УДК 330.46:53

ТРИВИМІРНІ ЦІЛОЧИСЛОВІ БРУСИ В ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Сенчуков В. Ф., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики й ЕММ,
Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків, Україна

Анотація — **Розглядається оригінальний підхід до розв'язання задач цілочислової (дискретної) оптимізації, який базується на аналітичному описі залежності координат цілої точки від її номера. На цих засадах пропонується уникнути розв'язування задачі без урахування вимог дискретності змінних. Відшукання оптимуму функції цілі відразу здійснюється на множині цілих точок.**

Ключові слова — **Дискретне програмування, комбінаторні методи, методи відтинання, нумерація цілих точок, область допустимих значень змінних, оптимізаційні задачі економіки, параметричні рівняння, послідовність, формула, цільова функція, цілочислові бруси, шар.**

Однією із сучасних проблем управління підприємствами є моделювання нелінійних процесів в економіці, як і взагалі нелінійних динамічних процесів, і розробка методів розв'язання відповідних математичних задач. Застосування лінійних моделей опису економічних процесів, апарат яких добре розроблений, для постановки і розв'язання багатьох важливих задач не є ефективним.

Головне достоїнство запропонованого підходу до відшукання мінімуму чи максимуму цільової функції полягає в тому, що він не потребує неперервності і диференційовності цільової функції. Вона може бути будь-якою обмеженою в області допустимих значень функцією, а область допустимих значень – довільною замкненою областю, у тому числі многозв'язною, з межею із кусків неперервних кривих (чи поверхонь).

Отримані результати є подальшим розвитком методу накладання цілочислових сіток (НЦС) у поєднанні з методом повних і неповних сум (ПНС) отримання загальних членів послідовностей у замкненому вигляді за допомогою функції антьє [2].

Для багатовимірних просторів залишається, безумовно, проблема, пов'язана з експоненціальним зростанням кількості даних через збільшення вимірності простору.

Ідея пропонованого підходу до цілочислової оптимізації полягає в тому, щоб обминути розв'язування послабленої задачі (в методах відтинання) чи аналіз-перебір гілок (в комбінаторних методах) [1].

Його основою є аналітичний опис цілочислової площини $\boldsymbol{Z^2}$ [2], що дозволяє не проводити пошуки правильних відсічень та уникнути гілкування для переходу до наступної цілої точки і її діагностики на оптимальність. Відповідний спосіб оптимізації названо методом **накладання цілочислової сітки** (НЦС). Суть методу у такому:

1) *описуємо* множину цілих точок D^C, яку включає вихідна область допустимих значень D (це здійснюється за допомогою відповідних формул згідно із заданими обмеженнями);

2) *обчислюємо* значення цільової функції на множині D^C, і серед елементів отриманого числового масиву визначаємо оптимальне (це дозволяють реалізувати сучасні пакети прикладних програм ЕОМ);

3) *знаходимо* відповідний оптимальний план (або плани).

В математичних моделях задач економічного змісту змінні величини звичайно приймають невід'ємні дійсні значення. Для забезпечення цієї умови достатньо здійснити паралельне перенесення осей координат.

Нумерація – це присвоєння натуральних номерів елементам множини певної природи; у нашому випадку – точкам площини чи простору з цілими координатами. Під аналітичним описом цілочислових сіток розуміють: 1) вибір схеми нумерації, тобто правила за яким здійснюється нумерація; 2) установлення залежності цілочислових координат точки від приписаного за схемою номера.

Точки площини чи простору, координатами яких є цілі числа, коротко називають **цілими точками**.

Нумерацію цілих точок можна здійснювати різними способами. Одна із схем нумерації зображена (без виведення відповідних формул) у роботі [3]: нумерація здійснюється по спіралі, кожний звій якої складений із відрізків прямої, починаючи з точки O, і рухаючись послідовно вгору, вліво, вниз, вправо і так далі (рис. 1).

Назвемо її **квадратною нумерацією** (**К-нумерацією).**

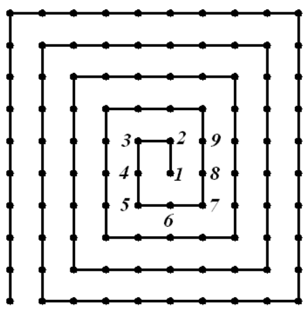

Рис. 1**. Схема К-нумерації**

Для установлення зв'язку між номерами n цілих точок і їхніми координатами: $x = x(n)$, $y = y(n)$, вводимо в розгляд суму $(x + y)$ та різницю $(x - y)$ координат, і відповідно доданки $S^{+} = S^{+}(n)$, $S^{-} = S^{-}(n)$, які доповнюють суму і різницю координат до номера n:

$$x + y + S^{+} = n, \; x - y + S^{-} = n. \tag{1}$$

Із (1) для поточних координат x, y маємо:

$$\begin{gathered} x = x(n) = n - (S^{+} + S^{-})/2, \\ y = y(n) = (S^{-} - S^{+})/2, \end{gathered} \tag{2}$$

де S^{+}, S^{-} за методом ПНС такі:

$$\begin{gathered} S^{+}(n) = 1 + (2(n-1) - u(u+3)) \times \\ \times (u - v) + (1 + v - u)v(v+1), \\ S^{-}(n) = 1 + 2(n-1) - w(w+1), \\ u = [(\sqrt{4n-3} - 1)/2], \; v = [\sqrt{n}] - 1, \end{gathered} \tag{3}$$

$w = [\sqrt{n-1}]$, $[\cdot]$ – функція антьє.

За допомогою тотожних перетворень сум S^{+}, S^{-} отримуємо компактне представлення формул (2):

$$\begin{gathered} x(n) = (-1)^{a-1}\left([a/2] + \min(0, n - A)\right), \\ y(n) = (-1)^{a}\left([a/2] - \max(0, n - A)\right), \end{gathered} \tag{4}$$

де a, A – величини, залежні від номера точки n:

$$a = a(n) = [\sqrt{n-1}] + 1, \; A = (a-1)a - 1.$$

Співвідношення (4) є **формулами визначення координат точки (x, y) за її номером n.**

Їх можна тлумачити як параметричні рівняння $x = x(n), y = y(n)$ цілочислової площини, де роль параметра відіграє номер точки.

Залежність номера точки n від координат x, y виглядає так:

$$\begin{gathered} n(x, y) = 4k^{2} + 1 + sign(y - x) \times \\ \times (2k + x + y), \end{gathered} \tag{5}$$

де $k = \max\{|x|, |y|\}$ – номер квадрата;

$$sign(t) = \begin{bmatrix} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{bmatrix}$$ – сигнум-функція.

Зауважимо, що крім того $k = k(n) = [a/2]$.

Під **цілочисловим брусом** у просторі $\mathbf{Z}^{3}$ будемо розуміти множину цілих точок, яку включає в себе внутрішність і повна поверхня прямокутного паралелепіпеда. Цілочисловий куб є окремим випадком бруса. Побудову і аналітичний опис бруса легко здійснити, спираючись на нумерацію на площині.

Позначимо брус через $Bar(k, h)$,

де k – номер квадрата, який покладено в основу бруса;

h – висота бруса як кількість шарів цілих точок по вертикалі.

Кожний шар містить $N_2 = (2k+1)^2$ цілих точок, на що вказують номери точок, які належать бісектрисі $y = x$ при $x \ge 0$.

Для бруса, розташованого вище площини xOy, аплікати шарів описуються так:

$$z(n) = [(n-1)/N_2] = [(n-1)/(2k+1)^2]. \quad (6)$$

На рис. 2 зображено брус $Bar(1, 4)$, побудований засобами MatLab. Кожний шар вміщує 9 цілих точок, брус має чотири шари.

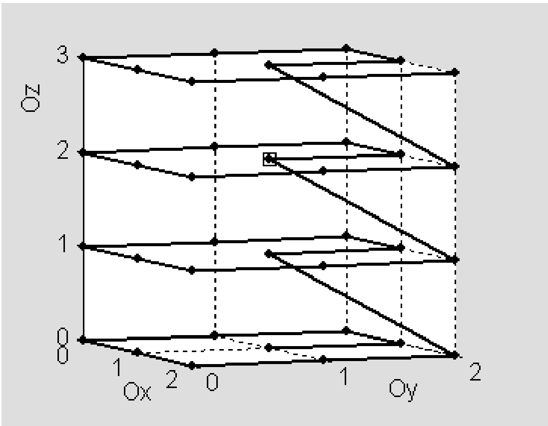

Рис. 2. **Зображення бруса $Bar(1, 4)$**

Наведемо два ілюстративних приклади. Числова реалізація пропонованого підходу проводилася в ППП MatLab.

Задача 1. Постановка задачі:

$$U = 40x^{-1}y^{-1/2}z^{-1} + 20xz + 20xyz \to \min;$$

$$1/3x^{-2}y^{-2} + 4/3y^{1/2}z^{-1} \le 1.$$

$$x > 0,\ y > 0;\ z > 0.$$

Накладання цілочислового бруса на область, яка визначається обмеженнями, дозволяє розв'язати задачу геометричного програмування, без переходу до двоїстої задачі і без розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

На рис. 2 зображено відповідний брус; квадратиком відмічено точку мінімуму:

$$x_{\min} = 1,\ y_{\min} = 1,\ z_{\min} = 2;\ U_{\min} = 100.$$

Задача 2. Постановка задачі:

$$U = (-2x - y + z)/(x + 3y + 5z) \to \min;$$

$$\begin{cases} 6x - 3y + z \le 12 \\ 7x - y + 2z \le 12 \\ -4x + 2y - z \ge 1 \end{cases};$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$$

Накладання цілочислового бруса на область, яка визначається обмеженнями, не потребує зведення задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування. На рис. 3 зображено відповідний брус; квадратиком відмічено точку мінімуму:

$$x_{\min} = 2,\ y_{\min} = 5,\ z_{\min} = 0;\ U_{\min} = -9/17.$$

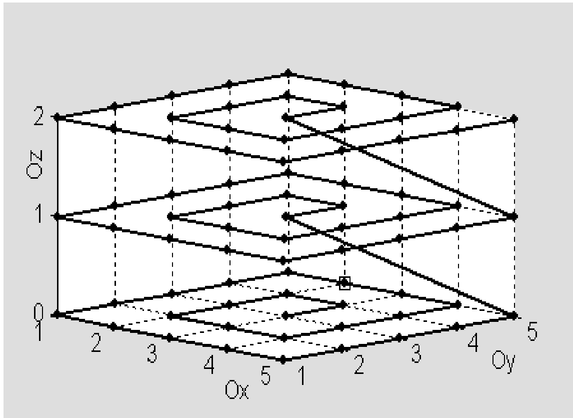

Рис. 3. **Зображення бруса $Bar(2, 3)$**

Список використаної літератури

1. Габасов Р. Методы оптимизации: Учеб. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич, А.И. Калинин, В. В. Крахотко, Н. С. Павленок. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 474 с.
2. Сенчуков В. Ф. Цілочислові сітки на площині в задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Економіка розвитку. Х. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, №3 (71) – 2014. – С. 107 – 112.
3. Серпинский В. Сто простых, но одновременно трудных вопросов арифметики / В. Серпинский. – М.: Учпедгиз, 1961. – 76 с.

Автор

Сенчуков В. Ф, доцент, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця

(Viktor.Senchukov@m.hneu.edu.ua)

Тези доповіді надійшли 25 січня 2016 року. Опубліковано в авторській редакції.