УДК 330.46:53

АЛГЕБРО-ЛОГІЧНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Сенчуков В. Ф., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики й ЕММ,
Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків, Україна

Анотація – **Розглядається модель булевої алгебри, пропозиційними змінними якої є числові послідовності. Логічні операції над такими змінними, на відміну від відомих арифметичних операцій, здатні ураховувати властивості самих операндів. Це дає, у свою чергу, можливість зберегти властивості чинників економічного процесу, для якого будується математична модель.**

Ключові слова — **Булева алгебра, логічні операції: сума (об'єднання), добуток (перетин), різниця, доповнення), модель, індикатор, нумератор, породна множина числова послідовність, універсум, ціла частина (Антьє).**

Однією із сучасних проблем управління підприємствами є моделювання нелінійних процесів в економіці, як і взагалі нелінійних динамічних процесів, і розробка методів побудови відповідних математичних моделей. Для кращого розуміння побудови послідовностної моделі булевої алгебри – алгебри логіки з алфавітом $B_2 = \{0, 1\}$ – спочатку наведемо нестроге, в описовому плані, ключове поняття.

Під **логічними операціями над послідовностями** будемо розуміти операції, в результаті виконання яких одержуються послідовності, складені з тих чи інших елементів вихідних послідовностей.

Добре відомі арифметичні операції над послідовностями $(+, -, \times, :)$ зводяться до їх виконання над елементами заданих послідовностей – операндів, при цьому вихідні послідовності немовби "губляться".

Якщо ж йдеться про логічні операції, то результуюча послідовність ніби "вбирає" в себе певні властивості операндів.

Наприклад, на запитання, яка послідовність буде об'єднанням послідовностей непарних $(x = 2n-1)$ і парних ($y = 2n$) чисел, ґрунтуючись на суто інтуїтивних міркуваннях, ми відразу відповідаємо: послідовність натуральних чисел ($z = n$).

Але як формальним шляхом отримати такий результат? У зв'язку з цим виникає проблема створення конструктивних засобів, за допомогою яких можна було б за відомими аналітичними зображеннями заданих послідовностей отримати формулу результату логічної операції над ними. Звуження R - функцій [1] на дискретні множини не дає, на жаль, такої можливості, адже якісні градації "додатність" і "від'ємність" розглядаються на континуальній множині і не торкаються кожного індивідуума-точки. Безумовно, на алфавіті $B_2 = \{0, 1\}$ результати булевих операцій $\wedge, \vee$ і R_α - операцій $\wedge_\alpha, \vee_\alpha$ збігаються.

Вихідними множинами у цьому викладі є дискретні числові множини, зокрема множина натуральних чисел.

В математичних моделях задач економічного змісту здебільше змінні приймають невід'ємні дійсні значення. Основні відомості щодо отриманих результатів можна знайти у роботі [2].

Із відомих означень поняття числової послідовності приймемо таке. **Числовою послідовністю** (**ч/п**) елементів даної множини M називається визначена на множині натуральних чисел $\mathbf{N}$ функція $x = f(n)$, область значень $\operatorname{rng} f$ якої належить розглядуваній множині: $\operatorname{rng} f \subseteq M$, тобто, мовою відображень,

$f:\mathbf{N}\to M$. Упорядкована пара $x_n=(n,x)$ – **елемент**, або **член** ч/п $x=f(n)$: $x_n \in x$, де $\in$ – символ належності; $f(n)$ – **загальний член** ч/п. Множину $\operatorname{rng} f$ – підмножину M – назвемо **породною множиною** (для) ч/п $x=f(n)$.

Якщо $x=f(n)-const\quad \forall n\in\mathbf{N}$, то ч/п називають **стаціонарною**

Послідовність, породна множина якої – порожня множина, називається **порожньою** і позначається через $s_\varnothing$ (від лат. *sequence* – послідовність).

Нехай $\nu:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ – деяка зростаюча ч/п: $\nu(n+1)-\nu(n)>0$. Композиція $y=x(\nu(n))$, або $y=x\circ\nu$ – суперпозиція двох компонент, – називається **підпослідовністю** ч/п x: $y\sqsubset x$, де $\sqsubset$ – символ включення. По відношенню до послідовності y ч/п $\nu=\nu(n)$ назвемо **нумератором** y в x і позначимо через ν_y. Зрозуміло, що в граничних випадках: $\nu_y=n$ і $\nu_y=s_\varnothing$, отримуємо відповідно: $y=x$ і $y=s_\varnothing$.

Поряд з нумератором однією з характеристик підпослідовності y є **індикатор** μ_y – двозначний предикат, значення якого для кожного її члена визначається булевим алфавітом $B_2=\{0,1\}$:

$$(\mu_y)_n=\begin{cases}1, & \text{якщо } x_n\in y\\ 0, & \text{якщо } x_n\bar{\in} y\end{cases}. \qquad (1)$$

де $\in(\bar{\in})$ – знак належності (неналежності).

Індикатори підпослідовностей даної ч/п x суть нескінченні булеві вектори:

$$\mu_{s_\varnothing}=(0,0,\dots,0,\dots),\ \mu_x=(1,1,\dots,1,\dots).$$

Із наведених означень випливає, що між підпослідовностями та їх нумераторами і індикаторами існує взаємно однозначна відповідність (біекція): $y\leftrightarrow\nu_y$, $y\leftrightarrow\mu_y$.

Приклад. Нехай універсум $s_\circ$, з породною множиною $\mathbf{N}$, такий:

$$s_\circ=(1,1,2,2,3,3,\dots,[(n+1)/2],\dots),$$

тут $[\cdot]$ – ціла частина числа.

Опишемо підпослідовність універсума $s_\circ(n)$: $x=f(n)=s_\circ(\nu_x(n))$, елементи якої визначаються нумератором $\nu_x=(1,4,7,10,\dots,3n-2,\dots)$.

Розв'язання. Складаємо композицію $x=s_\circ\circ\nu$, для чого у вираз загального члена універсума замість n підставляємо $\nu_x(n)$:

$$x=s_\circ\circ\nu=\left[\frac{\nu_x(n)+1}{2}\right]=\left[\frac{(3n-2)+1}{2}\right].$$

Остаточно, з урахуванням, що цілий доданок можна виносити за символ цілої частини, отримуємо:

$$x=f(n)=\left[\frac{2n+(n-1)}{2}\right]=n+\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Індикатор μ_x послідовності x має вигляд: $\mu_x=(1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\dots)$. •

В теоретико-числових дослідженнях часто в якості універсума $s_\circ$ виступає послідовність натуральних чисел: $s_\circ=s_\circ(n)=n$, і тоді універсум нумераторів $\nu_\circ(n)=n$ співпадає з основною послідовністю.

Звичайно розглядаються підпослідовності деякої фіксованої ч/п, яка називається **основною,** або **універсальною** (**універсумом**), і позначається через $s_\circ$. Універсум нумераторів – послідовність натуральних чисел ($\nu_\circ(n)=n$), індикаторів – стаціонарна ч/п ($\mu_\circ(n)=1$).

Перейдемо до формалізації наведеного вище описового означення (дефініції) логічних операцій над ч/п.

Щоб відрізняти такі операції від операцій алгебри множин і алгебри логіки, для них використовуються інші символи.

Нехай x, y, z – ч/п, які належать множині підпослідовностей деякого універсума $s_\circ$; $\nu_x = a(n)$, $\nu_y = b(n)$, $\nu_z = c(n)$ – відповідні нумератори; $rng\, a = A$, $rng\, b = B$, $rng\, c = C$ – породні множини нумераторів, елементами яких є натуральні числа.

Логічною сумою (**S-об'єднанням** $\sqcup$) двох послідовностей x, y називається ч/п z, породна множина нумератора якої є об'єднанням породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \sqcup y \ \rightleftharpoons \ C = A \cup B. \qquad (2)$$

Логічним добутком (**S-перетином** $\sqcap$) двох послідовностей x, y називається ч/п z, породна множина нумератора якої є перетином (перерізом) породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \sqcap y \ \rightleftharpoons \ C = A \cap B. \qquad (3)$$

Логічною різницею (**S-різницею** $\llcorner$) двох послідовностей x, y називається ч/п z, породна множина нумератора якої є різницею породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \llcorner y \ \rightleftharpoons \ C = A \setminus B. \qquad (4)$$

Різниця $z = s_\circ \llcorner x$ називається **S-доповненням** послідовності x і позначається через $\urcorner x$:

$$z = \urcorner x \ \rightleftharpoons \ C = \mathbf{N} \setminus A = A'. \qquad (5)$$

Формалізовані логічні операції об'єднуються загальною назвою – **S-операції.**

Нехай $M(s)$ – множина ч/п, яка є замкнутою щодо композицій, $M(\nu)$ – множина нумераторів ч/п, а $M(rng\nu)$ – відповідна сукупність породних множин нумераторів, $M(\mu)$ – множина індикаторів числових послідовностей із $M(s)$.

Теорема. Множина послідовностей $M(s)$ з визначеними на ній s-операціями є булевою алгеброю:

$$A_S = (M(s);\ \sqcup, \sqcap, \urcorner). \qquad (6)$$

Д о в е д е н н я. Кожній послідовності із множини $M(s)$, замкненій відносно композицій, відповідає породна множина нумератора. Згідно означень (2) – (5) логічних операцій над ч/п алгебра A_S і алгебра породних множин нумераторів:

$$A_{rng\nu} = (M(rng\nu);\ \cup, \cap, '), \qquad (7)$$

ізоморфні, це і означає, що алгебра A_S – булева алгебра.

Алгебра A_S називається **булевою алгеброю послідовностей**, або коротко – **S-алгеброю.**

Завдяки бієкції між множинами $M(s)$, $M(\nu)$, $M(rng\nu)$, $M(\mu)$ і однотипності операцій робимо висновок про ізоморфність усіх відповідних алгебр.

У плані прикладних досліджень можливості пропонованої моделі досить великі, оскільки з точки зору алгебри природа елементів, з яких складені послідовності, цілковито "байдужа".

Список використаної літератури

1. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.
2. Сенчуков В. Ф. Логические операции над последовательностями и закон простых чисел / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – №6. – С. 20 – 23.

Автор

Сенчуков В. Ф, доцент, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця
(Viktor.Senchukov@m.hneu.edu.ua)

Тези доповіді надійшли 9 лютого 2017 року.
Опубліковано в авторській редакції.