МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Свідерський В. П.
Прасок О. Г.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Харків. Вид. ХНЕУ, 2008

УДК 531(042.4)
ББК 22.2я73
С24

Рецензент – канд. техн. наук, ст. викладач кафедри фізики та електроніки Харківського національного економічного університету *Вдовьонков В.Ю.*

Затверджено на засіданні кафедри техніки та технології.
Протокол № 5 від 3.12. 2007 р.

Свідерський В. П.

С24 Теоретична механіка. Конспект лекцій для студентів напряму підготовки "Видавничо-поліграфічна справа" усіх форм навчання / В. П. Свідерський, О. Г. Прасок. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2008.– 111 с. (Укр. мов.)

Розкривається суть розділів теоретичної механіки (статики, кінематики, динаміки) з точки зору механічного руху матеріальних об'єктів у просторі і з часом з використанням математичних методів, абстрактних понять та моделей явищ.

УДК 531(042.4)
ББК 22.2я73

Вступ

Перше, що ми спостерігаємо в зовнішньому світі починаючи з народження, – це різні форми руху і взаємодії матерії. У теоретичній механіці розглядаються механічні рухи матеріальних об'єктів тільки речовинних форм, таких як різні матеріальні тіла або в більш загальному випадку суцільні середовища, і не розглядаються такі фізичні об'єкти, як електромагнітне поле, їх джерела і т. ін. Матеріальність тіл і суцільних середовищ в теоретичній механіці характеризується масою й іншими величинами, пов'язаними з нею, поняття яких вводяться в динаміці.

Всяку зміну матерії називають рухом. Одним із простих є механічний рух переміщення матеріальних об'єктів у просторі з перебігом без розгляду фізичних властивостей рухомих матеріальних об'єктів і їх зміни в процесі руху. Механічний рух зазвичай входить складовою частиною до складніших видів руху матерії.

У теоретичній механіці вивчаються механічні рухи речовинних форм матеріальних об'єктів у просторі і часі.

Простір, час, як і матерія, є складними поняттями. У теоретичній механіці розглядаються їх спрощені поняття і моделі. Простір вважається незалежним від часу і рухомої матерії. Вважається, що він має всі геометричні властивості евклідової геометрії. Час вважають універсальним, не пов'язаним з простором і рухомою матерією. Його характеризують якимнебудь періодичним процесом, наприклад періодом обертання Землі.

Найбільш загальним методом вивчення всіх явищ природи і суспільства є діалектичний метод, який, визнаючи досвід джерелом усіх наших знань, надає великого значення абстрактному мисленню, що використовує моделі явищ.

У теоретичній механіці широко використовуються математичні методи, абстрактні поняття, моделі явищ і закони логіки, що є складовою частиною діалектичного методу.

Кожен розділ теоретичної механіки має в своїй основі ряд понять і аксіом, що мають досвідчене походження. Вводячи нові поняття і використовуючи закони логіки, отримують наслідки або теореми у формі, зручній для практичного застосування.

Теоретична механіка весь час розвивається. У міру поглиблення наших знань виявляються межі застосовності теоретичної механіки, відносність її понять. З'ясувалося, що аксіоми або закони класичної механіки Ньютона не абсолютні.

Для матеріальних тіл, швидкості яких близькі до швидкості світла, замість класичної механіки слід застосовувати механіку спеціальної теорії відносності. Класична теоретична механіка обмежено застосовна для вивчення руху елементарних частинок атома, таких, як електрон, протон і т. ін., для вивчення руху яких слід застосовувати квантову механіку.

Теоретична механіка широко застосовується в техніці (авіації, космонавтиці, машинобудуванні, кібернетиці і т. д.). На базі теоретичної механіки виникли і успішно розвиваються багато наук, такі як опір матеріалів, теорія пружності, гідродинаміка, газова динаміка тощо. У цих науках зазвичай до законів механіки додаються інші закони, що характеризують додаткові властивості матеріальних тіл. В опорі матеріалів і теорії пружності враховується деформація тіл і додається закон Гука про зв’язок деформації з силами.

У гідродинаміці враховується швидкість деформації і використовується додатковий закон про зв'язок швидкостей деформації і сил. У газовій динаміці, крім того, враховується стиснення газу.

Теоретична механіка має свою історію становлення законів і понять. Вона створювалася разом з розвитком техніки під безпосереднім впливом розвитку продуктивних сил суспільства і всієї людської культури. Теоретична механіка бере свій початок у глибокій давнині, задовго до нашої ери.

Найбільший внесок до основ сучасної теоретичної механіки зробили великі вчені Галілей (1564 – 1642) і Ньютон (1643 – 1727). Подальший розвиток теоретичної механіки пов'язаний з іменами багатьох учених, найбільш видатні з яких Гюйгенс (1629 – 1695), Даламбер (1717 – 1783), Ейлер (1707 – 1783), Лагранж (1736 – 1813) і багато інших.

Великий внесок у розвиток сучасної механіки внесли російскі вчені, такі як М. В. Остроградский (1801 – 1862), Н. Е. Жуковський (1847 – 1921), С. В. Ковалевська (1850 – 1891), А. М. Ляпунов (1851 – 1918), К.Е. Ціолковський (1857 – 1935) та ін. Своїми дослідженнями і відкриттями вони значною мірою сприяли розвитку механіки і її застосуванню в техніці і природознавстві. Плідно працюють вчені і зараз, продовжуючи славні традиції корифеїв вітчизняної науки.

Теоретична механіка ділиться на три частини: статику, кінематику і динаміку. Статика – розділ механіки, в якому вивчаються різні системи сил, що діють на тверде тіло, визначаються способи, за допомогою яких можна замінити дану складну реальну систему сил іншою, істотно більш простою системою, еквівалентною за механічною дією на тіло. Важливим завданням статики є знаходження необхідних і достатніх умов рівноваги тіл під дією довільних систем сил.

Кінематика – розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних частинок і матеріальних тіл з чисто геометричного боку, без урахування сил, які можуть змінювати характеристики механічного руху. У кінематиці рухомі об'єкти розрізняються тільки геометричною формою і положенням у просторі. У процесі історичного розвитку механіки кінематичні питання довгий час не вивчалися самостійно і були частиною динаміки.

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчаються закони руху матеріальних частинок і матеріальних тіл під дією сил. Динаміка є найбільш важливою частиною механіки.

Зі зміною робочих програм навчальних дисциплін "Теоретична механіка" та "Технічна механіка" цей конспект лекцій рекомендується для студентів напряму підготовки "Видавничо-поліграфічна справа" усіх форм навчання.

Модуль 1. Статика. Закони рівноваги

Тема 1. Основні поняття статики

1.1. Матеріальна точка

У статиці розглядаються наступні два основні завдання:

1) зміна даної системи сил, прикладених до твердого тіла, іншою системою сил, їй еквівалентною;

2) виведення загальних умов, за яких матеріальна точка і тверде тіло під дією прикладених до нього сил залишається в стані спокою або в стані рівномірної прямолінійної поступальної ходи, тобто виведення умов рівноваги сил, прикладених до матеріальної точки і твердого тіла.

Тому основними поняттями, з якими перш за все доводиться зустрічатися при вивченні статики, є поняття матеріальної точки, твердого тіла і сили.

Під матеріальною точкою в теоретичній механіці розуміють всяке тіло, розміри якого по всіх напрямах вельми малі, так що відмінністю в русі окремих точок цього тіла можна нехтувати.

Якщо тверде тіло кінцевих розмірів має поступальний рух, то всі його точки рухаються однаково (вони описують однакові траєкторії, мають чисельно рівні й однаково направлені швидкості). Прикладом такої поступальної ходи твердого тіла може служити прямолінійний рух кузова залізничного вагону. Щоб визначити в цьому випадку рух твердого тіла, достатньо, як побачимо в динаміці, знайти рух однієї його точки – центру тяжіння тіла, припускаючи при цьому, що вся маса сконцентрована в цій точці. Тому в динаміці у разі поступальної ходи твердого тіла ми можемо розглядати це тіло як матеріальну точку, що співпадає з його центром тяжіння і масу, що дорівнює масі цього тіла.

1.2. Абсолютно тверде тіло

У статиці тверде тіло розглядається як абсолютно тверде тіло. Абсолютно твердим називається таке тіло, відстань між кожними двома точками якого залишаються завжди незмінними, абсолютно тверде тіло завжди зберігає незмінною свою геометричну форму, тобто не деформується.

Насправді, не існує абсолютно твердих тіл. У всякому твердому тілі виникають за відповідних умов ті або інші деформації.

Наприклад, сталева балка, що лежить на двох опорах, випробовує деформацію вигину під дією покладеного на неї вантажу. Якщо візьмемо металевий стрижень і прикріпимо його вертикально одним кінцем до стелі, а до іншого його кінцю підвісимо деякий вантаж, то довжина стрижня при цьому дещо збільшиться, в даному випадку матиме місце деформація розтягування.

Вибір абсолютно твердого тіла пояснюється наступними міркуваннями:

1) якщо деформації, що відбуваються в твердому тілі, невеликі, як це насправді часто і буває, то в першому наближенні ними можна нехтувати;

2) вважаючи тіла абсолютно твердими, значно спрощується дослідження дії сил на тіло і умов, за яких сили знаходяться в рівновазі.

Тільки вивчивши статику абсолютно твердого тіла, можна потім перейти (у опорі матеріалів) до розв’язання складніших задач про рівновагу тіла, що деформується.

Це спрощення виявляється достатнім для успішного вивчення статики твердого тіла. В динаміці дослідження руху навіть такої спрощеної моделі, як абсолютно тверде тіло, є і для фахівців далеко не простим завданням.

Рух окремих точок твердого тіла в загальному випадку неоднаковий (окремі точки вагонного колеса, що котиться по рейці, рухаються по різних траєкторіях з різними швидкостями).

Якщо матеріальні точки, зв'язані між собою, і рухаються у взаємозв'язку, то такі точки утворюють механічну систему матеріальних точок – систему.

Якщо при русі системи відстані між її точками залишаються постійними, то система називається незмінною.

Будь-який рух матеріальної точки абсолютно твердого тіла вивчається тільки відносно до іншого фізичного тіла, наприклад, відносно до Землі. Положення рухомого об'єкту щодо іншого фізичного тіла визначається в механіці за допомогою вибраної системи координат (прямокутних координат), яка пов'язана з фізичним тілом (із Землею).

Така система координат, пов'язана з фізичним тілом, щодо якого визначається положення рухомого об'єкту, називається в механіці системою відліку.

Система відліку, відносно до якої справедливі основні закони класичної механіки, називається інерційною системою відліку.

При вивченні механічного руху на практиці, систему відліку, пов'язану із Землею, можна вважати інерційною системою.

Тому, в статиці, розглядаючи тіло в рівновазі, тобто під дією прикладених до нього сил (тіло залишається в спокої або рухається поступально, рівномірно і прямолінійно) маємо і спокій, і рух тіла відносно вибраної інерційної системи відліку, тобто відносно Землі.

1.3. Сила

У механіці поняття сили є одним з основних. Тіла, що оточують нас, змінюють свій кінематичний стан, тобто змінюють не тільки положення в просторі, але і свою швидкість. Наприклад, тіло, що спочатку знаходилося у спокої, в певний момент приходить в рух; швидкість тіла при падінні на Землю зростає; при гальмуванні автомобіля його швидкість зменшується і перетворюється в нуль при зупинці автомобіля. Швидкість рухомого тіла змінюється не тільки за величиною, але і за напрямом. Ці зміни обумовлені механічною взаємодією матеріальних тіл.

Взаємодії матеріальних тіл, в результаті яких відбувається зміна кінематичного стану цих тіл, називаються в механіці силами. Взаємодія між Сонцем і планетами називається силою всесвітнього тяжіння. Взаємодія Землі і всякого тіла, в результаті якої рух падаючого на Землю тіла прискорюється, називається силою тяжіння. Газ при згоранні розширюючись, приводить в рух поршень циліндра двигуна, в результаті на поршень діє сила тиску газу і т.д.

У загальному випадку, два взаємодіючих матеріальних тіла (або дві взаємодіючі матеріальні точки) змінюють свої швидкості.

Знаючи зміни швидкості тіла, можна визначити силу, що діє на нього. Тому сила є величиною, що характеризує механічну взаємодію матеріальних тіл.

Поняття сили в механіці виявляється вельми плідним саме тому, що це поняття не тільки виражає механічну взаємодію тіл, але і дає міру цієї взаємодії.

Механічна взаємодія матеріальних тіл може виявлятися не тільки в зміні швидкостей цих тіл, але також і в їх деформації, тобто в зміні їх внутрішнього стану.

У теоретичній механіці фізична природа сили не грає ролі, оскільки цікавить тільки той ефект, який виявляють на дане тверде тіло або на матеріальну точку сили, що діють на них, незалежно від фізичної суті цих сил.

Дія сили на тверде тіло визначається наступними трьома чинниками: точкою прикладання, напрямом сили, числовим значенням сили (рис.1).

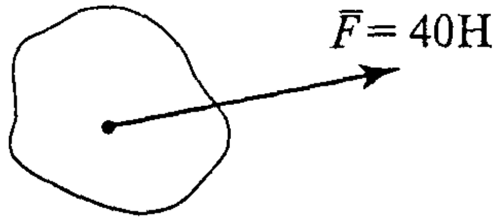


Рис. 1.1. **Вектор сили**

Точкою прикладання сили називається та матеріальна частинка (матеріальна точка) даного тіла, на яку ця сила діє (якій безпосередньо передається рух від іншого тіла).

Під напрямом даної сили розуміють напрям того руху, який отримує під дією цієї сили матеріальна точка, що спочатку знаходилася у спокої.

Пряма, вздовж якої направлена дана сила, називається лінією дії цієї сили; так, наприклад, сила тяжіння направлена по вертикалі вниз. Сила – це векторна величина.

Знайти чисельне значення даної сили – означає порівняти її з деякою силою, прийнятою за одиницю.

За одиницю сили береться 1 Н:

1 кН = 10^3 Н;

1МН = 10^6Н.

Позначення різних типів сил:

$\overline{F}$ — зовнішня сила;

F_x, F_y — проекція сили на вісь x та у відповідно;

$\overline{R}$ – реакція опори або зв'язку;

$\overline{F_\Sigma}$ — рівнодіюча сила.

Чисельне значення векторної величини називається її модулем. Векторні величини графічно зображуються у вигляді відрізків, що мають певну довжину і певний напрям, тобто у вигляді векторів. Напрям вектора указується стрілкою, що стоїть на її кінці.

Два вектори вважаються рівними, якщо вони мають рівні модулі і однаковий напрям (тобто паралельні і направлені в один бік).

Вектор позначають однією жирною буквою або двома світлими буквами (позначають початок і кінець вектора) з рискою вгорі. Модуль вектора позначають світлою буквою або тими ж двома буквами, але без риски вгорі. Наприклад, модуль вектора **F** дорівнює F або модуль вектора **AB** дорівнює AB.

1.4. Система сил

Сукупність сил, прикладених до твердого тіла, називається системою сил.

Якщо під дією даної системи сил тверде тіло залишається в спокої або рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, тобто так, що всі його точки рухаються по прямих лініях з однаковою постійною швидкістю, то такий стан тіла називається станом рівноваги, а прикладена до нього система сил називається системою, що врівноважується. Оскільки така система сил не викликає зміну швидкості тіла, то можна сказати, що системою сил, що врівноважується, називається така система, яка, за умови прикладання до абсолютно твердого тіла, що знаходиться в стані рівноваги, не порушує цього стану за умови, що всі сили, що діяли на тіло до цього, залишаються без зміни.

Якщо до тіла прикладена система сил, що врівноважується, то це означає, що ці сили знаходяться в рівновазі, або взаємно врівноважуються. Одна із сил системи, що врівноважується, називається такою, що врівноважує по відношенню до всіх інших.

1.5. Еквівалентна система сил

Коли одну систему сил, прикладених до даного твердого тіла, можна замінити іншою системою, не порушуючи при цьому його спокою або не змінюючи його руху, то такі дві системи сил називаються еквівалентними.

З цього визначення виходить, що дві системи сил, еквівалентні третій, еквівалентні між собою.

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то ця сила називається рівнодійною системою сил.

1.6. Рівнодійна сила

Рівнодійною називається сила, яка виявляє таку ж дію на тіло, як і декілька сил, разом узятих. Рівнодійна сила дорівнює геометричній сумі всіх сил, що діють на тіло:

$$\overline{F_{\Sigma}}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}\,,$$

де i = 1, 2..., n — порядковий номер сили.

1.7. Зрівноважувальна сила

Зрівноважувальною називається така сила, яка дорівнює по величині рівнодійній силі, але направлена в протилежну сторону.

Тема 2. Основні аксіоми статики

У основі вивчення рівноваги абсолютно твердих тіл лежать деякі прості положення, які є аксіомами статики. Аксіоми виражають основні факти, підтверджені досвідом, при вивченні дії сил на абсолютно тверде тіло.

2.1.Принцип інерції

Матеріальна точка знаходиться в рівновазі, якщо рівнодійна всіх сил, що діють на неї, дорівнює нулеві, тобто:

$$\overline{F_{\Sigma}}=\Sigma\overline{F_i}=0.$$

Здатність твердого тіла зберігати рух за відсутності сил, що діють, або в поступовій зміні цього руху, коли на тіло починають діяти сили, називається інерцією або інертністю.

На підставі цієї аксіоми станом рівноваги вважається такий стан, коли тіло знаходиться у спокої або рухається прямолінійно і рівномірно, тобто за інерцією.

2.2. Принцип рівності двох сил

Дві сили, що діють на одне тіло, є взаємоурівноваженими, якщо вони рівні за величиною, протилежні за напрямом і лежать на одній прямій (рис.2.1).

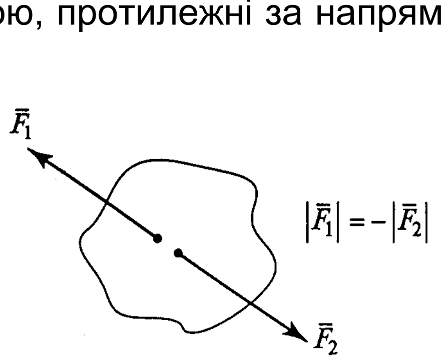


Рис. 2.1. **Рівновага двох сил**

Умова, сформульована в цій аксіомі, є необхідною для рівноваги двох сил. Це означає, що якщо система двох сил знаходиться в рівновазі, то ці сили повинні бути рівні за модулем і діяти вздовж однієї прямої в протилежні сторони.

Умови, сформульовані в цій аксіомі, є достатніми для рівноваги двох сил. Це означає, що справедливе зворотне формулювання аксіоми, а саме: якщо дві сили рівні за модулем і діють вздовж однієї прямої в протилежні сторони, то така система сил обов'язково знаходиться в рівновазі.

2.3. Принцип приєднання і виключення взаємоурівноважених сил

Механічний стан тіла не зміниться, якщо до нього приєднати або виключити взаємоурівноважену систему сил (рис. 2.2).

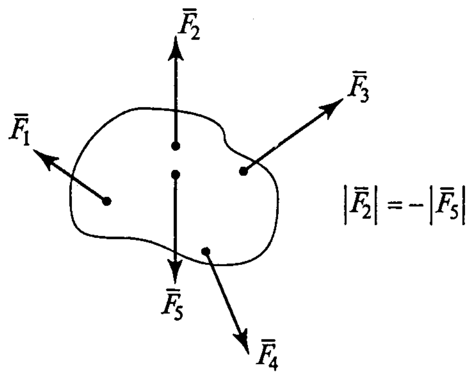


Рис. 2.2. **Взаємоурівноважена система сил**

Сенс цієї аксіоми полягає в наступному.

Хай на тіло діє система сил $\overline{F_1}, \overline{F_3}, \overline{F_4}$. Якщо прикласти до цього тіла ще дві сили $\overline{F_2}$ та $\overline{F_5}$, що врівноважуються, то отримана після цього система n+2 сил буде еквівалентна даній системі n – сил, тобто

$$(\overline{F_2}, \overline{F_5}, \overline{F_1}, \overline{F_3}, \overline{F_4}) \equiv (\overline{F_1}, \overline{F_3}, \overline{F_4}),$$

де знак $\equiv$ позначає еквівалентність сил.

Наслідок з аксіоми. Механічний стан твердого тіла не порушиться від перенесення сили уздовж лінії її дії.

Оскільки точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії дії цієї сили, вектор, що зображає дану силу, прикладену до абсолютно твердого тіла, є вектор що ковзає.

Підкреслимо, що перенесення сили уздовж лінії її дії можна здійснювати лише в тому випадку, якщо дане тіло абсолютно тверде.

2.4. Принцип паралелограма

Рівнодіюча двох сил, прикладених до тіла в одній точці і направлених одна до одної під кутом, дорівнює геометричній сумі цих сил і зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис.2.3).

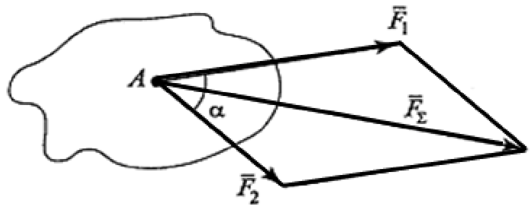


Рис.2.3. **Паралелограм сил**

$$\overline{F_{\Sigma}} = \Sigma\overline{F_i},$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\ .$$

Побудова діагоналі паралелограма, сторонами якого є задані вектори, називається векторним або геометричним складанням. Таким чином, можна сказати, що рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, дорівнює їх векторній сумі: $F_{\Sigma} = F_1 + F_2$ і прикладена в тій же точці.

Модуль і напрям рівнодійної двох сил, прикладених в одній точці, можна визначити аналітично(за теоремою косинусів).

Розглянемо окремі випадки складання двох сил:

1)$\alpha = 0$; тоді $F_{\Sigma} = F_1 + F_2$.

Рівнодійна двох сил, що діють по одній прямій в один бік, дорівнює їх сумі і направлена по тій же прямій в ту ж сторону;

2)$\alpha = 180°$, тоді $F_{\Sigma} = F_1 - F_2$.

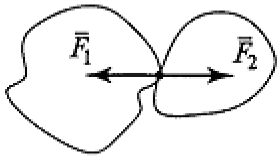
Рівнодійна двох сил, що діють по одній прямій в різні боки, дорівнює різниці цих сил і направлена по тій же прямій у бік більшої сили;

3) $\alpha = 90°$, тоді $F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

Рівнодійна двох сил, що діють під прямим кутом, дорівнює величині діагоналі прямокутника, побудованого на даних силах.

2.5. Принцип дії і протидії

Сили, з якими два тіла діють одне на одного, рівні за величиною, протилежні за напрямом і лежать на одній прямій (проте не врівноважують одне одного, оскільки прикладені до різних тіл) (рис.2.4).



$$\left|\overline{F_1}\right| = -\left|\overline{F_2}\right|$$

Рис. 2.4. **Дія і протидія двох тіл**

Коли два тіла тиснуть одне на одного, то сила тиску (дія) першого тіла на друге дорівнює за чисельним значенням і протилежна за напрямом силі тиску (протидії) другого тіла на перше.

Односторонньої дії одного тіла на інше не існує, тобто всі сили природи – сили парні.

Дія і протидія є дві сили, прикладені завжди до двох різних тіл. Тому не можна сказати, що ці дві сили врівноважуються в тому сенсі, як це говорять про дві чисельно рівні сили, прикладені до одного і того ж твердого тіла і направлені по одній прямій в протилежні сторони. Іншими словами: сила дії якого-небудь тіла на дане і сила протидії не є системою сил, оскільки вони прикладені до різних тіл.

Тема 3. Зв'язки та їх реакції

3.1. Вільне і невільне тіло

Тіло, яке може отримати будь-яке переміщення в просторі, називається вільним.

Якщо для тіла створена умова, через яку деякі переміщення для нього стають неможливими, тоді воно називається скованим. Іншими словами – його руху перешкоджають інші тіла.

3.2. Поняття зв'язку і реакції зв'язку

Зв'язками називають обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок тіла в просторі.

Сила, з якою тіло діє на зв'язок, називається силою тиску. Сила, з якою зв'язок діє на тіло, називається силою реакції або просто реакцією. Згідно аксіоми взаємодії, ці сили за модулем рівні, і діють по одній прямій в протилежні сторони. Сили реакції і тиску прикладені до різних тіл, і тому не є системою сил.

Сили, що діють на тіло, діляться на активні і реактивні. Активні сили прагнуть переміщати тіло, до якого вони прикладені, а реактивні перешкоджають цьому переміщенню. Принципова відмінність активних сил від реактивних полягає в тому, що значення реактивних сил, взагалі кажучи, залежить від значення активних сил, але не навпаки. Активні сили часто називають навантаженнями.

При розв'язанні більшості задач статики, сковане тіло умовно зображають як вільне за допомогою так званого принципу звільнення, який формулюється так: всяке сковане тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки, замінивши їх реакціями. В результаті застосування цього принципу отримуємо тіло, що вільне від зв'язків і знаходиться під дією деякої системи активних і реактивних сил.

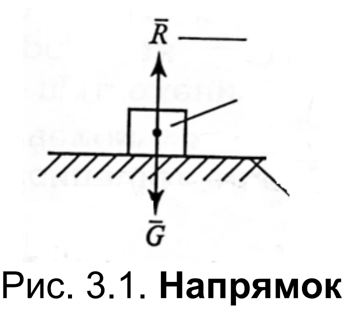
Напрям реакції визначається тим, в якому напрямі даний зв'язок перешкоджає переміщенню тіла. Правило для визначення напряму реакції можна сформулювати так: напрям реакції зв'язку протилежний напряму переміщення, що знищується даним зв'язком.

Якщо зв'язки рахувати ідеально гладкими, то у багатьох випадках можна відразу вказати напрям їх реакцій. Розглянемо напрям реакцій основних видів зв'язку, що зустрічаються в різних конструкціях.

3.3. Типи зв'язків і напрямок їхніх реакцій

Існують шість основних типів зв'язку:

1) у вигляді гладкої поверхні (поверхня столу, рівної дороги). Реакція зв'язку направлена перпендикулярно поверхні зв'язку (рис .3.1).



Реакція
Тіло
Зв'язок

Рис. 3.1. **Напрямок реакції гладкої поверхні**

Реакція зв'язку R направлена перпендикулярно опорній поверхні у бік тіла, оскільки зв'язок не дає тілу переміщатися тільки у бік опорної поверхні і перпендикулярно їй і проходить через центр тяжіння тіла. Передбачається при цьому, що вся маса тіла сконцентрована в цій точці.

2) у вигляді шорсткої поверхні. Умовно зображується похилою площиною (рис.3.2). Повна реакція зв'язку $\overline{R}$ направлена під кутом β ($\overline{R_n}$ — нормальна реакція опори).

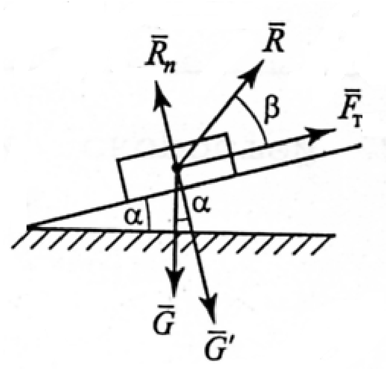


Рис. 3.2. **Напрямок реакції шорсткої поверхні**

Розглянемо тіло, лежить на шорсткій похилій площині, яка складає кут α з горизонтальною площиною. Розкладемо силу G на складові G' і F_T ,паралельну і перпендикулярну опорній площині. Модулі цих складових визначимо за наступною формулою:

$$G' = G\cos\alpha\,.$$

Складова G' врівноважується реакцією R_n похилої площини. Таким чином,

$$G' = R_n = G\cos\alpha.$$

Складова F_T прагне зрушити тіло уздовж похилої площини. Повністю або частково ця складова врівноважується силою тертя; згідно другого закону тертя ковзання, її максимальне значення дорівнює:

$$F_T = fR_n = fG\cos\alpha\,, fR = fG'\cos\alpha\,,$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання тіла по похилій площині.

Для того, щоб тіло, яке лежить на похилій площині, знаходилося в рівновазі, рушійна сила повинна за модулем дорівнювати силі тертя F_T, тобто:

$$G\sin\alpha = fG\cos\alpha$$

$$\text{або } tg\alpha = f = tg\varphi,$$

$$\text{звідки } \alpha = \varphi.$$

Якщо кут, який похила площина складає з горизонтом, дорівнює куту тертя, то тіло, що лежить на похилій площині, буде під дією власної сили тяжіння або рівномірно ковзати вниз, або знаходитися у спокої.

Для того, щоб тіло, що лежить на похилій площині, свідомо не ковзало вниз під дією власної сили тяжіння, повинна бути дотримана умова $\alpha < \varphi$.

Якщо тіло знаходиться на похилій площині, то розклавши силу тяжіння $\overline{G}$ на дві складові G' і F_T, паралельну і перпендикулярну опорній площині, можна бачити, що складова $\overline{F_T}$ утримує тіло на площині, а складова $\overline{G'}$ притискує тіло до площини і врівноважується реакцією $\overline{R_n}$.

3) у вигляді прямого жорсткого стрижня з шарнірним закріпленням кінців. Реакція стрижня направлена уздовж його осі (рис.3.3);

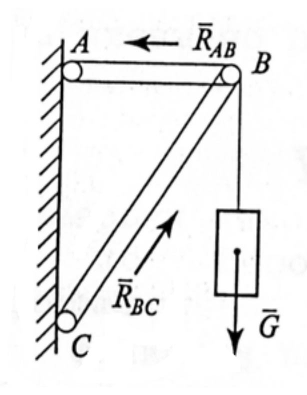


Рис. 3.3. **Напрямок реакції прямого жорсткого стрижня**

В цьому випадку реакція стрижня може бути направлена тільки по лінії ВС (АВ), тобто по прямій, що сполучає від шарнірів. У конструкціях широке розповсюдження мають зв'язки, які називають шарнірами. Шарнір є рухоме з'єднання двох тіл, що допускає тільки обертання навколо загальної осі (циліндровий шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

У разі циліндрового шарніра наперед відомо тільки, що реакція проходить через вісь шарніра і перпендикулярна цій осі, оскільки шарнірне з'єднання допускає обертання навколо осі, але не допускає будь-якого переміщення тіла, перпендикулярного цій осі.

У разі кульового шарніра відомо, що реакція проходить через центр шарніра, оскільки тіло, закріплене в кульовому шарнірі, може повертатися в будь-якому напрямі, але не може здійснювати ніяких лінійних переміщень у просторі.

4) у вигляді точкової опори. Реакція направлена перпендикулярно поверхні опори (рис.3.4).

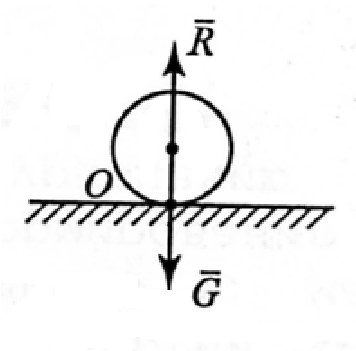


Рис. 3.4. **Напрямок реакції точкової опори**

В цьому випадку реакція $\overline{R}$ направлена по нормалі до поверхні тіла і у бік тіла (проходить через точку дотику, центр тяжіння тіла), оскільки нормаль до поверхні тіла є єдиний напрям переміщення, якого не допускають ці зв'язки. Реакція R дорівнює G і вони направлені в протилежні сторони.

5) у вигляді ребра двогранного кута. Реакція направлена перпендикулярно поверхні тіла опори (рис.3.5).

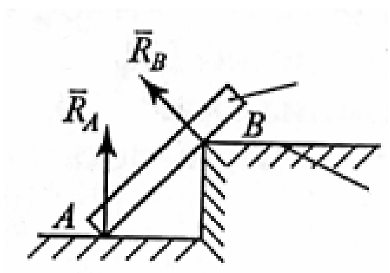


Рис.3.5. **Напрямок реакції ребра двогранного кута**

Тіло опирається на нерухому лінію (наприклад, на ребро двогранного кута). В цьому випадку, реакція опори за відсутності тертя направлена по нормалі до поверхні даного тіла $\overline{R_B}$. Реакція $\overline{R_A}$ направлена по нормалі до опорної поверхні.

6) у вигляді гнучкого зв'язку (ремінь, канат, ланцюг). Реакція направлена уздовж зв'язку. і прикладена до тіла в точці прикріплення до нього нитки і направлена уздовж цієї нитки, як показано на (рис.3.6) – $\overline{R}$.

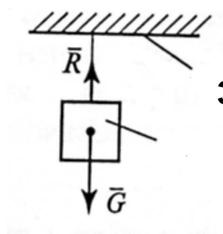


Рис.3.6. **Напрямок реакції гнучкого зв’язку**

Реакція $\overline{R}$ гнучкого зв'язку не дає тілу віддалятися від точки підвісу.

Тема 4. Системи сил і умови їх рівноваги

4.1.Плоска система сил, що сходяться. Умова рівноваги

Плоскою системою сил, що сходяться, називається система сил, лінії дії яких лежать в одній площині і перетинаються в одній точці (рис.4.1).

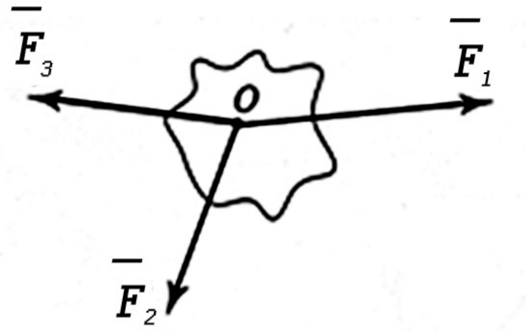


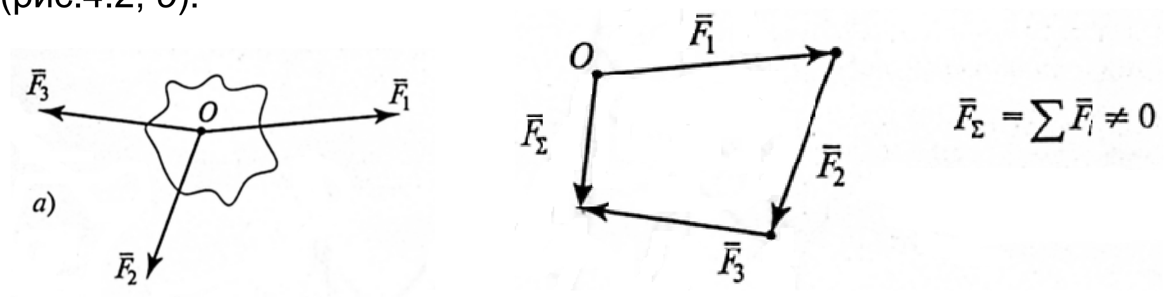
Рис.4.1**. Плоска система сил, що сходяться**

Щоб з'ясувати, чи буде дане тіло знаходитися в рівновазі під дією плоскої системи сил, що сходяться, необхідно знайти її рівнодійну силу. Якщо рівнодійна дорівнює нулеві, система знаходиться в рівновазі, якщо не дорівнює нулеві — не знаходиться в рівновазі. Існує два способи визначення рівнодійної сили плоскої системи сил, що сходяться: геометричний і аналітичний.

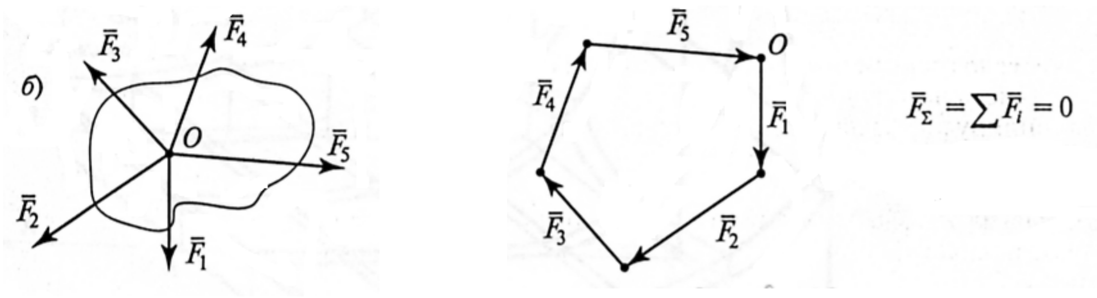
Геометричний спосіб визначення рівнодійної — побудова силового багатокутника: у довільно вибрану точку переноситься об'єкт рівноваги, в цю точку поміщається початок першого вектора, перенесеного паралельно самому собі; до кінця першого вектора переноситься початок другого вектора, до кінця другого — початок третього і т.д.

Якщо побудований силовий багатокутник виявиться незамкнутим, значить, дана система сил не знаходиться в рівновазі. У цьому випадку вектор рівнодіючої сили з'єднає початок першого вектора з кінцем останнього (рис.4.2, *а*).

Геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, полягає в замкнутості силового багатокутника, тобто при побудові силового багатокутника кінець останнього вектора співпадає з початком першого(рис.4.2, *б*).



(система не знаходиться в рівновазі)



(система знаходиться в рівновазі)

Рис. 4.2. **Силовий багатокутник**

Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої: всі сили проектуються на дві взаємно перпендикулярні осі координат, а потім знаходиться алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь x та вісь y. Якщо алгебраїчна сума проекцій всіх сил дорівнює нулеві, дана система сил знаходиться в рівновазі.

Аналітична умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться:

$$\Sigma F_{ix} = 0, \ \Sigma F_{iy} = 0.$$

Віссю координат називається довільно вибраний направлений відрізок прямої (рис. 4.3).

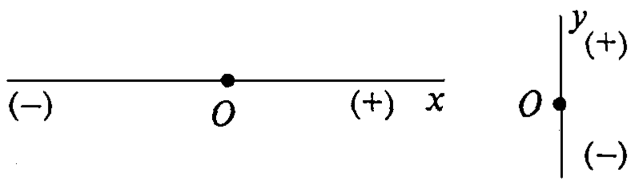
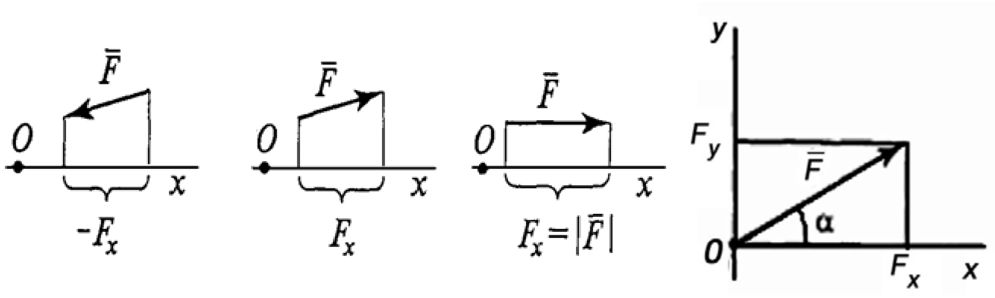


Рис. 4.3. **Осі координат**

Проекція сили на вісь координат — відрізок осі, що відсікається перпендикулярами, опущеними з початку і кінця вектора (рис. 4.4).



$$F_X = \overline{F}\cos\alpha,$$
$$F_Y = \overline{F}\sin\alpha.$$

Рис.4.4. **Проекції сили на осі координат**

4.2. Момент сили щодо точки. Плоска система пар сил. Умова рівноваги

Якщо на тіло, закріплене в деякій точці *A,* діє сила $\overline{F}$, то тіло обернеться щодо цієї точки. Обертальний рух тіла характеризується обертальним моментом М.

Моментом сили $\overline{F}$ щодо точки *A* називається величина, яка чисельно дорівнює добутку сили на плече (рис. 4.5):

$$M_A(\overline{F}) = \overline{F}l$$

де *l* — плече (перпендикуляр, опущений з точки на лінію дії сили).

За одиницю обертального моменту, береться 1 Н*м: 1 кН*м=10^3 Нм.

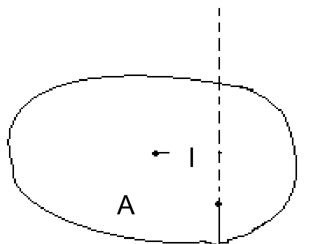


Рис. 4.5. **Обертальний момент відносно точки А**

Парою сил називається система двох сил, рівних за величиною, протилежних за напрямом і таких, що не лежать на одній прямій (рис. 4.6).

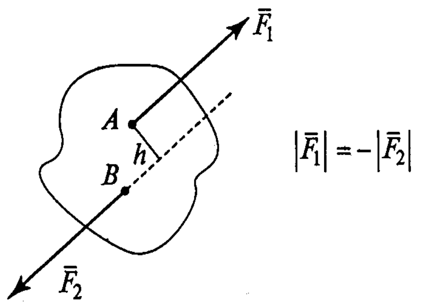


Рис. 4.6**. Пара сил**

Пара сил чинить на тіло дію, що обертає, яка характеризується обертаючим моментом М.

Момент пари сил, що обертає, дорівнює добутку однієї з сил пари на плече:

$$M = \overline{F_1}h$$

де h — плече пари сил (перпендикуляр, відновлений між лініями дії сил).

Пара сил на схемах зображується дугоподібною стрілкою (рис. 4.7.).

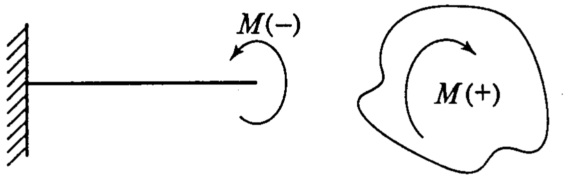
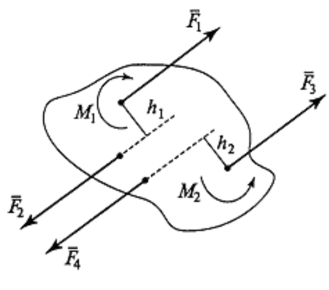


Рис. 4.7. **Зображення на схемах пари сил**

Пару сил не можна замінити однією рівнодіючою силою. Пара сил не має проекцій на осі координат. Якщо на тіло діє декілька пар сил, то їх можна замінити однією рівнодійною парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар сил, що діють на тіло (рис. 4.8):



$$M_{\Sigma} = \Sigma M_i$$

$$M_{\Sigma} = M_1 - M_2 = \overline{F_1}h_1 - \overline{F_3}h_2$$

Рис. 4.8. **Рівнодійна пар сил, діючих на площині**

Дві пари сил називаються еквівалентними, якщо вони надають тілу однакову дію. У еквівалентних пар сил моменти, що обертають, повинні бути однакові як за величиною, так і за напрямом.

Умова рівноваги плоскої системи пар сил: алгебраїчна сума моментів складових пар сил повинна дорівнювати нулеві, тобто

$$\Sigma M_i = 0$$

4.3. Плоска система довільно розташованих сил. Умова рівноваги

Приведення сили до даної точки полягає в тому, що дану силу $\overline{F}$ переносять паралельно самій собі в довільно вибрану точку *O.*

Для того, щоб механічний стан тіла не змінився, силу $\overline{F}'$ врівноважують силою $\overline{F''}$ (рис. 4.9).

В результаті приведення сили $\overline{F}$ до точки *O* вийшла система сил, що складається з сили $\overline{F}'$, яка дорівнює і паралельна даній силі $\overline{F}$, і пари сил ($\overline{F}$ *і* $\overline{F''}$), момент якої дорівнює моменту даної сили $\overline{F}$ щодо точки *O:*

$$M = M_O(\overline{F})$$

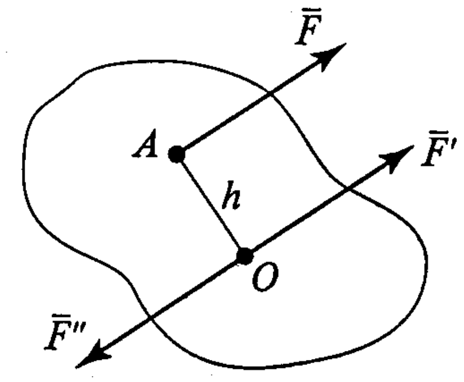


Рис. 4.9. **Перенос сили в будь-яку точку**

Плоскою системою довільно розташованих сил називається система сил, лінії дій яких лежать в одній площині, але не перетинаються в одній точці (рис. 4.10).

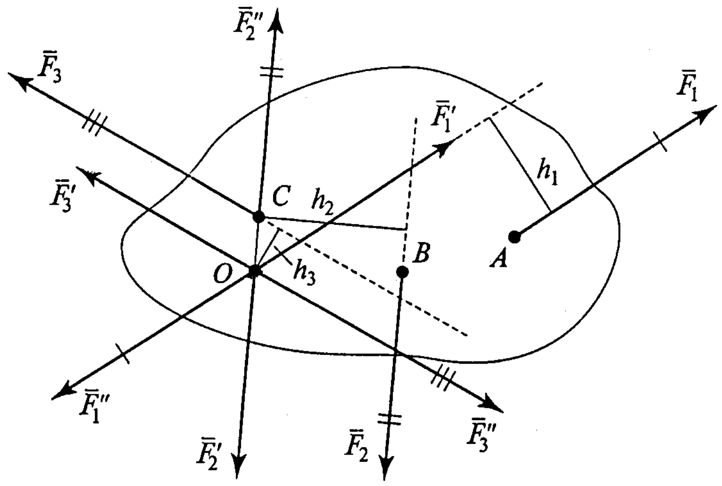


Рис. 4.10. **Плоска система довільно розташованих сил**

Для того, щоб привести дану систему довільно розташованих сил до довільно вибраної точки *O* (див. рис. 4.10), необхідно:

1) перенести по черзі кожну силу в цю точку;

2) врівноважити сили ($\overline{F_1}'$, $\overline{F_2}'$, $\overline{F_3}'$) силами $\left(\overline{F_1}'', \overline{F_2}'', \overline{F_3}''\right)$.

В результаті приведення сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)$ які рівні і паралельні даним силам до точки О отримали нову систему сил, що є плоскою системою сил, яка сходиться, тобто

$$\overline{F_1} = \overline{F_1}', \ \overline{F_2} = \overline{F_2}', \ \overline{F_3} = \overline{F_3}'. \tag{1.1}$$

Цю знов отриману систему сил, що сходяться (1.1), замінюємо рівнодійною силою, яка дорівнює геометричній сумі даних сил і називається головним вектором системи:

$$\overline{F_{гл}} = \overline{F_\Sigma} = \Sigma\overline{F_i}.$$

В результаті приведення отримали ще одну систему пар сил

$$\begin{cases} \overline{F_1}, \overline{F_1}'', \\ \overline{F_2}, \overline{F_2}'', \\ \overline{F_3}, \overline{F_3}'', \end{cases} \tag{1.2}$$

моменти яких дорівнюють моментам даних сил щодо точки *O,* тобто

$$\begin{cases} M_1 = M_0\left(\overline{F_1}\right), \\ M_2 = M_0\left(\overline{F_2}\right), \\ M_3 = M_0\left(\overline{F_3}\right). \end{cases}$$

Знов отриману систему пар сил (1.2) замінимо однією рівнодійною парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар сил і називається головним моментом системи:

$$M_{гол} = \Sigma M_0\left(\overline{F_i}\right).$$

Таким чином, для того, щоб тіло під дією плоскої системи довільно розташованих сил знаходилося в рівновазі, необхідно, щоб головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулеві:

$$\overline{F_{гол}} = \overline{F_\Sigma} = \Sigma \overline{F_i} = 0,$$
$$M_{гол} = \Sigma M_0(\overline{F_i}) = 0.$$

Виразивши головний вектор знов отриманої системи сил, що сходилися, в аналітичній формі, отримаємо два рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{ix} = \Sigma F_{iy} = 0.$$

Головний момент системи замінимо алгебраїчною сумою моментів даних сил щодо точки приведення:

$$\Sigma M_0(\overline{F_i}) = 0.$$

Таким чином, отримуємо умову рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил: алгебраїчна сума проекцій всіх сил на осі x і y повинна дорівнювати нулеві і алгебраїчна сума моментів усіх сил щодо точки приведення повинна дорівнювати нулеві, тобто

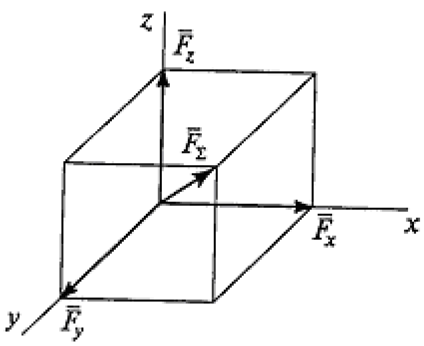
$$\Sigma F_{ix} = 0,\quad \Sigma F_{iy} = 0,\quad \Sigma M_0(\overline{F_i}) = 0$$
– перша (основна) форма рівняння рівноваги;

$$\Sigma F_{ix} = 0,\quad \Sigma M_A(\overline{F_i}) = 0,\quad \Sigma M_B(\overline{F_i}) = 0$$
– друга форма;

$$\Sigma M_A(\overline{F_i}) = 0,\quad \Sigma M_B(\overline{F_i}) = 0,\quad \Sigma M_C(\overline{F_i}) = 0$$
– третя форма.

4.4. Просторова система сил

Просторовою системою сил, що сходяться, називається система сил, лінії дії яких не лежать в одній площині, але перетинаються в одній точці. Рівнодіюча такої системи сил зображається діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 4.11).



$$\overline{F_\Sigma} = \Sigma \overline{F_i}$$

Рис. 4.11. **Рівнодійна просторової системи сил, що сходяться**

Умова рівноваги просторової системи сил, що сходяться: алгебраїчна сума проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні осі координат повинні дорівнювати нулеві, тобто

$$\Sigma F_{ix} = 0,$$
$$\Sigma F_{iy} = 0,$$
$$\Sigma F_{iz} = 0.$$

Для того, щоб знайти момент сили $\overline{F}$ щодо осі *z,* треба спроектувати силу $\overline{F}$ на площину Н, перпендикулярну осі *z* (рис. 4.12), потім знайти момент проекції F_H щодо точки *O,* яка є точкою перетину площини *H з* віссю *z.* Момент проекції $\overline{F}$ і буде моментом сили $\overline{F}$ щодо осі *z:*

$$M_z(\overline{F}) = M_0(\overline{F_H}) = \overline{F_H}l$$

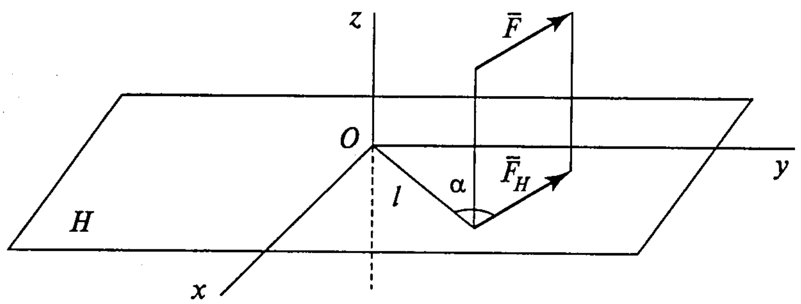
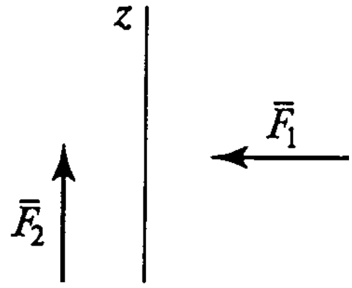


Рис. 4.12. **Момент сили відносно осі**

Моменти сил, перпендикулярних або паралельних осі *z,* будуть дорівнювати нулеві (рис. 4.13).



$$M_z(\overline{F_1}) = 0$$
$$M_z(\overline{F_2}) = 0$$

Рис. 4.13. **Моменти сил відносно осі дорівнюють нулеві**

Просторовою системою довільно розташованих сил називається система сил, лінії дії яких не лежать в одній площині і не перетинаються в одній точці.

Рівнодійна такої системи сил також дорівнює геометричній сумі цих сил, але зображається діагоналлю складних об'ємних фігур (тетраедр, октаедр і т.д.).

Умова рівноваги просторової системи довільно розташованих сил: алгебраїчна сума проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні осі координат повинна дорівнювати нулеві і алгебраїчна сума моментів всіх сил щодо тих же осей координат повинна дорівнювати нулеві, тобто

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad \sum M_x(\overline{F_i}) = 0,$$
$$\sum F_{iy} = 0, \qquad \sum M_y(\overline{F_i}) = 0,$$
$$\sum F_{iz} = 0, \qquad \sum M_z(\overline{F_i}) = 0.$$

4.5. Тертя

Тертям називається опір руху тіла. Сила, з якою тіло чинить опір руху, називається силою тертя.

Сила тертя завжди направлена убік, протилежний руху. Сила тертя залежить від матеріалу тіл, що труться, чистоти обробки і наявності мастила і не залежить від величини поверхонь, що труться.

Тертя буває: сухе, напіврідинне, рідинне.

Розрізняють тертя спокою, руху, ковзання і кочення. Сила тертя спокою більша, ніж сила тертя руху.

Сила тертя дорівнює добутку сили нормального тиску на коефіцієнт тертя ковзання (рис. 4.14):

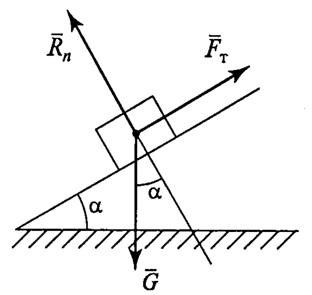


Рис. 4.14. **Напрямок сили тертя**

$F_T = R_n f,$

де $Rn = mg \cos\alpha$ — сила нормального тиску;

f — коефіцієнт тертя ковзання.

Коефіцієнтом тертя ковзання називається відношення сили тертя до сили нормального тиску:

$$f = \overline{F_T} \,/\, \overline{R_n}\,.$$

Матеріали, що володіють дуже малим тертям, називаються антифрикційними (бабіт, бронза, графіт). Застосовуються для виготовлення підшипників і т.ін.

Матеріали, що володіють великим тертям, називаються фрикційними (спеціальні пластмаси із застосуванням азбесту і міді). Застосовуються для накладок гальмівних колодок, для накладок дисків зчеплення.

При змащуванні поверхні ковзання тіло починає рухатися з меншим тертям.

Розкладемо силу ваги на складові G' і G" (рис. 4.15):

$G' = G \cos a = R_n$

$G'' = G \sin a = F_T$

Коефіцієнт тертя ковзання

$$f = \frac{F_T}{R_n} = \frac{G''}{G'} = \frac{G\sin\alpha}{G\cos\alpha} = tg\alpha\,.$$

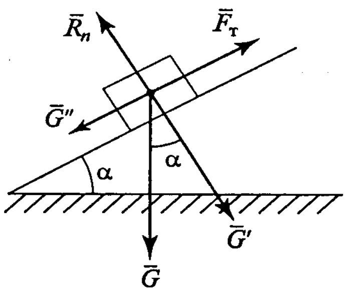


Рис. 4.15. **До виведення коефіцієнта тертя ковзання через силу ваги**

Тертя кочення викликане деформацією поверхні кочення. Поверхня, по якій котиться каток, деформується на величину δ (рис. 4.16). Деформується і саме тіло, що котиться (наприклад, колесо автомобіля).

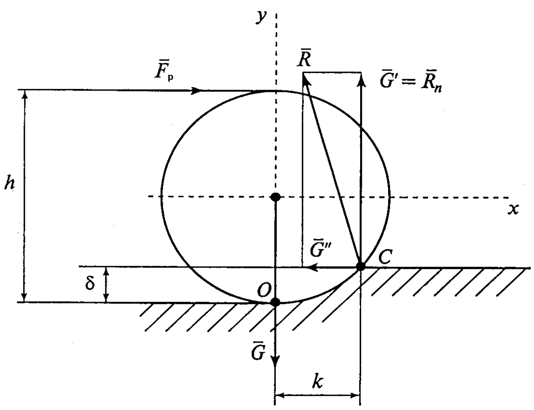


Рис. 4.16. **Тертя кочення**

Складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma M_0(\overline{F_i}) = 0$$

$$F_p h \quad R_n k = 0,$$

де h — відстань від поверхні до лінії дії сили;

$к$ – коефіцієнт тертя кочення. Він дорівнює відрізку OC (див. рис. 4.16).

Оскільки

$$F_p = F_T,$$

то

$$F_T = R_n k / h.$$

Якщо $h = d,$

$$F_T = R_n k / d$$

Якщо $h = r,$

$$F_T = R_n k / r = 2R_n k / d.$$

Тема 5. Балкові опори і їхні реакції

5.1. Поняття балки

У розрахункових схемах завдань теоретичної механіки присутні елементи різних конструкцій, званих брусами.

Брусом прийнято вважати тверде тіло, у якого довжина значно більша поперечних розмірів.

Безліч (геометричне місце) центрів тяжіння всіх поперечних перетинів називається віссю бруса.

Брус з прямолінійною віссю, що покладений на опори і згинається прикладеними до нього навантаженнями, називається балкою.

При зображенні балки на кресленні прийнято показувати тільки її вісь. Всі навантаження в цьому випадку приводяться до осі балки і діють у площині креслення.

При розрахунку балок на міцність при вигині враховують не тільки зовнішні (активні) навантаження, але й реакції опор балок.

5.2. Типи балкових опор

Існує три типи балкових опор: шарнірно-рухома опора, шарнірно-нерухома опора і жорстке закладання (затискання).

Шарнір є рухомим з'єднанням двох тіл, що допускає обертання тільки навколо загальної осі (циліндровий шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

У циліндровому шарнірі наперед відомо тільки, що реакція проходить через вісь шарніра і перпендикулярна цій осі, оскільки шарнірне з'єднання допускає обертання навколо осі, але не допускає будь-якого переміщення тіла, перпендикулярного цій осі.

У кульовому шарнірі наперед відомо тільки, що реакція проходить через центр шарніра, оскільки тіло, закріплене в кульовому шарнірі, може повертатися в будь-якому напрямі, але не може здійснювати ніяких лінійних переміщень у просторі.

Кульовий і циліндровий шарніри використовуються в шарнірно-рухомій опорі, шарнірно-нерухомій опорі.

Розглянемо балкові опори.

1.Схематично шарнірно-рухома опора зображена на рис. 5.1. Шарнірно-рухома опора також дає балці безперешкодно змінювати свою довжину при зміні температури, і тим самим усуває можливість появи температурної напруги.

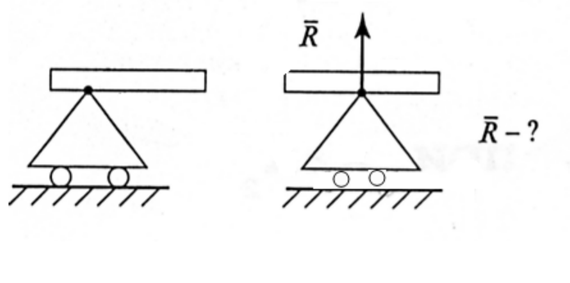
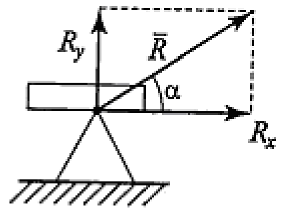


Рис.5.1. **Шарнірно-рухома опора**

2. Схематичне зображення шарнірно-нерухомої опори показане на рис. 5.2. При цьому опорний шарнір повинен бути розташований на рівні

осі балки. Якщо ж ця умова не виконується, то при проведенні розрахунків можна отримати значну погрішність. Це пов'язано з подовженням або укороченням волокон балки при вигині, чому перешкоджає шарнірно-нерухома опора.

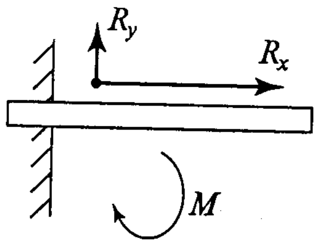


R_x - ?
R_y - ?
α - ?

Рис.5.2. **Шарнірно-нерухома опора**

3. З жорстким затисканням, або закладанням (рис. 5.3). Не дозволяє балці ні повертатися, ні переміщатися. Про реакцію цієї опори нічого не відомо. Тому для цієї опори необхідно знайти три складові реакції: *Rx, Ry, M.*

Жорстке закладання може бути отримане з шарнірно-нерухомої опори шляхом знищення шарніра.



R_x - ?
R_y - ?
M - ?

Рис.5.3. **Опора з жорстким закладанням**

Знищуючи шарнір, здійснюється перешкода обертанню кінцевого перетину балки – вводимо нову реакцію, яка повинна перешкодити цьому обертанню. Такою реакцією може бути тільки пара сил. Тому затиснений кінець балки дає три невідомі реакції.

Балка з одним закладеним кінцем називається консольною балкою, або простою консоллю (частина балки звішується за опору). Схематично жорстке закладання показане на рис.5.3. Всі реакції і момент вважаються прикладеними в точці А – центрі тяжіння опорного перетину.

Для визначення невідомих реакцій використовують рівняння статики, яке виражає умову, що балка в цілому при дії всіх сил і реакцій, прикладених до неї, знаходиться в рівновазі. Оскільки всі сили лежать в одній площині, то рівнянь рівноваги для них можна написати три. Тому завдання визначення реакцій з умов статики вирішується за наявності лише трьох невідомих реакцій. Такі балки називаються статично визначеними.

Якщо число невідомих реакцій більше, ніж число рівнянь статики, можливих для даного завдання, то балки називаються статично невизначеними. Для визначення реакцій в таких балках складають додаткові рівняння – рівняння деформацій (переміщень).

На рис.5.4. зображена схема двохопорної (однопролітної) балки. Балка опирається на шарнірно-рухому опору С, шарнірно-нерухому опору А. Балка навантажена так, як графічно зображені зовнішні навантаження. Балка є статично визначена.

Зовнішні навантаження, прикладені до балки, можуть бути трьох видів.

1) Сконцентровані сили – навантаження $\overline{F}$ (рис.5.4), прикладені в певних перетинах балки (умовно прикладені в точці). Насправді вони прикладені до майданчика, розмірами якого нехтують.

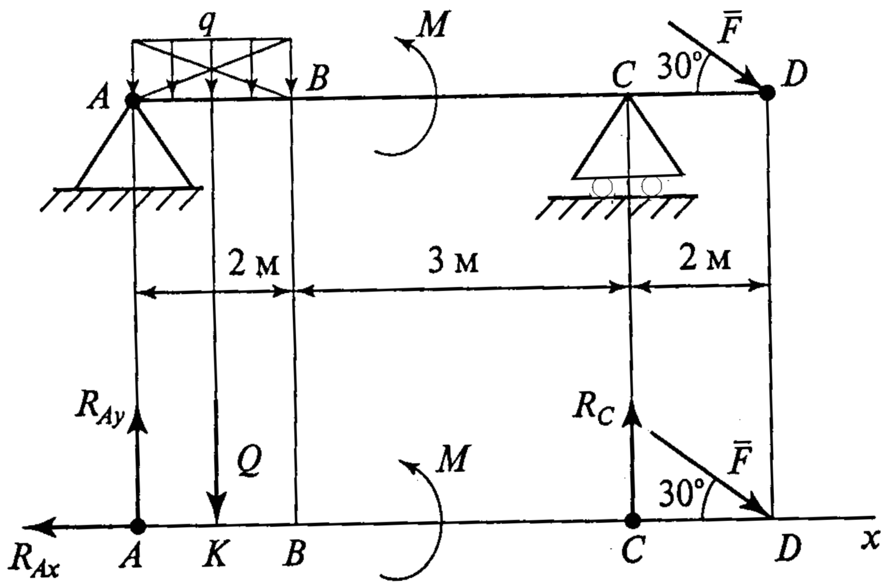


Рис.5.4. **Схема навантаження двохопорної балки**

2) В практиці зустрічаються сили, прикладені за об'ємом або поверхні тіла, наприклад сила тяжіння, тиск вітру або води і т.п. Такі сили називаються розподіленими.

Плоска система розподілених сил характеризується її інтенсивністю, що зазвичай позначається q. Інтенсивність є сила, що припадає на одиницю довжини навантаженої ділянки. Інтенсивність в СІ виражається в $H/м$.

Розподілене навантаження, що має постійну інтенсивність, називається рівномірно розподіленим (рис.5.4 – ділянка АВ).

При розв'язанні задач статики розподілене навантаження замінюють її рівнодіючою. Модуль рівнодіючого рівномірно розподіленого навантаження дорівнює: $Q = q \times AB$.

Прикладена рівнодійна Q в центрі тяжіння перетину рівномірно розподіленого навантаження.

3) Моментні навантаження М, що діють тоді, коли деякі або всі прикладені сили приводяться до пари, що діє в площині вигину балки – ділянку ВС (рис.5.4).

Момент, що діє, не входить до рівняння проекцій сил на осі, а в рівняння моментів включається безпосередньо своєю величиною і знаком без введення якого-небудь плеча або розкладання на пару сил.

При розрахунку балок на вигин вісь х направлятимемо по осі балки зліва направо, вісь у – вгору. При плоскому вигині прикладене навантаження діятиме в площині хОу.

Після вище викладеного розглянемо завдання 1.

Завдання 1. Визначити реакції двохопорної балки, навантаженої так, як показано на рис. 5.4.

Дано:
q=4 кН/м
M=12 кН м
F=10 кН

Визначити
R_{Ax} , R_C , R_{Ay}

Розв'язок. 1. Будуємо розрахунково-графічну схему, тобто під балкою проводимо пряму, паралельну її осі, і до цієї прямої переносимо всі навантаження, що діють, а замість опор зображуємо їх реакції.

На ділянці *AB* діє рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю *q.* При розв’язанні це навантаження замінимо рівнодіючою силою *Q.*

$$Q=qAB=4*2=8 \text{ кН}.$$

2. Проводимо осі координат: вісь *x* уздовж осі балки, вісь *y* перпендикулярно їй.

3. Складаємо три рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{ix} = 0,$$
$$\Sigma F_{iy} = 0,$$
$$\Sigma M_0(\overline{F_i}) = 0$$

(треба запам'ятати, що для двохопорної балки спочатку складають рівняння моменту, причому щодо тієї або іншої точки, де прикладені невідомі реакції).

4. Розв’язуємо рівняння рівноваги щодо невідомих реакцій опор балки:

1) $\Sigma M_A(\overline{F_i}) = 0.$

$$QAK - M - R_C AC + F(AD\sin 30^\circ) = 0.$$
$$R_C = [QAK - M + F(AD\sin 30^\circ)]/AC.$$
$$R_C = [8x1 - 12 + 10(7x0.5)]/5 = 6{,}2кН.$$

2) $\Sigma F_{iy} = 0.$

$$R_{Ay} - Q + R_C - F\sin 30^\circ = 0.$$
$$R_{Ay} = Q - R_C + F\sin 30^\circ.$$
$$R_{Ay} = 8 - 6.2 + 10x0.5 = 6.87кН.$$

3) $\Sigma F_{ix} = 0.$

$$-R_{Ax} + F\cos 30^0 = 0.$$
$$R_{Ax} = F\cos 30^0.$$
$$R_{Ax} = 10 * 0.87 = 8.7кН.$$

Перевірка. Складемо ще одне рівняння рівноваги, яке не використовувалось при розв'язанні задачі:

$$\Sigma M_D(\overline{F_i}) = 0$$

$$R_{Ay}AD - QKD - M + R_C CD = 0$$

6,87 – 8 * 6 – 12 + 6,2 * 2 = 47,6 – 48 – 12 + 12,4 = 0.

Відповідь: R_c = 6,2 кН; R_{Ay} = 6,8 кН; R_{Ax}= 8,7 кН.

Тема 6. Центри ваги

6.1. Поняття сили ваги і центра ваги

Система сил, лінії дії яких паралельні і лежать в одній площині, називається плоскою системою паралельних сил.

З фізики відомо (рис.6.1), що: дві паралельні сили, направлені в один бік, еквівалентні рівнодіючій, яка дорівнює сумі цих сил, паралельна їм і направлена в той же бік; лінія дії рівнодіючої ділить відрізок, що сполучає точки прикладання даних сил, на частини, обернено пропорційні цим силам: $F_\Sigma = F_1 + F_2$, $F_1/F_2 = BC/AC$.

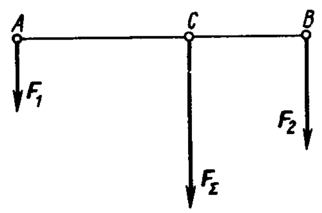


Рис.6.1.**Плоска система паралельних сил**

Застосовуючи похідну пропорцію, можна записати:

$$F_1/BC = F_2/AC = (F_1 + F_2)/(BC + AC),$$

тоді
$$F_1/BC = F_2/AC = F_\Sigma/AB.$$

Розкладення сили на дві паралельні складові проводиться за допомогою формул складання двох паралельних сил.

Розглянемо тверде тіло, навантажене системою паралельних сил

$\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}, \overline{F_4}$ що діють в точках A_1, A_2, A_3, A_4 і приводяться до однієї рівнодіючої $\overline{R}$, прикладеної в точці С (рис. 6.2.)

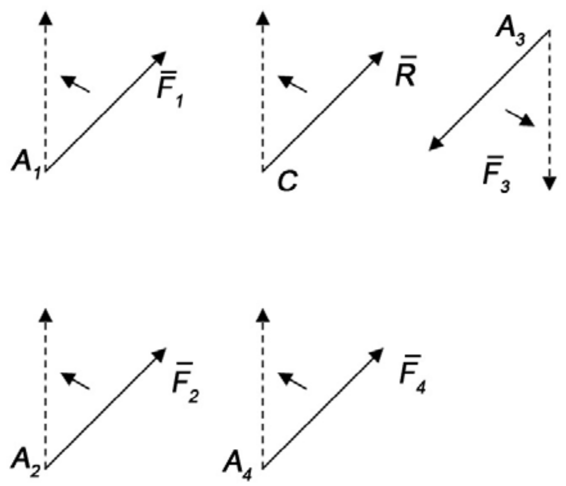


Рис. 6.2. **Центр паралельних сил**

Якщо повернути всі сили системи $\overline{F}$ навколо їх точок прикладання на один і той же для всіх сил системи довільний кут в один і той же бік, то і рівнодіюча обернеться на той же кут в той же бік, зберігаючи також свою точку додатку С.

Ця точка називається центром паралельних сил. Отже, центром паралельних сил називається точка на лінії дії рівнодіючої, яка не міняє свого положення при повороті всіх сил на один і той же кут.

Для визначення положення центра паралельних сил С, знаходять його координати (рис. 6.3).

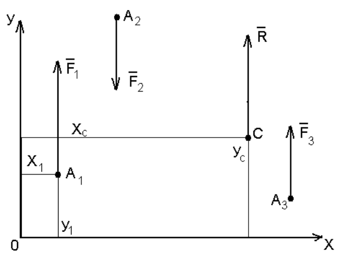


Рис. 6.3. **Координати центра паралельних сил**

Наприклад, є плоска система трьох паралельних сил: $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}$, направлених в один бік, прикладених в точках $A_3(x_3, y_3)$. Повернемо сили в положення, паралельне осі у. Оскільки рівнодіюча цих паралельних сил дорівнює алгебраїчній сумі, то отримаємо: $R = \sum F$ або $R = F_1 + F_2 + F_3$.

Запишемо моменти сил системи щодо осі у. Згідно теореми Варіньона:

$$M(\overline{R}) = \sum M(\overline{F})$$

або
$$R_{x_c} = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 = \sum F_x,$$

звідки
$$x_c = \frac{\sum F_x}{\sum F}.$$

Повернувши всі сили так, щоб вони виявилися паралельними осі х, на підставі аналогічних міркувань отримаємо:

$$y_c = \frac{\sum F_y}{\sum F}.$$

x_C і y_C виражають координати центра паралельних сил.

Елементарною частинкою тіла називається така мала частинка, положення якої в просторі визначається координатами однієї точки. Розглянемо тіло, що складається з великої кількості елементарних частинок.

Сили тяжіння кожної частинки, направлені до центра землі, утворюють систему сил, що сходяться, але не для тіл, розміри яких малі в порівнянні з розмірами Землі, з достатнім ступенем точності можна вважати ці сили системою паралельних сил.

Центром тяжіння тіла називається центр паралельних сил тяжіння всіх елементарних частинок тіла.

Центр тяжіння є геометрична точка (рис. 6.4), яка може лежати поза тілом (наприклад, кільце, циліндр з отвором).

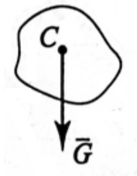


Рис.6.4. **Центр ваги тіла**

Координати центра тяжіння тіла знаходять за тими ж формулами, що й координати центра паралельних сил, а саме:

$$x_c = \sum(G_i x_i)/\sum G_i\,;\ y_c = \sum(G_i y_i)/\sum G_i\,; z_c = \sum(G_i z_i)/\sum G_i\,,$$

де G_i – сила тяжіння кожної елементарної частинки тіла;

x_i, y_i, z_i – координати частинки;

$\sum G_i$ – сила тяжіння всього тіла.

У разі однорідних тіл за такими ж формулами можна визначати координати центра тяжіння об'ємів, площ і ліній. Наприклад, для абсциси x_C отримаємо наступні формули:

1) сила тяжіння елементарної частинки, виражена через її об'єм V_i, дорівнює $G_i = \gamma V_i$, де γ – питома сила тяжіння (для однорідного тіла – величина постійна). Тоді $x_c = \sum(G_i x_i)/\sum G_i = \gamma\sum(V_i x_i)/(\gamma\sum V_i)$, отже, для об'єму $x_c = \sum(V_i x_i)/\sum V_i$;

2) якщо тіло є однорідною пластинкою товщиною h, то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через площу A_i, дорівнює $G_i = \gamma h A_i$; тоді $x_c = \sum(G_i x_i)/\sum G\ = \gamma h\sum(A_i x_i)/(\gamma h\sum A_i)$, отже, для площі $x_c = \sum(A_i x_i)/\sum A_i$;

3) якщо тіло є однорідним дротом постійного поперечного перетину А, то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через довжину l_i, дорівнює $G_i = \gamma A l_i$,тоді $x_c = \sum(G_i x_i)/\sum G_i = \gamma A\sum(l_i x_i)/(\gamma A\sum l_i)$, отже, для лінії $x_c = \sum(l\ \ x_i)/\sum l_i$.

6.2. Формули для визначення центра ваги простих геометричних фігур, складних перетинів і фігур прокатних профілів

Розглянемо три методи знаходження центра тяжіння: метод симетрії, метод розбиття і метод негативних мас.

Метод симетрії. Уявимо собі однорідне тіло, яке має площину симетрії. Виберемо таку систему координат, щоб осі x і z лежали в площині симетрії (рис. 6.5.).

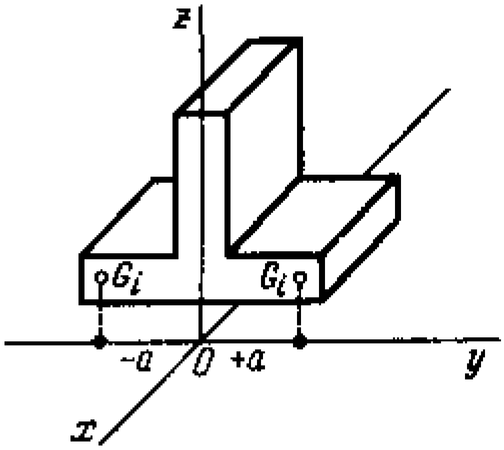


Рис. 6.5. **Знаходження центра тяжіння симетричної фігури**

У цьому випадку кожна елементарна частинка силою тяжіння G_i з абсцисою $y_i = -a$, тоді $y_c = \sum(G_i y_i)/\sum G_i = 0$.

Звідси випливає висновок: якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр тяжіння тіла лежить в цій площині.

Аналогічно можна довести і наступні положення:

1) якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр тяжіння тіла лежить на цій осі;

2) якщо однорідне тіло має дві осі симетрії, то центр тяжіння знаходиться в точці їх перетину;

3) центр тяжіння однорідного тіла обертання лежить на осі обертання.

Метод розбиття. Цей метод полягає в тому, що тіло розбивають на найменше число частин, сили тяжіння та положення центрів тяжіння, які відомі, після чого застосовують виведені раніше формули.

Припустимо, що ми розбили тіло силою тяжіння G на три частини G', G'', G''' , абсциси центрів тяжіння цих частин x'_c, x''_c, x'''_c відомі. Візьмемо формулу для визначення абсциси центра тяжіння всього тіла $x_c = \sum(G_i x_i)/\sum G_i$ і перепишемо її в наступному вигляді: $x_c \sum G_i = \sum(G_i x_i)$ або $Gx_c = \sum(G_i x_i)$.

Останню рівність запишемо для кожної з трьох частин тіла окремо: $G'x'_c = \sum(G'_i x'_i)$; $G''x''_c = \sum(G''_i x''_i)$; $G'''x'''_c = \sum(G'''_i x'''_i)$.

Склавши праві і ліві частини цих трьох рівностей, отримаємо $G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c = \sum(G'_i x'_i) + \sum(G''_i x''_i) + \sum(G'''_i x'''_i) = \sum(G_i x_i)$.

Але права частина останньої рівності є добутком Gx_c, оскільки

$$Gx_c = \sum\left(G_i x_i\right),$$

отже, $x_c = (G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c)/G$, що і потрібно було довести.

Аналогічно

$$y_c = (G'y'_c + G''y''_c + G'''y'''_c)/G;\ z_c = (G'z'_c + G''z''_c + G'''z'''_c)/G.$$

Отримані формули аналогічні формулам для визначення координат центрів тяжіння. Тому в початкові формули можна підставляти не сили тяжіння елементарних частинок G_i, а сили тяжіння кінцевих частин; під координатами x_i, y_i, z_i розуміють координати центрів тяжіння частин, на які тіло розбите.

Метод негативних мас. Цей метод полягає в тому, що тіло, що має вільні порожнини, котрі вважають суцільними, а масу вільних порожнин вважають негативною. Вигляд формул для визначення координат центра тяжіння тіла при цьому не міняється.

Таким чином, при визначенні центра тяжіння тіла, що має вільні порожнини, слід застосовувати метод розбиття, але вважати масу вільних порожнин негативною.

Сила ваги — це сила, з якою тіло притягується до землі.

Центр ваги — це точка прикладання сили тяжіння (рис.6.6).

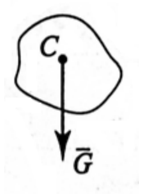


Рис. 6.6. **Центр ваги тіла**

Положення центра ваги простих геометричних фігур:

1) у прямокутнику, квадраті, ромбі, паралелограмі — на перетині діагоналей (рис. 6.7);

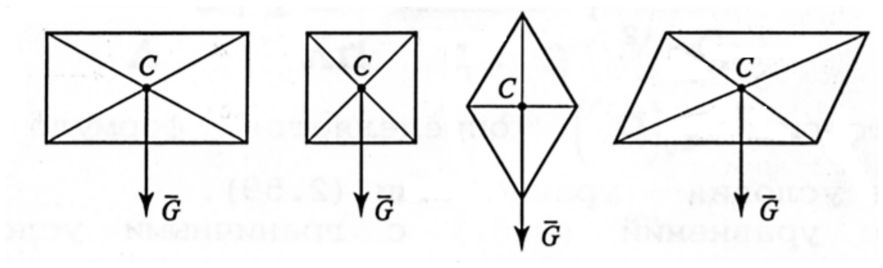


Рис. 6.7. **Центр ваги простих геометричних фігур**

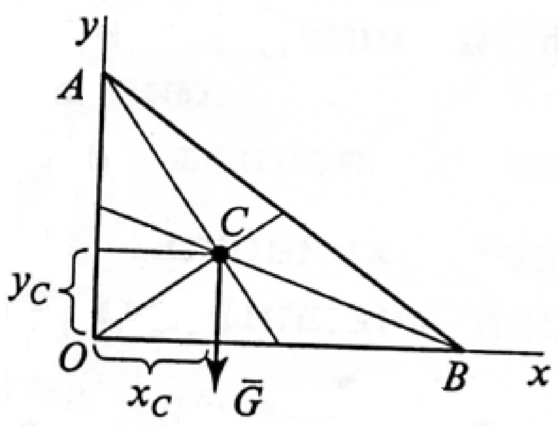
2) у трикутнику— на перетині медіан (рис. 6.7):

$x_c = \frac{1}{3}OB, y_c = \frac{1}{3}OA;$

3) у круговому секторі або півколі — в точці з координатами:

а) $x_C = r, y_C = \frac{2r}{3\pi}$ (рис. 6.8,а);

б) $x_C = \frac{2r}{3\pi}$ (рис. 6.8,б);



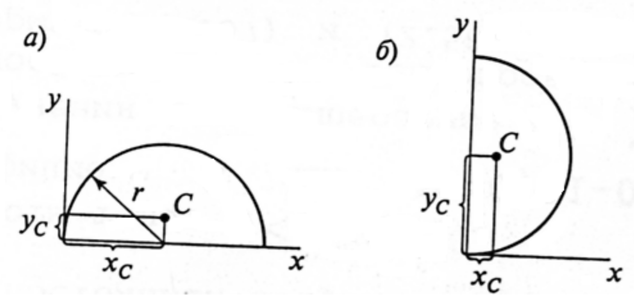


Рис. 6.8. **Центр ваги трикутника**

Рис. 6.9. **Центр ваги:**
а) кругового сектора,
б) півкола

4) у конусі або повній піраміді — на 1/3 висоти від основи (рис. 6.9):

$$x_c=0,\ y_C = \frac{1}{3}h$$

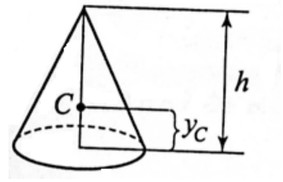
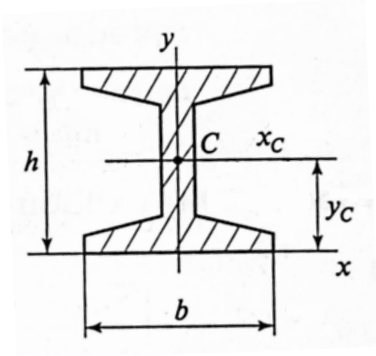


Рис.6.10. **Центр ваги конуса (повної піраміди)**

Положення центра ваги плоских фігур прокатних профілів:
1) у балці двотавровій (рис.6.9) — в точці з координатами
$x_c=0$, $y_c=h/2$, де h — висота двотавра.
2) у швелері (рис. 6.10) — в точці з координатами
$x_c=Zo$, $y_c=h/2$,
де h — висота швелера;
Zo — відстань від центра ваги і y_c до зовнішньої грані стінки;
3) у рівнополичному куточку (рис. 6.11) — в точці з координатами
$x_C = y_C = z_0$



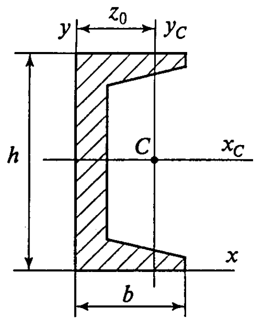


Рис. 6.11. **Центр ваги двотавра** Рис. 6.12. **Центр ваги швелера**

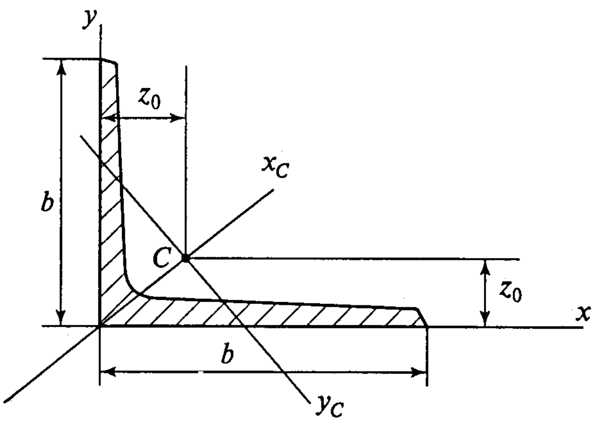


Рис.6.13. **Центр ваги рівнополичного куточка**

Якщо плоска фігура має неправильну геометричну форму, то центр ваги такої фігури можна визначити двома способами:

1) методом підвішування фігури на вістря;

2) теоретичним методом. В цьому випадку плоска фігура розбивається на певну кількість елементарних фігур, що мають правильну геометричну форму. Потім визначається положення центра ваги і площі кожної елементарної фігури. Для того, щоб знайти координати центра ваги заданої складної фігури, використовуються наступні формули:

$$X_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A}, \quad y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}.$$

де, A_i — площі елементарних фігур, на які розбита складна фігура;

x_i, y_i — координати центра ваги кожної елементарної фігури щодо випадкових осей Х і У.

Модуль 2. Кінематика. Закони руху без урахування причин. Динаміка. Закони руху з урахуванням причин

Тема 7. Основні поняття кінематики точки

7.1. Вступ до кінематики

Кінематика – частина теоретичної механіки, в якій вивчаються рухи матеріальних точок і твердих тіл без урахування їх мас і сил, що діють на них.

Коли в механіці говорять про рух тіла, то розуміють під цим зміну з часом його положення в просторі відносно інших тіл. Зазвичай з тілом, відносно якого вивчають рух, пов'язують яку-небудь систему координат, яку разом з вибраним засобом вимірювання часу називають системою відліку.

Якщо координати всіх точок тіла у вибраній системі відліку залишаються весь час незмінними, то тіло знаходиться у спокої. Якщо розглядається рух тіла відносно умовно нерухомої системи відліку, то рух називають абсолютним; рух тіла відносно рухомої системи відліку називають відносним. В світі все знаходиться в безперервному русі, тому всі рухи є відносними, проте умовно можна уявити собі і абсолютний рух, наприклад рух відносно Землі.

Одне і те ж тіло може здійснювати одночасно різні рухи відносно різних систем відліку; так, наприклад, тіло, що знаходиться в рухомому вагоні, щодо системи відліку, пов'язаної з вагоном, може бути нерухоме, а щодо системи відліку, пов'язаної із Землею, це тіло рухатиметься зі швидкістю, що дорівнює швидкості вагону.

Класична механіка розглядає простір, в якому відбуваються рухи матеріальних тіл, за якими спостерігають як тривимірний евклідовий простір і в своїх побудовах користується евклідовою геометрією. Час у класичній механіці є універсальним, тобто він передбачається однаковим у всіх системах відліку і є незалежним від відносного руху цих систем.

З математичної точки зору час розглядається в кінематиці як величина, що безперервно змінюється, грає роль незалежного змінного (аргументу) і що позначається буквою t. За одиницю часу береться 1 секунда (с).

При вимірюванні часу в кінематиці доводитися зустрічатися з двома поняттями: «момент t» і «проміжок часу t». У першому випадку під t розуміється число секунд, що відокремлюють даний момент (дана мить) від деякого початкового моменту (початок відліку часу), наприклад, від моменту початку руху тіла або від того моменту, з якого почали спостерігати цей рух.

Для початкового моменту значення змінного t дорівнює, отже, нулю. Змінне t може набувати і негативних значень, які визначають моменти, передуючі початковому моменту. Проміжок часу є число t секунд, що відокремлюють два яких-небудь послідовних моменти часу. Проміжок часу між двома даними послідовними моментами t_1 і t_2 дорівнює, очевидно, різниці $t_2 - t_1$.

Спостерігаючи рух якого-небудь твердого тіла, ми дуже часто бачимо, що рухи різних точок цього тіла різні; так, при коченні вагонного колеса по рейці, центр колеса рухається по прямій лінії, а яка-небудь точка, яка лежить на колі колеса, описує криву лінію (циклоїду); довжина шляху, пройденого цими двома точками за один і той же час, наприклад за один оборот колеса, також неоднакова. Тому вивчення руху тіла доводиться починати з вивчення руху окремої точки, тобто з кінематики точки.

Лінія, що описується рухомою точкою в просторі, називається траєкторією цієї точки. Якщо траєкторія точки – пряма лінія, то рух точки називається прямолінійним; інакше рух називається криволінійним. Почнемо вивчення руху точки з простішого випадку прямолінійного руху.

7.2. Векторний спосіб задання руху точки

Коли точка рухається в просторі по траєкторії, то в два послідовні моменти часу займе відповідно два різних положення.

З довільно вибраної точки, як початка координат, проводять до двох різних положень місце положення точки на траєкторії радіуси-вектори $\overline{r_1}$ і $\overline{r_2}$. Положення точки в просторі в даний момент часу буде визначено, якщо заданий за модулем і напрямом відповідний радіус-вектор. Рух же точки визначається в тому випадку, якщо радіус-вектор заданий в його зміні в часі, тобто якщо задана векторна функція: $\bar{r} = \bar{f}(t)$

Це рівняння і є рівняння руху точки у векторній формі. Векторна форма завдання руху точки використовується лише для теоретичних висновків і не може бути застосована для виконання практичних завдань.

7.3. Природний спосіб задання руху точки

Природний спосіб полягає в тому, що рух точки задається її траєкторією і рівнянням руху за цією траєкторією (законом руху).

Рівняння руху в загальному вигляді записується таким чином: $s = f(t)$,

де s – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу; t – час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію точки і рівняння руху за цією траєкторією, можна визначити положення точки у будь-який момент часу, для чого слід у рівність $s = f(t)$ підставити час.

Під час свого руху точка проходить деякий шлях, що також є функцією часу. Слід підкреслити, що шлях, пройдений точкою, співпадає з відстанню від початку відліку лише тоді, коли точка весь час рухається в одному напрямі і початок її руху співпадає з початком відліку.

Координатний спосіб полягає в тому, що рух точки задається рухом її проекцій уздовж осей координат.

Рівняння плоского руху точки в координатній формі записуються таким чином: $x = f(t)$, $y = f_1(t)$.

Знаючи рівняння руху точки в координатній формі, можна, підставивши в ці рівняння час, визначити положення проекції точки, а отже, і самої точки у будь-який момент часу.

Для того, щоб при координатному способі завдання руху точки визначити рівняння траєкторії $y = f(x)$, необхідно з рівнянь руху виключити час.

Під час переходу точки з одного положення в інше, яке відбувається за проміжок часу, точка переміщається на відстань s. Ця відстань називається довжиною шляху (скорочено шлях). Вимірюється s в одиницях довжини, тобто в СІ – метр (м).

Довжина пройденого шляху розуміється завжди як величина позитивна. Шлях s — це відстань, пройдена тілом уздовж лінії траєкторії (рис. 7.1)

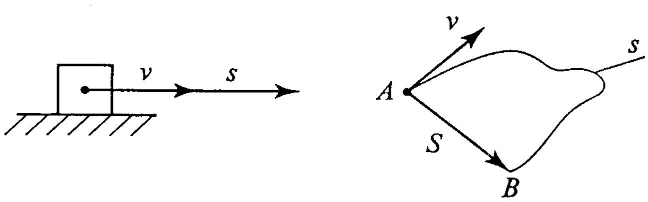


Рис. 7.1. **Шлях та переміщення тіла**

Переміщення S – це спрямований відрізок прямої, що з'єднує початкове й кінцеве положення тіла (див. рис. 7.1.).

Швидкість υ– це величина, що характеризує швидкість зміни пройденого шляху за одиницю часу:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}\text{, м/с} \qquad \upsilon_{сер} = \frac{S}{t}.$$

Швидкість є кінематична міра руху точки, що характеризує швидкість зміни її положення.

Як відомо з фізики, під час рівномірного руху швидкість вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу: $\sigma = s/t = const$, (передбачається, що початки відліку шляху і часу співпадають).

Одиниця швидкості:

$$[\upsilon] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час}} = \text{метр за секунду} = \text{м/с}.$$

Швидкість є величина векторна. При прямолінійному рівномірному русі швидкість постійна за модулем і за напрямом, а вектор її співпадає з траєкторією.

При криволінійному русі швидкість точки за напрямом міняється. Для того, щоб встановити напрям вектора швидкості при криволінійному русі, розіб'ємо траєкторію на нескінченно малі ділянки шляху, які в результаті можна вважати прямолінійними. Тоді на кожній ділянці умовна швидкість $\upsilon_п$ такого прямолінійного руху буде направлена по хорді. У межі при Δs, що наближається до нуля, хорда співпадає з дотичною, отже, швидкість у кожен момент часу направлена по дотичній до траєкторії у бік руху.

В процесі нерівномірного руху точки модуль її швидкості міняється. Уявимо собі точку, рух якої заданий природним способом рівнянням: $s = f(t)$.

Якщо за невеликий проміжок часу Δt точка пройшла шлях, то її середня швидкість дорівнює: $\upsilon_{сер} = \Delta s / \Delta t$.

Середня швидкість не дає уявлення про дійсну швидкість в кожен даний момент часу (дійсну швидкість інакше називають миттєвою). Чим менший проміжок часу, за який визначається середня швидкість, тим ближча вона до істинної.

Дійсна швидкість є межа, до якої наближається середня швидкість при наближенні t_c до нуля: $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{сер} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta s / \Delta t = \dfrac{ds}{dt}$. Таким чином, числове значення швидкості дорівнює $\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$

Дійсна швидкість за будь-якого руху точки дорівнює першій похідній координати (тобто відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Рух, в якому швидкість з часом зростає, називається прискореним; рух, в якому швидкість з часом спадає, сповільненим.

Прискорення є кінематичною мірою зміни вектора швидкості точки.

Прискорення є величина векторна. Під час прямолінійного руху точки вектор швидкості завжди співпадає з траєкторією, і тому вектор зміни швидкості також співпадає з траєкторією.

З курсу фізики відомо, що прискорення є зміна швидкості за одиницю часу. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася, то середнє прискорення $a_{сер} = \Delta \upsilon / \Delta t$.

Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення в кожен даний момент часу (дійсне прискорення інакше називають миттевим). Чим менший проміжок часу, за який визначають середнє прискорення, тим ближче воно до істинного. Дійсне прискорення є межа, до якої наближається середнє прискорення при, наближенні до нуля: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} a_{cp} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$.

Таким чином, враховуючи, що $v = \frac{ds}{dt}$, отримаємо

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості або другій похідній координати (відстань від початку відліку переміщення) за часом. Одиниця прискорення

$$[a] = \frac{[\upsilon]}{[t]^2} = \frac{\text{довжина}}{\text{час у квадраті}} = \text{метр на секунду у квадраті} = \text{м/с}^2.$$

Дотичне прискорення a_τ — це величина, що характеризує швидкість зміни величини швидкості за одиницю часу:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\ ,\ \text{м/с}^2\ , \qquad a_\tau = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$$

Дотичне прискорення завжди спрямоване вздовж лінії вектора швидкості (рис. 7.2).

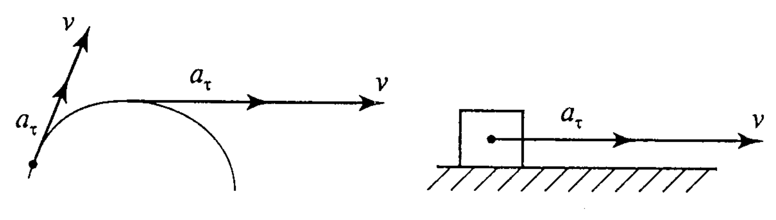


Рис. 7.2. **Напрямок дотичного прискорення**

При криволінійному русі точки, швидкість змінює свій напрям. Вектор дійсного прискорення є межа, до якої прагне відношення вектора приросту швидкості до відповідного проміжку часу, коли останній наближається до нуля: $a_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$.

Таку межу називають векторною похідною. Таким чином, дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом. Вектор прискорення в криволінійному русі завжди направлений у бік угнутості траєкторії.

Оскільки векторну похідну безпосередньо обчислювати ми не вміємо, то прискорення в криволінійному русі визначатимемо непрямими шляхами. Так, наприклад, якщо рух точки заданий природним способом, то застосовується теорема про проекцію прискорення на дотичну і нормаль.

Поняття про кривизну кривої ліній. Прискорення точки в криволінійному русі залежить від ступеня зігнутості її траєкторії, тобто від кривизни траєкторії.

Кут $\Delta\varphi$ між дотичними до кривої в двох сусідніх точках називається кутом суміжності.

Кривизною кривої в даній точці називається межа відношення кута суміжності відповідній довжині Δs дуги, коли остання наближається до нуля. Позначимо кривизну, тоді $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$.

Розглянемо коло радіуса R. Тобто $\Delta s = R\,\Delta\varphi$, отже

$$\boldsymbol{k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{R\,\Delta\varphi} = \frac{1}{R}}.$$

Отже, кривизна кола в усіх точках однакова і дорівнює $k = 1/R$.

Для кожної точки даної кривої можна підібрати таке коло. Кривизна якої рівна кривизні кривої в даній точці. Радіус ρ такого кола називається радіусом кривизни кривої в даній точці, а центр цього кола називається центром кривизни.

Отже, кривизна кривої в даній точці є величина, обернена радіусу кривизни в цій же точці: $k = 1/\rho$.

Очевидно, що кривизна прямої лінії дорівнює нулеві, а радіус кривизни дорівнює нескінченності: $k = 0; \rho = 1/k = \infty$.

Теорема про проекцію прискорення на дотичну і нормаль.

Проекція повного прискорення на нормаль до траєкторії називається нормальним прискоренням; проекція повного прискорення на дотичну до траєкторії називається дотичним прискоренням. Дотичне прискорення називають тангенціальним.

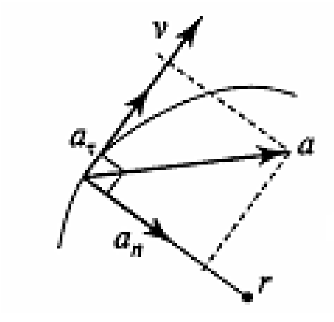
Теорема. Нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості, що ділиться на радіус кривизни траєкторії в даній точці, дотичне прискорення першої похідної швидкості за часом.

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна бачити, що якщо немає зміни швидкості за модулем, то $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$; якщо немає зміни швидкості за напрямом (прямолінійний рух), то $a_n = \upsilon^2 / \infty = 0$. Звідси випливає, що дотична прискорення характеризує зміну швидкості тільки за модулем, а нормальне – тільки за напрямом.

Знаючи дотичне нормальне прискорення, можна обчислити модуль і напрям повного прискорення за формулою: модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,.$$

Нормальне прискорення завжди спрямоване по радіусу до центра кривизни траєкторії (рис. 7.3).



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Рис.7.3. **Напрямок нормального прискорення**

Види руху точки залежно від прискорення:

1) рівномірний – це рух точки з постійною за величиною швидкістю. Характеризується наступними величинами:

$$\upsilon = s/t = const$$

$$s = Vt$$

$$a_\tau = 0$$

$$a_н = \upsilon^2 / r$$

Рівномірний рух можна зобразити графічно (7.4.);

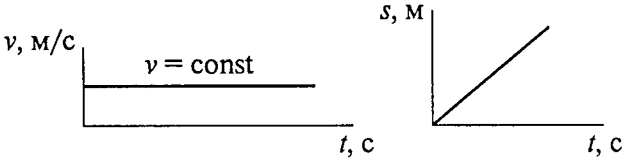


Рис. 7.4. **Графічне зображення рівномірного руху**

1) рівнозмінний, (рівноприскорений, рівносповільнений) – це рух точки з постійним дотичним прискоренням. Характеризується наступними величинами (рис. 7.5):

$$|a_\tau| = const \quad a_\tau = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \qquad s = \upsilon_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$$

$$= \frac{\upsilon^2 \quad \upsilon_0^2}{2_\tau}$$

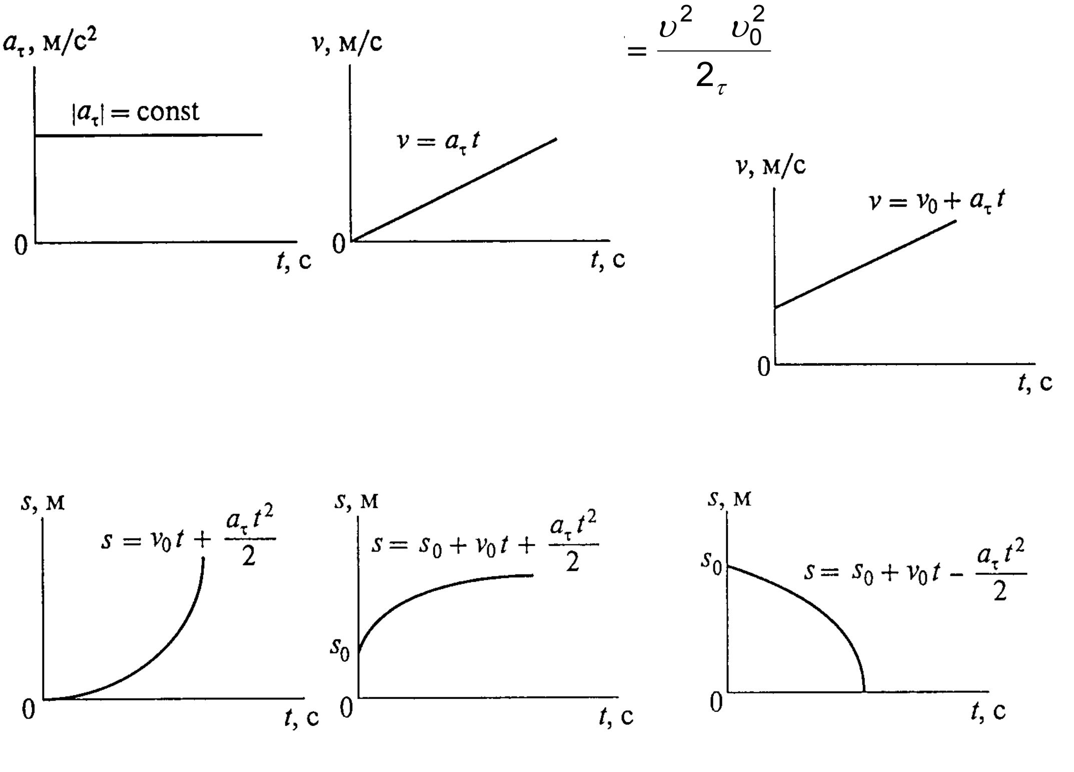


Рис.7.5. **Графічне зображення рівнозмінного руху**

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як складові повного прискорення, тобто як векторні величини. Якщо $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} \rangle 0$, то вектори дотичного прискорення і швидкості направлені в один бік і рух буде прискореним. Якщо вектор дотичного прискорення направлений у бік, протилежний вектору швидкості, то рух буде сповільнений.

Вектор нормального прискорення завжди направлений до центра кривизни, тому це прискорення інакше називають доцентровим.

Тема 8. Найпростіші рухи твердого тіла

8.1. Поступальний і обертальний рухи твердого тіла

Розрізняють два види простих рухів твердого тіла: поступальна хода і обертання навколо нерухомої осі.

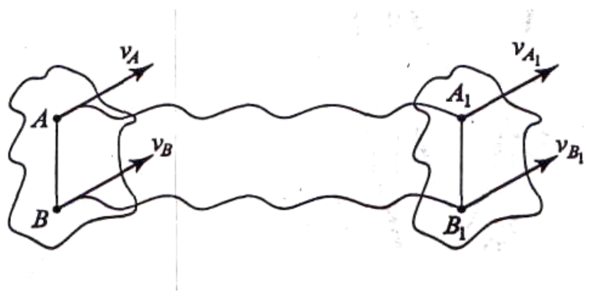
Рух тіла, в процесі якого будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною своєму первинному положенню, називається поступальним.

Уявлення про поступальну ходу можна отримати, спостерігаючи рух кузова вагона трамвая на прямолінійній ділянці шляху, поступально рухається стіл поздовжньо-стругального верстата, поршень стаціонарного двигуна внутрішнього згорання і т.ін.

Під час поступальної ходи всі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Хай за час Δt тіло, рухаючись поступально, перемістилося з положення AB в положення A_1B_1, причому довільна точка A пройшла шлях ΔS_A, а інша довільна точка B пройшла шлях ΔS_B (рис.8.1):

$$\cup AA_1 = \Delta S_A, \cup BB_1 = \Delta S_B$$



$$v_A = v_B$$
$$a_A = a_B$$
$$s_A = s_B$$

Рис. 8.1. **Поступальний рух тіла**

З'єднаємо точки A і A_1, B і B_1 хордами. Оскільки $AB = A_1B_1$ (тіло тверде) і $\| AB\ A_1B_1$ (рух поступальний), то фігура ABB_1A_1 є паралелограм. Отже, хорда $A\,A_1$ дорівнює і паралельна хорді $B\,B_1$.

Візьмемо проміжне положення прямої і з'єднаємо кінці цього відрізка з точками A і A_1, B і B_1, як показано на рисунку.

Аналогічно попередньому можна довести, що вписані ламані лінії AA_2A_1 і BB_2B_1 мають попарно рівні і паралельні сторони.

Якщо нескінченне число разів подвоювати число сторін цих ламаних ліній, то в межі вони дадуть дуги ΔS_A і ΔS_B.

Але оскільки ці ламані лінії завжди однакові, то вони однакові і в межі, отже, траєкторії довільних точок A і B будуть однакові:

$$\cup\, \Delta S_A = \cup \Delta S_B .$$

Оскільки точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ вибрані абсолютно довільно, то, траєкторії всіх точок тіла будуть однакові.

Доведемо тепер, що швидкості і прискорення точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, а отже, і всіх точок тіла в кожен даний момент часу рівні. Оскільки вектори переміщень точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ рівні між собою: $\boldsymbol{AA_1} = \boldsymbol{BB_1}$, то, розділивши обидві частини цієї векторної рівності на $\boldsymbol{\Delta t}$, і перейшовши до межі при $\boldsymbol{\Delta t}$, що наближається до нуля, отримаємо :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{BB_1}{\Delta t} .$$

Ці межі дають вектори швидкостей точок, отже $v_A = v_B$.

Перенесемо вектори швидкостей $\boldsymbol{v_{A1}}$ і $\boldsymbol{v_{B1}}$ в точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, і знайдемо вектори приросту швидкостей Δv_A і Δv_B. Приріст швидкостей також дорівнює $\Delta v_A = \Delta v_B$.

Розділимо обидві частини цієї векторної рівності на $\boldsymbol{\Delta t}$ і перейдемо до межі при $\boldsymbol{\Delta t}$, що наближається до нуля, внаслідок чого отримаємо

$$V_P = V_A - V_A = 0 \text{ або } a_A = a_B.$$

Таким чином, поступальна хода твердого тіла цілком визначається рухом однієї з його точок, отже, всі формули кінематики точки застосовні для тіла, рухомого поступально.

8.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Рух, при якому принаймні дві точки твердого тіла або незмінної системи залишаються нерухомими, називається обертальним; пряма лінія, що сполучає ці дві точки, називається віссю обертання. У визначенні обертального руху мовиться про незмінну систему, тому що вісь обертання може лежати і поза тілом.

Обертальний рух у техніці зустрічається вельми часто. У переважній більшості механізмів і машин є ланки, які здійснюють обертальний рух, наприклад вали, зубчаті колеса, кривошипи і т. д.

Відзначимо, що поняття обертального руху може відноситися тільки до тіла, але не до точки; так, наприклад, рух точки по колу є не обертальний рух, а криволінійний.

Розглянемо диск, що обертається навколо осі, перпендикулярної до площини креслення (рис. 8.2).

Точка О – слід цієї осі. Очевидно, що траєкторії точок, тіла, що обертається, є кола різних радіусів, розташовані в площинах, перпендикулярних осі обертання, з центрами, лежачими на цій осі.

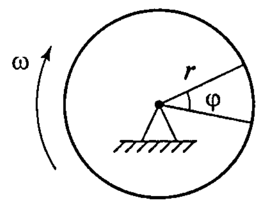


Рис. 8.2. **Обертальний рух тіла**

Хай за час t диск обернувся на кут φ. Оскільки точки, що знаходяться на різній відстані від осі обертання, за один і той же проміжок часу проходять різні шляхи, то, отже, вони мають різні швидкості і прискорення.

Отже, при обертальному русі тіла точки його, що знаходяться на різній відстані від осі обертання, мають неоднакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Звідси витікає, що лінійне переміщення (шлях), лінійна швидкість і прискорення не можуть характеризувати обертальний рух в цілому. Обертальний рух тіла можна характеризувати кутом, на який обернулося тіло за даний проміжок часу. Цей кут називається кутовим переміщенням тіла. Кутове переміщення виражається в радіанах (рад) або обертах (о); у останньому випадку кутове переміщення позначають N. Для встановлення залежності між φ і N складемо пропорцію :

1об – 2рад
Nоб – рад

де N – число обертів тіла.

Кутове переміщення тіла є функція часу, отже, закон обертального руху в найзагальнішому вигляді запишеться так:

$$\varphi = f(t).$$

З рис. 8.2. видно, що шлях будь-якої точки тіла, що обертається:

$$s = r\varphi,$$

де r – відстань точки від осі обертання.

Швидкість будь-якої точки тіла визначається так:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

(r винесли за знак похідної, оскільки для даної точки твердого тіла ця величина постійна).

Вираз позначимо ω і назвемо кутовою швидкістю. Кутова швидкість є кінематична міра руху тіла, що обертається, що характеризує швидкість його кутового переміщення:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \ .$$

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом.

Одиниця кутової швидкості:

$$[\varpi] = \frac{(\varphi)}{[t]} = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час}} = \text{радіан в секунду} = \text{рад/с} \ .$$

Формула для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, запишеться таким чином $v = \omega \ r$.

Швидкість точки в кожен момент часу прямо пропорційна її відстані від осі обертання. Очевидно, що вектор швидкості точки тіла, що обертається, направлений перпендикулярно радіусу, що сполучає цю точку з віссю обертання. Якщо точка лежить на поверхні тіла, що обертається, то її швидкість називають окружною.

У техніці часто швидкість обертання виражають в обертах за хвилину, позначають буквою n і називають частотою обертання. Встановимо залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання, вираженими відповідно в рад/с і мін $^{-1}$. Запишемо пропорцію:

$$\omega \text{ рад} - 1\text{с}$$
$$2\pi n \text{ рад} - 60\text{с}.$$

З пропорції знайдемо $\boldsymbol{\omega = \pi n / 30}$ рад/с, де n – частота обертання тіла, об/мін або мін $^{-1}$.

Рівномірний обертальний рух. Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю, то рух називається рівномірним. Формули рівномірного обертального руху:

$$\boldsymbol{\omega = const}, \ \boldsymbol{\varphi = \omega t} \ .$$

Дотичну, нормальне і повне прискорення будь-якої точки тіла, що рівномірно обертається, визначають так:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = 0, a_H = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_H^2} = a = \omega^2 r \ .$$

Нерівномірний обертальний рух. Якщо кутова швидкість тіла, що обертається, з часом змінюється, то рух називається нерівномірним. У найзагальнішому виді формули нерівномірного обертального руху запишуться так:

$$\varphi = f(t),\ \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного тіла, що обертається, визначають таким чином:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \ .$$

Вираз $\frac{d\omega}{dt}$ позначають ε і називають кутовим прискоренням. Кутове прискорення – це кінематична міра зміни кутової швидкості тіла, що обертається:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt_2}.$$

Кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості або другої похідної кутового переміщення за часом.

Одиниця кутового прискорення:

$$[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{[\varphi]}{[t]^2} \ ;$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час у квадраті}} = \text{радіан на секунду в квадраті} = \text{рад/с}^2 .$$

Тепер можна записати формулу для визначення дотичного прискорення будь-якої точки тіла, що нерівномірно обертається, у такому вигляді:

$$\boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{\varepsilon r} .$$

Нормальне прискорення визначається за такою ж формулою, як і в разі рівномірного обертання, тобто $\boldsymbol{a}_H = \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}$.

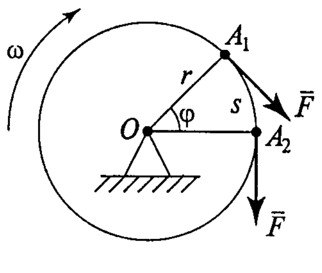
Повне прискорення

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{a}_\tau^2 + \boldsymbol{a}_н^2} = \sqrt{(\boldsymbol{\varepsilon r})^2 + (\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r})^2},$$

звідки

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^2 + \boldsymbol{\omega}^4} .$$

Якщо напрям кутового прискорення співпадає з напрямом обертання, то обертальний рух є прискореним, і навпаки (рис. 8.3).



$$a_\tau = 0$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega r}$$

$$\alpha_n = \omega^2 r$$

Рис. 8.3. **Швидкість та прискорення точки при обертальному русі**

Рівнозмінний обертальний рух. Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі з постійним кутовим прискоренням, то рух називається рівнозмінним. Формули цього виду обертального руху можуть бути отримані таким же способом, яким були виведені формули рівнозмінного руху точки, тобто за допомогою інтегрального числення.

Отже, якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі рівнозмінно, то

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = const,$$

звідки

$$d\omega = \alpha\, dt.$$

Інтегруючи цю рівність за t, отримаємо:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt,$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість. Остаточно отримаємо формулу кутової швидкості у такому вигляді:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Далі виведемо формулу кутового переміщення. Оскільки при будь-якому обертальному русі $\frac{d\varphi}{dt} = \omega, d\varphi = \omega\, d\, t$, то, інтегруючи цю рівність за t, отримаємо,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^1 \omega\, d\, t = \int_0^1 (\omega_0 + \alpha\, t) d\, t = \int_0^1 \omega_0 dt + \int_0^1 \alpha t dt, \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \alpha t^2 / 2$$

де φ_0 – початкове кутове переміщення.

Якщо φ_0=0, то формула кутового переміщення матиме вигляд:

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha\, t^2 / 2.$$

Отже, формули рівнозмінного обертального руху твердого тіла записуються таким чином:

$$\alpha = const\,, \omega = \omega_0 + \alpha\, t\,, \varphi = \omega_0 t + \alpha\, t^2 / 2\,.$$

З виведених формул можна отримати формули кутового переміщення у вигляді:

$$\varphi = (\omega^2 - \omega_0^2)/(2\alpha) \text{ або } \varphi = (\omega_0 + \omega)e / 2\,.$$

Тема 9. Складний рух точки

9.1. Абсолютний і відносний рух точки; переносний рух

До цих пір ми розглядали рух точки відносно деякої системи координат $Oxyz$ (системи відліку), яку вважали нерухомою.

Уявимо собі тепер, що ми спостерігаємо рух точки М відносно деякої системи координат $O'x'y'z'$, яка сама рухається щодо осей $\boldsymbol{Oxyz}$, що приймаються за нерухомі.

Рух точки М відносно рухомих осей (до рухомої системи відліку) називається відносним.

Рух рухомих осей відносно нерухомої системи відліку називається переносним.

Рух точки М щодо нерухомих осей (нерухомої системи відліку) називається в цьому випадку абсолютним рухом. Абсолютний рух точки (або тіла) можна назвати також складним або результуючим рухом, оскільки його можна розглядати як результат складання відносного і переносного рухів, які відносно абсолютного руху є рухами, що його складають.

Так, наприклад, якщо яке-небудь тіло рухається вздовж палуби теплохода, що йде, то рух тіла відносно теплохода (до предметів що знаходяться на палубі) є рух відносний, рух самого теплохода є рух переносний і, нарешті, рух тіла щодо нерухомих берегів є рух абсолютний.

В даному випадку рухомою системою відліку є теплохід, нерухомою – Земля. Рух людини, що піднімається рухомими сходами ескалатора, відносно ескалатора є відносним; рух ескалатора є переносним, а рух людини відносно навколишніх нерухомих предметів є рух абсолютний.

Отже, вкажемо ще раз, відносний рух є рух відносно рухомої системи відліку, а абсолютним рухом ми називатимемо рух щодо нерухомої системи відліку.

Основне завдання кінематики у разі складного руху точки полягає в тому, щоб, знаючи відносні рухи точки і переносний рух, тобто рух рухомої системи відліку, знайти абсолютний рух точки і, отже, визначити її траєкторію, швидкість і прискорення в цьому русі.

І навпаки, всякий рух точки або тіла щодо даної умовно нерухомої системи відліку можна розглядати як складний і розкласти на рухи, що становлять (відносний і переносний); для цього потрібно вибрати систему рухомих осей, що має деякий певний рух, і знайти рух точки або тіла, щодо цієї рухомої системи.

Цей прийом розкладання руху точки або тіла на рухи, що його становлять, є корисним в тих випадках, коли при відповідному виборі рухомої системи відліку відносні і переносні рухи виявляються простішими, ніж рух точки або тіла, що вивчається, щодо нерухомої системи відліку.

При вивченні складного руху точки доводиться відрізняти відносну, переносну і абсолютну швидкості цієї точки, а також її відносне, переносне і абсолютне прискорення.

Абсолютною швидкістю $v_{абс}$ і абсолютним прискоренням $a_{абс}$ точки називаються її швидкість і її прискорення в абсолютному русі, тобто в її русі щодо нерухомої системи відліку. Відносною швидкістю $v_{відн}$ і відносним прискоренням $a_{відн}$ точки називаються її швидкість і прискорення у відносному русі, тобто в її русі відносно рухомої системи відліку.

Під переносною швидкістю точки розуміється та швидкість, яку мала б ця точка в даний момент, якби вона була незмінно пов'язана з рухомими осями.

Іншими словами, переносною швидкістю точки М називається швидкість тієї точки, незмінно пов'язаної з системою рухомих осей, з якою в даний момент співпадає точка М.

Переносну швидкість точки М позначатимемо через $v_{пер}$. Аналогічно під переносним прискоренням точки, яке позначатимемо через $a_{пер}$, слід розуміти те прискорення, яке мала б в даний момент дана точка, якби вона була незмінно пов'язана з рухомими осями і, отже, брала б участь тільки в переносному русі. Інакше, переносним прискоренням точки М називається прискорення тієї точки, незмінно пов'язаної з системою рухомих осей, з якою в даний момент співпадає точка М.

Хай, наприклад, точка М рухається по деякій лінії АВ щодо осей $Ox'y'$, що обертаються навколо нерухомої точки О з кутовою швидкістю ω (Рис.9.1). Лінія АВ є траєкторією відносного руху точки М. Нехай закон руху точки М по цій траєкторії виражається рівнянням $s = f(t)$.

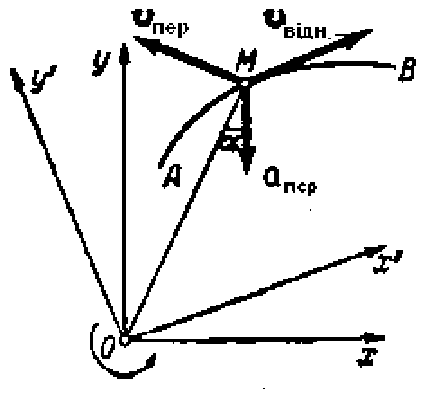


Рис.9.1. **Рух точки М по кривій лінії АВ**

Відносна швидкість $v_{відн}$ точки М направлена по дотичній до кривої АВ і за модулем дорівнює абсолютному значенню похідної $\frac{ds}{dt}$.

Переносна ж швидкість $v_{пер}$ точки М є швидкість тієї точки площини $Ox'y'$, що обертається, з якою в даний момент співпадає точка М.

Ця швидкість направлена перпендикулярно до радіусу-вектора ОМ і дорівнює за модулем $OM \times \omega$.

Абсолютна швидкість $v_{абс}$ точки М є та швидкість, з якою рухається ця точка в даний момент відносно нерухомих осей Oxy.

Переносне прискорення $a_{пер}$ точки М є прискорення тієї точки площини $Ox'y'$, що обертається, з якою співпадає в даний момент точка М. Тому це прискорення визначається як прискорення точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, отже :

$$a_{пер} = OM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

Якщо позначимо координати рухомої точки в рухомій системі осей через x', y' і z',то рівняння

$$x' = f_1(t), y' = f_2(t), z' = f_3(t),$$

що виражає ці координати у функціях часу, є рівнянням відносного руху точки.

Якщо виключимо з цих рівнянь час t, то отримаємо рівняння траєкторії відносного руху. Зрозуміло, що відносна траєкторія точки не залишається нерухомою, а переміщається в просторі разом з рухомими осями.

Коли рівняння відносного руху точки відомі, то можна знайти відносну швидкість точки, а саме: диференціюючи за t рівняння відносного руху, отримаємо проекції відносної швидкості на рухомі осі; визначивши ці проекції, зможемо потім знайти величину і напрямок відносної швидкості. Позначаючи проекції відносної швидкості на рухомі осі через, $v_{віднX'}$ $v_{віднY'}$ і $v_{віднZ'}$, будемо, отже, мати:

$$v_{віднX'} = \frac{dx'}{dt}, v_{віднY'} = \frac{dy'}{dt}, v_{віднZ'} = \frac{dz'}{dt}.$$

Аналогічно диференціюючи двічі по t рівняння відносного руху точки, знайдемо проекції відносного прискорення на рухомі осі, тобто :

$$a_{віднX'} = \frac{d^2x'}{dt^2}, a_{віднY'} = \frac{d^2y'}{dt^2}, a_{віднZ'} = \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Отже, формула розкладання відносного прискорення $\boldsymbol{a}_{відн}$ щодо рухомих осей матиме вигляд :

$$a_{відн} = a_{віднX'} + a_{віднY'} + a_{віднZ'}.$$

9.2. Теорема складань прискорення при переносному поступальному і переносному обертальному рухах.

Швидкість точки в абсолютному русі називається абсолютною.

Швидкість точки у відносному русі називається відносною.

Швидкість даної точки, в думках закріпленої в даний момент на рухомій системі координат, називається переносною. Зв'язок між цими швидкостями встановлює теорема про складання швидкостей.

Теорема. Абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей.

$$v_{абс} = v_{відн} + v_{пер}.$$

Іншими словами, абсолютна швидкість точки дорівнює за модулем і напрямом діагоналі паралелограма, побудованого на переносній і відносній швидкостях.

Користуючись визначенням переносного і відносного рухів, можна вказати на наступний метод вивчення цих рухів. Якщо необхідно вивчити відносний рух точки, то слід у думках зупинити переносний рух; якщо необхідно вивчити переносний рух точки, то слід у думках зупинити відносний рух.

Звідси витікає, що якщо відомі переносна і відносна швидкості і кут α між ними, то модуль абсолютної швидкості визначається за відомою формулою, що виражає довжину діагоналі паралелограма, тобто

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\alpha}.$$

Якщо $\alpha = 0$, тобто якщо швидкості v_e і v_r направлені по одній прямій в один бік, то $\cos\alpha = 1$ і $v_a = v_e + v_r$. Якщо $\alpha = 180^\circ$, тобто якщо швидкості $\boldsymbol{v_e}$ і $\boldsymbol{v_r}$ направлені по одній прямій в протилежні сторони, то $\cos\alpha = -1$ і $v_a = |v_e - v_r|$.

Якщо $\alpha = 90^\circ$, то $v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$.

При поступальному русі твердого тіла прискорення всіх його точок в кожен даний момент рівні між собою, те прискорення всякої точки, незмінно пов'язаної з рухомими осями, дорівнює прискоренню точки.

Коли переносний рух є поступальним, переносне прискорення $a_{пер}$ точки в кожен даний момент, дорівнює прискоренню точки в той же момент.

Щоб знайти абсолютне прискорення $a_{абс}$ точки, потрібно знайти похідну від абсолютної швидкості цієї точки за часом. Тому:

$$a_{абс} = a_{відн} + a_{пер}.$$

Ця рівність виражає теорему складання прискорень при поступальній переносній ході: у тому випадку, коли переносний рух, тобто рух рухомої системи відліку, є поступальним, абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного і відносного прискорень цієї точки.

Отже, абсолютне прискорення точки може бути знайдене за тим же правилом паралелограма, як і абсолютна швидкість.

Хай рухома система відліку рухається довільним чином щодо нерухомої системи і точка в її відносному русі, тобто в русі щодо рухомої системи, описує деяку траєкторію (наприклад, здійснює обертальний рух).

Переносною швидкістю $v_{пер}$ точки називається швидкість точки, незмінно пов'язаної з рухомою системою, з якою в даний момент співпадає точка.

Тому при визначенні переносної швидкості точки потрібно цю точку незмінно пов'язати з рухомою системою відліку, тобто потрібно вважати її координати постійними. Іншими словами, потрібно припустити, що відносний рух точки зупинений.

Тільки у такому разі :

$$v_{абс} = v_{відн} + v_{пер}.$$

Ця рівність виражає теорему складання швидкостей в загальному випадку: абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі переносної і відносної швидкостей цієї точки, тобто абсолютна швидкість точки і в загальному випадку визначається так само, як і при переносній поступальній ході.

Теорема Коріоліса. В тому разі, коли переносний рух не є поступальним, абсолютне прискорення точки складається з трьох прискорень: переносного $a_{пер}$, відносного $a_{відн}$ і прискорення, що дорівнює

$2\omega \times v_{відн}$, яке називається прискоренням Коріоліса. Позначимо прискорення Коріоліса через $a_k = 2(\omega \times v_{відн})$.

Прискорення Коріоліса дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості твердого тіла, з яким пов'язана рухома система відліку, на швидкість точки щодо цієї рухомої системи:

$$a_{абс} = a_{пер} + a_{відн} + a_k.$$

Теорема Коріоліса застосовується у тому випадку, коли переносний рух, тобто рух рухомої системи відліку, не є поступальним. Тоді абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і коріолісового.

Тема 10. Плоскопаралельний рух твердого тіла

10.1. Плоскопаралельний (плоский) рух твердого тіла

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий рух, під час якого всі точки тіла переміщаються в площинах, паралельних якійсь одній площині, що називається основою.

Прикладами плоскопаралельного руху можуть служити рух колеса на прямолінійній ділянці шляху, рух шатуна кривошипно-шатунного механізму.

Для визначення плоскопаралельного руху треба, щоб будь-яка пряма, проведена в тілі перпендикулярно основної площини, рухалася поступально. Для визначення руху тіла на кожній прямій, перпендикулярній основній площині, треба знати рух тільки однієї точки.

Взявши ці точки в одній площині, паралельній основній, одержимо перетин, рухи якого визначає рух тіла. Але плоский рух перетину цілком визначається рухом двох будь-яких точок або відрізка. Таким чином, питання про плоскопаралельний рух тіл зводиться до питання про рух відрізка прямої у площині, паралельній основній.

Плоскопаралельний рух вивчається двома методами:

1) методом миттєвих центрів швидкостей;

2) методом розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний.

10.2. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний та обертальний

В основі цього методу лежить наступна теорема: усяке плоскопаралельне переміщення твердого тіла може бути отримане за допомогою одного поступального й одного обертального руху (рис. 10.1).

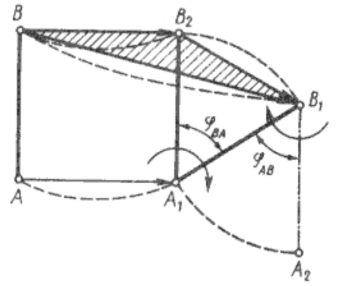


Рис. 10.1. **Плоскопаралельний рух відрізка AB**

Нехай за час Δt відрізок AB, що визначає плоскопаралельний рух тіла, перемістився в положення A_1B_1.

Припустимо, що відрізок AB спочатку переміщався тільки поступально, причому всі його точки рухалися однаково, як точка A.

Таким чином, відрізок перейшов у положення A_1B_2, після чого його можна перемістити в положення A_1B_1 за допомогою тільки обертального руху навколо точки A_1.

Звідси видно, що складне плоскопаралельне переміщення складається із двох найпростіших рухів: поступального й обертального, причому можна вважати, що ці рухи відбуваються одночасно.

Установимо залежність між векторами швидкостей точок A і B. Для цього з'єднаємо прямими точки A, A_1 і B, B_1 , B_2, у результаті чого одержимо наступну залежність між векторами переміщення точки B:

$$BB_1 = BB_2 + B_2B_1.$$

Так як $BB_2 = AA_1$, то можна записати, що

$$BB_1 = AA_1 + B_2B_1.$$

Розділимо всі члени рівності на Δt й перейдемо до межі при Δt, що наближається до нуля:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{BB_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AA_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_2B_1}{\Delta t},$$

що дає

$$v_B = v_A + v_{BA},$$

де v_B – вектор абсолютної швидкості точки B; v_A – вектор абсолютної швидкості точки A; v_{BA} – вектор швидкості точки B у відносному обертальному русі відрізка AB навколо точки A, спрямованої перпендикулярно відрізку AB.

Таким чином, плоскопаралельне переміщення тіла може здійснюватися шляхом обертального й поступального рухів, які відбуваються одночасно; поступальний рух можна вважати переносним, а обертальний – відносним.

Вектор абсолютної швидкості якоїсь точки B дорівнює вектору абсолютної швидкості будь-якої іншої точки A плюс вектор швидкості точки B у відносному обертальному русі відрізка AB навколо точки A.

10.3. Визначення швидкості будь-якої точки фігури

Точку, навколо якої відбувається відносний обертальний рух, будемо називати полюсом.

Якщо за полюс замість точки A прийняти точку B, то, міркуючи аналогічно, одержимо

$$v_A = v_B + v_{AB}.$$

Порівнюючи цю векторну рівність із попередньою, бачимо, що вектори відносних швидкостей v_{BA} і v_{AB} за модулем рівні між собою, тобто $v_{BA} = v_{AB}$.

З рис.10.1 видно, що напрямок відносного обертання й кут повороту відрізка AB за якийсь проміжок часу не залежать від вибору полюса, тобто $\varphi_{BA} = \varphi_{AB}$.

Продиференціювавши цю рівність за часом, одержимо

$$\frac{d\varphi_{BA}}{dt} = \frac{d\varphi_{AB}}{dt}, \text{ або } \omega_{BA} = \omega_{AB}.$$

Отже, відносна кутова швидкість від вибору полюса не залежить. Аналогічно,

$$\frac{d\omega_{BA}}{dt} = \frac{d\omega_{AB}}{dt}, \text{ або } \alpha_{BA} = \alpha_{AB}.$$

Отже, і відносне кутове прискорення від вибору полюса не залежить.

Із сказаного випливає, що при розкладанні плоскопаралельного руху на поступальний й обертальний, поступальна частина руху в загальному випадку залежить від вибору полюса, а обертальна частина руху від вибору полюса не залежить.

Так як за полюс може бути обрана будь-яка точка площини, у тому числі й миттєвий центр швидкостей, то при розкладанні плоскопаралельного руху на поступальний та обертальний, кутова швидкість відносного обертального руху завжди дорівнює абсолютній кутовій швидкості.

Якщо векторну рівність

$$v_A = v_B + v_{AB}$$

спроектувати на напрямок прямої AB, то пр.v_A = пр.v_B , тому що пр.$v_{AB} = 0$. Отже, під час плоскопаралельного руху, проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на напрямок прямої, що з'єднує ці точки, рівні між собою.

10.4. Миттєвий центр швидкостей

Миттєвий центр швидкостей — це точка плоскої фігури, швидкість якої в цей момент часу дорівнює нулеві.

Завжди можна на фігурі знайти таку точку. Наприклад, візьмемо швидкість якоїсь точки *A,* що приймемо за полюс обертання. Відкладемо відрізок *AP,* перпендикулярний V_A, де $AP = V_A / \omega$, тоді швидкість точки *P* дорівнює

$$V_P = V_A + V_{PA},$$

причому $$V_{PA} = \omega AP = \omega V_A / \omega = V_A \quad \text{(рис.10.2).}$$

Таким чином, $$V_P = V_A,\ V_A = 0.$$

Миттєвий центр швидкостей завжди лежить на прямій, проведеній з якої-небудь точки фігури перпендикулярно напрямку швидкості цієї точки.

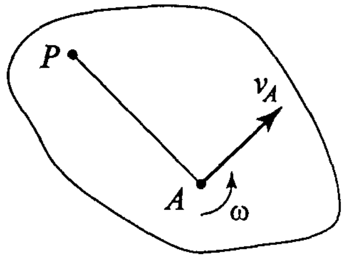


Рис. 10.2. **Миттєвий центр швидкості точки**

Швидкість будь-якої точки фігури прямо пропорційна її відстані до МЦШ:

$$v_B = |\omega| AB, \qquad v_c = |\omega| AC.$$

Якщо переміщення тіла відбудеться за нескінченно малий проміжок часу Δt, у межі при Δt, що наближається до нуля, обертання буде відбуватися навколо миттєвої осі.

Слід миттєвої осі обертання на площині фігури називають миттєвим центром швидкостей.

Очевидно, що швидкість точки, що є в цей момент миттєвим центром швидкостей, дорівнює нулеві. Кутова швидкість ω, з якої відбувається миттєве обертання, називається миттєвою кутовою швидкістю.

Точка нерухомої площини, що збігається в цей момент часу з миттєвим центром швидкостей плоскої фігури, називається миттєвим центром обертання.

Якщо пряма рухається паралельно самій собі, то можна думати, що тіло обертається навколо осі, переміщеної в нескінченність, інакше кажучи, поступальний рух можна розглядати як обертальний по колу нескінченно великого радіуса.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла може здійснюватися шляхом послідовних миттєвих безперервних поворотів навколо миттєвих осей обертання.

Зазначимо, що методом миттєвих центрів швидкостей можна користуватися тільки під час визначення швидкостей точок плоскої фігури, але не під час визначення траєкторії й прискорень цих точок.

Розглядаючи в кожний момент часу складне плоскопаралельне переміщення як найпростіше – обертальне, можна для обчислення швидкостей точок твердого тіла застосовувати всі виведені раніше формули обертального руху.

Установимо наступні три властивості миттєвих центрів швидкостей, що випливають із закону розподілу швидкостей точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

1) швидкість миттєвого центра дорівнює нулеві;

2) миттєвий центр лежить на перпендикулярі, проведеному із точки до напрямку її швидкості;

3) швидкість точки дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центра швидкостей (рис.10.2):

$$v_A = \omega OA .$$

На підставі перерахованих вище властивостей можна встановити наступні п'ять способів визначення положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури, що визначають плоскопаралельний рух тіла:

Способи знаходження МЦШ:

1. Відомі кутова швидкість і швидкість якої-небудь точки. У цьому випадку МЦШ точки P перебуває на перпендикулярі, проведеному із точки *A* до вектора швидкості на відстані $AP = v / \omega$ (див. рис. 10.2):

$$AP = V_A / \omega$$

2. Відомі напрямки швидкостей двох точок V_A й V_B.

У цьому випадку МЦШ лежить на перетинані перпендикулярів, відновлених із точок A і *B* до напрямків їхніх швидкостей (рис. 10.3).

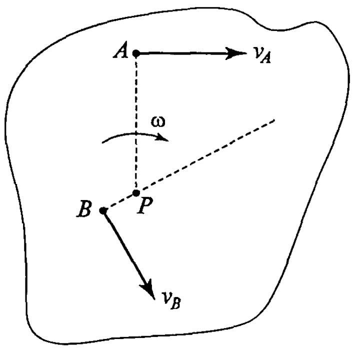


Рис.10.3. **Знаходження МЦШ**

3. Відомо, що вектори швидкості двох точок V_A й V_B паралельні один одному, спрямовані в одну сторону перпендикулярно відрізку *AB* і не рівні за величиною.

У цьому випадку МЦШ перебуває в точці перетину прямой, що з'єднує початок векторів V_A й V_B, із прямою, що з'єднує їхні кінці (рис. 10.4).

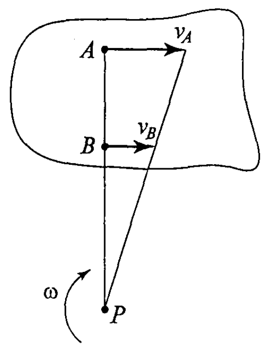


Рис.10.4. **Знаходження МЦШ**

4. Відомо, що вектори швидкості двох точок V_A й V_B паралельні один одному, але спрямовані в протилежні сторони.

У цьому випадку МЦШ перебуває на перетині прямих, що з'єднують початки й кінці векторів швидкості (рис. 10.5).

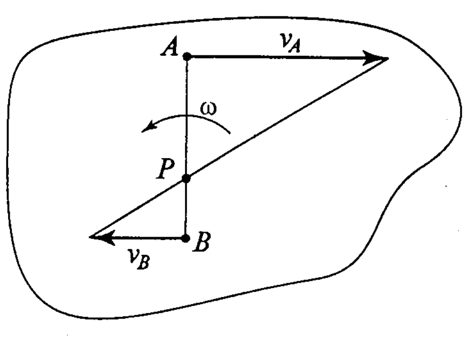


Рис. 10.5. **Знаходження МЦШ**

5. Відомо, що плоска фігура без ковзання котиться по нерухомій прямій.

У цьому випадку МЦШ перебуває в точці дотику фігури з прямою (рис. 10.6).

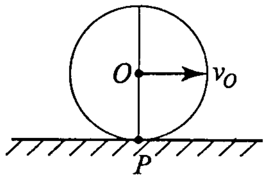


Рис. 10.6. **Знаходження МЦШ**

Якщо переміщення тіла відбудеться за нескінченно малий проміжок часу Δt, у межі при Δt, що наближається до нуля, обертання буде відбуватися навколо миттєвої осі. Слід миттєвої осі обертання на площині фігури називають миттєвим центром швидкостей.

Очевидно, що швидкість точки, що є в цей момент миттєвим центром швидкостей, дорівнює нулеві. Кутова швидкість ω, з якої відбувається миттєве обертання, називається миттєвою кутовою швидкістю.

Точка нерухомої площини, що збігається в цей момент часу з миттєвим центром швидкостей плоскої фігури, називається миттєвим центром обертання.

Якщо пряма AB рухається паралельно самій собі, то можна думати, що тіло обертається навколо осі, вилученої в нескінченність, інакше кажучи, поступальний рух можна розглядати як обертальний по колу нескінченно великого радіуса.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла може здійснюватися шляхом послідовних миттєвих безперервних поворотів навколо миттєвих осей обертання.

Відзначимо, що методом миттєвих центрів швидкостей можна користуватися тільки при визначенні швидкостей точок плоскої фігури, але не при визначенні траєкторії й прискорень цих точок.

Розглядаючи в кожний момент часу складний плоскопаралельний рух як найпростіший – обертальний, можна для обчислення швидкостей точок твердого тіла застосовувати всі виведені раніше формули обертального руху.

Установимо наступні три властивості миттєвих центрів швидкостей, що випливають із закону розподілу швидкостей точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

1) швидкість миттєвого центра дорівнює нулеві;

2) миттєвий центр лежить на перпендикулярі, проведеному з точки до напрямку її швидкості;

3) швидкість точки дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центра швидкостей:

$$v_A = \omega OA.$$

На підставі перерахованих вище властивостей можна встановити наступні п'ять способів визначення положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури, що визначають плоскопаралельний рух тіла:

1. Відомі миттєва кутова швидкість ω і швидкість v_A якоїсь точки A плоскої фігури.

У цьому випадку миттєвий центр швидкості O перебуває на перпендикулярі, відновленому із точки A до вектора швидкості v_A на відстані $OA = v_A / \omega$.

2. Відомі напрямки швидкостей двох точок A і B плоскої фігури.

У цьому випадку миттєвий центр O лежить на перетині перпендикулярів, відновлених із точок A і B до напрямків їхніх швидкостей, причому $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{\omega OA}{\omega OB} = \dfrac{OA}{OB}$, тобто швидкості точок плоскої фігури прямо пропорційні їхнім відстаням від миттєвого центра швидкостей.

3. Відомо, що швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, спрямовані в одну сторону, перпендикулярні відрізку AB й за модулем не рівні.

У цьому випадку миттєвий центр швидкості O перебуває в точці перетину прямої, що з'єднує початок векторів v_A і v_B, із прямою, що з'єднує кінці цих векторів. Якщо вектори швидкостей точок A і B рівні між собою, то миттєвий центр швидкостей у цей момент перебуває в нескінченності, миттєва кутова швидкість дорівнює нулеві, швидкості всіх точок плоскої фігури будуть однаковими і рух буде миттєво поступальним.

4. Відомо, що швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, спрямовані в протилежні сторони й перпендикулярні відрізку AB.

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O перебуває в точці перетинання відрізка AB із прямою, що з'єднує кінці векторів v_A і v_B.

5. Відомо, що плоска фігура котиться без ковзання по нерухомій кривій.

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O перебуває в точці дотику фігури із кривою, тому що швидкість цієї точки фігури в цей момент дорівнює нулеві.

Тема 11. Основні аксіоми динаміки

11.1. Аксіоми динаміки

Основним завданням динаміки є вивчення загальних законів руху матеріальних точок і твердих тіл з урахуванням причин, що їх викликають. Динаміка відповідає на запитання: чому так чи інакше рухається тіло.

В основу динаміки покладені чотири аксіоми.

1. Принцип інерції: матеріальна точка перебуває в рівновазі, тобто в стані спокою, або рухається прямолінійно й рівномірно, якщо рівнодіюча всіх сил дорівнює нулеві:

$$\overline{F}_{\Sigma} = \sum F_i = 0,$$

тобто (рис. 11.1),

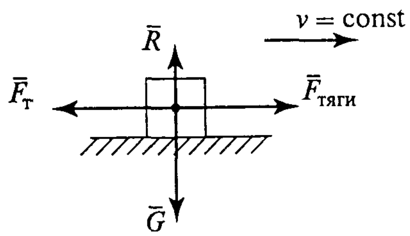


Рис. 11.1. **Стан спокою**

2. Основний закон динаміки (другий закон Ньютона): прискорення, одержуване тілом під дією деякої сили, прямопропорційне величині цієї сили і направлене уздовж лінії її тобто (рис.11.2):

$$\overline{\alpha} = \overline{F} / m \quad \text{або} \quad \overline{F} = m\overline{\alpha}.$$

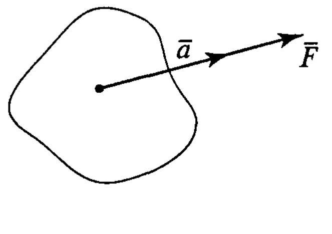


Рис.11.2. **Прискорення тіла**

3. Принцип незалежності дії сил: прискорення, яке одержує тіло під дією декількох сил, буде таким же, як прискорення, яке одержує тіло під дією однієї сили, що дорівнює геометричній сумі цих сил (рис. 11.3), тобто:

$$\overline{\alpha} = \overline{F} / m = \sum \overline{F}_i / m.$$

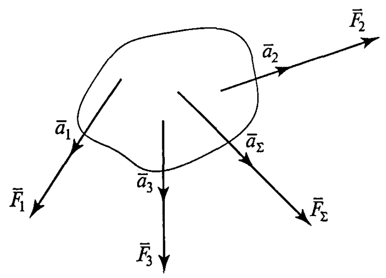


Рис.11.3. **Прискорення тіла під дією декількох сил**

4. Принцип дії й протидії: сили, з якими два тіла діють одне на одного, рівні за величиною, протилежні за напрямком і лежать на одній прямій (рис.11.4).

Висновок. Прискорення, отримані тілами при їхній взаємодії, обернено пропорційні їхнім масам:

$$\left|\frac{\overline{a_1}}{\overline{a_2}}\right| = -\left|\frac{m_2}{m_1}\right|.$$

$$\left|\overline{F_1}\right| = -\left|\overline{F_2}\right|, \quad \left|m_1\overline{a_1}\right| = -\left|m_2\overline{a_2}\right|.$$

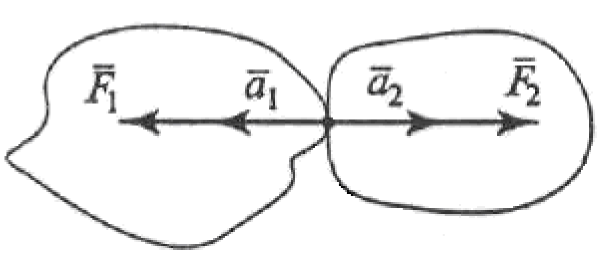
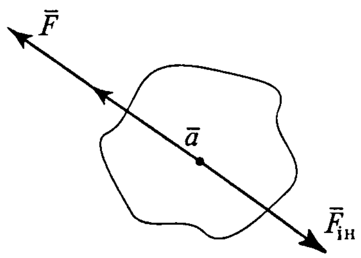


Рис. 11.4. **Дія та протидія тіл**

При русі тіла із прискоренням на нього завжди діє сила інерції.

11.2. Сила інерції

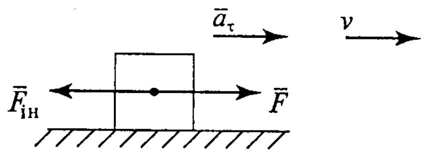
Сила інерції – це сила, чисельно рівна добутку маси тіла на прискорення й спрямована завжди в протилежний прискоренню бік (рис.11.5):



$$\overline{F}_{ін} = -m\overline{\alpha}.$$

Рис. 11.5. **Напрямок сили інерції**

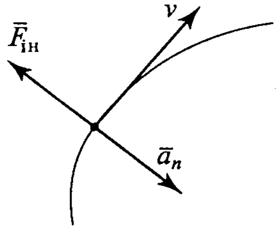
При поступальному русі тіла сила інерції виникає за рахунок дотичного прискорення (рис. 11.6):



$$\overline{F}_{ін} = -m\overline{\alpha}_{\tau}.$$

Рис. 11.6. **Напрямок сили інерції при поступальному русі**

При русі по криволінійній траєкторії сила інерції виникає за рахунок нормального прискорення (рис. 11.7):



$$\overline{F}_{ін} = -m\overline{\alpha}_{н}.$$

Рис. 11.7. **Напрямок сили інерції при криволінійному русі**

11.3. Принцип Даламбера і рівняння кінетостатики

Принцип Даламбера: матеріальна точка перебуває в рівновазі, якщо алгебраїчна сума проекцій всіх діючих сил і сил інерції дорівнює нулеві.

Рівняння кінетостатики:

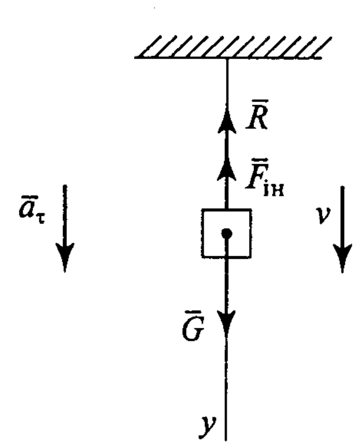
$$\Sigma\left(F_i + F_{ін}\right)_y = 0.$$

Задача 2. Вантаж масою 900 кг, підвішений на тросі, опускається вертикально вниз із прискоренням 2 м/с^2. Знайти натяг троса, нехтуючи його власною масою.

Дано:	
m = 900 кг	
a_τ = 2 м/с^2	
g = 10 м/с^2	
Знайти F_H	

Розв'язок. 1. Будуємо розрахунково-силову схему (рис. 11.8), тобто показуємо всі сили, що діють на тіло, що рухається. Потім указуємо вісь координат, уздовж якої відбувається рух тіла.

2. Складаємо рівняння кінетостатики й розв'язуємо його щодо невідомої величини F_H:



$$\sum\left(F_1 + F_{ін}\right)_y = 0$$

$$G - F_{ін} - R = 0,$$

де $G = mg$,

$$F_{ін} = ma_\tau,$$

$$|R| = |F_H|.$$

Маємо

$$mg - ma_\tau - F_H = 0,$$

Рис.11.8. **Розрахунково-силова схема**

Звідки

$$F_H = mg - ma_\tau = m(g - a_\tau) = 900(10 - 2) = 7200H.$$

Відповідь: $F_{\mathbf{Н}}$ = 7200 Н.

Задача 3. Автомобіль із масою 1600 кг рухається по мосту з постійною швидкістю 90 км/г. Визначити силу тиску автомобіля на міст, якщо r = 500 м.

Дано:
m = 1600 кг
v = 90 км/г = 25 м/с
r = 500 м
g = 10 м/с^2

Знайти Fт

Розв’язок. 1. Будуємо розрахунково-силову схему (рис. 11.9).

2. Складаємо рівняння кінетостатики:

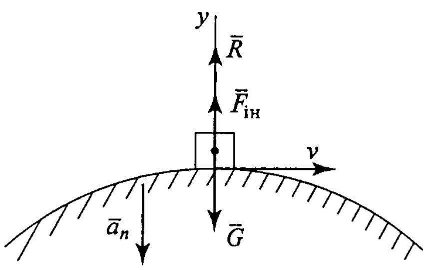


Рис. 11.9. **Розрахунково-силова схема**

$$\sum (F_1 + F_{ін})_y = 0$$
$$-G + F_{ін} + R = 0,$$
$$F_{ін} = m\alpha_н = mv^2 / r, \qquad (\alpha_н = v^2 / r), \qquad |R| = |F_T|.$$

Маємо
$$-mg + mv^2 / r + F_T = 0,$$
звідки
$$F_T = mg - mv^2 / r = 1600 \cdot 10 - 1600 \cdot 25^2 / 500 = 14000H = 14кH.$$

Відповідь: F_T = 14 кН.

Тема 12. Робота при поступальному й обертальному русі

12.1. Робота постійної сили при поступальному русі. Робота сили ваги, сили пружності й сили тертя

Розглянемо матеріальну точку M, до якої прикладена в числі інших сила F. Нехай точка перемістилася прямолінійно з положення M_0 у положення M_1, пройшовши шлях s (рис. 12.1).

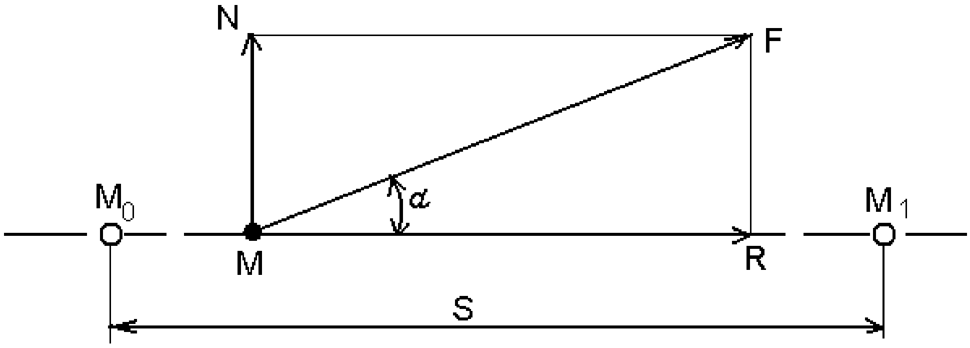


Рис. 12.1. **Прямолінійний рух точки**

Щоб установити кількісну міру дії сили F на шляху s, розкладемо цю силу на складові N і R, спрямовані відповідно перпендикулярно напрямку переміщення й уздовж його. Тому що складова N не може рухати точку або чинити опір її руху в напрямку s, то дію сили F на шляху s можна визначити добутком Rs. Ця нова величина називається роботою й позначається W. Отже,

$$W = Rs = Fs\cos\alpha$$

тобто робота сили дорівнює добутку її модуля на шлях і на косинус кута між напрямком сили й напрямком переміщення.

Таким чином, робота є мірою дії сили, прикладеної до матеріальної точки при деякому її переміщенні.

Робота – величина скалярна.

Розглянемо три частки випадку обчислення роботи: 1) $\alpha = 0^0$, у цьому випадку W = Fs;

2) $\alpha = 90^0$ у цьому випадку W = 0;

3) $\alpha = 180^0$ у цьому випадку W=-Fs.

Отже, робота позитивна, якщо напрямок сили й напрямок переміщення збігаються (або $\alpha < 90^0$); робота негативна, якщо напрямок сили й напрямок переміщення протилежні (або $\alpha > 90^0$); робота дорівнює нулеві, коли напрямок сили й напрямок переміщення взаємно перпендикулярні.

Так, наприклад, при підйомі тіла нагору робота сили ваги негативна, при русі донизу – позитивна, а при русі по горизонтальній площині робота сили ваги дорівнює нулеві.

Сили, що роблять позитивну роботу, називаються рушійними силами, сили, що роблять негативну роботу, силами опору.

Одиниця роботи

$$[W]=[F][s]=сила\times довжину=ньютон\times метр=джоуль\,(Дж)$$

Джоуль – це робота сили в один ньютон на шляху в один метр (при збігу напрямків сили й переміщення точки її додатка).

Теорема про роботу сили ваги

Теорема. Робота сили ваги не залежить від виду траєкторії й дорівнює добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її додатка.

Нехай матеріальна точка M рухається під дією однієї лише сили ваги G і за якийсь проміжок часу переміщається з положення M_1, у положення M_2, пройшовши шлях s (рис. 12.2).

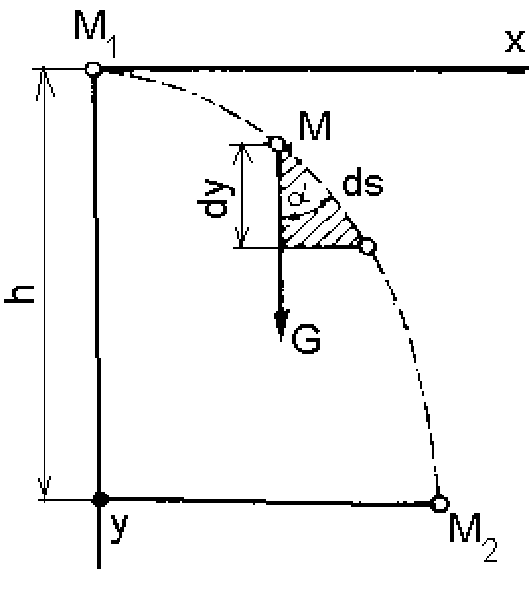


Рис. 12.2. **Робота сили ваги**

На траєкторії точки M виділимо нескінченно малу ділянку ds, що будемо рахувати прямолінійною, і з його кінців проведемо прямі, паралельні осям координат, одна з яких вертикальна, а інша горизонтальна.

Із заштрихованого трикутника одержимо, що

$$dy = ds\cos\alpha .$$

Елементарна робота сили G на шляху ds дорівнює

$$dW = Gds\cos\alpha .$$

Повна робота на шляху s дорівнює

$$W = \int_0^s Gds\cos\alpha = \int_0^h Gdy = G\int_0^h dy = Gh .$$

Отже,

W=Gh;

теорема доведена.

Сили, робота яких не залежить від виду траєкторії, називаються потенційними. До числа таких сил відносяться, наприклад, сили ваги, сили всесвітнього тяжіння, натяг пружини.

Робота сили пружності дорівнює добутку сили пружності на величину деформації (рис. 12.3):

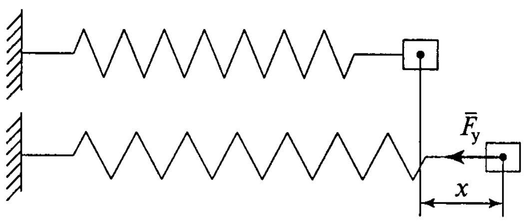


Рис. 12.3. **Робота сили пружності**

$$W = F_y\chi = \frac{k\chi^2}{2}$$

де k – коефіцієнт жорсткості матеріалу.

Робота сили тертя визначається за наступними формулами:

а) якщо тіло рухається горизонтально (рис. 12.4),

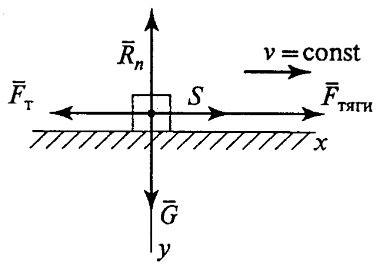


Рис. 12.4. **Робота сили тертя при горизонтальному русі**

Сила тертя – величина, що виникає в результаті взаємодії двох поверхонь, що труться

$$W=-F_T S=-mg/S.$$

$F_T = R_n f$

де R_n – сила нормального тиску;

f – коефіцієнт тертя ковзання, величина якого залежить від властивостей поверхонь, що труться.

Для визначення сили тертя складемо рівняння рівноваги:

$\sum F_{iy} = 0,$

$R_n - G = 0,$

$R_n = G = mg,$

звідки $F_T = mgf$

б) якщо тіло рухається по похилій площині (рис. 12.5),

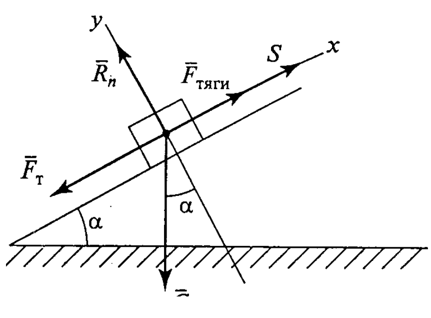


Рис. 12.5. **Робота сили тертя при русі по похилій площині**

Робота сили тертя дорівнює:

$$W = -F_T S = -mg\cos\alpha \cdot f \cdot S$$

Для визначення сили тертя складемо рівняння рівноваги:

$\sum F_{iy} = 0,$

$R_n - G\cos\alpha = 0,$

$R_n = G\cos\alpha = mg\cos\alpha,$

звідки

$F_T = R_n f = mg\cos\alpha f$

12.2. Робота постійної сили при обертальному русі тіла

На нескінченно малій ділянці ds криволінійний шлях можна вважати прямолінійним, а силу – постійною. Тоді елементарна робота d на шляху ds дорівнює:

$$dW = Fds\cos(F,v).$$

Робота на кінцевому переміщенні дорівнює сумі елементарних робіт:

$$W = \int_0^s F\cos(F,v)ds.$$

Побудуємо графік, що виражає залежність між $F\cos(F,v)$ і пройденою відстанню s (рис. 12.6,а).

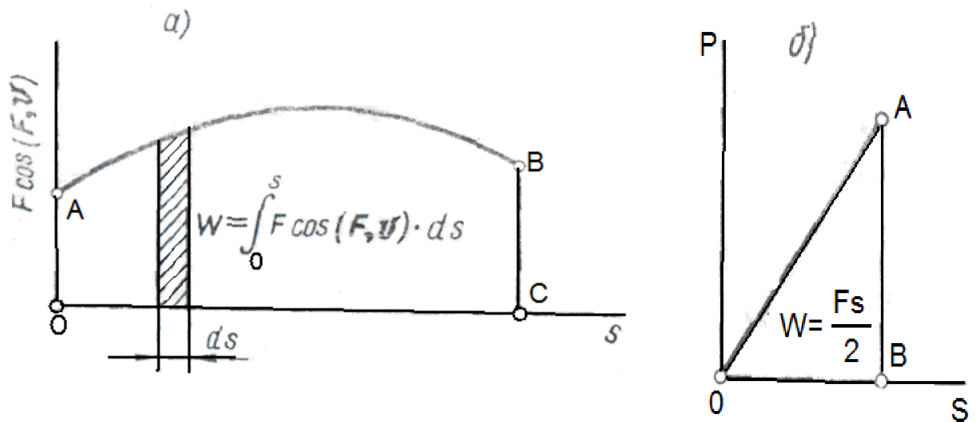


Рис. 12.6. **Робота на кінцевому переміщенні**

Площа заштрихованої площини, яку можна прийняти за прямокутник, дорівнює елементарній роботі на шляху ds:

$$dW = F\cos(F, v)ds,$$

а робота сили F на кінцевому шляху s графічно виражається площею фігури ОАВС, обмеженою віссю абсцис, двома ординатами й кривою АВ, що називається кривою сил.

Якщо сила збігається з напрямком переміщення й зростає від нуля пропорційно шляху, то робота графічно виражається площею трикутника ОАВ (рис. 15.2,б) і дорівнює половині добутку сили на шлях:

$$W = \frac{Fs}{2}.$$

Уявимо собі диск, що обертається навколо нерухомої осі під дією постійної сили F (рис.12.7), точка додатка якої переміщається разом з диском.

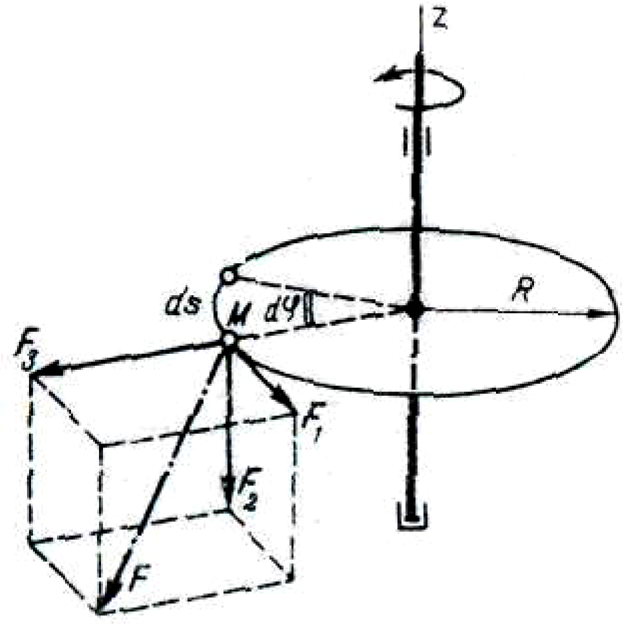


Рис. 12.7. **Диск, який обертається навколо нерухомої осі**

Розкладемо силу F на три взаємно перпендикулярні складові F_1 – окружне зусилля, F_2 –осьове зусилля, F_3 – радіальне зусилля.

При повороті диска на нескінченно малий кут $d\varphi$ сила F зробить елементарну роботу, що на підставі теореми про роботу рівнодіючої буде дорівнювати сумі робіт складових. Робота складових F_2 і F_3 дорівнює нулеві, тому що вектори цих сил перпендикулярні нескінченно малому переміщенню ds точки додатка M, тому елементарна робота сили F дорівнює роботі складової F_1:

$$dW = F_1 ds = F_1 R d\varphi .$$

При повороті диска на кінцевий кут φ робота сили F дорівнює

$$W = \int_0^{\varphi} F_1 R d\varphi = F_1 R \int_0^{\varphi} d\varphi = F_1 R \varphi ,$$

де кут φ виражається в радіанах.

Тому що моменти складових F_2 і F_3 щодо осі z дорівнюють нулю, то на підставі теореми Вариньона момент сили F щодо осі z дорівнює

$$M_z(F) = F_1 R.$$

Момент сили, прикладеної до диска щодо осі обертання, називається обертаючим моментом і, відповідно до стандарту ИСО, позначається Т:

$$T = M_z(F),$$

отже:

$$W = T\varphi$$

Робота постійної сили, прикладеної до обертового тіла, дорівнює добутку обертового моменту на кутове переміщення.

Тема 13. Механічна потужність при поступальному й обертальному русі

13.1. Поняття потужності

Робота, що виконується якоюсь силою, може бути здійснена за різні проміжки часу, щоб охарактеризувати, наскільки швидко відбувається робота, у механіці існує поняття потужності, яка позначається Р.

Потужністю сили називається робота, виконана за одиницю часу.

13.2. Потужість при поступальному русі

Якщо робота відбувається рівномірно, то потужність обчислюють за формулою:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Якщо напрямок сили й напрямок переміщення збігаються, то цю формулу можна переписати в іншій формі:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} \text{ або } P = Fv .$$

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість точки її додатка.

Одиниця потужності:

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{робота}{час} = \text{джоуль у секунду = ват (Вт).}$$

13.3. Потужність при обертальному русі

Якщо робота виконується силою, прикладеною до обертового тіла, і притому рівномірно, то потужність у цьому випадку обчислюють за формулою

$$P = \frac{W}{t} = \frac{T\varphi}{t} \text{ або } P = T\omega .$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла, дорівнює добутку обертаючого моменту на кутову швидкість.

13.4. Коефіцієнт корисної дії (ККД) машин і механізмів

Здатність тіла при переході з одного стану в інший виконувати роботу називається енергією.

Енергія є загальна міра різних форм руху матерії.

При передачі або перетворенні енергії, а також при здійсненні роботи мають місце втрати енергії. У процесі передачі руху або виконання роботи рушійні сили механізмів і машин переборюють сили опору, які підрозділяються на сили корисного опору й сили шкідливого опору.

Втрати на подолання сил шкідливого опору відбуваються у всіх механізмах і машинах і викликаються силами тертя й силами опору навколишнього середовища.

Відносна кількість енергії, використовуваної в машині за прямим призначенням, характеризується коефіцієнтом корисної дії (к.к.д.), що позначається η.

Коефіцієнтом корисної дії називається відношення корисної роботи (або потужності) до витраченої:

$$\eta = \frac{W_к}{W_в} = \frac{P_к}{P_в}.$$

Якщо коефіцієнт корисної дії враховує тільки механічні втрати, то він називається механічним (к.к.д.).

К.к.д. – завжди правильний дріб, іноді його виражають у відсотках:

$$\eta\ \% = \left(\frac{W_K}{W_в}\right)100.$$

Чим ближчий к.к.д. до одиниці, тим продуктивніша машина. Приведемо орієнтовні значення к.к.д. для найпоширеніших механізмів і машин:

Металообробні верстати 0,8
Кривошипно-шатунний механізм 0,95
Черв'ячна передача ....до 0.92
Теплові двигуни ....до 0.40
Турбіни 0.95
Електродвигуни 0.92

Якщо ряд механізмів з'єднаний послідовно, тобто кожний наступний механізм одержує рух від відомої ланки попереднього механізму, то тоді загальний к.к.д. η дорівнює добутку к.к.д. всіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots \eta_H,$$

де η_1, η_2, η_3, ..., η_H – к.к.д. кожного механізму окремо.

Як приклад визначимо к.к.д. шорсткої похилої площини з кутом підйому α, коли тіло силою ваги G рівномірно піднімається по цій площині на висоту h; під дією горизонтальної сили F.

Якщо шлях, пройдений тілом, позначити s, то корисна робота

$$W_K = Gh = Gs\sin\alpha,$$

а витрачена робота

$$Wв = Fs\cos\alpha = Gtg(\alpha+\varphi)s\cos\alpha,$$

тому що, $$F = Gtg(\alpha+\varphi),$$

тоді

$$\eta = \frac{W_K}{W_З} = \frac{Gs\sin\alpha}{[Gtg(\alpha+\varphi)s\cos\alpha]} = \frac{tg\alpha}{tg(\alpha+\varphi)}.$$

Отже, к.к.д. похилої площини, коли рушійна сила горизонтальна, дорівнює:

$$\eta = \frac{tg\alpha}{tg(\alpha+\varphi)},$$

де α – кут, що становить похила площина з обрієм;
φ – кут тертя.

Неважко переконатися, що к.к.д. похилої площини росте зі збільшенням кута її нахилу.

За такою ж формулою визначається к.к.д. при роботі гвинта й гайки із прямокутним різьбленням (наприклад, у домкраті). к.к.д. гвинтової пари із трапецієвидним або трикутним різьбленням

$$\eta = \frac{tg\psi}{tg(\psi+\varphi')},$$

де ψ – кут підйому гвинтової лінії різьблення;
φ’ – наведений кут тертя.

Тема 14. Теореми динаміки

14.1. Кількість руху матеріальної точки

Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між зміною динамічних заходів руху матеріальної точки і заходами дії сил, прикладених до цієї точки.

Кількістю руху mV матеріальної точки називається вектор, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість, і що має напрям швидкості. Кількість руху є динамічна міра руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху:

$$[mV] = [m]\ [V] = кг*м/с.$$

Імпульсом Ft постійної сили F називається вектор, що дорівнює добутку сили на час дії імпульсу сили є міра її дії в часі.

Одиниці імпульсу сили:

$$[Ft] = [F]\ [t] = [m]\ [\alpha]\ [t] = (кг * м/с2) * з = кг * м/с.$$

Кількість руху й імпульс сили виражаються в однакових одиницях, зв'язок між ними встановлює теорема про зміну кількості руху, що формулюється так: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той же проміжок часу.

Для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією постійної сили F, рух буде рівнозмінним. Формула швидкості записується так:

$$V = V_0 + \alpha t.$$

Переносимо V0 у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу m матеріальної точки:

$$mV - mV_0 = m\alpha t.$$

Але добуток маси точки на її прискорення є сила, під дією якої точка рухається, отже:

$$mV - mV_0 = Ft.$$

У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час t, а в правій – імпульс сили за той же проміжок часу.

Якщо рух сповільнений ($V < V_0$), то вектор сили направлений у бік, протилежний швидкості і у формулу сили треба підставляти з негативним знаком.

У разі криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної за модулем і напрямом сили весь проміжок часу t можна розбити на нескінченно малі проміжки, в межах яких вектор сили можна вважати постійним, а шлях – прямолінійним. Тоді імпульс сили за кінцевий проміжок часу t буде дорівнювати сумі елементарних імпульсів.

В цьому випадку вираз теореми про зміну кількості руху набуває наступного вигляду:

$$mV - mV_0 = \int_0^t F dt.$$

Якщо до матеріальної точки прикладено декілька постійних сил, то зміна кількості руху буде дорівнювати сумі (алгебраїчної, якщо сили діють по одній прямій або векторної, якщо сили діють під кутом один до одного) імпульсів даних сил:

$$mV - mV_0 = \sum (F_i t).$$

Механічною системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, якимсь чином зв'язаних між собою. Всяке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок.

Сили взаємодії точок даної системи називаються внутрішніми. Сили, з якими діють на дану систему інші точки, що не входять в цю систему – зовнішніми.

Центр мас, або центр інерції, системи рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил.

На довільну точку системи маси m діє внутрішня сила $\overline{F}_{вн}$ і зовнішня $\overline{F}$ сили. Згідно з основним рівнянням динаміки:

$$m\overline{\alpha} = \overline{F}_{вн} + \overline{F}.$$

Для всієї системи:

$$\sum m\overline{\alpha} = \sum \overline{F}_{вн} + \sum \overline{F}.$$

Тут $\sum \overline{F_{вн}}$ – головний вектор внутрішніх сил системи, що дорівнює, як відомо, нулеві;

$\sum \overline{F} = \overline{R}$ – головний вектор зовнішніх сил.

Тоді $\sum m\overline{\alpha} = M\alpha_c$, або $M\alpha_c = \overline{R}$:

де М – маса системи;

$\overline{\alpha_c}$ – прискорення центру мас.

Іншими словами, кількість руху системи дорівнює: $\overline{K} = \sum m\overline{V}$. Для довільної точки системи М маси m, на яку діють внутрішня $\overline{F_{вн}}$ і зовнішня $\overline{F}$ сили (рис.14.1).

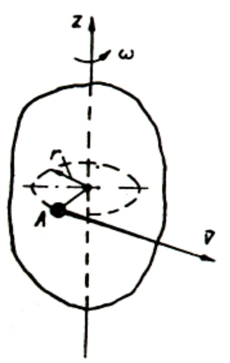


Рис. 14.1. **Визначення кінетичної енергії тіла, яке обертається**

Швидкість точки дорівнює V. Тоді:

$$\frac{d}{dt}(m\overline{V})=\overline{F_{вн}}+\overline{F}\ .$$

Для системи одержимо:

$$\frac{d}{dt}(\sum m\overline{V})=\sum\overline{F_{вн}}+\overline{F}$$

або

$$\frac{d\overline{k}}{dt}=\overline{R}$$

де $\overline{K}$ – кількість руху системи;

$\overline{R}$ – головний вектор зовнішніх сил, що дорівнює $\sum\overline{F}$; головний вектор внутрішніх сил $\sum\overline{F_{вн}}$ дорівнює нулеві.

Це рівняння виражає теорему про зміну кількості руху системи.

Теорема. Перша похідна за часом від кількості руху системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил.

У інтегральній формі виходить теорема імпульсів, тобто приріст кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил за той же проміжок часу.

$$d\overline{k}=\overline{R}*dt=d\overline{S}$$

$$\int_{K_0}^{\overline{K}} d\overline{K}=\int_{t_0}^{t} d\overline{S}$$

або

$$\overline{K}-\overline{K_0}=\overline{S}$$

або, якщо

$$\overline{K}=M\,\overline{V_c},$$

то

$$M\,(\overline{V_c}-V_{0c})=\overline{S}\cdot$$

14.2. Головний момент кількості руху або кінетичний момент механічної системи щодо осі

У разі поступального руху твердого тіла швидкості всіх його точок однакові і дорівнюють швидкості його центру мас, тобто

$$\overline{V}=\overline{V}_c.$$

отже,

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{v_c^2}{2}\sum m$$

або

$$T=\frac{Mv_c^2}{2}$$

де M – маса всього тіла.

У разі поступальної ходи твердого тіла його кінетична енергія рівна половині твору маси тіла на квадрат швидкості його центру мас.

У разі обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі z лінійна швидкість в його довільній точці A маси m складає ωr (рис.14.1). Отже

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}=\sum\frac{mr^2\omega^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2.$$

Величина $\sum mr^2$ називається моментом інерції тіла щодо осі обертання і позначається I_z, тобто

$$I_z=\sum mr^2.$$

Тоді

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

У разі обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі, його кінетична енергія дорівнює половині добутку моменту інерції тіла щодо осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

Моменти інерції тіла. У всіх питаннях динаміки, пов'язаних з обертанням тіла навколо осі, істотного значення набуває специфічне поняття механіки – момент інерції тіла щодо осі або точки.

Хай є якесь тверде тіло масою М (рис.14.2).

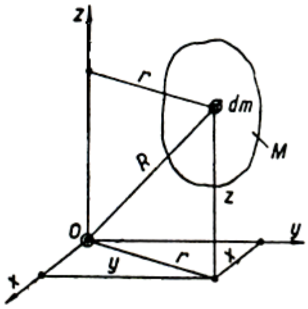


Рис. 14.2. **Визначення моменту інерції тіла**

Виділимо в цьому тілі об'ємний елемент з масою dm. Відстань цього елементу до осі z позначимо через r. Моментом інерції тіла щодо осі z – осьовим моментом інерції I_z – називається інтеграл від добутку елементарної маси dm на квадрат відстані r елементарної частинки до осі:

$$I_z = \int_{(M)} r^2 \cdot dm. \qquad (14.1)$$

Інтеграл (14.1) поширений по всій масі тіла.

Розмірність моменту інерції в системі СІ – $м^2 \cdot кг$; одиниця вимірювання – кілограм-метр в квадраті.

Моментом інерції тіла щодо заданого центру О – полярним моментом інерції I_o – називається інтеграл від добутку елементарної маси dm на квадрат відстані R до заданого центру О:

$$I_0 = \int_{(M)} R^2 \cdot dm. \tag{14.2}$$

Згідно рис. 14.2

$$r^2 = x^2 + y^2$$

і тому

$$\left.\begin{aligned} I_z &= \int_{(M)} (x^2 + y^2)\, dm. \\ &\text{Згідно} \\ I_x &= \int_{(M)} (y^2 + z^2)\, dm; \\ I_y &= \int_{(M)} (x^2 + z^2)\, dm. \end{aligned}\right\} \tag{14.3}$$

Розглянемо рівність 14.2. З рисунку 14.2 одержуємо

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

і, отже

$$I_0 = \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dm. \tag{14.4}$$

З формул 14.3 і 14.4 одержуємо співвідношення між полярними і осьовими моментами інерції

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_{y +} I_z).$$

Якщо тіло має форму плоскої тонкої пластинки, товщиною якої можна нехтувати, то моменти інерції такої плоскої матеріальної фігури обчислюються в системі координатних осей Оху, що лежать у площині фігури (рис. 14.3).

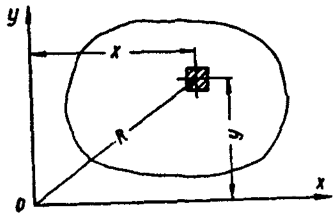


Рис. 14.3. **Визначення моменту інерції плоскої матеріальної фігури**

В цьому випадку

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int\limits_{(M)} y^2\, dm; \\ I_y &= \int\limits_{(M)} x^2\, dm. \end{aligned}\right\}$$

А так само

$$R^2 = x^2 + y^2,$$

то

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Обертальний рух твердого тіла. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо осі z з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε під дією системи сил F_1, F_2, F_3… (рис. 14.4).

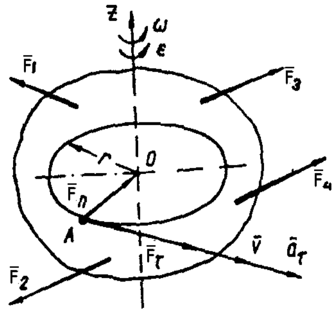


Рис. 14.4. **Обертання тіла під дією сил**

Розіб'ємо тіло на елементарні частинки, однією з яких буде А з масою m. Її відстань до осі обертання – r. Тоді момент інерції тіла щодо осі обертання z.

$$I_z = \sum mr^2.$$

Множимо обидві частини цієї рівності на ω і одержуємо

$$I_z\omega = \sum mr^2\omega$$

або

$$I_z\omega = \sum mvr,$$

де V – лінійна швидкість точки.

Диференціюємо одержаний вираз за часом:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum mr \frac{dv}{dt};$$

$$I_z\varepsilon = \sum m\alpha_\tau r = \sum F_\tau r.$$

Тут F_τ позначає величину дотичної складової сили $\overline{F}$, що діє на кожну елементарну частинку тіла.

Добуток $F_\tau r$ виражає величину моменту сили $\overline{F}_\tau$ щодо осі z. Складаючи, отримуємо головний момент відносно осі z, тобто

$$\sum F_\tau r = \sum mom_z(\overline{F}_\tau).$$

Лінія дії сили $\overline{F}_n$ (нормальної складової сили $\overline{F}$) перетинає вісь обертання z, а тому її момент щодо осі z дорівнює нулеві. Отже, одержимо тільки один головний момент, вказаний вище, який і представить головний момент системи сил, що діють на тіло, щодо осі z, який позначимо Lz:

$$L_z = \sum mom_z(\overline{F}) = \sum mom_z(\overline{F}_\tau).$$

Підставивши це значення в одержане раніше рівняння, знайдемо

$$I_z \varepsilon = L_z, \tag{14.5}$$

де

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Отже,

$$I_z \ddot{\varphi} = L_z.$$

Одержана рівність є диференціальним рівнянням обертання тіла навколо нерухомої осі. Порівнявши це рівняння з основним рівнянням динаміки $m\overline{\alpha} = \overline{F}$, приходимо до висновку, що у разі обертання тіла навколо нерухомої осі момент інерції грає роль, аналогічну масі при поступальному русі тіла.

З виразу (14.5) випливає, що якщо L_z=0, то обертання буде рівномірним (ε=0); якщо ж L_z=const, то обертання виявляється рівнозмінним (ε = const).

Контрольні запитання

Модуль 1. Статика

1. Матеріальна точка.
2. Абсолютно тверде тіло.
3.Сила.
4.Система сил.
5.Еквівалентні системи сил.
6. Рівнодіюча сила.
7. Урівноважуюча сила.
8. Принцип інерції.
9. Принцип рівності двох сил.
10. Принцип приєднання і виключення взаємоурівноважуючих сил.
11. Принцип паралелограма.
12. Принцип дії і протидії.
13. Вільне і невільне тіло.
14. Поняття зв'язку і реакції зв'язку.
15. Типи зв'язків і напрямок їх реакцій
16. Плоска система сил, що сходяться. Умова рівноваги.
17. Момент сили щодо точки. Плоска система пар сил. Умова рівноваги.
18. Плоска система довільно розташованих сил. Умова рівноваги.
19. Просторова система сил.
20.Тертя.
21. Поняття балки.
22. Типи балкових опор.
23. Шарнірнорухома опора і її реакція.
24. Шарнірно нерухома опора і її реакція.
25. Опора з повторюваним защемленням і її реакцією.
26. Поняття сили ваги і центра ваги.
27. Формули для визначення центра ваги простих геометричних фігур, складних перетинів і фігур прокатних профілів.

Модуль 2. Кінематика. Динаміка

28. Введення в кінематику.
29. Векторний спосіб задання рухомої точки.
30. Природний спосіб задання рухомої точки.
31. Поступальний і обертальний рухи твердого тіла.
32. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

33. Абсолютний і відносний рух точки; переносний рух.
34. Теорема про додавання прискорень при переносних поступальних і переносному обертальному рухах; коріолисового прискорення і його обчислення.
35. Плоскопаралельний (плоский) рух твердого тіла.
36. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний разом з полюсом і обертальний навколо полюса: незалежність кутової швидкості фігури від вибору полюса.
37. Визначення швидкості будь-якої точки фігури як геометричної суми швидкості полюса і швидкості цієї точки при обертанні фігури (тіла).
38. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей.
39. Аксіоми динаміки.
40. Сила інерції.
41. Принцип Даламбера і рівняння кінетостатики.
42. Робота постійної сили при поступальному русі. Робота сили ваги, сили пружності і сили тертя.
43. Робота постійної сили при обертальному русі тіла.
44. Поняття потужності.
45. Потужність при поступальному русі.
46. Потужність при обертальному русі тіл.
47. Коефіцієнт корисної дії (ККД) машин і механізмів.
48.Кількість руху матеріальної точки.
49.Головний момент кількості рухів або кінетичний момент механічної системи щодо осі.

Закінчення

В конспекті лекцій викладені основи теоретичної механіки, тобто, питання про стан спокою, руху, та передачі сил окремими частинами машин.

Припускається, що студенти володіють основами математичного аналізу та вміють виконувати основні дії з векторними величинами.

Слід підкреслити, що в навчальній дисципліні "Теоретична механіка" для студентів економічних спеціальностей, матеріал викладений від окремого до загального. Такий підхід дає можливість студенту засвоїти матеріал та робить навчальний процес більш наочним та доказовим.

Для успішного оволодіння навчальною дисципліною студенту потрібно бути графічно грамотним, тобто, вміти читати та виконувати креслення. Також потрібно знати основи матеріалознавства та окремі розділи систем технології.

Конспект лекцій виконаний відповідно з діючими стандартами, буквенні позначення фізичних величин відповідають Міжнародному стандарту та рекомендаціям ІСО.

Рекомендована література

Основна

1. Гернет М. М. Курс теоретической механики. Учебник для студентов вузов. 5 –е издание испр. – М.: Высшая школа, 1987, – 344 с.

2. Геронимус Я. Л. Теоретическая механика. – М.: Наука. – 1973, – 512 с.

3. Ивченко В. А. Техническая механика. Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 160 с.

4. Кильчевский Н. А. Основы теоретической механики. Учеб. пособие. – К.: Высшая школа, 1986. – 296 с.

5. Механика и молекулярная физика. Лекции для студентов 1 и 2 курса. – Харьков: ХИЭИ, 1974. – 76 с.

6. Новожилов И. В. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. Учебное пособие /И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин. – М.: Высшая школа, 1986. – 136 с.

7. Попов М. В. Теоретическая механика. Учебник для студентов немашиностроительных специальностей вузов. – М.: Наука, 1986. – 356 с.

Додаткова

8. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Ч. 1, 2 – М.: Высшая школа, 1984. – 368 с.

9. Бутенин Н. В., Курс теоретической механики. Т.1,2 /Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Высшая школа, 1985. – 428 с.

10. Добронравов В. В. Курс теоретической механики / В .В. Добронравов, Н. Н. Микитин. – М.: Высшая школа, 1983. – 276 с.

11. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1986 – 128 с.

12. Сборник задач по теоретической механике / Под ред. К. С. Колесникова. – М.: Высшая школа, 1983. – 148 с.

13. Сборник задач по теоретической механике / Под ред.Н. А. Бражниченко, В. Л. Кан, Б. Л. Минцберг – М.: Высшая школа, 1987. – 188 с.

14. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А. А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985. – 144 с.

15. Старжинский В. М. Теоретическая механика. – М.: Высшая школа, 1980. – 212 с.

16. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986. – 220 с.

17. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. 1 /А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М.: Высшая школа, 1984 – 228 с.

18. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1984. – 220 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Свідерський Володимир Павлович
Прасок Олександр Григорович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

для студентів напряму підготовки "Видавничо-поліграфічна справа"
всіх форм навчання

Відповідальний за випуск **Крюк А. Г.**
Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Новицька Л. М.**
Коректор **Чистякова А. В.**

План 2008 р. Поз. №100-К.
Підп. до друку 23.10.2008. Формат 60 × 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 7,0. Обл.-вид. арк. 8,75. Тираж 200 прим. Зам. №695.

Видавець і виготівник — видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк №481 від 13.06.2001 р