{\text{кр}}$ производительность обработки линейно возрастает.

С другой стороны, с увеличением F_y и $V_{\text{кр}}$ изменяется параметр $K_{\text{ш}}$, что искажает линейный характер зависимости $Q = f(F_y, V_{\text{кр}})$.

Таким образом, анализируя зависимость (275), можно сделать вывод о том, что на производительность шлифования оказывают большое влияние физические факторы, которые обобщенно

описываются параметром $K_{ш}$, причем этот параметр входит в зависимость (275) не в “чистом виде”, а в виде квадрата разности $(K_{ш} - f)^2$, который может изменяться в весьма широких пределах от нуля (случай перехода от процесса трения к процессу резания, когда $K_{ш} \approx f$) до значений 0,5...0,7 (случай высокопроизводительного шлифования, когда $K_{ш} \gg f$). Соответственно в широких пределах будет изменяться и производительность обработки Q . Например, по мере износа зерен и затупления круга, что соответствует условию $K_{ш} \rightarrow f$, производительность обработки будет уменьшаться до нуля. Это указывает на то, что разность $(K_{ш} - f)$ – величина, весьма чувствительная к изменению $K_{ш}$, особенно когда $K_{ш}$ мало отличается от f .

Из приведенного анализа выражения (275) следует, что производительностью шлифования можно управлять на основе оптимизации параметра $K_{ш \text{ рез}}$. Увеличить параметр $K_{ш \text{ рез}}$ или стабилизировать его во времени можно, во-первых, за счет режима, обеспечивающего самозатачивание круга путем непрерывной его правки, а во-вторых, за счет снижения интенсивности износа режущих зерен круга. Это достигается путем применения высокопрочных режущих материалов, эффективных СОЖ, твердых смазок, импрегнирования шлифовальных кругов, применения прерывистых кругов.

Уравнение для определения общей энергоемкости процесса шлифования имеет вид [21]

$$\frac{f \cdot F_y V_{кр}}{Q\sigma} + \frac{2[\sigma]_{сж}}{(K_{ш} - f)\sigma} = 1; \quad (276)$$

с учетом выражения $\sigma = \frac{2[\sigma]_{сж} K_{ш}}{K_{ш рез}}$ и некоторых преобразований

(276) получим

$$\frac{f}{K_{ш}} + \left(1 - \frac{f}{K_{ш}}\right) = 1. \quad (277)$$

Уравнение (277) характеризует закон сохранения энергии при шлифовании. По мере затупления шлифовального круга уменьшается $K_{ш}$. В выражении (277) при возрастании первого слагаемого второе слагаемое пропорционально уменьшается.

При $K_{ш} \approx f$ первое слагаемое стремится к единице, а второе - к нулю.

Связь параметра $K_{ш рез}$ с физическим параметром η , характеризующим износ режущих зерен, выражается зависимостью

$$\eta = 1 - \frac{\pi \operatorname{tg} \gamma HV}{4[\sigma]_{сж}} K_{ш рез}^2, \quad (278)$$

где γ - угол при вершине режущего зерна;

HV - твердость по Виккерсу обрабатываемого материала, H/m^2 .

В табл. 7.5 представлены экспериментальные значения мощности шлифования, тангенциальной составляющей силы

резания F_z при шлифовании по упругой схеме плоских образцов из стали 12Х2Н4А ($[\sigma]_{сж} = 3600$ мПа) круг 24А25С16К5. По экспериментальным данным рассчитывались параметры σ и $K_{ш}$. За пятиминутный период шлифования глубина резания уменьшилась в 12 раз, условное напряжение резания σ возросло в 5,8 раза; мощность, затрачиваемая на резание, уменьшилась в 1,85 раза; тангенциальная составляющая силы резания F_z уменьшилась в 1,9 раза.

Как видно, интенсивность уменьшения съема металла не коррелирует ни с одним из указанных технологических параметров.

Для условий шлифования: $\text{tg}60^\circ = 1,723$, $[\sigma]_{сж} = 3600$ мПа, $HV = 1400$ мПа были произведены расчеты f , $f/K_{ш}$, η .

В зависимости от затупления абразивного круга доля энергии, затрачиваемая на трение $f/K_{ш}$, изменяется от 31,9 до 61,3 %; параметр $K_{ш \text{ рез}}$ уменьшается от 0,323 до 0,100; коэффициент трения изменяется незначительно от 0,153 до 0,206, а производительность Q уменьшается в 10 раз.

Полученные данные позволяют рассматривать процесс шлифования как результат наложения переменного во времени процесса трения режущих зерен и связки об обрабатываемый материал.

Таблица 7.5

Влияние времени обработки на параметры шлифования.

Условия проведения экспериментов: $V_{кр} = 29,6$ м/с, $V_{ст} = 6$ м/мин, $F_y = 60$ Н

№ эксперимен-та	Время обра-ботки, мин	Глуби-на шлиф. за 5 про-ходов	Сила резания			$K_{ш}$	$\sigma \cdot 10^4$ мПа	f	$K_{ш\text{ рез}}$	η	f/ $K_{ш}$ %
			$F_z \cdot 10Н$	$F_{z\text{рез}} \cdot 10Н$	$F_{z\text{тр}} \cdot 10Н$						
1	0,1	0,036	2,88	1,94	0,94	0,480	3,24	0,153	0,324	0,458	31,9
2	0,5	0,013	2,24	1,16	1,08	0,373	7,2	0,180	0,193	0,748	48,2
3	1,0	0,08	2,15	0,91	1,24	0,358	11,2	0,206	0,152	0,878	57,5
4	2,0	0,06	1,79	0,79	1,0	0,299	12,4	0,167	0,132	0,911	55,9
5	3,0	0,05	1,64	0,72	0,92	0,273	13,7	0,153	0,120	0,925	56,0
6	5,0	0,03	1,53	0,6	0,93	0,256	18,8	0,157	0,100	0,948	61,3

По мере затупления зерен шлифовального круга увеличивается температура, уменьшается $K_{ш\text{ рез}}$ и возрастают условное напряжение σ и параметр η .

После 30-секундного периода шлифования по упругой схеме круг полностью теряет свои режущие свойства. За это время параметр η увеличивается с 0,456 до 0,800, а условное напряжение резания увеличивается с 32400 до 72000 мПа. Как видно, существует большой резерв повышения эффективности процесса шлифования за счет изыскания способов уменьшения параметра η .

Для управления режущей способностью кругов и теплонапряженностью необходимо установить функциональную связь между нагрузкой, действующей на отдельное зерно, и величиной линейного износа зерна до момента его объемного разрушения или выпадения из связки без разрушения.

В условиях установившегося процесса шлифования величина нагрузки, действующей на максимально выступающее зерно, должна принимать значение, равное или соизмеримое с прочностью зерна на раздавливание или прочностью удержания его в связке, а величина линейного износа зерна - значение, соответствующее образованию на рабочей поверхности прерывистого круга энергетически равновесного режущего рельефа. Исходя из этого, в качестве условия оптимизации следует принимать нагрузку, действующую на максимально выступающее зерно, а в качестве оптимизируемого параметра - величину его линейного износа. После формирования фронтальной поверхности

на режущих выступах прерывистого круга, нагрузка действующая на зерно в соответствии с прочностными свойствами зерен будет оставаться постоянной не зависимо от условий обработки, а величина линейного износа зерна будет выражать взаимосвязь входных параметров (режимов шлифования, характеристики круга, жесткости технологической системы и т.д.) с выходными параметрами (производительностью и качеством обработки, себестоимостью обработки, силами и температурой резания).

Например, мягкие круги М1, М2, М3, работают в режиме интенсивного самозатачивания; твердые С1, СТ1 работают в режиме затупления режущих зерен. Следует заметить, что в обоих случаях технологический резерв работы режущих зерен полностью не используется.

В первом случае режущие зерна не достигнув критического значения затупления, вырываются из связки.

Во втором случае обновление режущих зерен не происходит, зерна изнашиваются, уменьшая тем самым режущую способность кругов (см.табл. 7.5) и вызывая необходимость частой правки кругов.

Для обеспечения условий самозатачивания твердого круга необходимо шлифование осуществлять с оптимальным значением параметра X (износ максимально выступающего зерна) и P (нагрузка, при которой происходит разрушение зерна или выпадение его из связки). Однако реализовать условия самозатачивания кругов высокой твердости весьма сложно, так как

они интенсивно засаливаются и быстро теряют режущую способность.

Чтобы создать условия для самозатачивания высокотвердых кругов, необходимо в зону резания ввести дополнительную энергию.

Процесс шлифования, при котором при определенных условиях совмещаются интенсивный съём металла с правкой круга, можно осуществить при шлифовании кругами, имеющими на рабочей поверхности ряд чередующихся выступов и впадин строго определенной протяженности.

При прерывистом шлифовании возникают вынужденные (периодические с разрывом контакта круга) колебания. Наличие колебаний в направлении нормали круга создает условия для максимального внедрения режущих зерен круга в металл. Под воздействием динамической нагрузки, которая воспринимается режущими зернами, расположенными на передней кромке выступа, наблюдается интенсивное осыпание зерен с формированием фронтальной поверхности на режущих выступах.

По мере формирования фронтальной поверхности нагрузка, приходящаяся на зерна режущего выступа, выравнивается.

При прерывистом шлифовании с изменением условий шлифования изменяются угол наклона фронтальной поверхности и линейная ее протяженность в пределах длины режущего выступа.

Величина линейного износа зерен до момента их объемного разрушения поддерживается автоматически самим процессом

прерывистого шлифования за счет изменения угла наклона фронтальной поверхности режущего выступа.

Для установления связи динамических явлений с выходными показателями процесса прерывистого шлифования (производительность, теплонапряженность, сила резания и др.) рассмотрим колебания одномассовой системы (шлифовальный круг на упругой подвеске с затуханием), на которую извне со стороны детали действует импульсная вертикальная нагрузка $F(\tau_1)$, где τ_1 - период контакта режущего выступа прерывистого круга с обрабатываемой деталью; τ_2 - период прерывания процесса резания при прохождении впадины круга над деталью.

Колебательное движение массы m за период действия силы (за период работы режущего выступа τ_1) описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{y} + cy = F. \quad (279)$$

За период прохождения круга τ_2 движение массы описывается уравнением

$$m\ddot{y} + cy = 0. \quad (280)$$

Решение (279) имеет вид

$$Y_1 = A \sin kt + B \cos kt + Y_{cm},$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - собственная частота колебаний системы;

$Y_{cm} = \frac{F_0}{c}$ - статическое перемещение массы m под действием

силы F_0 .

Решение (280) имеет вид

$$Y_2 = C \sin k\tau + D \cos k\tau.$$

Неизвестные постоянные A , B , C , D определяются из четырех начальных условий

$$\left. \begin{aligned} Y_1(0) &= Y_2(\tau_2) \\ \dot{Y}_1(0) &= \dot{Y}_2(\tau_2) \end{aligned} \right\}; \quad (281)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\tau_1) &= Y_2(\tau_1) \\ \dot{Y}_1(\tau_1) &= \dot{Y}_2(\tau_1) \end{aligned} \right\}; \quad (282)$$

После решения системы уравнений и некоторых преобразований получим

$$C = Y_{cm} \frac{\sin k \frac{\tau_1}{2} \cdot \sin \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}}{\sin \frac{\tau_2}{2}}; \quad (283)$$

$$D = \frac{Y_{cm} \sin \frac{\tau_1}{2}}{\cos k \frac{\tau_2 + 2\tau_1}{2} \sin \frac{\tau_2}{2}} \left(\cos k \frac{\tau_1}{2} - \sin k \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \sin \frac{\tau_2 + 2\tau_1}{2} \right); \quad (284)$$

$$A = C \cdot \cos k\tau_2 + D \sin k\tau_2; \quad (285)$$

$$B = C \cdot \sin k\tau_2 + D \cos k\tau_2 - Y_{cm}, \quad (286)$$

при $\sin k \frac{\tau_2}{2} = 0$ и $\cos k \frac{\tau_2 + 2\tau_1}{2} = 0$ постоянные A , B , C , D стремятся к бесконечности. При этих условиях в системе наступает ударный резонанс (параметры $Y_1 \rightarrow \infty$, $Y_2 \rightarrow \infty$).

Условия ударного резонанса:

1. $\sin k \frac{\tau_2}{2} = 0$ при $k \frac{\tau_2}{2} = \pi n$, где $n = 1, 2, \dots, \infty$,

откуда

$$\tau_2 = \frac{2\pi n}{k}. \quad (287)$$

2. $\cos k \frac{\tau_2 + 2\tau_1}{2} = 0$ при $k \frac{\tau_2 + 2\tau_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда

$$\tau_2 + 2\tau_1 = \frac{\pi(1 - 2n)}{k2}. \quad (288)$$

Из полученных уравнений (287) и (288) следует бесчисленное множество резонансных состояний системы.

Полное решение дифференциального уравнения одномассовой системы имеет вид

$$A = \frac{S}{2m\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{\pi\sqrt{\frac{c}{m}}}{\omega_1}}, \quad (289)$$

где $S = \int_0^{\tau} P(\tau) d\tau$ - импульс силы

$$P = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad S = F_0 \tau_1,$$

F_0 - сила резания, Н;

ω_1 - угловая частота действия импульсов силы.

Отношение $\frac{S}{m\sqrt{\frac{c}{m}}}$ определяет максимальное отклонение A ,

вызванное однократным импульсом.

Выражением

$$\beta = \frac{1}{2 \left[\sin \left(\pi \sqrt{\frac{c}{m}} / \omega_1 \right) \right]}$$

характеризуется повторяемость ударов от режущих выступов.

При прерывистом шлифовании существует бесчисленное множество резонансных состояний системы как при $\omega_1 < \sqrt{c/m}$, так и при $\omega_1 > \sqrt{c/m}$ (при совпадении частот или при их кратности).

Из решения (289) видно, что на величину амплитуды A вынужденных колебаний преобладающее влияние оказывает импульс силы. Повторяемость действия импульсов оказывает менее значительное влияние на амплитуду вынужденных колебаний.

Изменяя величину импульса силы, можно добиться изменения величины амплитуды вынужденных колебаний. С увеличением скорости шлифовального круга или с уменьшением длины режущего выступа прерывистого круга уменьшается время контакта τ_1 . Соответственно уменьшаются импульс силы $S = F_0 \tau_1$ и амплитуда вынужденных колебаний. С уменьшением амплитуды увеличиваются фактическая глубина шлифования и толщина среза максимально выступающего зерна H_{\max} . С увеличением фактической глубины резания возрастает вероятность контакта обрабатываемого материала со связкой шлифовального круга. Трение металла со связкой приводит к износу последней, и работа шлифовального круга переходит в режим самозатачивания.

Уменьшение амплитуды вынужденных колебаний говорит о том, что круг не успевает отреагировать на импульс силы S и система получает перемещение, равное перемещению статической силы F_0 . При этом чем меньше τ_1 , тем меньше величина амплитуды A . Прерывистость процесса шлифования обеспечивает одновременно высокую производительность и эффективную правку круга.

Период времени работы круга между двумя режущими выступами можно выразить через угловую частоту действия импульсов (ω) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ или через время контакта режущего выступа шлифовального круга с обрабатываемой деталью (τ_1) $T = \alpha\tau_1$, где $\alpha = \frac{l_1 + l_2}{l_1}$. После подстановки и некоторых преобразований амплитуду колебаний можно представить в виде

$$A = \frac{F_0 2\pi \sqrt{\frac{c}{m}}}{\alpha \omega 2c \sin\left(\pi \frac{\sqrt{\frac{c}{m}}}{\omega}\right)} = \frac{\pi X_{cm} \sqrt{\frac{c}{m}}}{\alpha \omega c \sin\left(\pi \frac{\sqrt{\frac{c}{m}}}{\omega}\right)}, \quad (290)$$

где $X_{cm} = \frac{F_0}{c}$ - перемещение круга в радиальном направлении от действия статического приложения силы F_0 .

Из (290) следует, что при $\sin\left(\pi \sqrt{\frac{c}{m}}/\omega\right) \rightarrow 0$ амплитуда вынужденных колебаний $A \rightarrow \infty$. При $A \rightarrow \infty$ обрабатываемый материал будет внедряться в рабочую поверхность круга до уровня связки, что

приводит к разрушению последней. В этом случае шлифовальный круг работает в режиме самозатачивания и его режущая способность длительное время сохраняется во времени.

Из (290) видно, что при увеличении ω до определенного значения соотношение

$$\frac{\pi \sqrt{\frac{c}{m}}}{\alpha \omega c \sin \left(\pi \frac{\sqrt{\frac{c}{m}}}{\omega} \right)} < 1$$

и соответственно $A < X_{cm}$.

В этом и заключается эффект прерывистого шлифования как метода правки круга. При этом чем больше α , тем выше эффект, следовательно, эффективность правки шлифовального круга возрастает с уменьшением длины режущего выступа.

После подстановки $\alpha = \frac{l_1 + l_2}{l_1}$ и $\omega = \frac{2\pi V_{кр}}{l_1 + l_2}$ в (290) получим

$$A = \frac{X_{cm} \sqrt{\frac{c}{m}} l_1}{2 V_{кр} c \sin \left(\pi \frac{\sqrt{\frac{c}{m}}}{\omega} \right)}. \quad (291)$$

Таким образом, с уменьшением длины режущего выступа l_1 и увеличения скорости круга $V_{кр}$ уменьшается амплитуда вынужденных колебаний A .

Учебное издание

Александр Васильевич Якимов

Борис Олегович Ткаченко

Сергей Георгиевич Зимин

Алексей Александрович Якимов

Федор Васильевич Новиков

Григорий Васильевич Новиков

**ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ОБЫЧНОМ
И ПРЕРЫВИСТОМ ШЛИФОВАНИИ**

Учебное пособие

Редактор Т.И. Лучнева

Корректор З.И. Вальх

Подписано к печати 20.05.1998. Формат 60 84/16. Бумага белая.

Печать офсетная. 15,82 усл. печ. л. 17,00 уч.– изд. л. Тираж 300 экз.

Заказ №121.

Одесский государственный политехнический университет

270044, г. Одесса, проспект Шевченко, 1