МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Л. М. Малярець
І. Л. Лебедєва
Л. О. Норік

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Практикум

У 2-х частинах

Частина 1

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2017

УДК 519.86(075)
М21

Рецензенти: канд. техн. наук, доцент, д-р екон. наук, професор кафедри міжнародного бізнесу та економічної теорії Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна *В. О. Бабенко*; проректор з підготовки наукових кадрів Східноєвропейського університету економіки і менеджменту (м. Черкаси), д-р екон. наук, професор *Г. О. Ус.*

Рекомендовано до видання рішенням вченої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.

Протокол № 6 від 06.03.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Авторський колектив: д-р екон. наук, професор Л. М. Малярець – вступ, теми 1, 2; канд. фіз.-мат. наук, доцент І. Л. Лебедєва – тема 5; канд. екон. наук, доцент Л. О. Норік – теми 3, 4.

Малярець Л. М.

М21 Дослідження операцій та методи оптимізації : практикум : у 2-х ч. Частина 1 [Електронний ресурс] / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 169 с.

ISBN 978-966-676-681-9

Розглянуто основні принципи і концепції побудови математичних моделей для різних класів завдань економіки, вирішення яких спирається на застосування методів математичного програмування. Уміщено задачі лінійного і цілочислового програмування. До кожної теми подано термінологічний словник, тренувальні вправи, практичні завдання, тестові завдання для самостійної роботи і перелік питань для самоперевірки, які повністю відповідають програмі навчальної дисципліни.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей як базовий практикум із навчальної дисципліни, як допоміжний матеріал у процесі безперервної математичної підготовки, а також для використання викладачами під час проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів.

УДК 519.86(075)

ISBN 978-966-676-681-9

Зміст

Вступ

Сучасному етапу розвитку економіки притаманний високий рівень її формалізації. Стрімке зростання важливості аналітичних досліджень в управлінні соціально-економічними процесами вимагає від майбутніх економістів ґрунтовної математичної підготовки, що давала б можливість застосовувати математичний інструментарій до вирішення широкого кола проблем у сфері їх професійної діяльності. Економіко-математичні методи є тим інструментом дослідження економічних систем і процесів різної складності, що дозволяє отримувати достовірну інформацію щодо характеристик економічних процесів та явищ. Саме за допомогою математичних методів розробляються економіко-математичні моделі економічних процесів, які в подальшому є підґрунтям формування управлінських рішень щодо оптимізації цих процесів під час розв'язання реальних аналітичних задач у різних сферах діяльності суб'єктів господарювання. Завдяки широкому впровадженню інформаційних технологій та комп'ютеризації у всіх сферах людської діяльності взагалі, а також у процесі отримання освіти зокрема залишається у минулому таке уявлення про навчання як просту передачу інформації від викладача до студента. Упроваджується концептуально новий підхід до процесу навчання, що передбачає спрямовання на кінцевий результат, а саме, на формування компетентного фахівця, який не тільки здобув певні знання, але отримав необхідні вміння і навички, що дозволяють ефективно використовувати набуті знання в професійній діяльності.

Сучасний фахівець-економіст повинен знати методологію проведення дослідження операцій, яка є ядром процесу прийняття управлінських рішень. Саме цій меті підпорядковано навчальну дисципліну "Дослідження операцій та методи оптимізації".

Практикум з навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" призначений для студентів усіх спеціальностей денної форми навчання з метою поглиблення та розширення предметних областей і методологічних засобів навчальних дисциплін "Вища математика", "Теорія ймовірностей та математична статистика", "Інформатика". Основна увага приділяється формуванню системи теоретичних знань та практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціальних економіко-математичних методів.

Програма навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" складається з одинадцяти тем. Дане видання, яке є першою частиною практикуму із цієї дисципліни, містить завдання з перших п'яти тем, які охоплюють лінійне та цілочислове програмування. За кожною темою наведені мета та професійні компетентності, що формуються під час вивчення теми, подано детальний термінологічний словник, у якому викладено основні теоретичні відомості з тем, тренувальні вправи з коментарями та поясненням їх розв'язання, тестові завдання, практичні завдання для самостійного опрацювання, а також запитання для самоперевірки.

Важливою особливістю цього посібника є його практична спрямованість. Студент самостійно опрацьовує теоретичні положення задач, що розглядаються, для відновлення необхідної інформації, яка надана в багатьох навчально-методичних виданнях кафедри вищої математики та економіко-математичних методів ХНЕУ ім. С. Кузнеця.

Виконання тестових та практичних завдань практикуму спрямоване на закріплення теоретичних знань та набуття практичних навичок з постановки і розв'язання організаційних задач з використанням математичного апарату; застосовування адекватних математичних моделей та методів для отримання найбільш раціонального рішення в конкретній ситуації; проведення післяоптимізаційного аналізу і розроблення практичних рекомендацій для прийняття управлінських рішень; використання прикладних програмних середовищ для розв'язання задач великої вимірності. Тренувальні вправи подано таким чином, щоб студент, послідовно отримуючи підказки, зміг самостійно етап за етапом розв'язати завдання та додатково опрацювати окремі питання. Дидактичною метою практикуму роботи є практичне підтвердження окремих теоретичних положень навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" методикою експериментальних досліджень у даній предметній галузі.

Практикум з дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" рекомендовано для студентів усіх спеціальностей денної форми навчання як базовий практикум з навчальної дисципліни, так і як допомога в процесі безперервної математичної підготовки, а також для викладачів під час проведення практичних занять і організації самостійної роботи студентів.

Розділ 1. Основні поняття математичного моделювання економічних систем. Методи лінійного програмування. Цілочислове програмування

1. Оптимізаційні економіко-математичні методи та моделі

1.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення з предметом і завданнями навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації", технологією побудови математичних моделей та основами класичної теорії оптимізації.

Професійні компетентності, що формуються під час вивчення теми:

розуміння призначення економіко-математичного моделювання;

знання принципів та технології побудови економіко-математичних моделей;

знання основ класичної теорії оптимізації;

розуміння особливостей методів розв'язання економіко-математичних задач;

вміння здійснювати класифікацію задач оптимізації.

1.2. Термінологічний словник

Допустимий розв'язок задачі математичного програмування (***план***) $\mathbf{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ – це матриця, елементи якої задовольняють системі обмежень задачі математичного програмування.

Дослідження операцій – це науковий напрямок у математиці, предметом якого є розроблення методів математичного моделювання для аналізу цілеспрямованих дій (керуючого впливу особи, що приймає рішення) та об'єктивного (найчастіше, кількісного) порівняння допустимих розв'язків задачі з метою вибору оптимального розв'язку.

Керовані змінні або ***керовані параметри*** – це кількісні ознаки об'єкта (об'єктів), які необхідно або можна варіювати у певних межах для досягнення мети керування.

Критерій ефективності (***цільова функція***) – функція кількох змінних, за значенням якої порівнюють допустимі розв'язки задачі математичного програмування для визначення оптимального.

Лінійне програмування (***ЛП***) – це розділ математичного програмування, у якому розглядаються теорія побудови математичної моделі та методи розв'язування задач на знаходження умовного екстремуму лінійної функції багатьох змінних, у яких обмеження, що накладаються на ці змінні, мають вигляд лінійних рівнянь або нерівностей.

Математична модель – це система математичних виразів та співвідношень між ними, які описують властивості, явища та процеси та визначають фактори, що впливають на досліджуваний процес або явище, та визначають взаємозалежність між цими факторами.

Математичне моделювання – це наукове формалізоване моделювання, за якого опис об'єкта моделювання здійснюється мовою математики, а дослідження моделі виконується за допомогою математичних методів.

Математичне програмування – розділ сучасної математики, задачами якого є розв'язання оптимізаційних задач, тобто пошук екстремуму функції кількох змінних за наявності системи обмежень, яким повинні відповідати ці змінні.

Модель – це умовний образ об'єкта чи процесу, що вивчається; за допомогою цього образу відображають основні характеристики об'єкта, які вважаються важливими в межах цього дослідження.

Моделювання – це спосіб дослідження реальних об'єктів за допомогою сконструйованих моделей, їх експериментальний та (або) теоретичний аналіз, зіставлення результатів з даними про об'єкт та у разі необхідності коректування моделей.

Метод множників Лагранжа – метод визначення умовного екстремуму функції $f(\mathbf{X})$, де $\mathbf{X} \in R^n$, з урахуванням системи обмежень $\varphi_i(\mathbf{X}) = 0$, де $i = \overline{1, m}$, яким повинні задовольняти аргументи цієї функції.

Множники Лагранжа – це додаткові змінні (невідомі коефіцієнти), за допомогою якою рівняння та нерівності основної системи обмежень вводять до складу функції Лагранжа.

Нелінійне програмування – розділ математичного програмування, у якому розглядаються оптимізаційні задачі, математична модель яких містить нелінійні функції.

Операція – це дія, що спрямована на досягнення певної цілі, або сукупність цілеспрямованих дій.

Оптимальний розв'язок* (*оптимальний план*)** $\mathbf{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ ***задачі математичного програмування – це допустимий розв'язок, якому відповідає максимальне (мінімальне) значення цільової функції.

Система обмежень – система рівнянь і (або) нерівностей, у тому числі, і обмеження на знак, яким повинні відповідати змінні цільової функції оптимізаційної задачі.

Теореми Куна – Таккера – це комплекс теорем, які узагальнюють метод множників Лагранжа на випадок задачі оптимізації, математична модель якої в основній системі обмежень містить обмеження у вигляді нерівностей.

Функція Лагранжа – це функція, яка застосовується в задачах нелінійної оптимізації з метою переходу від задачі на пошук умовного екстремуму цільової функції до задачі на пошук глобального екстремуму функції Лагранжа, складовими якої є сама цільова функція, а також рівняння та нерівності основної системи обмежень.

1.3. Тренувальні вправи*

1.3.1. Конкретизація поняття фізичної величини в економіці. Для кожного типу філософської категорії (табл. 1.1) зазначте притаманні даному типу ознаки поняття фізичної величини.

Таблиця 1.1

Конкретизація поняття фізичної величини в економіці

Філософські категорії	Елементи, що беруть участь у вимірюванні	Властивості (ознаки) об'єкта та знання про них	
		Загальні	Форма існування в економіці
Непізнана реальність			
Пізнана реальність			
Фізичні засоби			
Знання про реальність			

1. Фізичний об'єкт.

2. Фізична величина X.

3. Форма величини фізичної ознаки – вартісний показник. Числове значення показника, одиниці його вимірювання.

---

* У разі виникнення питань щодо виконання тренувальної вправи дивись коментар до її виконання.

4. Апріорні ознаки фізичного об'єкта в економіці.
5. Апріорні ознаки фізичного об'єкта.
6. Об'єкт дослідження.
7. Контрольно-вимірювальні прилади.
8. Абсолютний показник фізичних ознак об'єкта.
9. Натуральна форма – кількість – шт.
10. Одиниці фізичної величини.
11. Інформація.
12. Значення фізичної величини $X = [X] + \{X\}$.

1.3.2. Класифікація оптимізаційних задач. На рис 1.1 наведено схему класифікації оптимізаційних моделей.

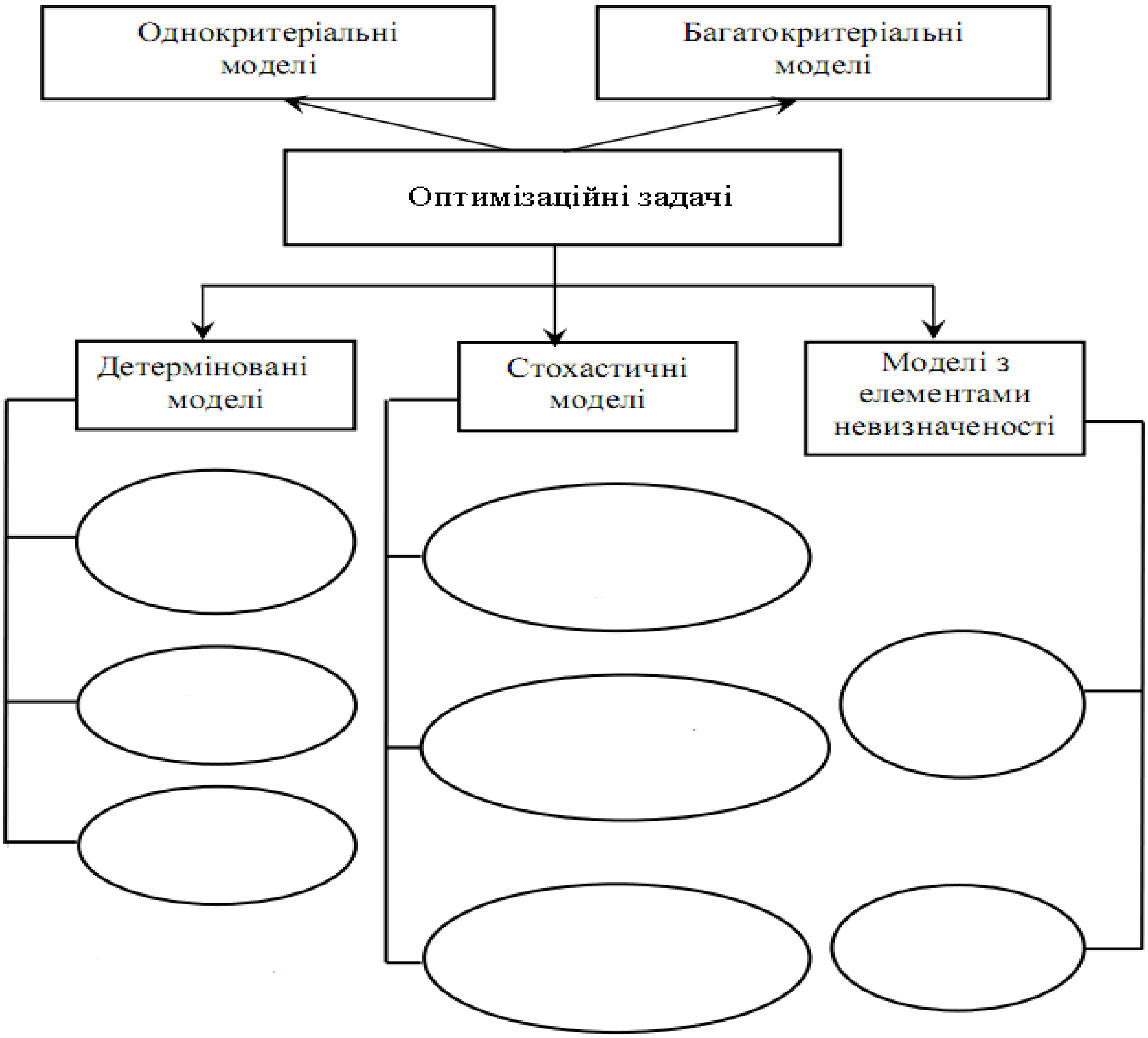


Рис. 1.1. **Схема класифікації оптимізаційних моделей**

Відповідно цій схемі встановіть типи моделей оптимізаційних задач:

1. Імітаційні моделі.
2. Лінійні моделі.
3. Моделі стохастичного програмування.
4. Динамічні моделі.
5. Нелінійні моделі.
6. Моделі теорії випадкових процесів.
7. Моделі теорії масового обслуговування.
8. Моделі теорії ігор.

1.4. Запитання для самоперевірки

1.4.1. Які основні методологічні принципи моделювання? Яка основна сутність кожного методологічного принципу моделювання?

1.4.2. Дайте означення математичної моделі. Які ви знаєте основні типи моделей?

1.4.3. За якими принципами здійснюється класифікація економіко-математичний моделей?

1.4.4. Які особливості мають математичні моделі оптимізаційних задач?

1.4.5. З яких етапів складається технологія економіко-математичного моделювання?

1.4.6. Яка модель називається когнітивною? Яка модель називається змістовною? Яка модель називається концептуальною? Яка модель називається формалізованою?

1.4.7. Що означає термін "оптимізація"?

1.4.8. Наведіть класифікацію оптимізаційних задач.

1.4.9. Наведіть постановку загальної оптимізаційної моделі.

1.4.10. Яка точка називається точкою умовного екстремуму?

1.4.11. Як визначається допустима множина в оптимізаційній моделі?

1.4.12. Як формулюється задача на безумовний екстремум?

1.4.13. Як формулюється задача на умовний екстремум?

1.4.14. Яка точка називається точкою локального мінімуму?

1.4.15. Які методи дозволяють привести задачу умовного екстремуму до задачі безумовного екстремуму?

1.5. Практичні завдання

1.5.1. Для складних управлінських ситуацій не існує моделей. Поясніть це твердження. Наведіть приклади для його пояснення.

1.5.2. Чим можна пояснити факт, що деякі сформовані моделі ніколи не реалізуються?

1.5.3. Чим складніше управлінська ситуація, тим важливіше є окремі деталі. Яке відношення це має до моделювання?

1.5.4. Дайте визначення і розкрийте зміст понять: оптимізаційні методи; математична модель задачі оптимізації; класифікація оптимізаційних задач; глобальний екстремум функції; умовний екстремум функції.

1.5.5. Оптимізаційна задача може бути сформульована таким чином:

є деякий об'єкт, ... якого характеризується двома видами параметрів – параметрами стану і параметрами ...., причому залежно від вибору останніх .... управління об'єктом протікає тим або іншим чином. Якість процесу управління оцінюється за допомогою деякої числової функції, на основі чого ставиться *завдання*: знайти таку .... значень параметрів управління, за якої ця функція приймає .... значення.

Доповніть текст, використовуючи слова: *управління, процес, екстремальне, стан, оптимізація, послідовність.*.

1.5.6. Чи можна вважати, що модель задачі умовної оптимізації є повним відображенням реальності? Аргументуйте відповідь.

1.5.7. Для складних проблем в бізнесі не існує оптимальних рішень. Однак оптимізаційні моделі дають оптимальні розв'язки. У якому сенсі ці розв'язки оптимальні?

1.5.8. Наявність системи обмежень звужує діапазон значень, які може приймати керовані змінні та, відповідно, цільова функція. Поясніть це твердження.

1.6. Тестові завдання

1.6.1. Пряме первинне, опосередковане (непряме), сумісне та сукупне вимірювання можна розглядати як:

а) етапи визначення величин;

б) процедури технології вимірювання величин;

в) групи ознак величин.

1.6.2. Установіть правильну послідовність етапів визначення величин:

а) вторинне вимірювання;

б) підготовка;

в) контроль за похибками вимірювання;

г) постановка;

д) первинне вимірювання.

1.6.3. Відповідно до опису дайте правильне визначення:

1. Модель	А. Це абстракція реальної дійсності, в якій відношення між реальними елементами замінені відношеннями між математичними категоріями у формі рівнянь чи нерівностей, які характеризують функціонування реальної модельованої системи
2. Математична модель	Б. Об'єкт, що заміщує оригінал і відображає його найважливіші риси та властивості для даного дослідження або мети дослідження за обраної системи гіпотез
3. Сутність методології математичного моделювання	В. Це комплекс економічних і математичних наукових дисциплін, об'єднаних для вивчення соціально-економічних систем і процесів
4. Економіко-математичні методи	Г. Це заміна досліджуваного об'єкта його математичною моделлю і подальше вивчення цієї моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алгоритмів

1.6.4. Серед приведених тверджень знайдіть ті, що можуть бути віднесені до принципів економіко-математичного моделювання:

а) модель повинна бути в деяких аспектах суттєво простішою від прототипу;

б) точність результатів моделі не може бути вищою за точність вхідних даних;

в) у діалектичній парі "модель – об'єкт" модель є первинним елементом, а об'єкт похідним від нього;

г) модельована система характеризується не лише кількісними, але і якісними показниками.

1.6.5. Чи правильним є твердження про те, що головна особливість економіко-математичного моделювання полягає у безпосередньому дослідженні економічних систем і є методом безпосереднього пізнання?

А. Так. Б. Ні.

1.6.6. Серед поданих типів моделей оберіть ті, які можна класифікувати за способом врахування чинника часу:

а) дескриптивні; б) статичні; в) функціональні; г) трендові;

д) статистичні; е) точкові; є) лінійні; ж) динамічні.

1.6.7. Установіть правильну послідовність етапів економіко-математичного моделювання:

а) побудова математичних моделей;

б) аналіз та перевірка адекватності моделі;

в) аналіз числових результатів на несуперечність з концептуальною моделлю;

г) використання результатів для прийняття управлінських рішень;

д) постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі;

е) реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм та проведення розрахунків;

є) визначення мети моделювання.

1.6.8. На етапі розроблення математичних моделей отримують такі результати:

а) розроблення алгоритму розв'язування задачі моделювання;

б) створення концептуальної моделі об'єкта;

в) формалізація економічної проблеми;

г) вивчення структури об'єкта й основних взаємозв'язків між його елементами;

д) виокремлення найважливіших рис і властивостей об'єкта.

1.6.9. Оберіть порядок перетворення моделей у процесі економіко-математичного моделювання:

а) когнітивна модель; б) формалізована модель;

в) концептуальна модель; г) змістовна модель.

1.6.10. Відповідно до опису дайте правильне визначення:

1. Когнітивна модель	А. Подання концептуальної моделі за допомогою однієї або декількох формальних мов
2. Формалізована модель	Б. Змістовна модель, під час формування якої використовують поняття і представлення предметної галузі, до якої належить об'єкт моделювання
3. Концептуальна модель	В. Представлення когнітивної моделі звичайною мовою
4. Змістовна модель	Г. Сформований у голові дослідника деякий уявний образ

1.6.11. За загальною цільовою ознакою економіко-математичні моделі поділяють на прикладні і моделі, які використовуються у процесі вивчення загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, а саме:

а) макроекономічні; б) теоретико-аналітичні; в) динамічні.

1.6.12. Набір значень керованих змінних у задачах оптимізації називають:

а) оптимальним; б) розв'язком; в) допустимим.

1.6.13. Відповідно до опису дайте правильну характеристику:

1. Теоретичні моделі	А. Припускають існування функціональних зв'язків між змінними моделі
2. Статичні моделі	Б. Відображають загальні властивості економіки та її компонентів з дедукцією висновків із формальних передумов
3. Детерміновані моделі	В. Забезпечують можливість оцінки параметрів функціонування конкретних об'єктів та обґрунтування висновків для прийняття управлінських рішень
4. Прикладні моделі	Г. Описують стан економічного об'єкта в конкретний момент або період часу

1.6.14. До оптимізаційного типу належать задачі, в яких потрібно:

а) знайти залежність одних показників від інших;

б) виразити зв'язки і залежності системами рівнянь;

в) знайти якнайкращий розв'язок серед допустимих;

г) знайти сукупність розв'язків, що задовольняє задані умови.

1.6.15. Розв'язок, що задовольняє висунутим обмеженням називають .... розв'язком.

а) оптимальним; б) допустимим.

1.6.16. Відповідно до опису дайте правильну характеристику оптимізаційних задач:

1. Лінійне програмування	А. Цільова функція є опуклою функцією
2. Квадратичне програмування	Б. Цільова функція і система обмежень є лінійними
3. Сепарабельне програмування	В. Цільова функція і основна система обмежень є квадратичними
4. Цілочислове програмування	Г. Цільова функція можна представити у вигляді суми таких функцій, що кожна з них залежить тільки від однієї змінної
5. Опукле програмування	Д. Керовані змінні можуть бути тільки цілими

1.6.17. Оптимізаційні і неоптимізаційні методи розподіляють за:

а) специфікою математичного інструментарію;

б) співвідношенням суб'єктивних і об'єктивних вихідних даних;

в) ознакою оптимальності;

г) ознакою отримання точного розв'язку.

1.6.18. Функції, що мають єдиний мінімум (максимум), називаються:

а) унімодальними; б) неперервними.

1.6.19. Точка $\mathbf{X}=(x_1, x_2, ..., x_n)\in D$, де D – область n-вимірного евклідового простору R^n, є точкою:

а) локального мінімуму; б) локального максимуму; в) глобального екстремуму;

функції $f(\mathbf{X})$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що нерівність $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}+\delta\mathbf{X})$ виконується для всіх $\delta\mathbf{X}=(\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n)$, таких, що $0<|\delta\mathbf{X}|<\varepsilon$.

1.6.20. Назвіть теорему.

Нехай $D \subseteq R^n$ – замкнута обмежена множина і $f(\mathbf{X})$ – неперервна функція, визначена на D. Тоді існує точка $\mathbf{X}^* \in D$ глобального мінімуму (максимуму) функції $f(\mathbf{X})$, $f(\mathbf{X}^*)=\min\limits_D f(\mathbf{X})$ (або $f(\mathbf{X}^*)=\max\limits_D f(\mathbf{X})$).

а) теорема Жордана – Гаусса;

б) теорема Лагранжа;

в) теорема Вейєрштрасса.

1.6.21. Оптимізаційні методи та моделі використовують для:

а) прогнозування значень економічних показників;

б) обґрунтування оптимальних рішень у сфері управління та планування;

в) економіко-математичного аналізу причинно-наслідкових зв'язків між економічними показниками.

1.6.22. Оптимізаційні задачі, для яких критерієм оптимальності є значення цільової функції, є предметом:

а) економетрики; б) математичної економіки; в) математичного програмування.

1.7. Висновки за темою

Сучасним основним методом дослідження будь-яких систем є метод моделювання, а саме, спосіб теоретичного аналізу і практичних дій, спрямований на розроблення і використання моделей.

Економіко-математичне моделювання можна розглядати як послідовну логіку взаємопов'язаних етапів: визначення мети моделювання, аналіз сформульованої проблеми і вибір основних чинників, які визначають досліджуваний економічний об'єкт відповідно до цілі дослідження; розроблення концептуальної моделі; побудова математичної моделі та її аналіз; підготовка вихідних даних; розв'язання задачі оцінювання параметрів моделі; аналіз числових результатів на несуперечність з концептуальною моделлю та за необхідністю удосконалення моделі; використання моделі для обґрунтування управлінського рішення.

Велику групу математичних методів в економіці утворюють оптимізаційні методи, оскільки перед менеджерами, економістами, працівниками системи управління, інженерами різного рівня виникають проблеми прийняття рішення, що вимагають оптимізації результатів різних видів діяльності з урахуванням наявних ресурсів.

Типовими оптимізаційними завданнями є задачі оптимального планування, в яких виділяють змінні і параметри (кількість закупівлі продуктів, кількість виробленої продукції, кількість перевезеного вантажу), ціль, яку бажають досягти (функція цілі) і яку слід оптимізувати (мінімізувати витрати на споживання, максимізувати прибуток, мінімізувати вартість перевезень) і обмеження, тобто умови, що обмежують можливості досягнення бажаної цілі (в раціоні повинні бути визначені компоненти, обмежені ресурси, кількість перевезеного товару).

Рекомендована література: [1; 3; 6; 10; 12; 13; 15; 20 – 22].

2. Задача лінійного програмування та методи її розв'язання

2.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення з принципами постановки задачі лінійного програмування та формування компетентностей щодо використання графічного, симплексного методів і методу штучного базису під час її розв'язання.

Професійні компетентності, що формуються під час вивчення теми:

знання принципів постановки задач лінійного програмування;

вміння використовувати графічний метод розв'язання задач лінійного програмування;

знання теоретичних аспектів симплексного методу;

вміння використовувати симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування;

розуміння особливостей методу штучного базису та методики його застосування;

вміння розв'язувати прикладні оптимізаційні економічні задачі.

2.2. Термінологічний словник

Багатокутник планів – це множина допустимих розв'язків задачі математичного програмування.

Базис опорного розв'язку задачі лінійного програмування – це упорядкований набір лінійно незалежних векторів основної системи обмежень задачі, яким відповідають додатні координати цього опорного розв'язку.

Базисна матриця – це матриця, яка утворена з базисних векторів.

Базисний вектор – це вектор основної системи обмежень задачі, який входить до базису.

Вершина опуклого багатогранника у просторі R^n – це будь-яка точка, яка не є внутрішньою точкою ніякого відрізка, що цілком належить цьому багатограннику.

Вироджена задача лінійного програмування – це задача лінійного програмування, в якій існує хоча б один вироджений базисний розв'язок.

Вироджений базисний розв'язок – це вектор, у якого кількість додатних координат менше кількості векторів, що входять до базису.

Градієнт функції $f(\mathbf{X}),\ \mathbf{X} \in D \subseteq R^n$ – це вектор $\nabla f(\mathbf{X}_0)$, що вказує напрям найшвидшого зростання функції $f(\mathbf{X})$ у даній точці $\mathbf{X}_0$ і ортогональний лінії (поверхні) рівня функції у цій точці; компонентами градієнта є частинні похідні функції $f(\mathbf{X})$ у точці $\mathbf{X}_0$.

Додаткова (балансова) змінна – це змінна, що вводиться до нерівності основної системи обмежень математичної модель задачі лінійного програмування для перетворення цієї нерівності у рівняння; вона входить до складу цільової функції з коефіцієнтом 0.

Загальна форма задачі лінійного програмування – це форма задачі лінійного програмування, в якій цільова функція прямує до максимуму (або мінімуму), основна система обмежень представлена рівняннями та нерівностями різних знаків.

Ітерація – це етап реалізації алгоритму, який відрізняється від інших етапів тільки значенням змінних, але не процедурою обчислень.

Канонічна форма задачі лінійного програмування – це форма задачі лінійного програмування, в якій цільова функція прямує до максимуму (або мінімуму), основна система обмежень подана рівняннями та всі змінні невід'ємні:

$$Z(\mathbf{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Лінійно незалежний набір векторів $\mathbf{A}_j,\ j = \overline{1,m}$ – це ненульові вектори, для яких умова $\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{A}_m = \mathbf{0}$ виконується лише тоді, коли всі $\alpha_j = 0,\ j = \overline{1,m}.$

Лінія рівня (***поверхня рівня***) – це геометричне місце точок простору змінних, де досліджувана функція приймає однакові значення.

Метод штучного базису – це метод розв'язування задачі лінійного програмування, вихідний базис математичної моделі якої містить фіктивні змінні.

Невироджений базисний розв'язок – це вектор $\mathbf{X} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, у якого кількість додатних компонентів дорівнює кількості векторів, що утворюють базис простору R^n.

Обмеження на знак – обмеження, що містить математична модель задачі математичного програмування, згідно є яким усі керовані змінні цільової функції мають бути невід'ємними.

Опорний розв'язок – це базисний розв'язок системи рівнянь, що не містить від'ємних значень.

Оптимальний розв'язок (***оптимальний план***) задачі математичного програмування $\mathbf{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ – це допустимий розв'язок задачі, якому відповідає екстремальне значення цільової функції згідно з видом екстремуму, на який вона досліджується.

Основна система обмежень – це система обмежень у вигляді рівнянь або нерівностей різних знаків, які накладаються на змінні цільової функції згідно з умовою задачі.

Опукла множина – це множина $D \in R^n$, яка разом із двома будь-якими своїми точками $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in D$ містить весь відрізок, що їх з'єднує, тобто точка $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2$, де $\lambda \in [0; 1]$, теж належить множині D.

Оцінка вектора $\mathbf{A}_j$ – це величина $\Delta_j = \mathbf{C}_b \cdot \mathbf{A}_j - c_j$ $(j = \overline{1, n})$, за значенням якої перевіряється критерій оптимальності у симплекс-методі.

Розв'язувальний елемент (***основний множник***) – це елемент симплекс-таблиці x_{rs}, де r – номер базисного вектора, який на даній ітерації виводять з базису, s – номер вектора, який вводиться до базису.

Розширена, або ***М-задача*** – це задача лінійного програмування, математична модель якої містить штучний базис.

Симплексний метод – це універсальний метод розв'язування задачі лінійного програмування (ЗЛП), який за скінчену кількість етапів (ітерацій) дозволяє отримати оптимальний розв'язок задачі або довести його відсутність.

Стандартна (***симетрична***) ***форма задачі лінійного програмування*** – це форма задачі лінійного програмування, в якій цільова функція досліджується на максимум при тому, що основна система обмежень представлена нерівностями виду "$\le$", або цільова функція досліджується на мінімум і при тому основна система обмежень представлена нерівностями виду "$\ge$" та всі змінні невід'ємні.

Перша стандартна форма

$$Z(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \to \max,$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \le \mathbf{B},$$
$$\mathbf{X} \ge 0.$$

Друга стандартна форма

$$Z(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \to \min,$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \ge \mathbf{B},$$
$$\mathbf{X} \ge 0.$$

Цільова функція – це функція, максимум (мінімум) якої відшукають на множині допустимих планів оптимізаційної задачі.

Фіктивна (***штучна***) ***змінна*** – це змінна x_{n+l}, що вводиться в рівняння основної системи обмежень математичної модель задачі лінійного програмування для утворення одиничного вектора $\mathbf{A}_{n+l}$, якого не вистачає в базисі; до складу цільової функції, що досліджується на мінімум, фіктивна змінні входить з коефіцієнтом М, більшим за будь-який інший коефіцієнт цільової та їх лінійну комбінацію.

Штучний базис – базис задачі лінійного програмування, до складу якого входить фіктивний (штучний) вектор.

2.3. Тренувальні вправи

2.3.1. Побудова моделі задачі лінійного програмування. Кондитерський цех виробляє з напівфабрикатів чотири види продукції. Прибуток від її реалізації становить, відповідно, 4, 6, 9 та 6 грош. од. за одиницю продукції. Запаси сировини становлять 300 кг тіста та 100 кг фруктового джему. Норма витрат на виготовлення 1 кг продукції кожного виду наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Витрати сировини на виготовлення 1 кг продукції

Сировина	Види готової продукції			
	Хліб	Печиво	Тістечка	Торти
Тісто	1,1	1,2	1,5	1,3
Фруктовий джем	0	0,3	0,5	0,5

Побудувати математичну модель задачі для визначення оптимального плану виробництва, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від реалізації цієї продукції.

Розв'язання.

Процес побудови математичної моделі складається з кількох етапів.

1. Визначення змінних моделі та їх кількості.

Оберіть правильне: керованими змінними у моделі задачі є:

а) кількість сировини: x_1, x_2;

б) обсяг виробництва кожного виду продукції: x_1, x_2, x_3, x_4.

Вибір б) є правильним; у разі вибору іншого дивись пояснення до виконання тренувальної вправи.

2. Визначення критерію оптимальності задачі оптимізації.

Оберіть правильне:

метою задачі оптимізації є:

а) загальний прибуток від реалізації продукції (цільова функція) має вигляд $Z = 1{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + 1{,}8x_4 \to \max$;

б) загальний прибуток від реалізації продукції (цільова функція) має вигляд $Z = 1{,}1x_1 + 0{,}9x_2 + 1x_3 + 0{,}8x_4 \to \max$;

в) загальний прибуток від реалізації продукції (цільова функція) має вигляд $Z = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \to \max$.

Вибір в) є правильним; у разі вибору іншого дивіться пояснення до виконання тренувальної вправи.

3. Визначення системи обмежень для керованих змінних задачі оптимізації.

Оберіть правильну систему обмежень:

а) $\begin{cases} 1{,}1x_1 + 1{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}3x_4 \le 500, \\ 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 \le 100, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}1x_1 + 1{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}3x_4 = 500, \\ 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 = 100, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1{,}1x_1 + 1{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}3x_4 < 500, \\ 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 < 100, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 > 0. \end{cases}$

Вибір а) є правильним; у разі іншого вибору дивіться пояснення до виконання тренувальної вправи.

2.3.2. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування. Розв'яжіть задачу за допомогою графічного методу задачу лінійного програмування, математична модель якої задана в загальній формі:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + 10x_2 \geq 30, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 60, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Процес розв'язування можна розбити на кілька етапів.

Оберіть правильну послідовність етапів графічного методу в разі максимізації цільової функції:

а) побудова множини допустимих розв'язків;

побудова лінії рівня;

переміщення лінії рівня у напряму зростання цільової функції та пошук екстремальної точки (кутової точки багатокутника планів) на перетині лінії рівня й множини допустимих розв'язків;

розв'язання системи рівнянь прямих, які перетинаються в екстремальній точці, пошук оптимального розв'язку;

обчислення значення цільової функції в оптимальній точці;

б) побудова множини допустимих розв'язків;

побудова вектора-градієнта цільової функції;

побудова лінії рівня;

переміщення лінії рівня у напряму зростання цільової функції, для визначення кутової точки (вершини) багатокутника планів (або його ребра, якщо існує не один оптимальний план), через яку лінія рівня під час її пересування вздовж градієнта цільової функції виходить з багатокутника планів та ідентифікація прямих, перетин яких утворює цю вершину;

розв'язання системи рівнянь, які відповідають прямим, що перетинаються в екстремальній точці, для визначення компонентів оптимального плану;

обчислення значення цільової функції, яке відповідає оптимальному плану;

в) побудова множини допустимих розв'язків;

побудова вектора-градієнта цільової функції;

побудова лінії рівня;

переміщення лінії рівня у напряму вектора-градієнта цільової функції та пошук точки перетину лінії рівня й множини допустимих розв'язків;

розв'язання системи рівнянь, які відповідають прямим, що перетинаються в екстремальній точці, пошук розв'язку;

обчислення значення цільової функції.

Вибір б) є правильним; у разі вибору іншого дивіться пояснення до виконання тренувальної вправи.

Відповідно послідовності етапів графічного методу виконуємо розв'язання задачі.

1. Побудова множини допустимих розв'язків.

Оберіть правильну відповідь.

Множина допустимих розв'язків, у якій одночасно виконуються всі обмеження моделі, має знаходитися:

а) у першому квадранті;

б) у другому квадранті;

в) у третьому квадранті;

г) у першому та четвертому квадранті.

Вибір а) є правильним.

Щоб урахувати обмеження задачі перетворимо нерівності на рівняння (отримуємо рівняння прямих) та на координатній площині побудуємо прямі. Для побудови цих прямих необхідно для кожної прямої знайти дві довільні точки, що належать цій прямій. Цими точками можуть булі, наприклад, точки їх перетину з осями координат.

Введіть пропущені значення координат точок перетину з осями, що належать відповідній прямій:

1) для прямої L_1: $x_1 + x_2 = 10$ це точки $(0;\ \_\_\_)$ та $(\_\_\_;\ 0)$;

2) для прямої L_2: $-3x_1 + 2x_2 = 6$ це точки $(0;\ \_\_\_)$ та $(\_\_\_;\ 0)$;

3) для прямої L_3: $-3x_1 + 10x_2 = 30$ це точки $(0;\ \_\_\_)$ та $(\_\_\_;\ 0)$;

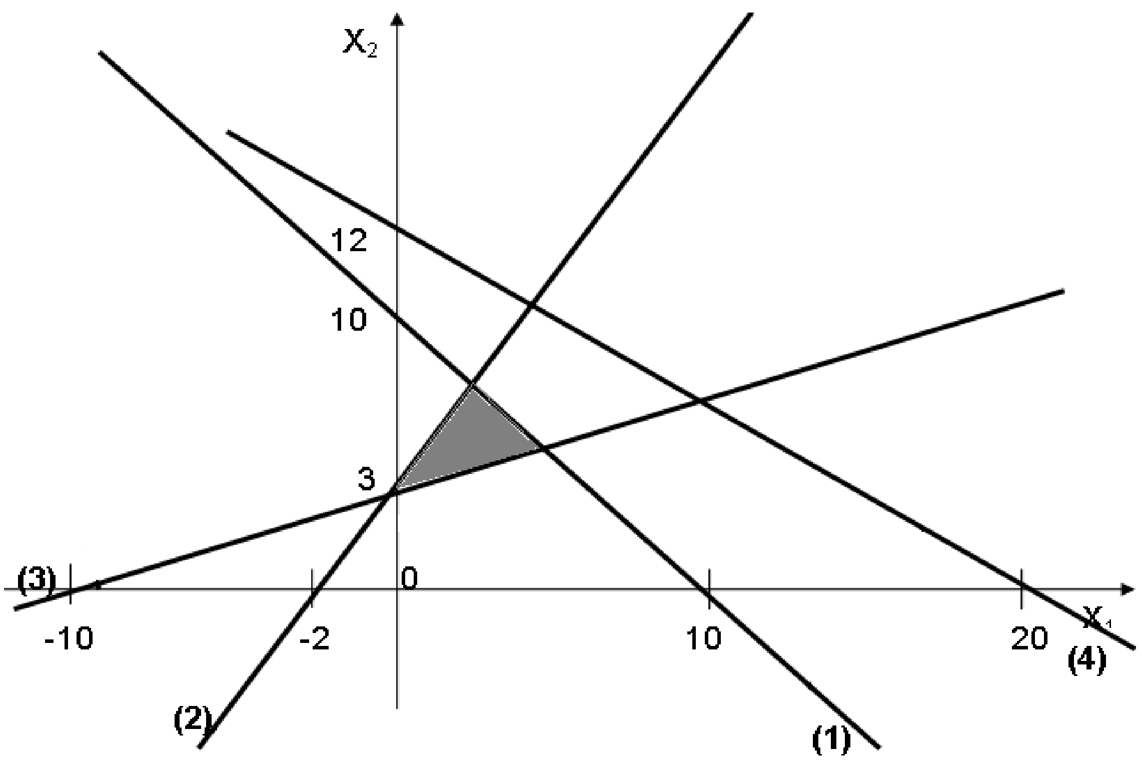
4) для прямої L_4: $3x_1 + 5x_2 = 60$ це точки $(0;\ \_\_\_)$ та $(\_\_\_;\ 0)$.

У разі виникнення запитань дивіться пояснення до виконання тренувальної вправи.

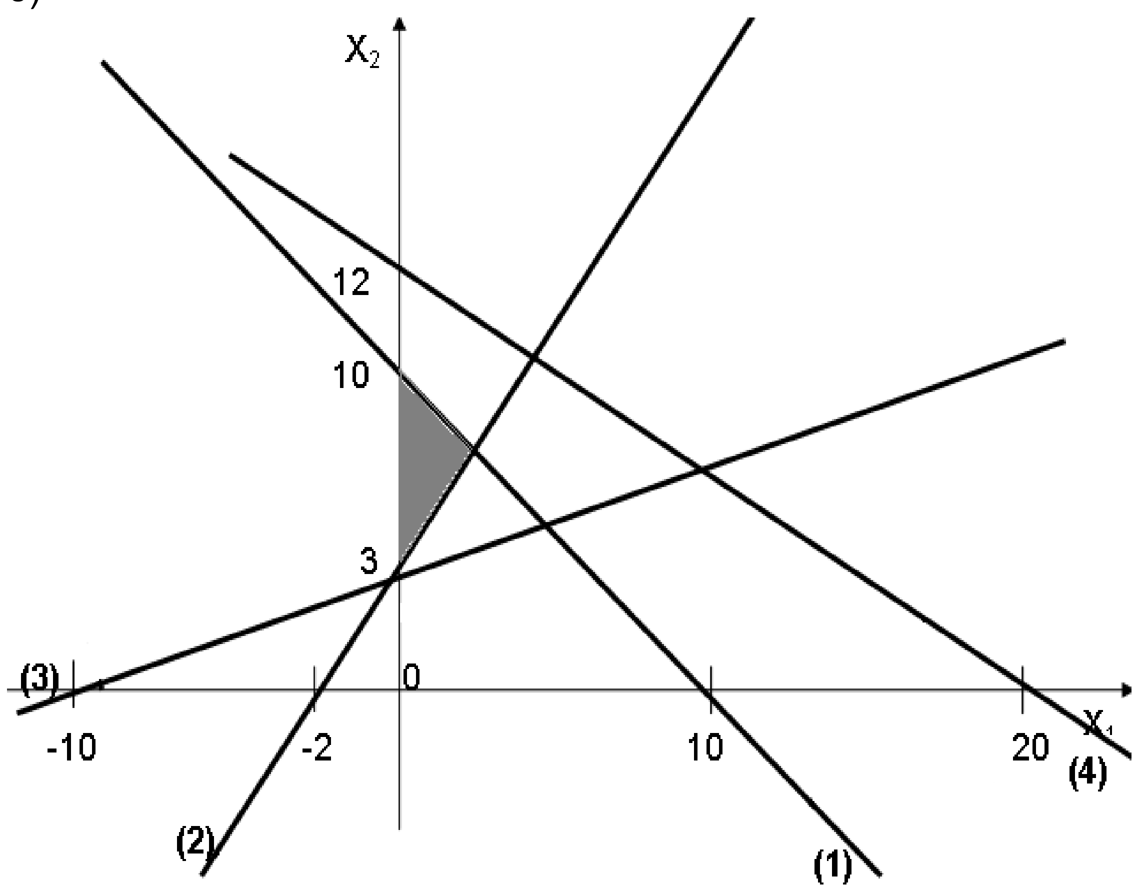
Будуємо прямі та за кожною з нерівностей основної системи обмежень визначаємо ту частину координатної площини, де відповідна нерівність виконується. З урахуванням обмеження на знак знаходимо область, де виконуються всі нерівності системи обмежень, тобто область допустимих розв'язків (багатокутник планів).

Оберіть правильну область допустимих розв'язків:

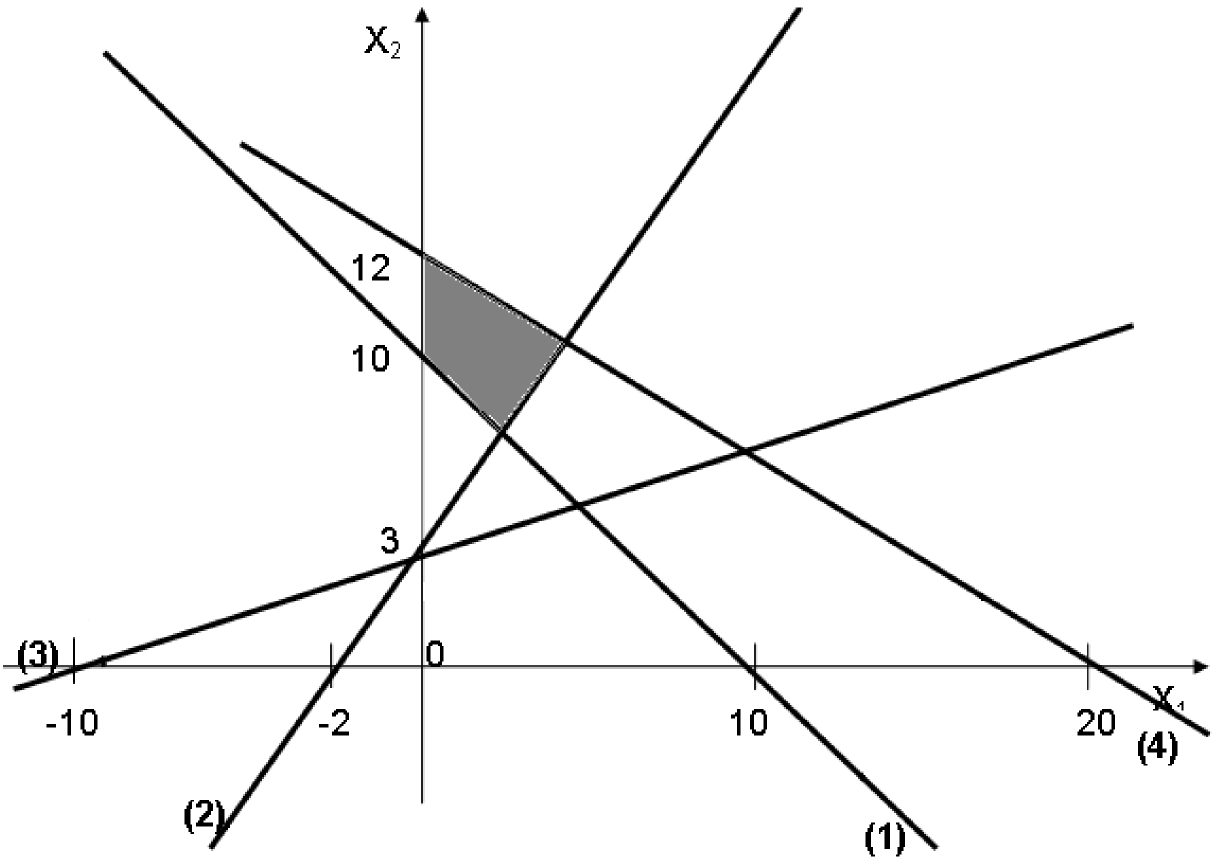
а)



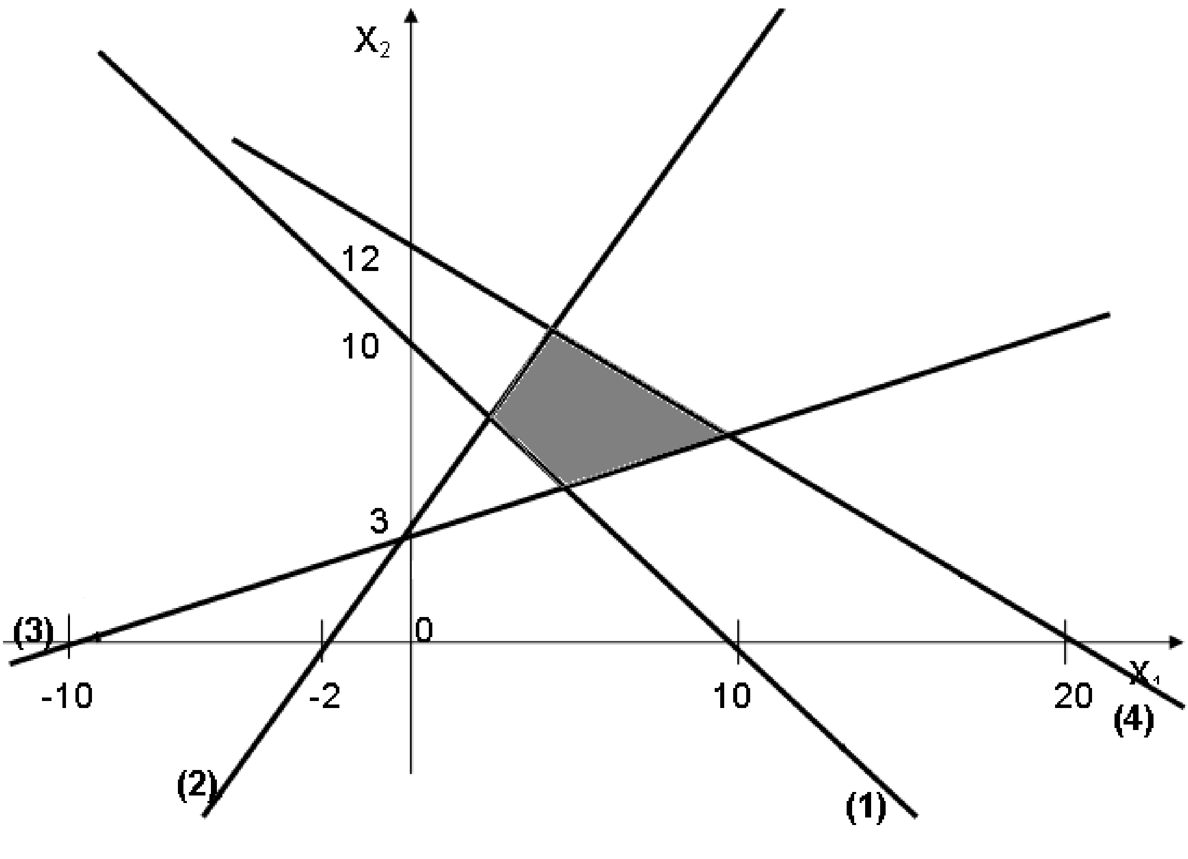
б)



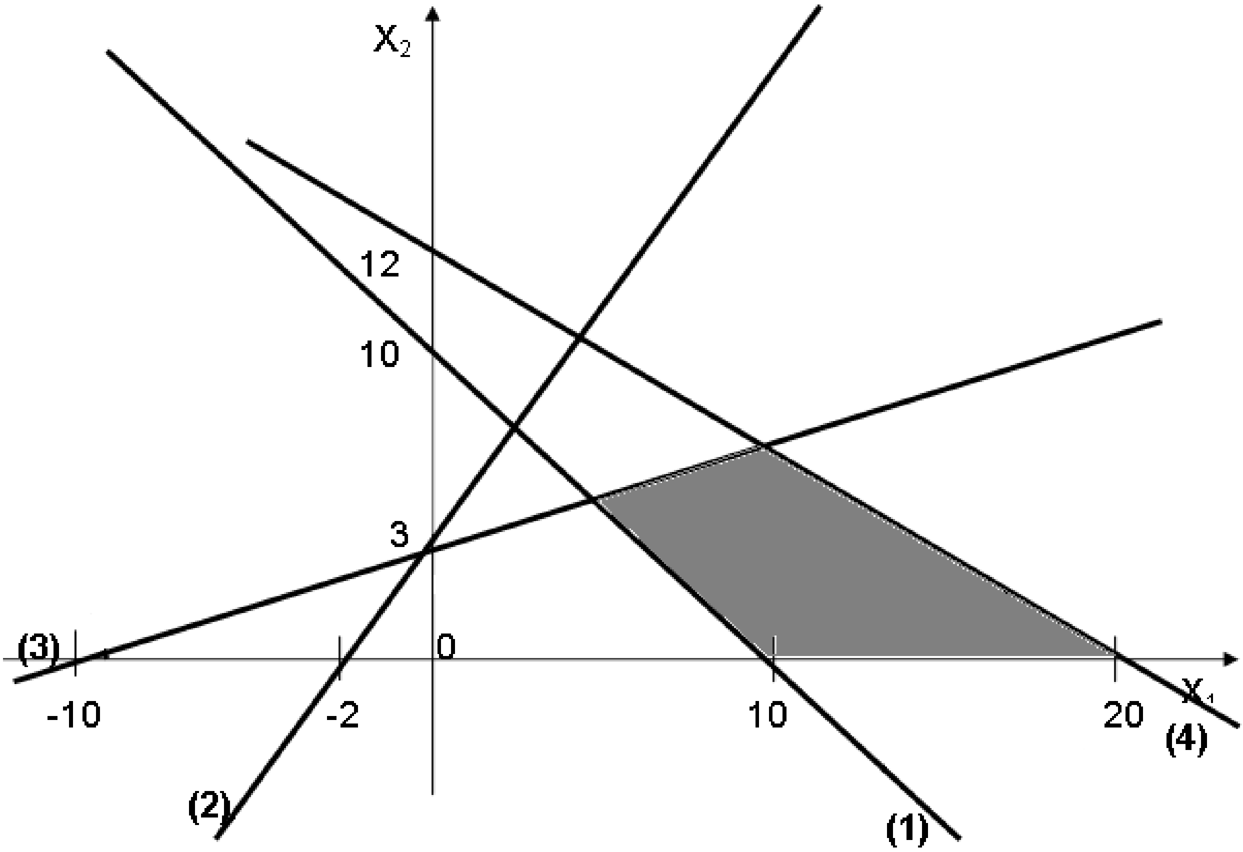
в)



г)



д)



Вибір г) є правильним.

2. Побудова вектора-градієнта.

Щоб знайти оптимальний розв'язок, визначимо, в якому напрямі відбувається найшвидше зростання цільової функції $Z = 5x_1 + 4x_2$.

Оберіть правильну відповідь:

координатами вектора-градієнта ∇Z є:

а) $(1; 4)$; б) $(5; 4)$; в) $(4; 5)$.

Вибір б) є правильним.

3. Побудова лінії рівня.

Оберіть правильну відповідь:

а) лінія рівня перпендикулярна до вектора-градієнта;

б) лінія рівня паралельна вектору-градієнту.

Вибір а) є правильним.

4. Переміщення лінії рівня в напряму зростання цільової функції та пошук екстремальної (кутової й найбільш віддаленої) точки на перетині лінії рівня й множини допустимих розв'язків.

Оберіть правильну відповідь:

оптимальному розв'язку відповідає вершина, що утворюється при перетині прямих:

а) (1) і (2); б) (3) і (4);

в) (1) і (3); г) (2) і (4).

Вибір б) є правильним.

5. Розв'язання системи рівнянь прямих, які перетинаються в екстремальній точці, пошук оптимального розв'язку.

Оберіть правильну відповідь:

оптимальним розв'язком є вершина багатокутника планів, що має координати:

а) $x_1 = 10,\ x_2 = 4$; б) $x_1 = 6,\ x_2 = 10$; в) $x_1 = 10,\ x_2 = 6$.

Вибір в) є правильним.

6. Обчислення значення цільової функції в оптимальній точці.

Оберіть правильну відповідь:

оптимальному плану відповідає максимальне значення цільової функції, яке дорівнює:

а) $Z_{\max} = 74$; б) $Z_{\max} = 64$; в) $Z_{\max} = 70$.

Вибір а) є правильним.

2.3.3. Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування. Один цех цегельного заводу виробляє дві марки цегли A_1 і A_2. Для цього використовується глина трьох видів B_1, B_2, B_3. Місячний запас глини становить 10, 30, 47 т, відповідно. Для виробництва 1 тис. шт. цеглин 1-ої марки необхідно 1 т глини B_1 і 1 т глини B_3; для виробництва 1 тис. шт. цеглин 2-ої марки потрібно 2 т глини B_2 і 2 т глини B_3. Прибуток від реалізації 1 тис. шт. цеглин 1-ої марки дорівнює 40 грн, 2-ої марки – 70 грн.

За допомогою симплекс-методу визначити план виробництва цегли, що забезпечить заводу максимальний прибуток від реалізації.

Розв'язання.

1. Побудуємо математичну модель задачі.

Оберіть вигляд математичної моделі задачі:

а)

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 \le 30, \\ x_1 + 2x_2 \le 47, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

б)

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 \le 10, \\ 2x_2 \le 30, \\ x_1 + 2x_2 \le 47, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

в)

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 \le 10, \\ 2x_1 \le 30, \\ x_1 + 2x_2 \le 47, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Вибір б) є правильним.

2. Оберіть наступний крок розв'язання задачі симплекс-методом:
а) складання симплексної таблиці;
б) визначення початкового опорного плану;
в) приведення математичної моделі задачі до канонічної форми.
Вибір в) є правильним.

3. Отже, зводимо задачу до канонічної форми.
Оберіть правильний вигляд моделі у канонічній формі:

а)

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 10, \\ 2x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 47, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

б)

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 10, \\ 2x_2 - x_4 = 30, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 47, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

в)

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 10, \\ 2x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 47, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Вибір а) є правильним.
4. Розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиці.
Заповніть табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Перша ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j					
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$							
2	$\mathbf{A}_4$							
3	$\mathbf{A}_5$							

Знайдемо вихідний план даної задачі.

Оберіть початковий опорний план:

а) $\mathbf{X}_0 = (10; 30; 47; 0; 0)$; б) $\mathbf{X}_0 = (0; 0; 10; 30; 47)$; в) $\mathbf{X}_0 = (0; 10; 30; 47; 0)$.

Вибір б) є правильним.

5. Перевіримо оптимальність початкового опорного плану.

Заповніть табл. 2.3 та за оцінками плану дайте відповідь, чи є початковий опорний план оптимальним.

Таблиця 2.3

Обчислення оцінок початкового плану задачі

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$	0	10	1	0	1	0	0
2	$\mathbf{A}_4$	0	30	0	2	0	1	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	47	1	2	0	0	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$								
$\Delta_j = Z_j - c_j$								

Оберіть правильну відповідь:

початковий опорний план:

а) є оптимальним; б) не є оптимальним.

Вибір б) є правильним.

Отже, маємо початковий опорний план $\mathbf{X}_0 = (0; 0; 10; 30; 47)$, за яким значення цільової функції дорівнює $Z(\mathbf{X}_0) = 0$. Цей опорний план не є оптимальним, оскільки він має від'ємні оцінки: Δ_1 та Δ_2.

6. Визначаємо розв'язувальний елемент.

Оберіть правильне:

а) $\theta_{01} = 10,\ \theta_{02} = 15,\ |\theta_{01}\Delta_1| = 400,\ \ |\theta_{02}\Delta_2| = 1050,$ до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_4$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 2 у другому рядку (див. табл. 2.3);

б) $\theta_{01} = 47, \theta_{02} = 15, |\theta_{01}\Delta_1| = 1880,\ |\theta_{02}\Delta_2| = 1050$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1 у третьому рядку (див. табл. 2.3);

в) $\theta_{01} = 10, \theta_{02} = 23{,}5, |\theta_{01}\Delta_1| = 400,\ |\theta_{02}\Delta_2| = 1645$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 2 у третьому рядку (див. табл. 2.3).

Вибір а) є правильним.

7. За методом Жордана – Гаусса здійснюємо другу ітерацію.

Заповніть табл. 2.4 та дайте відповідь, чи є отриманий опорний план оптимальним.

Таблиця 2.4

Друга ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
4	$\mathbf{A}_3$							
5	$\mathbf{A}_2$							
6	$\mathbf{A}_5$							
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$								
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–					

У разі виникнення запитань уважно перевірте обчислення за методом Жордана – Гаусса.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}_1 = (15; 10; 0; 17; 0)$ – є оптимальним планом;

б) $\mathbf{X}_1 = (0; 15; 10; 0; 17)$ – є оптимальним планом;

в) $\mathbf{X}_1 = (0; 15; 10; 0; 17)$ – не є оптимальним планом.

Вибір в) є правильним.

Отже, новий опорний план: $\mathbf{X}_1 = (0; 15; 10; 0; 17)$ не є оптимальним, оскільки в індексному рядку оцінка Δ_1 є від'ємною.

8. Визначаємо розв'язувальний елемент.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\theta_{11} = 17$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1 у шостому рядку;

б) $\theta_{11} = 10$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_3$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1 у четвертому рядку;

в) $\theta_{11} = 0$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_2$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 0 у п'ятому рядку.

Вибір б) є правильним.

9. За методом Жордана – Гаусса здійснимо третю ітерацію.

Заповніть табл. 2.5 та дайте відповідь, чи є третій опорний план оптимальним.

Таблиця 2.5

Третя ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
7	$\mathbf{A}_1$							
8	$\mathbf{A}_2$							
9	$\mathbf{A}_5$							
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$								
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–					

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}_2 = (10; 15; 0; 0; 7)$ – є оптимальним планом;

б) $\mathbf{X}_2 = (0; 15; 10; 0; 7)$ – є оптимальним планом;

в) $\mathbf{X}_2 = (10; 15; 0; 0; 7)$ – не є оптимальним планом.

Вибір а) є правильним.

Отже, новий опорний план: $\mathbf{X}_2 = (10; 15; 0; 0; 7)$ є оптимальним, оскільки в індексному рядку всі оцінки невід'ємні.

10. Оберіть правильну відповідь стосовно значення цільової функції:

а) $Z_{\max}(\mathbf{X}_2) = 1400$; б) $Z_{\max}(\mathbf{X}_2) = 1457$; в) $Z_{\max}(\mathbf{X}_2) = 1450$.

Вибір в) є правильним.

Отже, для забезпечення максимального прибутку від реалізації цегли у розмірі 1 450 грн цех цегельного заводу має виробляти цеглу марки A_1 у кількості 10 тис. шт. та марки A_2 – 15 тис. шт. щомісяця.

2.3.4. Розширена М-задача. Розв'яжіть задачу, математична модель якої має вигляд:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Перетворимо систему нерівностей у систему рівнянь.

Оберіть правильний вигляд системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 4. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$

Вибір б) є правильним.

2. Оскільки матриця коефіцієнтів системи рівнянь, що відповідає основній системі обмежень, не містить одиничної матриці, то для її отримання додаємо у кожній рівності по одній фіктивній змінній x_5 та x_6, відповідно. Ці змінні вводимо в цільову функцію з коефіцієнтом M, що є більшим за будь-які інші коефіцієнти цільової функції.

Оберіть правильну відповідь:

а) $Z = 2x_1 + 3x_2 + Mx_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

б) $Z = 2x_1 + 3x_2 + Mx_5 + Mx_6 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 4. \end{cases}$$

в)

$$Z = 2x_1 + 3x_2 - Mx_5 - Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 4. \end{cases}$$

Вибір б) є правильним.

3. Розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиці.

Заповніть табл. 2.6 та дайте відповідь, чи є знайдений початковий план оптимальним.

Таблиця 2.6

Перша ітерація методу штучного базису

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j						
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_5$	M							
2	$\mathbf{A}_6$	M							
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$									
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–						

Оберіть початковий опорний план:

а) не є оптимальним; б) є оптимальним.

Вибір а) є правильним.

Отже, маємо початковий опорний план: $\mathbf{X}_0 = (0; 0; 0; 0; 6; 4)$, якому відповідає цільова функція $Z(\mathbf{X}_0) = 10M$.

Опорний план неоптимальний, оскільки в індексному рядку всі оцінки додатні.

4. Для переходу до нового базису визначаємо розв'язувальний елемент.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\theta_1 = 4, \quad \theta_2 = 1, \ |\theta_1\Delta_1| < |\theta_2\Delta_2|$, тому вводимо вектор $\mathbf{A}_1$ до базису, з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_6$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1;

б) $\theta_1 = 2, \quad \theta_2 = 1, \ |\theta_1\Delta_1| > |\theta_2\Delta_2|$, тому вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 3;

в) $\theta_1 = 2, \quad \theta_2 = 1, \ |\theta_1\Delta_1| < |\theta_2\Delta_2|$, тому до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 2.

Вибір б) є правильним.

5. Здійснимо другу ітерацію: виконаємо перетворення в симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса, знайдемо другий опорний план та перевіримо його на оптимальність. Заповніть табл. 2.7 та дайте відповідь, чи є наступний опорний план оптимальним. У разі виникнення запитань уважно перевірте обчислення за методом Жордана – Гаусса.

Таблиця 2.7

Друга ітерація методу штучного базису

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j						
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
3	$\mathbf{A}_5$	M							
4	$\mathbf{A}_6$	M							
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$									
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–						

Оберіть правильну відповідь:

а) план $\mathbf{X}_1 = (2; 0; 0; 0; 0; 2)$ є оптимальним планом;

б) план $\mathbf{X}_1 = (2; 0; 0; 0; 0; 2)$ не є оптимальним планом;

в) план $\mathbf{X}_1 = (2; 2; 0; 0; 0; 0)$ є оптимальним планом.

Вибір б) є правильним.

Отже, новий опорний план $\mathbf{X}_1 = (2; 2; 0; 0; 0; 0)$ не є оптимальним, оскільки в індексному рядку містяться додатні оцінки Δ_2 і Δ_3.

6. Визначаємо розв'язувальний елемент.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\theta_2 = 3$, $\theta_3 = 6$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_1$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 2/3;

б) $\theta_2 = 3/5$, $\theta_3 = -6$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_3$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_1$, розв'язувальний елемент дорівнює числу –1/3;

в) $\theta_2 = 3/5$, $\theta_3 = 6$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_6$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 10/3.

Вибір в) є правильним.

7. Здійснюємо перетворення за методом Жордана – Гаусса й отримуємо третій опорний план, перевіряємо його на оптимальність.

Заповніть табл. 2.8 та дайте відповідь, чи є третій опорний план оптимальним.

Таблиця 2.8

Третя ітерація методу штучного базису

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	2	3	0	0	*M*	*M*
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
5	$\mathbf{A}_1$	2							
6	$\mathbf{A}_2$	3							
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$									
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–						

У разі виникнення запитань уважно перевірте обчислення за методом Жордана – Гаусса.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}_2 = (1{,}6;\, 0{,}6;\, 0;\, 0;\, 0;\, 0)$ є оптимальним планом, $Z(\mathbf{X}_2) = Z_{\min} = 5$;

б) $\mathbf{X}_2 = (1{,}6;\, 0;\, 0{,}6;\, 0;\, 0;\, 0)$ є оптимальним планом, $Z(\mathbf{X}_2) = Z_{\min} = 5$;

в) $\mathbf{X}_2 = (1{,}6;\, 0{,}6;\, 0;\, 0;\, 0;\, 0)$ не є оптимальним планом, $Z(\mathbf{X}_2) = 5$.

Вибір а) є правильним. Оскільки оптимальний розширеної М-задачі не містить фіктивні змінні, то цей план є оптимальнім розв'язком вихідної задачі. Отже, маємо відповідь: $\mathbf{X}^* = (1{,}6;\, 0{,}6;\, 0;\, 0)$, $Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^*) = 5$.

2.4. Запитання для самоперевірки

2.4.1. Наведіть постановку задачі лінійного програмування.

2.4.2. Які типові задачі лінійного програмування розрізняють?

2.4.3. Запишіть задачу лінійного програмування в канонічній формі.

2.4.4. Які є форми запису задач лінійного програмування?

2.4.5. Які задачі лінійного програмування можна розв'язувати за допомогою графічного методу?

2.4.6. Яким чином під час застосування графічного методу розв'язання визначити значення балансових змінних?

2.4.7. Які основні етапи графічного методу розв'язання задач лінійного програмування?

2.4.8. Поясніть, які випадки графічного розв'язання задачі лінійного програмування розрізняють.

2.4.9. Наведіть властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування.

2.4.10. Для розв'язання яких задач математичного програмування використовується симплексний метод?

2.4.11. У чому сутність симплекс-методу? Порівняйте хід визначення оптимального плану під час застосування графічного і симплексного методів.

2.4.12. Назвіть загальні принципи, за якими можна перетворити математичну модель ЗЛП, що надана у загальній формі, до вигляду, прийнятного для запису у симплекс-таблицю.

2.4.13. Як визначити початковий опорний план задачі лінійного програмування?

2.4.14. Сформулюйте послідовність етапів практичної реалізації симплекс-методу у ході розв'язування задач лінійного програмування.

2.4.15. За якими ознаками визначають, що допустимий опорний план ЗЛП є оптимальним?

2.4.16. Коли виникає необхідність використання симплекс-методу з штучним базисом?

2.4.17. У чому сутність проблеми виродження? Яка особливість реалізації симплекс-методу в цьому випадку?

2.5. Практичні завдання

2.5.1. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі *A*, *B* і *C* використовує три види основної сировини: цукор, патоку та фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведені в табл. 2.9. У ній також указана загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі кожного виду.

Таблиця 2.9

Вихідні дані задачі

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Цукор	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	–	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн)	108	112	126	–

Побудуйте математичну модель визначення плану виробництва карамелі, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації.

2.5.2. Визначте, які з областей є обмеженими:

а) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 26, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge 7, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 36, \\ 2 \le x_1 \le 7. \end{cases}$ в) $\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 \le 26, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 47, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 0. \end{cases}$

2.5.3. На підприємстві виробляють два види продукції. У виробництві використовують два види ресурсів, запаси кожного з яких дорівнюють 1 ум. од. Під час виробництва одиниці першого виду продукції заощаджується 1 одиниця першого ресурсу та витрачається 1 одиниця другого. Під час виробництва одиниці другого виду продукції витрачається 1 одиниця першого ресурсу та заощаджується 2 одиниці другого ресурсу. Кожна одиниця першого виду продукції дає дохід підприємству 3 ум. од., а другого – 1 ум. од.

Побудуйте математичну модель визначення плану виробництва, щоб фабрика отримала найбільший прибуток.

2.5.4. На фабриці виробляють зошити та папки. Щоденний обсяг виробництва зошитів не повинний перевищувати 1000 штук, а папок – 500 штук. Норми витрат трудових ресурсів, використання обладнання в розрахунку на 100 одиниць продукції кожного виду, а також граничні витрати цих виробничих чинників наведені в табл. 2.10.

Таблиця 2.10

Вихідні дані задачі

Виробничі чинники	Норми витрат (годин на 100 одиниць продукції)		Ресурс, год
	Зошити	Папки	
Витрати робочої сили	3	5	40
Використання обладнання	1	2	36

Прибуток від реалізації одного зошиту складає 1 грн, однієї папки – 2 грн.

Визначте за допомогою графічного методу, якої продукції і скільки має вироблятися на підприємстві, щоб максимізувати його дохід.

2.5.5. Розв'яжіть задачі лінійного програмування за допомогою графічного методу:

а)
$$Z = x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

б)
$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

в)
$$Z = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1, 5}.$$

2.5.6. Підприємство складається з п'яти підрозділів, які виробляють продукцію. На реконструкцію підприємства виділено 500 тис. грн. Приріст продукції з розрахунку на одну тисячу гривень, вкладених у кожний підрозділ, складає відповідно 20, 50, 30, 40 та 60 одиниць.

Визначте план розподілу коштів між підрозділами підприємства, який забезпечить максимальне зростання загального приросту від реалізації продукції за умови, що для третього підрозділу необхідно виділити не більше 20 % коштів, для другого – не більше 50 %, для четвертого –

щонайменше половину того, що для першого підрозділу, а для п'ятого – рівно 20 % коштів.

2.5.7. Розв'яжіть симплекс-методом задачі лінійного програмування:

а) $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$

б) $Z = 11x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \le 21, \\ -5x_1 + 6x_2 \le 12, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 90, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$

в) $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 - 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

г) $Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

д) $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

2.5.8. З метою збільшення реалізації продукції фірма виділила на рекламу 10 тис. грн. Розглядається можливість надання реклами на радіо, на телебаченні та у пресі. Одна хвилина реклами на радіо коштує 200 грн, на телебаченні – 500 грн, одне оголошення у пресі – 300 грн. Попередній досвід свідчить, що кількість оголошень у пресі не повинна перевищувати 5, кількість хвилин реклами на радіо – не більше реклами на телебаченні ніж у двічі. Маркетингові дослідження свідчать, що кожна хвилина реклами на радіо сприяє збільшенню продукції фірми на 2 %, телереклами на 5 %, а одне оголошення у пресі на 3 %.

Визначте такий план замовлення реклами, який би сприяв найбільшому зростанню реалізації продукції фірми.

2.5.9. Розв'яжіть за допомогою методу штучного базису:

$$Z(\mathbf{X}) = 800x_1 + 400x_2 + 600x_3 + 500x_4 \quad \to \quad \min,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 \ge 5; \\ 90x_1 + 150x_2 + 75x_3 + 175x_4 \ge 100; \\ 45x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 37x_4 \ge 30; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \; x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2.5.10. Завод дитячого харчування виробляє 5 видів соків: яблучний, сливовий, томатний, виноградний та персиковий. Собівартість виробництва 1 літру соків відповідно дорівнює 5 грн, 4 грн 80 коп., 4 грн, 5 грн 50 коп. та 6 грн. Оптові ціни за 1 літр соку складають відповідно: 6 грн, 5 грн 60 коп., 4 грн 80 коп., 6 грн 90 коп. та 7 грн.

Маркетингові дослідження показують, що попит на виноградний та сливовий сік однакові. Попит на сливовий та томатний разом не перевищують 1 т. Яблучного соку має бути вироблено на 1 т більше, ніж томатного. А персикового більше ніж сливового на 2 т.

Враховуючи ринкові умови, визначте, яких соків і скільки має виробляти завод, щоб його прибуток був найбільший.

2.5.11. Два види деталей D1 та D2 виготовляють на трьох верстатах M1, M2 та M3. Час виготовлення деталей кожним верстатом, можливий час роботи верстатів та план виробництва деталей вказані в табл. 2.11.

Складіть такий план роботи верстатів, який дозволив би виготовити необхідну кількість деталей і при цьому загальний час виготовлення продукції був би найменшим.

Таблиця 2.11

Вихідні дані задачі

Верстати	Час виготовлення деталей на верстатах (год)		Загальний час роботи верстатів (год)
	D1	D2	
M1	1	3	3 000
M2	2	4	2 500
M3	3	1	2 800
План виробництва (од.)	1 000	5 000	

Вказівка: позначити через x_{ij} час роботи i-го верстата ($i=\overline{1,3}$) під час виготовлення j-ої деталі ($j=\overline{1,3}$).

2.5.12. Фірма "Чумак" підписала контракт з фірмою "Верес" на закупку 10 т томатів з метою виробництва трьох видів консервів: томати у власному соку, томатний сік та томатна паста. З тих томатів, що були закуплені, 40 % мають якість класу "А", яка оцінюється 9 балів у середньому, а решта томатів – якість класу "Б", що оцінюється у 5 балів у середньому. Середня ціна 1 кг томатів складає 3 грн 50 коп., а фактична ціна за 1 кг томатів пропорційна балу якості. За технологією виготовлення для виробництва томатів у власному соку та томатного соку мають використовуватися лише томати класу "А", для томатної пасти – тільки класу "Б". Дані щодо витрат сировини, ціни реалізації готової продукції наведені в табл. 2.12.

Таблиця 2.12

Вихідні дані задачі

Види консервів	Норма витрат сировини (кг/одна упаковка)	Ціна реалізації (грн/упаковка)
Томати у власному соку	4	40
Томатний сік	2	45
Томатна паста	6	38

У процесі визначення оптимального плану виробництва консервів необхідно врахувати, що попит на томати у власному соку не перевищує 800 упаковок, а на томатну пасту не менше 600 упаковок. Критерієм оптимальності плану є максимізація чистого прибутку.

2.6. Тестові завдання

2.6.1. Математичний інструментарій розв'язання лінійних економічних задач оптимізаційного типу називають:

а) методом найменших квадратів;

б) теорією витрати-виробництво;

в) лінійним програмуванням;

г) методом екстраполяції.

2.6.2. Оберіть правильні відповіді щодо такого означення:

Лінійне програмування – це розділ математичного програмування, що вивчає задачі, в яких:

а) цільова функція є нелінійною, але основна система обмежень подана лінійними функціями;

б) функції основної системи обмежень нелінійні, тоді як цільова функція лінійна;

в) цільова функція лінійна та основна система обмежень подана лінійними функціями.

2.6.3. Модель, де потрібно знайти максимум лінійної функції цілі за умовою лінійних обмежень типу $\leq$ є:

а) стандартною формою задачі лінійного програмування;

б) канонічною формою задачі лінійного програмування;

в) загальною формою задачі лінійного програмування.

2.6.4. Серед наведеного переліку вкажіть типи задач, розв'язок яких передбачає максимізацію функції цілі:

а) задача визначення оптимального плану виробництва;

б) задача про "дієту";

в) транспортна задача;

г) задача оптимального розподілу виробничих потужностей;

д) задача про призначення;

е) задача оптимального розподілу капіталовкладень.

2.6.5. Управління запасами полягає у відшукуванні такої стратегії поповнення і витрат запасів, за якою функція витрат набуває:

а) мінімальне значення;

б) максимальне значення;

в) дорівнює заданому значенню.

2.6.6. Відповідно до наведеного опису та постановки задачі моделювання визначте назву задачі:

Назва задачі	Опис задачі
1	2
1. Оптимізація розподілу капіталовкладень	А. Для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. Відомі загальні запаси ресурсів, норма їх витрат та прибуток з одиниці реалізованої продукції

1	2
2. Задача визначення оптимального плану виробництва	Б. Розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства, потреби в продукції кожного виду, матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартість виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами так, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств
3. Задача про "дієту" (або про суміш)	В. Розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання, задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерії оптимальності – мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні витрати часу
4. Задача оптимального розподілу виробничих потужностей	Г. Планується діяльність групи підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним
5. Транспортна задача	Д. Деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі: вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці продукту кожної поживної речовини. Необхідно визначити раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності – мінімальна вартість раціону

2.6.7. План, відповідно якому цільова функція набуває максимум (або мінімуму) відповідно до вимог ЗЛП, називають:

а) оптимальним; б) допустимим; в) можливим розв'язком.

2.6.8. Двовимірний простір рішень із двома лінійними обмеженнями у вигляді рівнянь може містити не більш однієї припустимої точки за умови, що прямі, що відповідають обмеженням, не збігаються (тобто ці рівняння незалежні). Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні.

2.6.9. У задачі лінійного програмування із двома змінними цільова функція може набувати однакового значення у двох різних екстремальних точках. Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні.

2.6.10. Область планів *D* є опуклою, якщо разом із двома будь-якими її точками $A, B \in D$ вона містить усі внутрішні точки відрізка $[A, B]$:

а) так; б) ні.

2.6.11. Чи є множина планів задачі лінійного програмування угнутою:

а) так; б) ні?

2.6.12. Чи можна область планів задачі лінійного програмування змінити, вилучаючи надлишкові обмеження:

а) так; б) ні?

2.6.13. Чи можуть змінні лінійних оптимізаційних моделей реальних економічних завдань не мати обмеження на знак:

а) так; б) ні?

2.6.14. Максимізація деякої функції Z за умови заданої сукупності обмежень еквівалентна мінімізації функції $-Z$, при цьому $\min(-Z) = \max Z$. Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні.

2.6.15. Установіть правильну послідовність кроків алгоритму графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування:

а) знаходження багатокутника розв'язків задачі лінійного програмування – область допустимих розв'язків;

б) визначення півплощин, що відповідають кожному обмеженню;

в) побудова лінії рівня $Z = c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярної до градієнтного вектору;

г) шляхом переміщення лінії рівня $Z = c_1x_1 + c_2x_2 = const$ у напрямі градієнтного вектора (якщо цільова функція досліджується на максимум) або в протилежному напрямку (якщо цільова функція досліджується на мінімум) знаходження вершини багатокутника планів, де цільова функція набуває екстремуму потрібного типу;

д) побудова градієнтного вектору, що задає напрям оптимізації значення цільової функції задачі;

е) визначення координат точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, обчислення значення цільової функції в цій точці;

є) побудова прямих, рівняння яких визначаються заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей;

2.6.16. Графічним методом розв'язати задачу лінійного програмування, що має таку математичну модель:

$$Z(\mathbf{X}) = x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача має такий розв'язок:

а) $Z_{\max}(\mathbf{X}^*) = 16$ у точці $(4; 4)$; б) $Z_{\max}(\mathbf{X}^*) = 10$ у точці $(10; 0)$;

в) $Z_{\max}(\mathbf{X}^*) = 12$ у точці $(0; 4)$; г) $Z_{\max}(\mathbf{X}^*) = 14$ у точці $(2; 4)$.

2.6.17. Графічним методом розв'язати ЗЛП, що має таку математичну модель:

$$Z(\mathbf{X}) = x_1 + 0{,}5x_2 + 5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_2 \ge x_1, \\ x_1 \le 2, \\ x_2, x_1 \ge 0 \end{cases}$$

Зробіть висновок:

а) задача має безліч розв'язків;

б) розв'язків нема, цільова функція має значення 8 у точці $(2; 2)$;

в) розв'язків нема, цільова функція має значення 7 у точці $(2; 0)$;

г) розв'язків нема, цільова функція має значення 0 у точці $(0; 0)$.

2.6.18. Визначіть тип задач, до яких можна застосувати симплекс-метод як метод їх розв'язання:

а) задачі квадратичного програмування;

б) задачі опуклого програмування;

в) задачі лінійного програмування.

2.6.19. Зведення задачі лінійного програмування до канонічної форми передбачає зведення до такого вигляду, коли

а) усі обмеження основної системи обмежень подані у вигляді нервіностей, усі вільні члени яких є додатними;

б) усі обмеження основної системи обмежень є рівняннями, праві частини яких є невід'ємними;

в) усі обмеження є нерівностями, усі вільні коефіцієнти невід'ємні;

г) у системі обмежень усі вільні коефіцієнти є невід'ємними;

д) усі обмеження дорівнюють нулю;

е) у системі обмежень усі коефіцієнти є додатними.

2.6.20. Серед наведених варіантів оберіть правильний варіант відповіді щодо визначення симплекс-методу.

Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування – це:

а) ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування або встановити його відсутність;

б) ітераційна обчислювальна процедура, що дає змогу графічно знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в систему обмежень лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення;

в) один з напрямів прикладної математики, предметом якого є задачі знаходження екстремуму функції кількох змінних, аргументи якої повинні відповідати певним умовам.

2.6.21. Установіть правильну послідовність етапів алгоритму розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом

а) перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок. Якщо всі оцінки задавольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або за певними ознаками встановлюють, що оптимального плану задачі не існує;

б) повторення попередніх дій до тих пір, коли опорний план буде оптимальним;

в) перехід до нового опорного плану здійснюють визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці;

г) визначення початкового опорного плану ЗЛП;

д) побудова симплексної таблиці.

2.6.22. Назвіть метод, на основі якого здійснюється перехід до наступного опорного розв'язку для системи лінійних рівнянь у канонічній формі:

а) Жордана – Гаусса; б) Дж. Данцига; в) Крамера.

2.6.23. Черговій ітерації симплекс-методу (черговому базисному рішенню) не обов'язково відповідає припустима екстремальна точка простору рішень. Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні.

2.6.24. Оберіть правильні твердження:

а) для того, щоб можна було використовувати симплекс-метод, усі змінні повинні бути невід'ємними;

б) якщо з небазисних змінних для включення в базис вибирається змінна, що має в цільовій функції найбільший додатний коефіцієнт, то це гарантує найбільший приріст цільової функції на наступній ітерації;

в) умови оптимальності, що використані в симплекс-методі, є різними для випадків максимізації і мінімізації цільової функції;

г) під час ітерації симплекс-методу розв'язувальний елемент може бути від'ємним або мати нульове значення;

д) якщо з сукупності базисних змінних виключається змінна, для якої відношення вільного члена в правій частині обмеження до коефіцієнта при цій змінній не є мінімальним, то на наступній ітерації принаймні одна базисна змінна обов'язково прийме від'ємне значення;

е) обсяг обчислень під час реалізації симплекс-методу залежить у першу чергу від кількості обмежень.

2.6.25. Стовпчик симплекс-таблиці, що відповідає фіктивній змінній, можна виключити, якщо ця змінна стане небазисною. Оберіть правильне:

а) так; б) ні.

2.6.26. Заповніть симплекс-таблиці вихідного опорного плану ЗЛП, математична модель якої надана в стандартній формі:

$$Z = 9x_1 - 10x_2 + 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 50, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 \le 10, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j						
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_5$								
2	$\mathbf{A}_6$								

2.6.27. Визначте оцінки вихідного опорного плану задачі лінійного програмування та знайдіть розв'язувальний елемент, якщо під час розв'язання ЗЛП маємо таку симплекс-таблицю для цього опорного плану:

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$	0	10	1	0	1	0	0
2	$\mathbf{A}_4$	0	30	0	2	0	1	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	47	1	2	0	0	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$								
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–					

2.7. Висновки за темою

Багато задач в економіці є оптимізаційними. У межах лінійного програмування розглядаються оптимізаційні задачі, де критерієм ефективності є лінійна функція незалежних змінних, на які відповідно накладено лінійні обмеження.

Графічний метод застосовується, в основному, для розв'язання задач двовимірного простору і ґрунтується на геометричній інтерпретації задачі лінійного програмування.

Загальна ідея симплекс-методу (методу послідовного покращення опорного плану шляхом застосування методу Жордана – Гаусса) полягає у знаходженні початкового опорного плану; перевірці наявності ознаки оптимальності опорного плану; вмінні переходити до не гіршого опорного плану.

Метод штучного базису застосовується для розв'язання задач лінійного програмування, математична модель яких надається у канонічній формі, але побудувати вихідний опорний план досить складно, а також для задач, основна система обмежень якої містить нерівності виду "$\geq$" та/або рівняння.

Рекомендована література: [1; 3 – 15; 17 – 19].

3. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач

3.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення з правилами побудови математичної моделі двоїстої задачі, методами її розв'язання, визначення оптимального плану спряженої задачі за оптимальним планом вихідної із застосуванням теорем двоїстості та формування компетентностей щодо проведення післяоптимізаційного аналізу задач лінійного програмування.

Професійні компетентності, що формуються під час вивчення теми:

знання основних теорем двоїстості та їх економічного тлумачення;

вміння визначати оптимальний план вихідної задачі за розв'язком двоїстої задачі;

здатність аналізувати діапазон зміни коефіцієнтів цільової функції та основної матриці системи обмежень задачі лінійного програмування

3.2. Термінологічний словник

Двоїста задача математичного програмування – це задача математичного програмування, спряжена до прямої (вихідної) постановки задачі в частині змінних, коефіцієнтів цільової функції та обмежень.

Двоїста оцінка i***-го ресурсу*** – змінна y_i^* оптимального плану двоїстої задачі, яка визначає, на яку величину збільшиться цільова функція (при її дослідженні на максимум), якщо запас i-го ресурсу збільшити на одиницю.

Двоїстий симплекс-метод (***метод послідовного уточнення оцінок***) – це метод розв'язування задачі лінійного програмування на основі використання псевдопланів задачі.

Дефіцитні ресурси – це ресурси, які, відповідно до оптимального плану виробництва продукції, витрачаються повністю, при цьому гранична корисність дефіцитних ресурсів є додатною величиною.

Псевдоплан (***майже допустимий план***) – це вектор, який відповідає таким вимогам: задовольняє всі обмеження задачі лінійного програмування, крім обмежень на знак змінних; система векторів $\mathbf{A}_j$, що відповідає його ненульовим компонентам, є лінійно незалежною; оцінки $\Delta_j \left(j = \overline{1, n} \right)$ відносно цього вектора є невід'ємними.

Недефіцитні ресурси – це ресурси, які, відповідно до оптимального плану виробництва продукції, витрачаються не повністю, при цьому гранична корисність недефіцитних ресурсів дорівнює нулю.

Несиметрична пара спряжених задач – пар взаємодвоїстих задач, для яких математична модель вихідної задачі надана у канонічній або в загальній формах, тоді як математична модель двоїстої задачі надана у стандартній і не містить обмеження на знак:

Пряма задача	Двоїста задача
$Z(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \to \min,$	$F(\mathbf{Y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} \to \max,$
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B},$	$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} \le \mathbf{C}.$
$\mathbf{X} \ge 0.$	

Пряма	Двоїста задача
$Z(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \to \max,$	$F(\mathbf{Y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} \to \min,$
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B},$	$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} \ge \mathbf{C}.$
$\mathbf{X} \ge 0.$	

Об'єктивно обумовлені (***граничні, маргінальні, двоїсті***, або ***тіньові***) ***оцінки ресурсів*** – це величини, які дають змогу проранжувати всі ресурси задачі оптимального виробничого планування залежно від їх впливу на результат, тобто приріст прибутку за умови зміни ресурсу.

Пара взаємодвоїстих (***спряжених***) ***задач*** – це задача лінійного програмування та відповідна їй двоїста задача, математичні моделі яких побудовані за спеціальними правилами.

Параметричне програмування – це спеціальний розділ, у якому розглядаються оптимізаційні задачі із цільовими функціями й обмеженнями, що залежать від параметрів; вони призначені для кількісного економіко-математичного аналізу стійкості оптимального розв'язку

Перша основна теорема двоїстості – якщо одна із пари взаємодвоїстих задач має оптимальний розв'язок, то двоїста їй задача також має оптимальний розв'язок, причому екстремальні значення цільових функцій за цими розв'язками є рівними, тобто $Z(\mathbf{X}^*) = F(\mathbf{Y}^*)$. Якщо одна із пари взаємодвоїстих задач не має оптимального розв'язку через необмеженість цільової функції, то система обмежень іншої задачі є несумісної, і ця задача також не матиме оптимального розв'язку.

Пряма задача – це одна з пари взаємодвоїстих задач лінійного програмування, для якої безпосередньо за вихідними умовами задачі будується математична модель.

Симетрична пара спряжених задач – пара взаємодвоїстих задач, що надані в стандартній формі; цільова функція однієї з цих задач досліджується на мінімум, а нерівності її основної системи обмежень мають знак "$\geq$", тоді як цільова функція іншої задачі досліджується на максимум, а нерівності її основної системи обмежень мають знак "$\leq$" та математичні моделі обох задач містять обмеження на знак:

Пряма задача	Двоїста задача
$Z(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{X} \to \min,$	$F(\mathbf{Y}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{Y} \to \max,$
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} \geq \mathbf{B},$	$\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{Y} \leq \mathbf{C},$
$\mathbf{X} \geq 0.$	$\mathbf{Y} \geq 0.$

Пряма задача	Двоїста задача
$Z(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{X} \to \max,$	$F(\mathbf{Y}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{Y} \to \min,$
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} \leq \mathbf{B},$	$\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{Y} \geq \mathbf{C},$
$\mathbf{X} \geq 0.$	$\mathbf{Y} \geq 0.$

Теорема про доповнюючу нежорсткість (***друга основна теорема двоїстості***) – це теорема, за якою визначаються компоненти оптимального плану однієї є пари спряжених задач за вже відомим оптимальним планом іншої задачі. Так, для того щоб для пари взаємодвоїстих задач плани $\mathbf{X}^*$ та $\mathbf{Y}^*$ були оптимальними, необхідно і достатньо виконання умови доповнюючої нежорсткості:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) \cdot x_j^* = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) \cdot y_i^* = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) у систему обмежень цієї задачі певне обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний цьому обмеженню компонент оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю. Якщо компонент оптимального плану однієї із задач є додатним, то відповідне йому обмеження спряженої задачі виконується відносно компонентів її оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості – це теорема про двоїсті оцінки оптимального плану. Так, двоїсті оцінки визначають приріст екстремального значення цільової функції як результат малого змінювання вільного члена відповідного обмеження прямої задачі, тобто:

$$\frac{\partial Z(\mathbf{X}^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = \overline{1,m}.$$

Якісний аналіз задачі лінійного програмування – це економічна інтерпретація та кількісний аналіз стійкості розв'язку задачі лінійного програмування на основі теорії двоїстості.

3.3. Тренувальні вправи

3.3.1. Побудова моделі двоїстої задачі. Скласти математичну модель задачі, двоїстої до заданої:

$$Z = -3x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання.

1. Спочатку з'ясуємо, чи надано математичну модель задачі лінійного програмування у стандартній формі.

Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні.

Вибір б) є правильним.

2. Основну систему обмежень приводимо до вигляду, що відповідає однієї із стандартних форм. Із цією метою усі обмеження основної системи обмежень перетворимо у нерівності типу "$\ge$".

Оберіть правильний вигляд основної системи обмежень:

а) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 \ge 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ -2x_1 - x_2 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 \ge 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ -2x_1 - x_2 \ge -6, \\ -x_1 + x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вибір в) є правильним.

3. Визначимо змінні двоїстої задачі.

Оберіть правильну відповідь:

а) y_1, y_2, y_3, y_4; б) y_1, y_2, y_3; в) y_1, y_2.

Вибір а) є правильним.

4. Цільова функція математичної моделі двоїстої задачі має вигляд (вставте пропущенні значення коефіцієнтів):

$$F = \_\_\_ y_1 + \_\_\_ y_2 + \_\_\_ y_3 + \_\_\_ y_4 \to \max.$$

Відповідь: $F = -2y_1 + 3y_2 - 6y_3 \to \max$.

5. Сформуємо систему обмежень двоїстої задачі.

Оберіть правильну систему обмежень:

а) $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 \geq -3, \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq 1, \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 \leq -3, \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \leq 1, \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 \leq -3, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 1, \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$

Вибір б) є правильним. Отже, маємо:

$$F = -2y_1 + 3y_2 - 6y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 \leq -3, \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \leq 1, \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.3.2. Розв'язання двоїстої задачі за теоремами двоїстості. Математична модель прямої задачі має вигляд:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \leq 1431, \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 1224, \\ 4x_1 + 16x_2 \leq 1328, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

За теоремами двоїстості знайти розв'язок двоїстої задачі, якщо розв'язком прямої задачі є $\mathbf{X}^* = (144; 27)$ та $Z_{\max} = 486$.

Розв'язання.

1. Складемо математичну модель двоїстої задачі.

З'ясуємо, чи приведено умови задачі до стандартної форми.

Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні.

Вибір а) є правильним.

2. Визначимо змінні двоїстої задачі.

Оберіть правильну відповідь:

а) y_1, y_2, y_3, y_4; б) y_1, y_2, y_3; в) y_1, y_2.

Вибір б) є правильним.

1. Цільова функція математичної моделі двоїстої задачі має вигляд (вставте пропущенні значення коефіцієнтів та тип екстремуму, на який досліджується функція):

$$F = \_\_\_ y_1 + \_\_\_ y_2 + \_\_\_ y_3 \to \_\_\_\_ .$$

Відповідь: $F = 1434 y_1 + 1224 y_2 + 1328 y_3 \to \min$.

4. Сформуємо основну систему обмежень математичної моделі двоїстої задачі.

Оберіть правильну основну систему обмежень:

а) $\begin{cases} 9y_1 + 7y_2 + 4y_3 \le 3, \\ 5y_1 + 8y_2 + 16y_3 \le 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9y_1 + 5y_2 + 4y_3 \ge 3, \\ 7y_1 + 8y_2 + 16y_3 \ge 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9y_1 + 7y_2 + 4y_3 \ge 3, \\ 5y_1 + 8y_2 + 16y_3 \ge 2. \end{cases}$

Вибір в) є правильним.

5. Визначимо, чи містить система обмежень двоїстої задачі обмеження на знак.

Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні.

Вибір а) є правильним.

Отже, математична модель двоїстої задачі має вигляд:

$$F = 1434 y_1 + 1224 y_2 + 1328 y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 9y_1 + 7y_2 + 4y_3 \ge 3, \\ 5y_1 + 8y_2 + 16y_3 \ge 2, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

За умовою задачі маємо оптимальний розв'язок вихідної задачі: $\mathbf{X}^* = (144;\ 27),\ Z_{\max} = 486.$ За теореми двоїстості знайдемо оптимальний розв'язок побудованої двоїстої задачі.

6. Застосуємо першу теорему двоїстості.

Оберіть правильну відповідь:

за першою теоремою двоїстості:

а) $F_{\max} = Z_{\min} = 486$; б) $y_2^* = 27$;

в) $F_{\min} = Z_{\max} = 486$; г) $y_3^* = 0$.

Вибір в) є правильним.

7. Використаємо першу частину другої теореми двоїстості:

Оберіть правильну відповідь:

оскільки перша та друга компоненти оптимального плану вихідної задачі є додатними $x_1^* = 144 \neq 0,\ \ x_2^* = 27 \neq 0$, то

а) $y_1^* = 0; \quad y_2^* = 0;$

б) перше та друге обмеження двоїстої задачі є рівняннями;

в) перше та друге обмеження двоїстої задачі виконуються у вигляді нерівностей.

Вибір б) є правильним.

8. Використаємо другу частину другої теореми двоїстості:

Оберіть правильну відповідь:

підставивши компоненти оптимального плану вихідної задачі в систему обмежень, отримуємо:

$$\text{а)} \begin{cases} 9 \cdot 144 + 5 \cdot 27 = 1431 \quad \Rightarrow y_1 \neq 0, \\ 7 \cdot 144 + 8 \cdot 27 = 1224 \quad \Rightarrow y_2 \neq 0, \\ 4 \cdot 144 + 16 \cdot 27 = 1008 < 1328 \Rightarrow y_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 9 \cdot 144 + 5 \cdot 27 = 1431 \quad \Rightarrow y_1^* = 0, \\ 7 \cdot 144 + 8 \cdot 27 = 1224 \quad \Rightarrow y_2^* = 0, \\ 4 \cdot 144 + 16 \cdot 27 = 1008 < 1328 \Rightarrow y_3^* \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 9 \cdot 144 + 5 \cdot 27 = 1431 \quad \Rightarrow y_1^* = 0, \\ 7 \cdot 144 + 8 \cdot 27 = 1224 \quad \Rightarrow y_2^* \neq 0, \\ 4 \cdot 144 + 16 \cdot 27 = 1008 < 1328 \Rightarrow y_3^* = 0. \end{cases}$$

Вибір а) є правильним.

Таким чином, маємо систему рівнянь для визначення компонентів оптимального плану двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 9y_1^* + 7y_2^* + 4y_3^* = 3, \\ 5y_1^* + 8y_2^* + 16y_3^* = 2, \\ y_3^* = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему, отримаємо (вставте пропущенні значення змінних):

$$y_1^* = \_\_\_\_; \qquad y_2^* = \_\_\_\_; \qquad y_3^* = \_\_\_\_.$$

Отже, отримано: $\mathbf{Y}_{опт} = \left(\dfrac{10}{37}; \dfrac{3}{37}; 0\right)$, $F_{\min} = F(\mathbf{Y}^*) = 486.$

3.3.3. Економічна інтерпретація двоїстої задачі. Підприємство виготовляє три види продукції, використовуючи для цього сировину 4 типів. Запаси кожного з типів сировини становлять відповідно 18, 16, 8 та 6 т. За технологічними нормами витрати сировини кожного типу на одиницю виробу першого виду складають відповідно 1, 2, 1 та 0 т, другого виду – 2, 1, 1 та 1 т, а третього виду – 1, 1, 0 та 1 т. Прибуток від реалізації одиниці виробу першого виду дорівнює 3 тис. грош. од., другого виду – 4 тис. грош. од., третього виду – 2 тис. грош. од.

Необхідно визначити дефіцитний вид сировини та дослідити доцільність введення у виробництво нового виду продукції, для якого норми витрат на одиницю продукції становлять відповідно 1, 2, 2 та 0 т, а прибуток від реалізації складає 15 тис. грош. од.

Розв'язання.

1. За допомогою симплекс-методом визначимо оптимальний план виробництва, який забезпечує максимальний прибутку від реалізації продукції. Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 + x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Останній ітераційний блок симплекс-таблиці розв'язання цієї задачі наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Останній ітераційний блок симплекс-таблиці

Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	3	4	2	0	0	0	0
		$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$	$\mathbf{A}_7$
$\mathbf{A}_4$	0	4	0	0	0	1	0	–1	–1
$\mathbf{A}_3$	2	3	0	0	1	0	½	–1	½
$\mathbf{A}_1$	3	5	1	0	0	0	½	0	–½
$\mathbf{A}_2$	4	3	0	1	0	0	–½	1	½
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$		33	3	4	2	0	½	2	1½
$\Delta_j = Z_j - c_j$		–	0	0	0	0	½	2	1½

У разі виникнення питань, дивіться тренуванні вправи до теми 2.

За наведеною ітерації симплекс-таблиці запишіть оптимальні плани прямої та двоїстої взаємо спряжених задач, а також відповідне їм значення цільової функції.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}^*_{опт} = (5; 3; 3; 4; 0; 0; 0)$, $Z(\mathbf{X}^*)_{\max} = 33$ тис. грош. од.,
$\mathbf{Y}^*_{опт} = (0; 0; 0; 0; 0{,}5; 2; 1{,}5)$, $F(\mathbf{Y}^*)_{\min} = 33$ тис. грош. од.;

б) $\mathbf{X}^*_{опт} = (5; 3; 3; 4; 0; 0; 0)$, $Z(\mathbf{X}^*)_{\max} = 33$ тис. грош. од.,
$\mathbf{Y}^*_{опт} = (0; 0; 0; 0; 0{,}5; 2; 1{,}5)$; $F(\mathbf{Y}^*)_{\min} = 33$ тис. грош. од.;

в) $\mathbf{X}^*_{опт} = (4; 3; 5; 3; 0; 0; 0)$, $Z(\mathbf{X}^*)_{\max} = 33$ тис. грош. од.;
$\mathbf{Y}^*_{опт} = (0; 0{,}5; 2; 1{,}5; 0; 0; 0)$, $F(\mathbf{Y}^*)_{\min} = 33$ тис. грош. од.

Вибір а) є правильним.

2. За другою теоремою двоїстості визначаємо, яка сировина є дефіцитною, а яка – надлишковою.

Оберіть правильну відповідь:

1) сировина 1-го типу є:

а) дефіцитною; б) надлишковою;

2) сировина 2-го типу є:

а) дефіцитною; б) надлишковою;

3) сировина 3-го типу є:

а) дефіцитною; б) надлишковою.

Правильний вибір: 1 – б); 2 – а); 3 – а).

Таким чином сировина 2-го та 3-го типу є дефіцитною.

3. Розглянемо доцільність введення у виробництво четвертого виду продукції. Для цього порівняємо витрати на її виготовлення і прибуток від реалізації за формулою (вставте пропущенні значення):

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{4} a_{i4} y_i^* - c_4 = 1 \cdot \_\_ + 2 \cdot \_\_ + 2 \cdot \_\_ + 0 \cdot \_\_ - \_\_ = \_\_ .$$

Оберіть правильне:

а) $\Delta_4 < 0$; б) $\Delta_4 > 0$

Відповідь а) є правильною. Оскільки прибуток від реалізації нового виду продукції перевищує витрати на її виготовлення, то введення її у виробництво є доцільним.

3.3.4. Двоїстий симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування. Визначте оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування за допомогою двоїстого симплекс-методу, якщо її математична модель має вигляд:

$$Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Оберіть перший крок розв'язання задачі:

а) складання симплексної таблиці;

б) приведення умов задачі до канонічної форми;

в) визначення початкового опорного плану.

Вибір а) є правильним.

2. Приводимо математичну модель задачі до канонічної форми.

Оберіть правильну відповідь:

Математична модель задачі у канонічній формі має вигляд:

а)
$$Z=-2x_1+x_2+5x_3\to\min,$$
$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\-x_1+5x_2-x_3+x_5=-5,\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.\end{cases}$$

б)
$$Z=-2x_1+x_2+5x_3\to\min,$$
$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=4,\\x_1-5x_2+x_3-x_5=5,\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.\end{cases}$$

в)
$$Z=-2x_1+x_2+5x_3\to\min,$$
$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\-x_1+5x_2-x_3-x_5=-5,\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.\end{cases}$$

Вибір а) є правильним.

3. Розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиці.

Заповніть табл. 3.2 та дайте відповідь, чи є вихідний план задачі оптимальним.

Таблиця 3.2

Перша ітерація двоїстого симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j					
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_4$							
2	$\mathbf{A}_5$							
$Z_j=\mathbf{C}_{баз.}\cdot\mathbf{A}_j$								
$\Delta_j=Z_j-c_j$			–					

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}_0=(0;\,0;\,0;\,4;\,-5)$ є оптимальним планом;

б) $\mathbf{X}_0=(0;\,0;\,4;\,-5;\,0)$ є оптимальним планом;

в) $\mathbf{X}_0=(0;\,0;\,0;\,4;\,-5)$ не є оптимальним планом.

Вибір в) є правильним.

Отже, план $\mathbf{X}_0=(0;\,0;\,0;\,4;\,-5)$ не є оптимальним, оскільки індексний ряд містить додатну оцінку Δ_1.

4. Визначаємо розв'язувальний елемент. Цим елементом є:

а) $\theta_1 = 4$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_4$, розв'язувальний елемент дорівнює 1 (у першому рядку, в колонці $\mathbf{A}_1$);

б) $\theta_1 = 4$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює –1 (у другому рядку, в колонці $\mathbf{A}_1$);

в) $\theta_1 = 5$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює –1 (у другому рядку, в колонці $\mathbf{A}_1$).

Вибір а) є правильним.

5. Здійснимо другу ітерацію: виконаємо перетворення в симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса, знайдемо другий опорний план та перевіримо його на оптимальність.

Заповніть табл. 3.3 та дайте відповідь, чи є наступний опорний план оптимальним.

Таблиця 3.3

Друга ітерація двоїстого симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	–2	1	5	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
3	$\overline{A}_1$							
4	$\mathbf{A}_5$							
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$								
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–					

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}_1 = (4; 0; 0; 0; -1)$ є оптимальним планом;

б) $\mathbf{X}_1 = (4; 0; 0; 0; -1)$ не є оптимальним планом;

в) $\mathbf{X}_1 = (4; -1; 0; 0; 0)$ є оптимальним планом.

Вибір б) є правильним.

6. Визначаємо розв'язувальний елемент.

Оберіть правильну відповідь:

а) найменше $\theta = \frac{1}{2}$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_3$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу (–2);

б) найменше $\theta_1 = \frac{1}{6}$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 6;

в) найменше $\theta_1 = 1$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_4$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1.

Вибір а) є правильним.

7. Здійснимо третю ітерацію: виконаємо перетворення в симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса, знайдемо третій опорний план та перевіримо його на оптимальність. Заповніть табл. 3.4 та дайте відповідь, чи є отриманий опорний план оптимальним. У разі виникнення запитань уважно перевірте обчислення та дивіться пояснення до виконання тренувальної вправи.

Таблиця 3.4

Третя ітерація двоїстого симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	–2	1	5	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
5	$\mathbf{A}_1$							
6	$\mathbf{A}_3$							
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$								
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–					

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}_2 = (4{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 0;\ 0)$ є оптимальним планом, $Z(\mathbf{X}_2) = Z_{\min} = -6{,}5$;

б) $\mathbf{X}_2 = (4{,}5,\ 0{,}5;\ 0;\ 0,\ 0)$ є оптимальним планом, $Z(\mathbf{X}_2) = Z_{\min} = -6{,}5$;

в) $\mathbf{X}_2 = (4{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 0;\ 0)$ не є оптимальним планом, $Z(\mathbf{X}_2) = -6{,}5$.

Вибір а) є правильним.

3.3.5. Задача лінійного програмування з параметром у вільних членах основної системи обмежень. Розв'язати задачу лінійного програмування з параметром у вільних членах обмежень:

$$Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2t, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 - t, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 - 3t, \\ x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиці.

За вихідними даними заповніть табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Перша ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j						
			$\mathbf{A}_0$	t	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$								
2	$\mathbf{A}_4$								
3	$\mathbf{A}_5$								
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$									
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–					

Покладемо $t = 0$ і отримаємо початковий розв'язок.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}_0 = (0;\ 0;\ 1;\ 1;\ 2)$, $Z(\mathbf{X}_0) = 3$ є оптимальним планом;

б) $\mathbf{X}_0 = (0;\ 0;\ 1;\ 1;\ 2)$, $Z(\mathbf{X}_0) = 3$ не є оптимальним планом;

в) $\mathbf{X}_0 = (1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 0)$, $Z(\mathbf{X}_0) = 3$ є оптимальним планом.

Вибір б) є правильним.

2. Визначаємо розв'язувальний елемент.

Оберіть правильну відповідь:

а) $\theta_1 = 1$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_4$, розв'язувальний елемент дорівнює 1 (у другому рядку, в колонці $\mathbf{A}_1$);

б) $\theta_1 = 2$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює 2 (у третьому рядку, в колонці $\mathbf{A}_1$);

в) $\theta_1 = -2$, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_3$, розв'язувальний елемент дорівнює –1 (у першому рядку, в колонці $\mathbf{A}_1$).

Вибір а) є правильним.

3. Здійснимо другу ітерацію: виконаємо перетворення в симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса.

Заповніть табл. 3.6.

Таблиця 3.6

Друга ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j		2	–1	3	–2	1
			$\mathbf{A}_0$	t	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
4	$\mathbf{A}_3$								
5	$\mathbf{A}_1$								
6	$\mathbf{A}_5$								
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$									
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–					

Отриманий план не має від'ємних оцінок. Отже, він є оптимальним.

Оберіть правильну відповідь щодо отриманого розв'язку:

а) $\mathbf{X}^* = (1-t;\, 0;\, 2+t;\, 0;\, 1-2t)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 9$;

б) $\mathbf{X}^* = (2+t;\, 1-t;\, 1-2t;\, 0;\, 0)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 9-t$;

в) $\mathbf{X}^* = (1-t;\, 0;\, 2+t;\, 0;\, 1-2t)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 9-t$.

Вибір в) є правильним.

Знайдений розв'язок матиме сенс лише в тому випадку, якщо значення всіх компонентів плану будуть невід'ємні.

4. Визначимо, на якому проміжку зміни параметра t цей план буде залишатися допустимим розв'язком.

З урахуванням вимоги невід'ємності компонентів допустимих розв'язків задачі лінійного програмування заповніть табл. 3.7 відповідно оптимального плану.

Таблиця 3.7

Визначення меж параметра

Вимога невід'ємності компонентів оптимального плану	Обмеження для параметра	Межі параметра
$2+t \geq 0$		
$1-t \geq 0$		
$1-2t \geq 0$		

Отже, отримали перший проміжок значень параметра: $t \in [-2;\, 0{,}5]$. На цьому проміжку існує множина розв'язків $\mathbf{X}^* = (1-t;\, 0;\, 2+t;\, 0;\, 1-2t)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 9-t$.

5. Розглянемо, в яких межах змінювання параметра t знайдений план залишається допустимим.

Спочатку розглянемо збільшення параметра.

Оберіть правильну відповідь:

а) якщо $t > 0{,}5$, то значення змінної x_5 стане від'ємним;

б) якщо $t > 0{,}5$, то значення змінної x_1 стане від'ємним;

в) якщо $t > 0{,}5$, то значення змінної x_3 стане від'ємним.

Вибір а) є правильним.

6. Збільшимо значення параметра за межі стійкості оптимального плану. Якщо $t > 0{,}5$, то змінна x_5 набуває від'ємного значення, і цю змінну необхідно вивести з базису. Для цього перетворимо симплекс-таблицю за допомогою двоїстого симплекс-методу, вибравши шостий рядок як напрямний.

Оберіть правильну відповідь:

а) до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_4$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$ розв'язувальний елемент дорівнює числу 1;

б) до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_4$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$ розв'язувальний елемент дорівнює числу (–1);

в) до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_5$ розв'язувальний елемент дорівнює числу 0.

Вибір б) є правильним.

7. Здійснимо третю ітерацію. Введемо до базису вектор $\mathbf{A}_4$, при цьому з базису вийде вектор $\mathbf{A}_5$. Перетворення виконуємо в симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса.

Заповніть табл. 3.8.

Таблиця 3.8

Третя ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j		2	–1	3	–2	1
			$\mathbf{A}_0$	t	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
7	$\mathbf{A}_3$								
8	$\mathbf{A}_1$								
9	$\mathbf{A}_4$								
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$									
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–					

Оскільки отриманий план не має від'ємних оцінок, то цей план є оптимальним.

Оберіть правильну відповідь щодо отриманого розв'язку:

а) $\mathbf{X}^* = (2;\ 0;\ 3;\ -1;\ 0)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 15 - 13t;$

б) $\mathbf{X}^* = (2 - 3t;\ 0;\ 3 - t;\ 2t - 1;\ 0)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 15 - 13t;$

в) $\mathbf{X}^* = (2 - 3t;\ 0;\ 3 - t;\ 2t - 1;\ 0)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 15.$

Вибір б) є правильним.

8. Знайдений оптимальний план матиме сенс лише в тому випадку, коли значення всіх змінних за цим планом будуть невід'ємними.

Визначте, на якому проміжку змінювання параметра t цей план буде залишатись допустимим.

Відповідно до вимоги невід'ємності компонентів оптимального плану заповніть табл. 3.9.

Таблиця 3.9

Визначення меж параметра

Вимога невід'ємності компонентів оптимального плану	Обмеження для параметра	Межі параметра
$3-t \geq 0$		
$2-3t \geq 0$		
$2t-1 \geq 0$		

Отже, на проміжку значень $t \in [0{,}5;\ 0{,}667]$ маємо множину розв'язків $\mathbf{X}^* = (2-3t;\ 0;\ 3-t;\ 2t-1;\ 0)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 15 - 13t$.

9. Розглянемо подальше збільшення параметра.

Оберіть правильну відповідь:

а) якщо $t > 0{,}667$, то значення змінної x_5 стане від'ємним, отже, симплекс-таблицю треба перетворити, і це можна зробити;

б) якщо $t > 0{,}667$, то значення змінної x_1 стане від'ємним, отже, симплекс-таблицю треба перетворити, але це неможливо зробити;

в) якщо $t > 0{,}667$, то значення змінної x_3 стане від'ємним, отже, симплекс-таблицю треба перетворити, але це неможливо зробити.

Вибір б) є правильним.

Отже, якщо $t \in (0{,}667;+\infty)$, то область допустимих планів є $\varnothing$.

10. Далі розглянемо зменшення параметра. Нехай $t < -2$.

Оберіть правильну відповідь:

а) якщо $t < -2$, то значення змінної x_3 стане від'ємним, симплекс-таблицю треба перетворити, і це можна зробити;

б) якщо $t < -2$, то значення змінної x_1 стане від'ємним, симплекс-таблицю треба перетворити, і це можна зробити;

в) якщо $t < -2$, то значення змінної x_3 стане від'ємним, симплекс-таблицю треба перетворити, але це неможливо зробити.

Вибір в) є правильним.

Отже, якщо $t \in (-\infty;-2)$, то область допустимих планів є $\varnothing$.

Розв'язок задачі параметричного програмування з параметром у вільних членах основної системи обмежень можна представити у вигляді таблиці. Заповніть табл. 3.10.

Таблиця 3.10

Розв'язок задачі параметричного програмування з параметром у вільних членах системи обмежень

Проміжок зміни параметра *t*	Оптимальний план	Значення цільової функції

3.4. Запитання для самоперевірки

3.4.1. Наведіть приклади застосування теорії двоїстості під час розв'язання реальним задач лінійного програмування.

3.4.2. Сформулюйте правила складання математичних моделей взаємодвоїстих задач.

3.4.3. Які бувають типи спряжених задач?

3.4.4. Чи завжди математично модель двоїстої задачі містить обмеження на знак?

3.4.5. Наведіть основні теореми двоїстості.

3.4.6. Як за допомогою теорем двоїстості визначити розв'язок однієї з пари спряжених задач за розв'язком іншої задачі?

3.4.7. Наведіть алгоритм двоїстого симплекс-методу.

3.4.8. Яка економічна інтерпретація двоїстих невідомих у задачі про оптимальне використання сировини?

3.4.9. Наведіть логіку дослідження стійкості оптимального плану за результатами розв'язку двоїстої задачі.

3.4.10. Сформулюйте задачу лінійного програмування із параметрами у вільних членах основної системи обмежень.

3.4.11. Наведіть графічну інтерпретацію задачі лінійного програмування із параметрами у вільних членах обмежень.

3.4.12. З якою метою потрібно врахування параметрів у правій частині основної системи обмежень? Наведіть етапи розв'язання такої задачі.

3.4.13. Сформулюйте задачу лінійного програмування із параметрами у цільовій функції. Дайте її економічне тлумачення та наведіть графічну інтерпретацію.

3.5. Практичні завдання

3.5.1. Складіть двоїсті задачі до таких вихідних задач:

1) $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_4 \geq 0.$$

2) $Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 \quad + 3x_3 - 3x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_4 \geq 0.$$

3) $Z = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

4) $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_3 \geq 0.$$

3.5.2. Для виробництва продукції трьох видів А, В і С підприємство використовує три види сировини. Ця сировина може бути використана в обсязі, не більшому, ніж 180, 210 та 236 кг, відповідно. Норми витрат кожного з видів сировини на виробництво одиниці продукції і ціна одиниці продукції кожного виду наведено в табл. 3.11.

Таблиця 3.11

Вихідні дані задачі

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	Продукція А	Продукція В	Продукція С
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Прибуток від реалізації одиниці продукції (грн)	10	14	12

Визначте план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації у вартісному вираженні; побудувати для даної задачі двоїсту; знайти оптимальний план двоїстої задачі.

3.5.3. Визначте, чи є дані вектори $\mathbf{X}^*$та $\mathbf{Y}^*$оптимальними розв'язками даної задачі і двоїстої до неї.

1) $Z = x_1 + 10x_2 + 8x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$

$\mathbf{X}^* = (1, 0, 1),\ \mathbf{Y}^* = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right).$

2) $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 11, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$

$\mathbf{X}^* = (1, 0, 2),\ \mathbf{Y}^* = \left(\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right).$

3.5.4. На основі другої теореми двоїстості визначте, які з планів є оптимальними.

1) $Z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

а) $\mathbf{X} = (0; 1; 0);$

б) $\mathbf{X} = (0; 1; 0{,}5);$

в) $\mathbf{X} = (3; 1; 0).$

2) $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_3 \le 40, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

а) $\mathbf{X} = (0; 5; 0);$

б) $\mathbf{X} = (15; 5; 5);$

в) $\mathbf{X} = (20; 0; 0).$

3.5.5. Для виготовлення чотирьох видів продукції П$_1$, П$_2$, П$_3$ та П$_4$ використовується три види ресурсів Р$_1$, Р$_2$ та Р$_3$. Решту умов задачі наведено в табл. 3.12.

Таблиця 3.12

Вихідні дані задачі

Ресурси	Запас ресурсів, од.	Норми витрат сировини на одиницю продукції, од.			
		П$_1$	П$_2$	П$_3$	П$_4$
Р$_1$	3 400	2	1	0,5	4
Р$_2$	1 200	1	5	3	0
Р$_3$	3 000	3	0	6	1
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грошові од.		7,5	3	6	12

Визначте план випуску продукції, за яким прибуток від її реалізації буде максимальним. Побудувати та розв'язати двоїсту задачу. Поясніть економічний зміст отриманих об'єктивно оцінок ресурсів.

Знайдіть інтервали стійкості двоїстих оцінок.

Визначте зміну максимального прибутку від реалізації продукції за умовою збільшення запасу ресурсу P_1 на 40 од., ресурсу P_3 – на 50 од. та зменшення запасу ресурсу P_2 на 30 од. Оцініть окремий вплив цих змін та їх сумарний вплив. Визначте норми зміни ресурсів. Визначте доцільність введення до плану п'ятого виду продукції $П_5$, норми витрат сировини на одиницю якої дорівнюють 2, 4, 2 од., а прибуток становить 15 грошових одиниць.

3.5.6. Розв'яжіть задачі лінійного програмування за допомогою двоїстого симплекс-методу:

1) $Z = x_1 - 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ -3x_1 + x_2 \le 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$$

2) $Z = -7x_1 + 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ 5x_1 + x_2 \ge 3; \\ -3x_1 + x_2 \le 3; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$$

3.5.7. Існує два способи випуску продукції, що розрізняються витратами робочого і машинного часу, а також сировина на одиницю продукції (табл. 3.13).

Таблиця 3.13

Витрати ресурсів на виготовлення одиниці продукції

Спосіб	Робочий час, години	Машинний час, години	Сировина, кг
I	3	4	2
II	2	3	3

Незалежно від способу виготовлення, продукція продається за ціною по 20 грн за одиницю. Робочий час оплачується із розрахунку 3 грн за годину, сировина коштує 4 грн за кг. Вартість машинного часу не істотна. Доступні запаси сировини становлять 50 кг, робочий час обмежений

24 годинами, а машинний час – 20 годинами. Очікуються додаткові постачання сировини, після яких 10 кг сировини необхідно буде залишити в резерві. Для будь-яких постачань сировини скласти план виробництва, який забезпечить найбільший прибуток.

3.5.8. Кондитерська фабрика виробляє два види карамелі. На випуск 1 т карамелі "Сніжинка" витрачається 0,8 т цукру, 0,2 т патоки і 0,01 т фруктового пюре, а на випуск 1 т карамелі "Яблучна" – по 0,5 т, 0,4 т і 0,1 т цих видів сировини, відповідно. Ціна карамелі "Сніжинка" складає 108 тис. грн за тонну, а "Яблучна" – 140 тис. грн. На складі є 800 т цукру, 600 т патоки і 10 т фруктового пюре. Необхідно, щоб запас пюре складав 50 т. Очікується постачання фруктового пюре вантажними автомашинами, кожна з яких може привезти по 20 т сировини. Кількість автомашин невідома. Необхідно для будь-якої кількості автомашин, які привезуть пюре, заздалегідь знайти план виробництва карамелі, який дасть найбільш високу виручку.

3.5.9. Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в табл. 3.14. Ціна одиниці продукції А становить 10 грн, продукції В – 14 грн, продукції С – 12 грн. Визначте план виробництва, який забезпечує підприємству найбільший дохід.

Таблиця 3.14

Вихідні дані задачі

Ресурси	Норма витрат ресурсів на одиницю продукції, кг			Запаси ресурсів, кг
	A	B	C	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	236

1. Запишіть математичні моделі прямої та двоїстої задач.

2. Знайдіть оптимальні плани прямої та двоїстої задач, навести їх економічну інтерпретацію.

3. Відповідно до оптимального плану виробництва продукції визначте фактичні витрати ресурсів.

4. Фактичні запаси ресурсів виявилися меншими на 40 кг для першого виду, та відповідно більшими на 80 та 160 кг для другого

та третього видів. Як це вплине на оптимальний план виробництва та дохід підприємства?

5. Визначте найменшу та найбільшу ціну на продукцію В, при якій знайдений план виробництва залишиться оптимальним. Що означатиме перебільшення можливих границь зміни ціни?

6. Підприємство розглядає можливість заміни продукції А на новий вид продукції D. Дослідіть доцільність виробництва продукції D, якщо її ціна становить 14 грн, а норми витрат ресурсів дорівнюють 2, 3 та 1 кг, відповідно.

7. Припустимо, що попит на продукцію В став обмеженим і не перевищує 50 одиниць. Необхідно мінімізувати недоотримання доходу підприємством у цій ситуації.

8. Визначте можливі інтервали зміни запасів третього виду ресурсу та доходу підприємства, за яких гранична корисність ресурсів залишатиметься оптимальною.

9. Визначте, чи всі види продукції є рентабельними, а ресурси – дефіцитними.

10. Яким чином вплине на оптимальний план виробництва продукції та дохід підприємства зростання ціни на продукцію С на 2 грн?

3.5.10. Розв'яжіть задачі параметричного лінійного програмування:

а) $$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 - 2t, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0, \;\; t \in (-\infty; \infty). \end{cases}$$

б) $$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 + t, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 - 2t, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 11t + 8, \\ x_1, x_2 \ge 0, \;\;\; t \in (-\infty; \infty). \end{cases}$$

3.6. Тестові завдання

3.6.1. Задачу лінійного програмування, якій відповідає інша задача, спряжена до вихідної, називають задачею:

а) двоїстою;

б) симетричною.

3.6.2. У яких двоїстих задачах система обмежень вихідної задачі задається у вигляді рівності, а двоїстої – у вигляді нерівностей, причому в останній змінні можуть бути і від'ємними:

а) у симетричних задачах;

б) у несиметричних задачах;

в) в оптимізаційних задачах?

3.6.3. Якщо канонічна форма вихідної задачі лінійного програмування – задача максимізації, то двоїста до неї задача – задача мінімізації з обмеженнями типу "≥" і змінними, що не мають обмеження на знак.

А. Так.   Б. Ні.

3.6.4. Установіть відповідність між означеннями, що наведені:

1. У несиметричних задачах	А. Усі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої лише нерівностями.
2. У симетричних задачах	Б. Обмеження прямої та двоїстої задачі є лише нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень
–	В. Деякі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої лише нерівностями. У цьому разі відповідні рівнянням змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень, не обмежених знаком

3.6.5. Виберіть правильні твердження:

а) якщо для приведення обмеження прямої задачі до рівності (канонічної форми) непотрібно вводити залишкову або надлишкову змінну, то відповідна двоїста змінна не матиме обмежень на знак;

б) якщо для приведення обмеження прямої задачі до рівності (канонічної форми) використовується надлишкова змінна, то відповідна двоїста змінна не буде мати обмеження на знак незалежно від напряму оптимізації в прямій задачі;

в) наявність у прямій задачі змінної, що не має обмеження на знак, обумовлює наявність двоїстого обмеження у вигляді рівності;

г) оптимальний розв'язок двоїстої задачі знаходиться за даними симплекс-таблиці, що відповідає оптимальному розв'язку прямої задачі;

д) рівність значень цільових функцій прямої і двоїстої задач є єдиною умовою, необхідною для доказу оптимальності обраних значень змінних обох задач;

е) якщо пряма задача має необмежений оптимальний розв'язок, то розв'язок двоїстої до неї задачі завжди неприпустимий.

3.6.6. Визначте правильні правила побудови двоїстих задач:

а) пряму ЗЛП необхідно подати в канонічному вигляді;

б) кожному обмеженню основної системи обмежень прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі;

в) пряму ЗЛП необхідно подати у стандартному вигляді;

г) коефіцієнтами за змінних у цільовій функції двоїстої задачі є коефіцієнти за змінних у цільовій функції прямої задачі;

д) кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі;

е) якщо цільова функція прямої задачі досліджується на максимум, то цільова функція двоїстої задачі – на мінімум, і навпаки.

3.6.7. Визначте, чи правильно для наведеної прямої задачі побудовано двоїсту? Якщо ні, то вказати які зміни необхідно внести.

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max, \qquad F = -4y_1 - 3y_2 + 5y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ -4x_1 + 2x_2 = 3, \\ -x_1 + x_2 = -5, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 - y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4. \end{cases}$$

а) необхідно змінити тип екстремуму цільової функції двоїстої задачі (вона прямує до мінімуму);

б) необхідно в обмеженнях двоїстої задачі замінити "≥" на "≤";

в) необхідно цільову функцію двоїстої задачі помножити на (–1);

г) двоїста задача побудовано правильно.

3.6.8. Якщо пряма задача не має припустимих рішень, то цільова функція двоїстої задачі завжди необмежена.

А. Так. Б. Ні.

3.6.9. На основі застосування другої теореми двоїстості визначити, чи є план $\mathbf{X}^* = (2; 1; 0; 0)$ наведеної задачі ЛП та план $\mathbf{Y}^* = (0{,}8; 0{,}6)$ задачі, двоїстої до неї, оптимальними планами цих задач.

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

А. Так. Б. Ні.

3.6.10. Розв'язання прямої задачі подано в симплекс-таблиці:

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$	0	10	1	0	1	0	0
2	$\mathbf{A}_4$	0	30	0	2	0	1	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	47	1	2	0	0	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	– 40	–70	0	0	0
4	$\mathbf{A}_3$	0	10	1	0	1	0	0
5	$\mathbf{A}_2$	70	15	0	1	0	0,5	0
6	$\mathbf{A}_5$	0	17	1	0	0	– 1	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			1 050	0	70	0	35	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–40	0	0	35	0
7	$\mathbf{A}_1$	40	10	1	0	1	0	0
8	$\mathbf{A}_2$	70	15	0	1	0	0,5	0
9	$\mathbf{A}_5$	0	7	0	0	–1	–1	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			1 450	40	70	40	35	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	0	0	40	35	0

За цією таблицею оптимальним планом двоїстої задачі є:

а) (40; 35; 0); б) (0; 40; 35); в) (40; 35).

3.6.11. Оберіть, як називаються змінні двоїстої задачі:

а) об'єктивно обумовлені оцінки;

б) оцінки впливу вільних членів.

3.6.12. Оберіть правильні твердження:

а) надлишкові обмеження відповідають недефіцитним ресурсам;

б) варіації рівня запасу дефіцитного ресурсу завжди впливають на оптимальні значення як змінних, так і цільової функції;

в) варіації коефіцієнтів цільової функції вихідної задачі можуть змінити статус ресурсів (тобто дефіцитний ресурс може стати недефіцитним, і навпаки);

г) в оптимальному розв'язку задачі максимізації величина прибутку повинна дорівнювати сумарній цінності використовуваних ресурсів;

д) якщо під час використання двоїстого симплекс-методу виявилося, що в обмеженні, обраному для виключення базисної змінної, немає жодного від'ємного коефіцієнта, то це означає, що задача лінійного програмування не має припустимого розв'язку.

3.6.13. Які особливість застосування теорії двоїстості в економіці:

а) не надає можливості визначити рентабельність (або нерентабельність) кожного виду продукції, яка виготовляється підприємством;

б) дає змогу визначити статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів;

в) не надає можливості оцінити інтервали зміни цін одиниці кожного виду продукції.

3.6.14. Підприємство має два цехи. Проведені оптимізаційні розрахунки щодо визначення програми розвитку підприємства з мінімальними витратами. Отримані оптимальний план і двоїсті оцінки обмежень відносно завантаження потужностей двох цехів. Виявилось, що двоїста оцінка обмежень на виробничі потужності першого цеху дорівнює нулю, а другого – строго додатна.

Це означає, що:

а) інформації для відповіді недостатньо;

б) потужності обох цехів недовантажені;

в) потужності обох цехів використані повністю;

г) потужності цеху 1 використані повністю, а цеху 2 недовантажені;

д) потужності цеху 1 недовантажені, а цеху 2 використані повністю.

3.6.15. Установіть відповідність між твердженнями:

1. Якщо значення двоїстої оцінки деякого ресурсу більше нуля, то такий ресурс	А. Є недефіцитним
2. Якщо значення двоїстої оцінки деякого ресурсу дорівнює нулю, то такий ресурс	Б. Є дефіцитним
–	В. Може бути як дефіцитним, так і недефіцитним

3.6.16. Величина двоїстої оцінки показує:

а) наскільки збільшиться значення цільової функції, якщо запас ресурсу збільшиться на одну одиницю;

б) наскільки зменшиться значення цільової функції, якщо запас ресурсу збільшиться на одну одиницю;

в) наскільки збільшиться значення цільової функції, якщо запас ресурсу зменшиться на одну умовну одиницю.

3.6.17. Метою двоїстого симплекс-методу є:

а) знаходження направляючої колонки;

б) отримання оптимального плану задачі лінійного програмування;

в) отримання будь-якого плану задачі нелінійного програмування.

3.6.18. Вимоги для використання двоїстого симплекс-методу:

а) усі праві частини нерівностей-обмежень повинні бути від'ємними;

б) хоча б деякі вільні члени системи обмежень мають бути додатні;

в) вільні члени системи обмежень повинні мати додатні значення;

г) деякі вільні члени нерівностей-обмежень мають бути від'ємними.

3.6.19. Задачі, в яких вихідні дані залежать від деякого параметра, називаються задачами:

а) параметричного програмування;

б) сепарабельного програмування;

в) стохастичного програмування;

д) динамічного програмування.

3.6.20. Задачі параметричного програмування є:

а) задачами нелінійного програмування, і до їх розв'язання неможна застосовувати симплексний метод;

б) узагальненням задач лінійного програмування, і до їх розв'язання можна застосовувати симплексний метод;

в) задачами оптимального планування, які вимагають спеціальних методів розв'язання.

3.6.21. Для задачі лінійного програмування, математична модель якої має вигляд:

$$Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}, \end{cases}$$

у ході розв'язання отримано такий ітераційний блок симплекс-таблиці:

Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	–2	1	5	0	0
		$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$\mathbf{A}_1$	–2	4	1	1	–1	1	0
$\mathbf{A}_5$	0	–1	0	6	–2	1	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$		–8	–2	–2	2	–2	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$		–	0	–3	–3	–2	0

Визначте, чи є план оптимальним. Якщо план не є оптимальним, то вкажіть розв'язувальний елемент, а також той вектор, який вводиться у базис, і той, який виводиться за даною ітерацією, оцініть, на яку величину при цьому зміниться цільова функція.

3.6.22. Установіть правильну послідовність етапів розв'язання задач параметричного програмування:

а) визначаємо множину значень параметрів t_i, для яких отриманий розв'язок є оптимальним;

б) задачу розв'язуємо симплекс-методом при конкретному значенні параметрів t_i до отримання оптимального розв'язку;

в) знаходимо нову множину значень параметра t_i, на якій розв'язок є оптимальним;

г) у разі потреби обираємо розв'язувальні рядок і елемент;

д) процес обчислення повторюється доти, доки не буде досліджено весь діапазон значень параметрів;

е) визначаємо новий оптимальний розв'язок.

3.6.23. Доповніть речення, використовуючи слова:

Посилення обмеження не може ...(1)... допустиму область розв'язків, а може її ...(2)... :

а) залишити незмінною;

б) збільшити;

в) зменшити.

3.6.24. Задачу параметричного лінійного програмування, вільні члени обмежень якої лінійно залежать від параметрів, можна в загальному вигляді записати таким чином:

а) $Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =) t_i, \; i = \overline{1, m},$$

$$t_i \in (-\infty; +\infty),$$

де x_j – змінні;

a_{ij}, c_j – константи;

n – кількість змінних;

m – кількість обмежень;

t_i – параметри;

б) $Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j x_i \to \max(\min),$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =) t_i b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$t_i \in (-\infty; +\infty),$$

де x_j, x_i – змінні;

n – кількість змінних;

a_{ij}, b_i, c_j – константи;

m – кількість обмежень;

t_i – параметри;

в) $Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =) t_i + b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$t_i \in (-\infty; +\infty),$$

де x_j – змінні, $j = \overline{1, n}$;

n – кількість змінних;

a_{ij}, b_i, c_j – константи;

m – кількість обмежень;

t_i – параметри.

3.6.25. Зміна вільного члену обмеження приводить до зміни кута нахилу прямої, яка представляє це обмеження.

А. Так. Б. Ні.

3.6.26. Установіть відповідність:

1. Збільшення вільних членів системи обмежень виду "$\ge$"	А. Це коефіцієнт зміни оптимального значення цільової функції під час збільшення правої частини даного обмеження
2. Посилення обмеження нерівності	Б. Приводить до його посилення
3. Тіньова ціна обмеження	В. Приводить до його ослаблення
4. Збільшення вільних членів системи обмежень виду "$\le$"	Г. Не може покращити оптимальне значення цільової функції

3.7. Висновки за темою

У різних розділах математики часто зустрічаються теореми двоїстості. Кожна з них дозволяє для будь-якого твердження даної теорії побудувати – за певними стандартними правилами – інше твердження таким чином, що справедливість першого автоматично визначає справедливість другого. Стосовно задач лінійного програмування це виражається в тому, що, розв'язуючи одну оптимізаційну задачу (пряму), одержуємо розв'язок ще однієї оптимізаційної задачі, двоїстої до вихідної. Невідомі y_i двоїстої задачі є певними вартісними оцінками корисності ресурсів (тіньовими цінами). У теорії двоїстості вихідна задача розв'язується графічним, або симплекс-методом, двоїста задача – двоїстим симплекс-методом, або за теоремами двоїстості.

Під час обґрунтування управлінського рішення в економічній задачі реального підприємства стикаються з проблемою, що значення обсягів ресурсів, ціни, прибуток, собівартість можуть змінюватись у відповідних межах. У даній ситуації важливо знати поведінку оптимального плану у разі зміни вихідних даних залежно від параметрів, які вводять в задачу для її розв'язання. Спеціальний розділ – параметричне програмування розглядає оптимізаційні задачі із цільовими функціями й обмеженнями, що залежать від параметрів.

Рекомендована література: [1; 3 – 15; 17 – 20].

4. Транспортна задача

4.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення з методами побудови математичної моделі та розв'язання класичної транспортної задачі про оптимальний розподіл однорідної продукції за критерієм витрат, а також огляд інших розподільчих задач економічного змісту, що зводяться до транспортної.

Професійні компетентності, що формуються під час вивчення теми:

знання принципів побудови математичних моделей задач про оптимальний розподіл;

вміння застосовувати методи розв'язання задач лінійного програмування до визначення оптимального плану розподілу однорідної продукції за критерієм витрат;

вміння визначати область стійкості оптимального плану класичної транспортної задачі та визначати альтернативний оптимум;

знання принципу розв'язання транспортної задачі за критерієм часу;

вміння розв'язувати задачі економічного змісту, що зводяться до транспортної.

4.2. Термінологічний словник

Ациклічний план – це план транспортної задачі, за яким клітини таблиці перевезень не містять циклів; тільки такий план може бути опорним.

Багатопродуктова транспортна задача – це задача про визначення оптимального плану перевезень кількох видів продукції, для яких задані коефіцієнти взаємозамінності одного виду продукту на інший.

Балансова умова – це рівність сумарного обсягу запасів усіх постачальників сумарному обсягу потреб усіх споживачів: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, де a_i – запас постачальника A_i ($i = \overline{1,m}$), b_j – потреби споживача B_j ($j = \overline{1,n}$).

Відкрита транспортна задача – це транспортна задача, для якої не виконується балансова умова, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вироджений план – це опорний план транспортної задачі, за яким кількість додатних компонентів (діючих комунікацій) менше, ніж ранг основної матриці основної системи обмежень транспортної задачі, тобто менше, ніж $r = m + n - 1$.

Граф як форма подання розв'язку транспортної задачі – це дводольний орієнтований граф, у верхній долі якого розташовані постачальники A_i ($i = \overline{1,m}$) та вказані їх запаси, у нижній – споживачі B_j ($j = \overline{1,n}$) та їх потреби, а діючи комунікації між ними є ребрами графу, що направлені від i-го постачальника до j-го споживача і вздовж ребер указано обсяг постачання.

Двоетапна транспортна задача **–** це розподільча задача, яка передбачає, що перевезення продукції від постачальника до споживача здійснюється не безпосередньо, а через проміжні бази (транзитні пункти).

Діагональний метод (***метод північно-західного кута***) – це метод побудови вихідного опорного плану транспортної задачі, який передбачає послідовний перебір рядків і стовпців транспортної таблиці, починаючи з лівого стовпчика і верхнього рядка (комунікація між постачальником A_1 та споживачем B_1) з метою максимального завантаження тієї комірки таблиці перевезень, яка розглядається на даному етапі.

Діюча клітина – це така клітина таблиці перевезень, якій відповідає реальне постачання ($x_{ij} > 0$).

ε***-зсув*** – це метод визначення потенціалів учасників транспортної задачі у випадку виродженого опорного плану

Економічний зміст оцінок Δ_{ij} ***плану транспортної задачі*** – це визначення величини, на яку зміниться загальна вартість перевезень, якщо обсяг поставок за клітиною $(i;\ j)$ збільшити на одиницю.

Економічний зміст потенціалів – це вартість за одиницю продукції, яку отримує постачальник незалежно від того, кому він здійснює постачання, і сплачує споживач незалежно від того, хто саме здійснив постачання.

Задача про призначення – це задача, що належить до класу розподільчих задач, у якій необхідно розподілити робітників на посадах таким чином, щоб загальна продуктивність їх праці була максимальною.

Закрита транспортна задача – транспортна задача, для якої виконується балансова умова, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Кількість вантажу θ, ***який перерозподіляється за циклом перерозподілу*** – це кількість вантажу, яку з метою поліпшення плану додають у додатних кутах контуру перерозподілу і віднімають у від'ємних його кутах. Вона визначається як мінімальне постачання до клітин, що відповідають від'ємним кутам контуру перерозподілу.

Контур (***цикл***) ***перерозподілу*** – це цикл, у якому лише одна з клітин є недіючою і цій клітині відповідає знак "+", а інші клітини, що відповідають кутам циклу перерозподілу, послідовно позначені знаками "–" та "+".

Ланцюг – це сукупність діючих клітин (послідовність зайнятих клітин таблиці перевезень), у якій кожній клітині $(i;\ j)$ цієї сукупності відповідає одна діюча клітина, що є спільною за постачальником, і одна діюча клітина, що є спільною за споживачем.

Матриця продуктивності $\mathbf{Q} = \left(q_{ij}\right)_{m\times n}$ – це матриця, елементами q_{ij} якої є продуктивність i-го працівника (або i-го виду обладнання) під час виконання j-го виду робіт (у розподільних задачах про призначення або про розподіл обладнання за видами робіт).

Матриця пропускних спроможностей клітин $\mathbf{D} = \left(d_{ij}\right)_{m\times n}$ – це матриця, елементами d_{ij} якої є максимальна кількість вантажу, який можна перевести через дану клітину (або по даному ланцюгу) таблиці перевезень транспортної задачі, тобто $0 \le x_{ij} \le d_{ij}$.

Метод мінімальної вартості – це метод побудови вихідного опорного плану транспортної задачі, за яким постачання здійснюється послідовно в клітини таблиці перевезень, які мають найменший тариф.

Метод потенціалів – метод визначення розв'язку транспортної задачі (вихідної) шляхом розв'язання спряженої з нею двоїстої задачі.

Невироджений план – це опорний план транспортної задачі, за яким кількість додатних компонентів (діючих комунікацій) дорівнює рангу основної матриці основної системи обмежень транспортної задачі, тобто становить $r = m + n - 1$.

Недіюча клітина – така клітина, за якою згідно з даним планом не здійснюється постачання.

Оцінки плану – це різниця між непрямим і дійсним тарифами для кожної клітини: $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$, де u_i – потенціал постачальника A_i $(i = \overline{1,m})$, v_j – потенціал споживача B_j $(j = \overline{1,n})$, c_{ij} – тариф на перевезення вантажу від i-го постачальника до j-го споживача.

Потенціали учасників – це змінні двоїстої задачі, які є додатковими характеристиками кожного із постачальників і кожного із споживачів.

Потреби фіктивного учасника – це додаткові константи, які необхідно ввести до основної системи обмежень математичної моделі відкритої транспортної задачі для виконання балансової умови, а саме, попит $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ фіктивного споживача, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, або пропозиція $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ фіктивного постачальника, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Розподільна задача – це клас економіко-математичних задач, що пов'язані з оптимізацією розподілу певних ресурсів за роботами, які необхідно виконати.

Розподільна задача з пропорційними продуктивностями – це задача про розподіл виробничих операцій за обладнанням, для якої матриця продуктивності має таку властивість: $q_{ij} = \alpha_i \cdot \beta_j$, де q_{ij} є продуктивністю i-го працівника (або i-го виду обладнання) під час виконання j-го виду робіт, α_i .– співмножники елементів матриці продуктивності за рядками ($i = \overline{1,m}$), β_j – співмножники елементів матриці продуктивності за стовпцями ($j = \overline{1,n}$). Ці співмножники є коефіцієнтами переходу до нових змінних під час перетворення математичної моделі розподільчої задачі до моделі класичної транспортної задачі.

Таблиця перевезень (***постачання***) – це таблична форма запису опорного плану транспортної задачі.

Таблиця потенціалів – це таблична форма надання розрахунків потенціалів учасників і непрямих тарифів для недіючих клітин.

Тариф дійсний c_{ij} – це вартість перевезення одиниці вантажу від певного постачальника A_i до певного споживача B_j.

Тариф непрямий $u_i + v_j$ – це сума потенціалів постачальника A_i та споживача B_j, для комунікації між якими визначається тариф.

Транзитні пункти – це проміжні бази, через які здійснюється розподіл продукції у розподільчих задачах, умовами яких передбачено, що прямі перевезення від постачальника до споживача заборонені.

Транспортна задача (***класична***) – це задача лінійного програмування, яка полягає у визначенні оптимального плану перевезень $\mathbf{X}^*$ однорідної продукції від постачальників, які мають запаси цієї продукції у кількості a_i ($i = \overline{1,m}$), до споживачів, потреби яких у цій продукції становлять b_j ($j = \overline{1,n}$), при заданій вартості перевезення c_{ij} одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача. За цим планом загальна вартість перевезень $Z(\mathbf{X})$ повинна бути найменшою за умов, що всі запаси постачальників вивезені та всі споживачі отримають необхідну кількість продукції. Математична модель задачі має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1,n}; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

за умови, що задачі є збалансованою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Транспортна задача з обмеженнями на пропускну здатність – це така транспортна задача, яка має додаткові обмеження: $x_{ij} \leq d_{ij}$, де d_{ij} – пропускна спроможність комунікації $(i,\ j)$.

Транспортна задача за критерієм часу – це транспортна задача про визначення оптимального плану перевезень однорідної продукції від постачальників, які мають запаси цієї продукції у кількості a_i ($i = \overline{1,m}$), до споживачів, потреби яких у цій продукції становлять b_j ($j = \overline{1,n}$), за умови заданого терміну перевезення t_{ij} довільної кількості продукції від i -го постачальника до j -го споживача. Цільова функція визначається як термін найбільш тривалого перевезення. Її математична модель має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \max\{t_{ij}\} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Умова оптимальності плану транспортної задачі – відсутність додатних оцінок для недіючих клітин та нульові оцінки для діючих клітин:

$$\begin{cases} \Delta_{ij} = u_i^* + v_j^* = 0, & \text{якщо } x_{ij}^* > 0; \\ \Delta_{ij} = u_i^* + v_j^* \le 0, & \text{якщо } x_{ij}^* = 0, \end{cases}$$
$$i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Умовно діюча клітина – така клітина виродженого опорного плану транспортної задачі, якій відповідає фіктивна поставка, тобто клітина $(i,\ j)$ таблиці перевезень вважається умовно зайнятою, хоча $x_{ij} = 0$.

Фіктивна поставка – це нульова поставка $\left(x_{ij} = 0\right)$, яка застосовується для обчислення потенціалів учасників у тому випадку, коли опорний план транспортної задачі є виродженим, відповідна їй клітина таблиці перевезень вважається умовно діючою.

Фіктивний учасник транспортної задачі – це або додатковий споживач B_{j+1}, або додатковий постачальник A_{i+1}, поставки за участю якого є додатковими змінними і вводяться у математичну модель відкритої транспортної задачі з метою досягнення виконання умови збалансованості, тобто для того, щоб задача стала закритою.

Цикл – це замкнений ланцюг, тобто ланцюг, перша і остання якого, знаходяться в одному рядку або стовпці таблиці.

Цільова функція класичної транспортної задачі – це сумарна вартість перевезень між усіма учасниками транспортної задачі, яка досліджується на мінімум: $Z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$, де c_{ij} – тариф, що визначає вартість перевезення одиниці вантажу від i -м постачальника ($i = \overline{1,m}$) до j -го споживача ($j = \overline{1,n}$), x_{ij} – кількість вантажу, що перевозиться від i -го постачальника до j -го споживача.

Цільова функція транспортної задачі за критерієм часу – це функція, що визначає тривалість найбільш тривалого маршруту перевезень; вона досліджується на мінімум: $Z(\mathbf{T}) = \max\{t_{ij}\} \to \min$, де t_{ij} – час, що витрачається на перевезення довільної кількості вантажу від i -го постачальника до j -го споживача.

4.3. Тренувальні вправи

4.3.1. Класична транспортна задача. Фірма-перевізник отримала замовлення на постачання піску на два цементні заводи, щоденні потреби яких становлять 180 т та 270 т. Пісок можна видобувати у трьох кар'єрах, щоденна продуктивність яких дорівнює 120 т, 150 т та 180 т. Вартість перевезення 1 т піску (тариф) від кожного кар'єра до кожного із заводів задана матрицею:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 50 & 80 \\ 40 & 20 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}.$$

Необхідно:

визначити план перевезень, за яким заводи щоденно отримували б необхідну їм кількість піску, всі кар'єри працювали на повну потужність і при цьому загальна вартість перевезень була б найменшою;

обчислити загальну вартість перевезень за оптимальним планом.

Розв'язання.

1. Перевіримо, чи є транспортна задача закритою, тобто чи виконується балансова умова. Із цією метою визначаємо запаси всіх постачальників та потреби всіх споживачів і порівняємо їх:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \ldots \qquad \sum_{j=1}^{2} b_j = \ldots$$

Оберіть правильну відповідь:

а) так, задача збалансована; б) ні, задача відкрита.

Правильна відповідь а), оскільки $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j$.

2. Укладемо вихідний опорний план перевезень, застосувавши для цього метод північно-західного кута.

Занесіть вихідні дані в табл. 4.1 і визначте вихідний опорний план, починаючи його визначення з клітини $(1; 1)$.

Таблиця 4.1

Вихідні дані транспортної задачі та вихідний опорний план

	B_1	B_2	a_i
A_1			
A_2			
A_3			
b_j			450 = 450

Оберіть правильну відповідь:

а)

	B_1	B_2	a_i
A_1	50 120	80 –	120
A_2	40 60	20 90	150
A_3	20 –	30 180	180
b_j	180	270	450 = 450

б)

	B_1	B_2	a_i
A_1	50 –	80 120	120
A_2	40 –	20 150	150
A_3	20 180	30 –	180
b_j	180	270	450 = 450

Відповідь а) є правильною.

3. Обчислимо вартість перевезень за вихідним опорним планом. Вона складає (вставте у формулу пропущені значення):

а) $Z(\mathbf{X}_0) = 50 \cdot \ldots + 80 \cdot \ldots + 40 \cdot \ldots + 20 \cdot \ldots. + 20 \cdot \ldots + 30 \cdot \ldots. = \ldots$

б) $Z(\mathbf{X}_0) = 120 \cdot \ldots + 150 \cdot \ldots + 180 \cdot \ldots = \ldots$

Відповідь а) є правильною $Z(\mathbf{X}_0) = 15\,600$ (грн).

4. За кількістю заповнених клітин перевіримо, чи є вихідний план виродженим.

Оберіть правильну відповідь:

а) кількість заводнених клітин у невиродженому плані повинна бути більшою за $m+n-1$, отже, план $\mathbf{X}_0$ є виродженим; б) кількість заводнених клітин у невиродженому плані повинна бути неменшою за $m+n-1$, отже, план $\mathbf{X}_0$ є невиродженим; в) кількість заповнених клітин у виродженому плані повинна бути найменшою з можливих, отже, план $\mathbf{X}_0$ є виродженим.

Відповідь б) є правильною, оскільки кількість заповнених клітини за планом $\mathbf{X}_0$ становить $3+2-1=4$.

5. Перевіримо, чи є отриманий план оптимальним. Для цього визначаємо потенціали учасників. Припустивши, що $u_1=0$, за діючими клітинами обчисліть потенціали і запишіть результати у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Таблиця потенціалів, що відповідає вихідному плану

u_i \ v_j	$v_1=\ldots$	$v_2=\ldots$
$u_1=0$	**50**	80
$u_2=\ldots$	**40**	**20**
$u_3=\ldots$	20	**30**

Зробимо висновок щодо оптимальності плану.

Оберіть правильну відповідь:

а) оскільки план $\mathbf{X}_0$ не має від'ємних оцінок, то він є оптимальним;

б) оскільки план $\mathbf{X}_0$ не має додатних оцінок, то він є оптимальним;

в) оскільки план $\mathbf{X}_0$ має додатну оцінку $\Delta_{......}=\ldots>0$ (заповніть пропуски), то він не є оптимальним і його можна покращити, зробивши поставку у клітину з найбільшою додатною оцінкою;

г) план $\mathbf{X}_0$ має від'ємну оцінку $\Delta_{\dots\dots} = \dots < 0$ (заповніть пропуски), отже, він не є оптимальним.

Відповідь в) є правильною, $\Delta_{31} = 50 - 20 = 30 > 0$, отже, план $\mathbf{X}_0$ не є оптимальним. Його можна покращати, зробивши поставку у клітину з додатною оцінкою.

6. За таблицею перевезень, що відповідає вихідному опорному плану, побудуємо цикл перерозподілу поставок.

Починаючи з клітини (табл. 4.3), що позначена знаком "+", побудуйте замкнений контур, у якому повороти можливі під прямим кутом лише у діючих клітинах.

Таблиця 4.3

Цикл перерозподілу поставок

Споживачі та постачальники	B_1	B_2
A_1	120	
A_2	60	90
A_3	+	180

Визначимо найбільший вантаж, який слід перерозподілити за цим контуром. Укажіть обсяг цього вантажу:

а) $\theta = 60$; б) $\theta = 90$; в) $\theta = 120$; г) $\theta = 180$.

Відповідь а) є правильною.

7. Завдяки перерозподілу вантажу отримуємо виграш цільової функції, який становить (заповніть пропуски): $\Delta Z = |\Delta \cdot \theta| = \dots \cdot \dots = \dots$

Результатом перерозподілу поставок згідно в визначеним циклом є поліпшений опорний план $\mathbf{X}_1$, якому відповідає цільова функція (заповніть пропуски): $Z(\mathbf{X}_1) = Z(\mathbf{X}_0) - \Delta Z = 15\,800 - \dots\dots = \dots\dots$

8. Перевіряємо, чи виконується для нового опорного плану $\mathbf{X}_1$ умова оптимальності. Припустивши, що $u_1 = 0$, за діючими клітинами визначаємо потенціали учасників і обчислюємо оцінки вільних клітин. Результати запишіть в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Таблиця потенціалів, що відповідає поліпшеному плану

u_i \ v_j	$v_1 = \ldots$	$v_2 = \ldots$
$u_1 = 0$	**50**	80
$u_2 = \ldots$	40	**20**
$u_3 = \ldots$	**20**	**30**

Оскільки план $\mathbf{X}_1$ не має додатних оцінок, то він є оптимальним. Отже, розв'язок транспортної задачі є план перевезень:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 150 \\ 60 & 30 \end{pmatrix},$$

якому відповідає найменша вартість перевезень $Z(\mathbf{X}^*) = 13\,800$.

4.3.2. Задача про оптимальний розподіл операцій за обладнанням. Цех молочного комбінату має три автоматичних лінії з фасування готової продукції. Кожна із цих ліній може здійснювати фасування сиркової маси, глазурованих сирків або м'яких сирів. Термін роботи, протягом якого автоматичні лінії не потребують наладки, визначається матрицею $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 120 & 90 & 100 \end{pmatrix}^T$. Необхідно виготовити 1 200 кг сиркової маси, 600 кг глазурованих сирків та 700 кг м'якого сиру. Продуктивність q_{ij}, яка характеризує i-ту лінію під час фасування j-го виду продукції та відповідна цій операції собівартість c_{ij} задані матрицями:

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 14 \\ 24 & 36 & 28 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 37 & 25 & 14 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розподіліть вид продукції за автоматичними лініями таким чином, щоб загальна собівартість робіт була найменшою.

Розв'язання.

1. Запишемо математичну модель задачі у розгорнутому вигляді. Змінними задачі x_{ij} є час, протягом якого i-та лінія здійснює фасування j-го виду продукції.

Цільовою функцією є загальна собівартість:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{X}) = 10x_{11} + 20x_{12} + 15x_{13} + \\ + 37x_{21} + 25x_{22} + 14x_{23} + \\ + \ 7x_{31} \ + \ 9x_{32} + \ 10x_{33} \quad \to \quad \min; \end{aligned}$$

умови обмеження за ресурсами часу:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 120; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 90; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 100; \end{cases}$$

умови обмеження за кількістю продукції:

$$\begin{cases} 12x_{11} + 24x_{21} + 6x_{31} \ge 1800; \\ 18x_{12} + 36x_{22} + 9x_{32} \ge 1800; \\ 14x_{13} + 28x_{23} + 7x_{33} \ge 1400; \end{cases}$$

а також є обмеження на знак:

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Що заважає розв'язати цю розподільну задачу як транспортну? Те, що коефіцієнти у системі обмежень за кількістю продукції відмінні від одиниці.

2. Введемо нові змінні для перетворення математичної моделі задачі до математичної моделі класичної транспортної задачі. Для цього припустимо, що замість автоматичних ліній різною продуктивності ми маємо три однакові лінії. Нові змінні мають зміст часу, який витрачається

на здійснення певної операції при застосуванні тільки ліній одного типу. Візьмемо в якості еталона продуктивність другої лінії. Тобто:

$$x_{21}^I = x_{21}; \quad x_{22}^I = x_{22}; \quad x_{23}^I = x_{23}.$$

Оскільки продуктивність першої лінії вдвічі менша за продуктивність другої, то при використанні другої лінії замість першої для виконання того самого обсягу робіт знадобиться вдвічі менше часу (заповніть пропуски):

$$x_{11}^I = \ldots \cdot x_{11}; \quad x_{12}^I = \ldots \cdot x_{12}; \quad x_{13}^I = \ldots \cdot x_{13}.$$

Продуктивність третьої лінії у чотири рази менша за продуктивність другої лінії, отже, під час використання другої лінії замість третьої для виконання того ж самого обсягу робіт знадобиться у чотири рази менше часу (заповніть пропуски):

$$x_{31}^I = \ldots \cdot x_{31}; \quad x_{32}^I = \ldots \cdot x_{32}; \quad x_{33}^I = \ldots \cdot x_{33}.$$

3. Запишемо у нових змінних систему обмежень за кількістю продукції (заповніть пропуски):

$$\begin{cases} 12 \cdot \ldots \cdot x_{11}^I + 24x_{21}^I + 6 \cdot \ldots \cdot x_{31}^I \geq 1\,800; \\ 18 \cdot \ldots \cdot x_{12}^I + 36x_{22}^I + 9 \cdot \ldots \cdot x_{32}^I \geq 1\,800; \\ 14 \cdot \ldots \cdot x_{13}^I + 28x_{23}^I + 7 \cdot \ldots \cdot x_{33}^I \geq 1\,400; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11}^I + x_{21}^I + x_{31}^I \geq \ldots; \\ x_{12}^I + x_{22}^I + x_{32}^I \geq \ldots: \\ x_{13}^I + x_{23}^I + x_{33}^I \geq \ldots \end{cases}$$

Отже, ця система обмежень містить в якості коефіцієнтів лише самі одиниці, як це і повинно бути в математичній моделі транспортної задачі.

4. Запишемо у нових змінних систему обмежень за ресурсом часу:

$$\begin{cases} \ldots \cdot x_{11}^I + \ldots \cdot x_{12}^I + \ldots \cdot x_{13}^I \leq 120; \\ x_{21}^I + x_{22}^I + x_{23}^I \leq 90; \\ \ldots \cdot x_{31}^I + \ldots \cdot x_{32}^I + \ldots \cdot x_{33}^I \leq 100; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11}^I + x_{12}^I + x_{13}^I \leq \ldots; \\ x_{21}^I + x_{22}^I + x_{23}^I \leq \ldots; \\ x_{31}^I + x_{32}^I + x_{33}^I \leq \ldots \end{cases}$$

Ця система обмежень також містить в якості коефіцієнтів лише самі одиниці. Отже, у нових змінних основна система обмежень має такий вигляд, який є придатним для розв'язання оптимізаційної задачі про розподіл видів продукції за різними автоматичними лініями як класичну транспортну задачу.

Також система обмежень містить обмеження на знак:

$$x_{ij}^{I} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.$$

5. Запишемо у нових змінних цільову функцію (заповніть пропуски):

$$Z(\mathbf{X}^{I}) = 10 \cdot \ldots \cdot x_{11}^{I} + 20 \cdot \ldots \cdot x_{12}^{I} + 15 \cdot \ldots \cdot x_{13}^{I} + \\ + 37x_{21}^{I} + 25x_{22}^{I} + 14x_{23}^{I} + \\ + 7 \cdot \ldots \cdot x_{31}^{I} + 9 \cdot \ldots \cdot x_{32}^{I} + 10 \cdot \ldots \cdot x_{33}^{I} \quad \to \quad \min$$

й отримуємо (заповніть пропуски):

$$Z(\mathbf{X}^{I}) = \ldots \cdot x_{11}^{I} + \ldots \cdot x_{12}^{I} + \ldots \cdot x_{13}^{I} + \\ + 37x_{21}^{I} + 25x_{22}^{I} + 14x_{23}^{I} + \\ + \ldots \cdot x_{31}^{I} + \ldots \cdot x_{32}^{I} + \ldots \cdot x_{33}^{I} \quad \to \quad \min.$$

Оскільки у нових змінних ми отримали ту ж саму математичну модель, яку має класична транспортна задача, то для розв'язання цієї задачі можемо застосувати, наприклад, метод потенціалів аналогічно тому, як це було зроблено у попередній задачі.

6. Розв'язання задачі починаємо з перевірки балансової умови:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 75 + 50 + 50 = 175, \qquad \sum_{i=1}^{3} b_i = 60 + 90 + 25 = 175.$$

Отже, задача є збалансованою.

7. Складаємо таблицю перевезень і визначаємо вихідний опорний план за методом мінімальної вартості. Знайдіть цей план за методом мінімальної вартості. Для цього скористайтеся табл. 4.5, у якій наведені вихідні дані задачі у нових змінних (заповніть комірки).

Таблиця 4.5

Вихідні дані задачі

$\mathbf{X}_0^I$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	20	40	30	60
A_2	37	25	14	90
A_3	28	36	40	25
Потреби	75	50	50	175 = 175

8. За методом потенціалів перевіримо, чи є вихідний план $\mathbf{X}_0^I$ оптимальним. Для цього обчисліть потенціали учасників, припустивши, що $u_1 = 0$, і визначте оцінки для вільних клітин. Результати запишіть у табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Таблиця потенціалів, що відповідає плану $\mathbf{X}_0^I$

u_i \ v_j	$v_1 = \ldots$	$v_2 = \ldots$	$v_3 = \ldots$
$u_1 = 0$	**20**	40	30
$u_2 = \ldots$	37	**25**	**14**
$u_3 = \ldots$	**28**	**36**	40

Оскільки додатних оцінок нема, то план оптимальний.

Зверніть увагу, що одна з клітин має нульову оцінку, отже, є ще один оптимальний план. Знайдіть його самостійно.

9. Повернемося до вихідних змінних і у матричній формі запишемо обидва оптимальних плани (заповніть пропуски):

$$\mathbf{X}_{опт.}^I = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 50 \\ 15 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно із цим планом перша лінія здійснює фасування лише сиркової маси протягом 120 год, друга лінія 40 год працює на фасуванні глазурованих сирків та 50 год – на фасуванні м'якого сиру, третя лінія протягом 60 год здійснює фасування сиркової маси та 40 год – фасування глазурованих сирків.

10. Визначимо цільову функцію, що відповідає оптимальному плану. Отже, загальна собівартість операції становить:

$$Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^*) = ...$$

4.4. Запитання для самоперевірки

4.4.1. Опишіть економіко-математичну модель транспортної задачі.

4.4.2. Запишіть транспортну задачу в матричній формі і назвіть її властивості.

4.4.3. Назвіть методи побудови вихідного плану транспортної задачі. У чому полягає їх сутність?

4.4.4. Який критерій оптимальності для транспортної задачі?

4.4.5. Наведіть математичну та економічну інтерпретації методу потенціалів, що застосовується для розв'язання транспортної задачі.

4.4.6. Як здійснити перехід до іншого опорного плану?

4.4.7. Які властивості має контур перерозподілу?

4.4.8. За яким критерієм визначається обсяг вантажу, який можна перерозподілити за контуром перерозподілу?

4.4.9. Як обчислити зменшення цільової функції, яке відбувається завдяки переходу до нового опорного плану?

4.4.10. Як розв'язати транспортну задачу у випадку виродження?

4.4.11. Для розв'язання якої проблеми застосовуються додаткові змінні в моделі транспортної задачі?

4.4.12. Для розв'язання якої проблеми застосовуються фіктивні змінні в моделі транспортної задачі?

4.4.13. Як за таблицею потенціалів, що відповідає оптимальному плану, визначити, що транспортна задача має альтернативний мінімум?

4.4.14. Яку найбільшу кількість альтернативних планів може мати транспортна задача?

4.4.15. Наведіть приклади економічних задач, для яких доцільно використовувати алгоритми та методи розв'язання транспортної задачі.

4.4.16. Чому транспортна задача за критерієм часу не належить до класу задач лінійного програмування?

4.4.17. Як скласти таблицю вихідних даних для побудови опорного плану транспортної задачі з проміжними пунктами?

4.4.18. Наведіть алгоритм розв'язання транспортної задачі з обмеженням за комунікаціями, коли в певну клітину необхідно зробити постачання за обсягом, неменшим за наперед заданий.

4.4.19. Наведіть алгоритм розв'язання транспортної задачі з обмеженням за комунікаціями, коли в певну клітину необхідно зробити постачання за обсягом, не більшим за наперед заданий.

4.4.20. Що таке багатокритеріальна транспортна задача та який алгоритм її розв'язання?

4.4.21. У чому полягає особливість розв'язання розподільчої задачі вибору оптимального варіанта використання виробничого обладнання?

4.5. Практичні завдання

4.5.1. Класична транспортна задача має такі умови. Запаси на складах задані матрицею $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 150 & 130 & 170 \end{pmatrix}$, потреби споживачів визначаються матрицею $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 90 & 80 & 160 & 100 \end{pmatrix}$. Визначте, чи потрібно вводити фіктивного учасника. Якщо така необхідність існує, то саме кого з учасників потрібно вводити та яку кількість вантажу (запаси або потреби) слід приписати цьому учаснику для виконання балансовою умови?

4.5.2. За методом мінімальної вартості складіть вихідний опорний план класичної транспортної задачі, умови якої наведені в табл. 4.7.

Таблиця 4.7

Вихідні дані задачі

Постачальники \ Споживачі	B_1	B_2	a_i
A_1	5	8	120
A_2	4	2	150
A_3	6	1	180
b_j	180	270	450 = 450

4.5.2. Складіть вихідний опорний план класичної транспортної задачі методом північно-західного кута та визначити вартість перевезень за цим планом. Умови задачі подано в табл. 4.8.

Таблиця 4.8

Вихідні дані задачі

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	4	9	6	120
A_2	7	4	5	7	100
A_3	4	6	6	2	200
b_j	120	80	160	60	420 = 420

Для опорного плану, який складено за табл. 4.8, перевірте, чи виконуються умови оптимальності.

4.5.3. Для опорного плану, який наведено в таблиці перевезень, та з урахуванням відповідної йому таблиці потенціалів (табл. 4.9), складіть цикл перерозподілу та визначити кількість вантажу, яку треба перерозподілити за цим циклом для зменшення загальних витрат на перевезення.

Таблиця 4.9

Опорний план та відповідна йому таблиця потенціалів

Таблиця перевезень

Споживачі / постачальники	B_1	B_2	B_3
A_1	80	40	
A_2		50	
A_3		20	70
A_4			30

Таблиця потенціалів

v_j / u_i	$v_1 = \ldots$	$v_2 = \ldots$	$v_3 = \ldots$
$u_1 = 0$	**4**	**5**	7
$u_2 = \ldots$	3	**3**	5
$u_3 = \ldots$	4	**5**	**7**
$u_4 = \ldots$	- 1	3	**4**

4.5.4. За умовами завдання **4.5.5** визначте, на скільки зменшиться значення цільової функції завдяки перерозподілу вантажу і побудуйте новий опорний план, який буде отримано внаслідок цього.

4.5.5. Для класичної транспортної задачі, вихідні дані якої надані в табл. 4.10, побудуйте вихідний опорний план методом мінімальної вартості і визначити відповідну йому систему потенціалів та зробити висновок, чи є він оптимальним. Треба мати на увазі, що цей план є виродженим.

Таблиця 4.10

Вихідні дані задачі

Споживачі / постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	3	2	4	6	2	120
A_2	5	4	6	1	3	90
A_3	8	2	4	5	7	210
A_4	4	5	9	3	2	160
b_j	120	170	70	40	180	

4.5.8. Підприємство за конкурсом відібрало п'ять претендентів на посади топ-менеджера, менеджера з поставок, менеджера з реалізації продукції, HR-менеджера та менеджера з виробництва. Кожен із них випробувальний термін відпрацював на кожній з посад, і результати оцінювання їх роботи в балах надані матрицею $\mathbf{C}$. Елементи цієї матриці можна розглядати як ефективність i-го спеціаліста під час виконання j-ї роботи:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 5 & 6 & 10 \\ 12 & 8 & 10 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 9 & 10 \\ 9 & 6 & 7 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Розподіліть претендентів на посади таким чином, щоб їх загальна ефективність була найбільшою, і визначте цю ефективність.

4.5.9. На трьох складах зберігається однорідна продукція, кількість якої задана матрицею $\mathbf{A}^T=(160 \quad 90 \quad 140)$. Потреби п'яти підприємств у цій продукції задані матрицею $\mathbf{B} = (90 \quad 60 \quad 80 \quad 70 \quad 90)$. Також існують додаткові обмеження. Так, на підприємство B_2 зі складу A_1 необхідно перевезти не менше, ніж 50 одиниць продукції, на підприємство B_5 зі складу A_3 – не менше, ніж 60 одиниць, а зі складу A_2 на підприємство B_4 – не більше, ніж 40 одиниць продукції. Задана матриця тарифів:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 8 & 9 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Складіть вихідний опорний план перевезень за допомогою методу мінімальної вартості.

4.5.10. За умовами завдання **4.5.9** визначте оптимальний план постачання і загальну вартість перевезень за цим планом.

4.5.11. Три сільськогосподарських підприємства вирощують пшеницю. Після збору врожаю зерно перевозять спочатку на один із трьох токів, а звідси – на один із чотирьох елеваторів. Кількість зерна, яку отримало кожне підприємство, описується матрицею $\mathbf{A}^T = \left(20 \quad 50 \quad 40\right)$, місткість токів визначається матрицею $\mathbf{T} = \left(40 \quad 40 \quad 30\right)$, а потужність елеваторів описується матрицею $\mathbf{B} = (28 \quad 22 \quad 26 \quad 34)$. Тарифи задані матрицями:

$$\mathbf{C}_{A \to T} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C}_{T \to B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Усі маршрути обслуговує одне транспортне підприємство.

Необхідно визначити оптимальний план перевезень врожаю від сільськогосподарських підприємств до елеваторів, який забезпечив би найменші витрати та обчислити загальну вартість перевезень за цим планом.

4.5.12. Знайдіть розв'язок транспортної задачі, якщо відомі пропозиції $\mathbf{A}^T = (220; \quad 140; \quad 160)$ і потреби $\mathbf{B} = (160; \quad 160; \quad 200)$, задані матриці вартості перевезень $\mathbf{C}$ та обмежень за маршрутами $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 60 \\ \infty & 70 & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

4.5.13. На чотирьох складах міститься різноманітна продукція. Її необхідно доставити до двох споживачів. На складі A_1 знаходиться продукція І-го та ІІІ-го типів у кількості $a_1^1 = 200$ та $a_1^{\mathrm{III}} = 150$ одиниць. Постачальник A_2 має запаси продукції трьох типів у кількості $a_2^1 = 75$, $a_2^{\mathrm{II}} = 100$ та $a_2^{\mathrm{III}} = 50$. Запаси у постачальника A_3 становлять $a_3^1 = 50$ та $a_3^{\mathrm{II}} = 100$. Постачальник A_4 має запаси всіх трьох типів продукції у кількості $a_4^1 = 40$; $a_4^{\mathrm{II}} = 30$ та $a_4^{\mathrm{III}} = 50$. Від споживача B_1 маємо такі заявки: $b_1^1 = 250$, $b_1^{\mathrm{II}} = 130$ та $b_1^{\mathrm{III}} = 150$ одиниць, а від споживача B_2 – заявки: $b_2^1 = 115$, $b_2^{\mathrm{II}} = 100$ та $b_2^{\mathrm{III}} = 100$ одиниць. Вартість перевезення одиниці продукції кожного типу задана таблицею (табл. 4.11).

Таблиця 4.11

Вартість перевезення одиниці вантажу

Постачальники	Тип вантажу	Споживачі	
		B_1	B_2
A_1	I	4	6
	III	7	5
A_2	I	5	6
	II	9	10
	III	9	11
A_3	I	10	10
	II	11	14
A_4	I	7	8
	II	8	8
	III	15	14

Визначте оптимальний план перевезень за критерієм вартості та загальну вартість перевезень за цим планом.

4.5.14. Є чотири постачальника однорідної продукції, запаси яких визначені матрицею $\mathbf{A} = (100;\quad 110;\quad 200;\quad 90)^T$, і чотири споживачі цієї продукції, потреби яких становлять $\mathbf{B} = (80;\quad 120;\quad 160;\quad 140)$. Відома матриця часу, що витрачається на перевезення $\mathbf{T} = (t_{ij})_{4x4}$, де t_{ij} – час (у годинах), потрібний для перевезення довільної кількості вантажу від i-го постачальника j-му споживачеві:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Складіть план постачання, за яким найбільший термін перевезення буде мінімальним, та визначити тривалість перевезень за цим планом.

4.5.15. Потреби чотирьох споживачів у продукції визначають матрицею $\mathbf{B} = (28\quad 22\quad 26\quad 34)$, можливості трьох постачальників цієї продукції визначають матрицею $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 30 \end{pmatrix}$. Тарифи на перевезення одиниці продукції і час, що витрачається на сполучення між кожною парою "постачальник – споживач", задані матрицями:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ та } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 25 & 19 \\ 18 & 14 & 16 & 23 \\ 21 & 32 & 15 & 31 \end{pmatrix}.$$

Визначте план перевезень, за яким загальна вартість перевезень була би найменшою і до того ж загальний час на всі перевезення також був би найменшим. Обчисліть вартість перевезень за таким планом.

4.6. Тестові завдання

4.6.1. Чи можна застосовувати симплексний метод до розв'язання транспортної задачі? Оберіть правильне твердження:

а) тільки тоді, коли вихідна задача є збалансованою;

б) симплексний метод є універсальним методом розв'язання ЗЛП і може застосовуватись для розв'язання транспортної задачі;

в) ні, транспортну задачу можна розв'язати лише за допомогою методу потенціалів;

г) можна, але краще застосовувати графічний метод, оскільки є тільки дві сторони: постачальник і споживач.

4.6.2. Оберіть правильне економічне тлумачення додаткових змінних, що вводяться у математичну модель транспортної задачі:

а) це допоміжні змінні для математичних перетворень моделі, які не мають економічного сенсу;

б) це додаткові змінні, що характеризують потужність учасників транспортної задачі і визначають зміну цільової функції щодо зміни тарифів;

в) надлишкова пропозиція (надлишковий попит), якщо вихідна задача є незбалансованою;

г) вони застосовуються для того, щоб перевірити, чи відповідає план перевезень умовам оптимальності.

4.6.3. Якщо згідно з умовою збалансованої транспортної задачі є m постачальників та n споживачів, то найбільша кількість додатних елементів її опорного плану становить:

а) $m+n$; б) $(m-1)\cdot n$; в) $m\cdot(n-1)$; г) $(m+n)-1$.

4.6.4. Чи можна використовувати фіктивні змінні під час побудови математичної моделі транспортної задачі? Оберіть правильне твердження:

а) так, вони завжди вводяться в ті умови основної системи обмежень, які мають вигляд нерівностей;

б) так, вони використовуються для обчислення потенціалів, якщо опорний план задачі є виродженим;

в) так, вони застосовуються під час подання оптимального плану задачі у вигляді графу;

г) ні, вони ніколи не застосовуються.

4.6.5. Чи можна вважати, що тіньова ціна є ринковою ціною сировини? Оберіть правильне твердження:

а) так, це ринкові ціни;

б) ні, це внутрішні маргінальні ціни;

в) ні, це лише умовна назва, яка не має жодного відношення до економічних категорій.

4.6.6. Для певного виду продукції задані матриця пропозицій $\mathbf{A}^T = (210 \;\; 200 \;\; 250)$ та матриця попиту на неї $\mathbf{B} = (180 \;\; 250 \;\; 200)$. Чи є задача збалансованою? Якщо ні, то якого фіктивного учасника потрібно вводити? Оберіть правильне твердження:

а) балансова змінна непотрібна, оскільки задача збалансована;

б) потрібно ввести фіктивного споживача з потребами $b_4 = 30$;

в) потрібно ввести фіктивного постачальника з запасом $a_4 = 30$.

4.6.7. Вихідні умови транспортної задачі наведені в табл. 4.12. Складіть вихідний опорний план перевезень діагональним методом. Чи є цей план виродженим?

Таблиця 4.12

Вихідні дані задачі

Споживачі, постачальники	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1				200
A_2				300
A_3				250
b_j	270	200	280	

Перевірте, чи є цей план виродженим:

а) так; б) ні; в) план неможна скласти, оскільки задача є відкритою.

4.6.8. Для опорного плану транспортної задачі тарифи перевезень наведені в таблиці потенціалів (табл. 4.13). Обчисліть потенціали учасників, припустивши, що $u_1 = 0$, і визначити клітину, в яку доцільно зробити поставку для поліпшення плану, якщо план не є оптимальним.

Таблиця 4.13

Потенціали учасників транспортної задачі

u_i \ v_j	$v_1 = \ldots$	$v_2 = \ldots$	$v_3 = \ldots$	$v_4 = \ldots$
$u_1 = 0$	**2**	2	1	1
$u_2 = \ldots$	**5**	**7**	**4**	2
$u_3 = \ldots$	2	6	**3**	**4**

Оберіть правильну відповідь:

а) план оптимальний, існують ще два альтернативних оптимуму;

б) план неоптимальний, оскільки є додатні оцінки для вільних клітин, найменша з яких $\Delta_{14} = 1$, і туди слід зробивши поставку;

в) план неоптимальний, оскільки є додатні оцінки для вільних клітин, найбільша з яких $\Delta_{24} = 3$, і туди слід зробивши поставку.

4.6.9. За даними табл. 4.15 визначте кількість вантажу, яку слід перерозподілити для поліпшення плану.

Таблиця 4.15

Таблиця перевезень

Споживачі, постачальники	B_1	B_2	B_3
A_1	170		30
A_2	100	200	
A_3			250

Таблиця потенціалів

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$
$u_1 = 0$	**2**	5 / 1	**1**
$u_2 = 1$	**3**	**2**	5 / 2
$u_3 = 2$	2 / 4	4 / 3	**3**

а) 30; б) 100; в) 170; г) 200; д) 250.

4.6.10. Чи є оптимізаційна задача за критерієм часу задачею лінійного програмування? Оберіть правильну відповідь:

а) так; б) ні; в) тільки після перетворення змінних.

4.6.11. Визначте, на скільки зменшиться загальна вартість перевезень, якщо поліпшити план (табл. 4.16), перерозподіливши вантаж.

Таблиця 4.16

Таблиця перевезень

Споживачі, постачальники	B_1	B_2	B_3
A_1			120
A_2	100	180	
A_3	120		150

Таблиця потенціалів

u_i \ v_j	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 5$
$u_1 = 0$	2 / 1	5 / 2	**5**
$u_2 = 0$	**1**	**2**	3 / 5
$u_3 = -3$	**2**	4 / –1	**2**

а) 100; б) 120; в) 150; г) 200; д) 300.

4.6.12. Чи існує в задачі про призначення альтернативний оптимальний план? Оберіть правильну відповідь:

а) так, їх завжди декілька;

б) може існувати, але це не обов'язково;

в) ні, існує тільки один оптимальний план.

4.6.13. Відома таблиця потенціалів (табл. 4.17), що обчислена для певного опорного плану. Чи є цей план оптимальним? Чи має задача альтернативний оптимум, якщо цей план оптимальний?

Таблиця 4.17

Потенціали учасників транспортної задачі

u_i \ v_j	$v_1 = 0$	$v_2 = -1$	$v_3 = 1$
$u_1 = 0$	2 0	5 –1	**1**
$u_2 = 3$	**3**	**2**	5 4
$u_3 = 2$	**2**	4 1	**3**

Оберіть правильну відповідь:

а) так, цей план оптимальний, альтернативного оптимуму нема;

б) так, план оптимальний, а також існує альтернативний оптимум.

в) цей план неоптимальний, наявність альтернативного оптимуму можна визначити після визначення оптимального плану.

4.6.14. З'ясуйте, скільки умовно зайнятих клітин має оптимальний план задачі про призначення, якщо матриця ефективності має розмір 4×4:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

4.6.15. Укажіть, який з наведених методів можна застосовувати для побудови вихідного плану транспортної задачі за критерієм часу:

а) метод північно-західного кута;

б) метод мінімальної вартості;

в) жодного з них, для розв'язання цієї задачі треба застосовувати спеціальні методи.

4.6.16. Опорний план транспортної задачі за критерієм часу та терміни перевезень надано в табл. 4.18.

Таблиця 4.18

Опорний план транспортної задачі та тарифи

Споживачі, постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	20 **120**	25	80	20
A_2	30 **30**	40	60	10 **40**	25 **20**
A_3	20 **90**	25 **50**	40 **70**	50	40
A_4	10	50	70	30	10 **160**

Обчисліть значення цільової функції, яке відповідає цьому плану:

а) 40; б) 170; в) 500; г) 2 400; д) 32 450.

4.6.17. Чи матиме розв'язок транспортна задача, якщо окрім критерію вартості під час визначення оптимального плану слідураховувати також критерій часу? Оберіть правильну відповідь:

а) так, якщо визначати вихідний опорний план транспортної задачі за критерієм мінімальної вартості;

б) так, якщо знайти розв'язок задачі спочатку за більш важливим з критеріїв, а потім – за менш важливим;

в) так, якщо при розв'язанні задачі за більш важливим з критеріїв вона матиме один або декілька альтернативних планів;

г) так, якщо одночасно враховувати обидва критерії.

4.6.18. Запаси постачальників A_1 та A_2 становлять, відповідно, $a_1 = 280$ та $a_2 = 320$ одиниць продукції, а потреби споживачів B_1 та B_2 у цій продукції дорівнюють $b_1 = 250$ та $b_2 = 350$ одиниць, відповідно. Безпосередні перевезення між усіма споживачами та постачальниками неможливі, тому поставки здійснюються з використанням транзитних пунктів T_1, T_2 та T_3, пропускна спроможність яких становить $t_1 = 300$, $t_2 = 200$ та $t_3 = 100$. Задані матриці тарифів на перевезення одиниці вантажу від постачальників до транзитних пунктів $\mathbf{C}_{A \to T}$ та від транзитних пунктів до споживачів $\mathbf{C}_{T \to B}$:

$$\mathbf{C}_{A\to T}=\begin{pmatrix}8 & 10 & 6\\ 11 & 5 & 4\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}_{T\to B}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 9\\ 8 & 11\end{pmatrix}.$$

Для двоетапної транспортної задачі (з транзитними пунктами) заповніть таблицю вихідних умов (табл. 4.19).

Таблиця 4.19

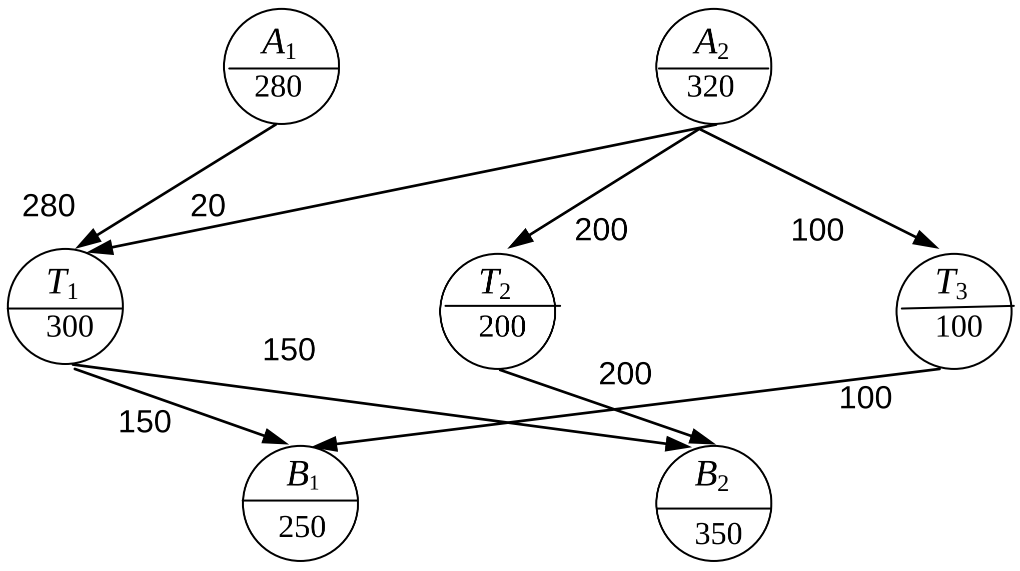
Вихідні умови двоетапної транспортної задачі

Тарифи	T_1	T_2	T_3	B_1	B_2	Запаси
T_1		–	–			300
T_2	–		–			200
T_3	–	–				100
A_1				–	–	280
A_2				–	–	320
Попит	300	200	100	250	350	1 200

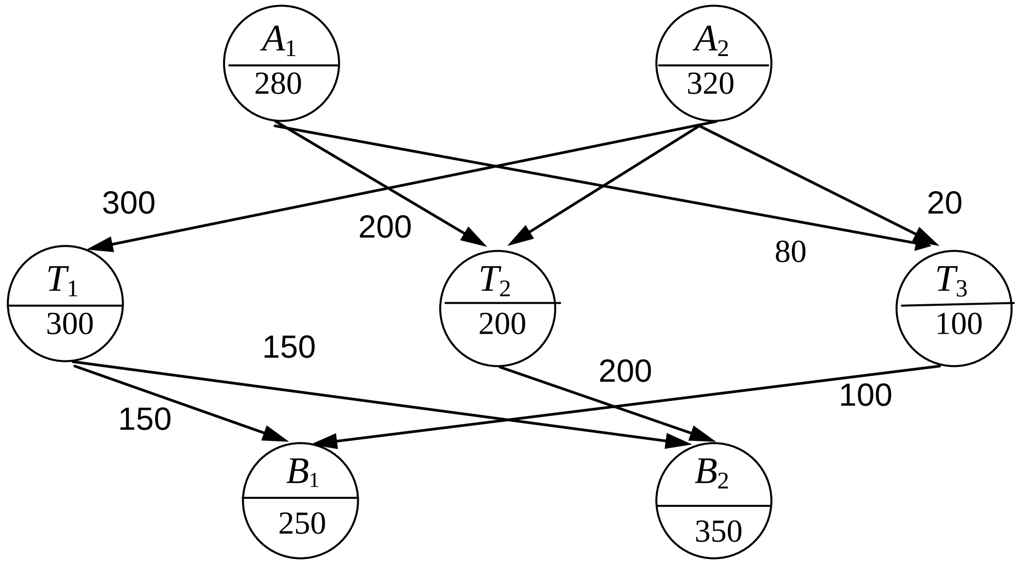
Складіть оптимальний план двоетапної транспортної задачі та наведіть його у вигляді графу.

Оберіть правильну відповідь:

а)

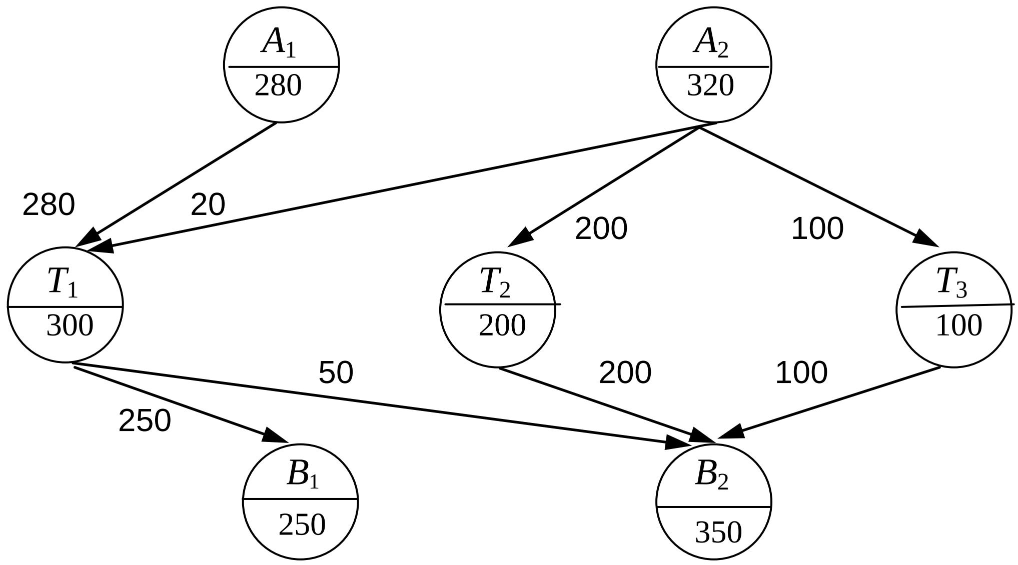


б)



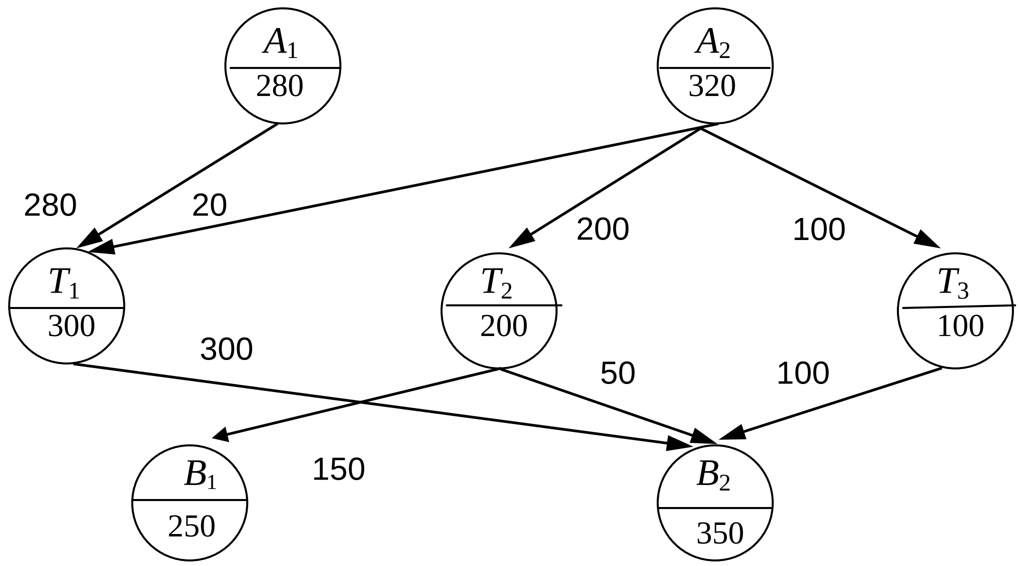
A_1 280
A_2 320
300
200
20
80
T_1 300
T_2 200
T_3 100
150
200
100
150
B_1 250
B_2 350

в)



A_1 280
A_2 320
280
20
200
100
T_1 300
T_2 200
T_3 100
50
200
100
250
B_1 250
B_2 350

г)



A_1 280
A_2 320
280
20
200
100
T_1 300
T_2 200
T_3 100
300
50
100
150
B_1 250
B_2 350

4.7. Висновки за темою

Класична транспортна задача є тією базою, на яку спираються методи визначення оптимальних розв'язків щодо системи організації перевезень в логістичних задачах. Теоретичні основи побудови оптимального плану транспортної задачі успішно використовують під час розв'язання великої кількості прикладних задач економіки.

Як видно з наведених прикладів, для багатьох економічних задач про оптимальний розподіл ресурсів математичну модель задачі можна побудувати таким чином, що для її розв'язання можна застосовувати такі ж методи, що і для розв'язання класичної транспортної задачі, наприклад, метод потенціалів. Слід зазначити, що реальні економічні задачі мають велику вимірність, тому їх розв'язання здійснюється із застосуванням спеціальних комп'ютерних програм. Однак застосування цих програм вимагає, перш за все, побудови математичної моделі задачі у вигляді, який був би придатним для введення розрахункових даних.

Отже, наведені в цьому розділі приклади допомагають зрозуміти, як саме здійснюється перетворення математичної моделі довільної розподільної задачі в модель транспортної задачі, а також які методи розв'язання транспортної задачі доцільно застосовувати для розв'язання задач про оптимальний розподіл.

Рекомендована література: [1 – 22].

5. Цілочислове програмування

5.1. Мета та професійні компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення із задачами лінійного програмування, на змінні яких накладається додаткове обмеження цілочисельності, а також з основними методами розв'язання таких задач.

Професійні компетентності, що формуються під час вивчення теми:

розуміння особливостей математичної моделі задач цілочислового програмування порівняно із задачами лінійного програмування;

знання принципів застосування графічного методу до розв'язання задач цілочислового програмування;

знання алгоритму метода відсікань (метода Гоморі) та вміння застосовувати цей алгоритм до розв'язання задач лінійного програмування з додатковим обмеженням на цілочисельність;

уявлення про комбінаторні методи та їх застосування до розв'язання задач цілочислового програмування;

знання алгоритму розгалужень і меж та вміння застосовувати цей алгоритм до розв'язання задач лінійного програмування з додатковим обмеженням на цілочисельність.

5.2. Термінологічний словник

Булєва (***бінарна***) ***змінна*** – це змінна, яка може приймати тільки значення 0 або 1.

Вузли дерева пошуку – це окремі підмножини множини значень змінної $\mathbf{X}$.

Внутрішній вузол – це вузол дерева розв'язків, у якому здійснюється порівняння можливих розв'язків за значеннями цільової функції.

Дерево пошуку, або ***дерево розгалужень і меж*** – це графічне подання метода розгалужень і меж, яке складається з вершин і дуг; кожна вершина дерева відповідає деякій підмножині розв'язків; вершина, в яку входять дуги, відповідає підмножині, що була отримана в результаті розгалуження; дуги, які виходять із вершини, означають, що на певному етапі цю підмножину відсікти не вдалося і вона була розбита на підмножини.

Дробова частина $\{a\}$ ***числа*** – це різниця між самим числом a і його цілою частиною: $\{a\} = a - [a],\ 0 \le \{a\} < 1$.

Жадібний алгоритм – це алгоритм, що полягає в прийнятті локально оптимальних рішень на кожному етапі, припускаючи, що кінцеве рішення також виявиться оптимальним. У задачі про рюкзак жадібний алгоритм передбачає ранжування предметів у порядку зменшення їх питомої цінності і на кожному етапі вибір того з них, який має найбільшу питому цінність на цьому етапі.

Задача булєвого лінійного програмування – це задача цілочислового програмування, усі змінні якої є булєвими змінними.

Задача комівояжера – це задача цілочислового програмування, згідно з якою комівояжер повинен відвідати один, і тільки один, раз кожне з n міст і повернутися в початковий пункт, при цьому його маршрут повинен мати найменшу з можливих загальну довжину шляху.

Задача про рюкзак – це задача цілочислового програмування, яка полягає у визначенні складу предметів, що необхідно покласти у рюкзак обмеженої місткості для забезпечення максимальної загальної цінності його вмісту.

Задача про рюкзак 0 – 1 – це задача про рюкзак, умовою якої передбачено, що можна взяти не більше одного предмета кожного найменування.

Комбінаторний метод – це метод розв'язання задач цілочислового програмування, який передбачає послідовний перебір допустимих цілочислових розв'язків.

Метод відсікання – це метод розв'язання задач цілочислового програмування, який полягає в поетапному звуженні області допустимих розв'язків.

Метод Гоморі – це метод розв'язання цілочислових задач лінійного програмування, який ґрунтується на поетапному визначенні розв'язку ланцюга задач лінійного програмування. Основна ідея методу полягає в тому, що на першому етапі за допомогою симплексного методу розв'язують задачу без урахування умови цілочисельності. Якщо отриманий оптимальний розв'язок не є цілочисловим, то за i-им рядком симплекс-таблиці, який визначає базисну змінну, що в знайденому оптимальному плані ЗЛП має найбільше значення дробової частини, складають додаткове обмеження:

$$\{\beta_i\} - \sum_{x_j \in \{\text{ВЗ}\}} \{\alpha_{ij}\} x_j \le 0,$$

де $\{\alpha_{ij}\}$ – дробові частини коефіцієнтів основної системи обмежень за останньою ітерацією; $\{\beta_i\}$ – дробова частина вільного члена основної системи обмежень за останньою ітерацією; $x_i \in \{\text{БЗ}\}$, $i = \overline{1,m}$ – множина базисних змінних; $x_j \in \{\text{ВЗ}\}$, $j = \overline{1, n-m}$ – множина вільних змінних. На наступному етапі за допомогою симплексного методу розв'язують задачу лінійного програмування, математична модель якої окрім вихідної системи обмежень містить це додаткове обмеження.

Метод повного перебору – це один із комбінаторних методів розв'язання задачі цілочислового програмування, який полягає у розгляді всіх можливих поєднань цілочислових змінних і перевірці, чи задовольняють вони системі обмежень, і потім з їх числа вибирають найкраще з точки зору цільової функції.

Метод розгалужень і меж (***пошук з поверненням***) – це один із комбінаторних методів розв'язання задач цілочислового програмування, який передбачає послідовний перебір допустимих розв'язків задачі лінійного програмування з відсіканням підмножин допустимих розв'язків, про які наперед відомо, що вони не містять оптимальних рішень.

Повністю цілочислова задача – це задача математичного програмування, в якій умова цілочисельності розповсюджується на всі змінні: $x_j \in N \cup \{0\}, \ \ j = \overline{1, n}.$

Правило відсікання – це правило, яке застосовується у випадку, коли нижня границя значень цільової функції на підмножині A дерева пошуку більша за верхню межу на будь-якій підмножині B, що розглянута раніше (тоді підмножину A можна виключити із подальшого розгляду).

Правильне (***ефективне***) ***відсікання –*** це таке відсікання, яке відокремлює частину многокутника планів, що містить нецілочисловий оптимальний розв'язок ЗЛП, яка має таку математичну модель:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (\le \ge)\, b_i \quad (i = \overline{1, m}) \ , \ \ x_j \ge 0 \ \ (\ j = \overline{1, n} \ ),$$

і не відсікає жодної з цілочислових точок многокутника планів.

Розгалуження – це процедура, що полягає в розбитті множини розв'язків задачі лінійного програмування, яка має нецілі розв'язки, на підмножини менших розмірів; отримані підмножини утворюють дерево пошуку, або дерево розгалужень і меж.

Спеціальне додаткове обмеження – це додаткове обмеження, яке додають у математичну модель задачі лінійного програмування, якщо її розв'язок не є цілим; воно відтинає частину множини припустимих розв'язків ЗЛП, у якій міститься оптимальний розв'язок ЗЛП, отриманий на попередньому етапі, але не міститься жодного припустимого розв'язку задачі ЦЛП.

Умова цілочисельності – це додаткова умова в системі обмежень задачі оптимізації, згідно з якою змінні можуть приймати лише натуральні значення і нуль: $x_j \in N \cup \{0\}$.

Ціла частина $[a]$ ***числа*** – це ціле число, яке є найближче до даного числа a, але не перевищує його: $a-1<[a]\le a$, $[a]\in \mathrm{Z}$.

Цілочислова задача лінійного програмування – це задача лінійного програмування, система обмежень якої окрім основної системи обмежень і обмеження на знак має додаткове обмеження, за яким змінні задачі можуть приймати лише цілі значення: $x_j \in N\cup\{0\}$, де $j=\overline{1,n}$.

Цілочислове програмування – це розділ математичного програмування, що займається розробленням методів розв'язання окремого класу задач, коли на всі або деякі змінні накладається додаткова вимога, згідно з якою змінні можуть приймати лише натуральні значення і нуль.

Частково цілочислова задача – це задача, в якій умова цілочисельності розповсюджується тільки на одну або декілька змінних.

5.3. Тренувальні вправи

5.3.1. Розв'язання задачі цілочислового програмування графічним методом. Для покращення фінансового становища фірма прийняла рішення про збільшення випуску конкурентоспроможної продукції. Для цього потрібно в одному із цехів установити більш потужне і якісне обладнання. Цим вимогам відповідає обладнання двох видів. Використання одного комплекту обладнання 1-го виду дозволяє збільшити випуск продукції протягом однієї зміни на 2 од., а одного комплекту обладнання 2-го виду – на 4 од. На придбання обладнання фірма виділила 10 ум. од. Один комплект обладнання 1-го виду коштує 1,0 ум. од., а другого виду – 3 ум. од. Площа приміщення, у якому передбачається встановити обладнання, дорівнює 19/3 м^2. Для встановлення одного комплекту обладнання 1-го виду потрібно виділити 2 м^2, а для обладнання 2-го виду – 1 м^2.

Визначте такий план закупки обладнання, застосування якого дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язання.

1. Побудуємо математичну модель задачі. Змінними у цій задачі є кількість нового обладнання кожного виду, тому вони можуть приймати лише цілі невід'ємні значення. Отже, це задача цілочислового програмування (ЗЦП). Запишемо математичну модель цієї задачі:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ x_1 + 3x_2 \le 10; \\ x_1,\, x_2 \in N \cup \{0\}. \end{cases}.$$

Оскільки математична модель містить лише дві змінні, то задачу можна розв'язати графічним методом.

2. За основною системою обмежень з урахуванням обмеження на знак маємо багатокутник планів, який виділено штриховкою на рис. 5.1.

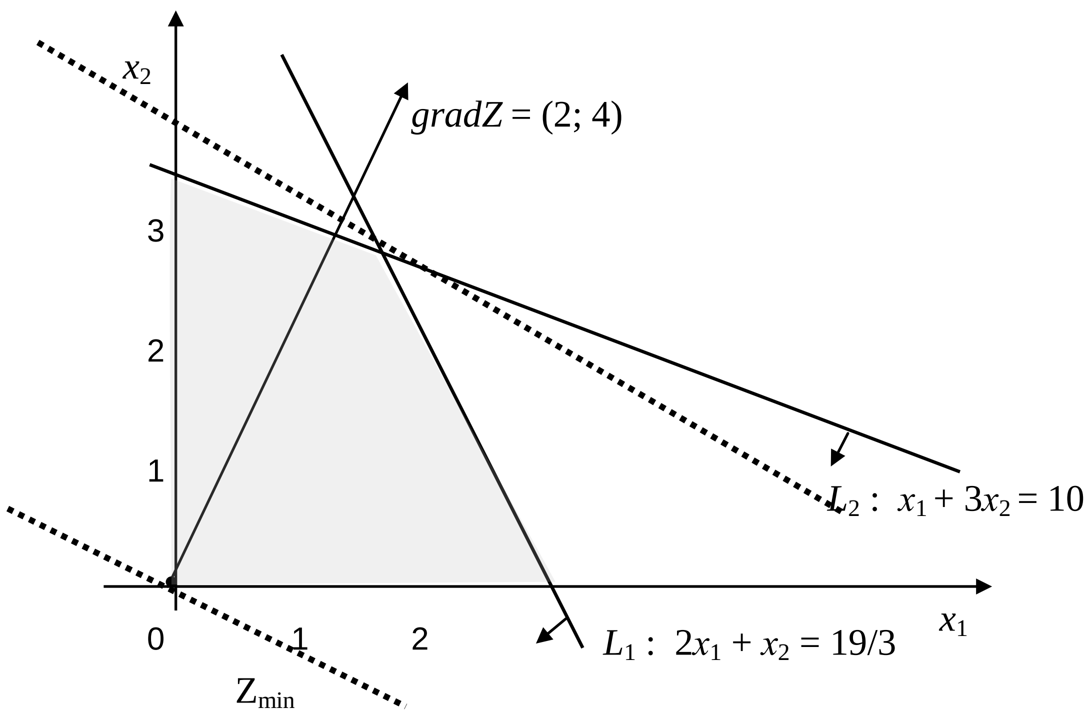


Рис. 5.1. **Графічний метод розв'язання ЗЛП**

Отже, розв'язком задачі лінійного програмування була б вершина, що утворюється перетином ліній L_1 та L_2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 19/3, \\ x_1 + 3x_2 = 10, \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{X}^*_{\text{ЗЛП}} = (9/5,\ 41/15).$$

Оскільки оптимальний план ЗЛП не є цілочисловим, то він не є розв'язком задачі.

3. Тепер урахуємо умову цілочисельності У цьому випадку многокутник можливих розв'язків є дискретним, тобто складається з окремих вузлів. Побудуйте цей многокутник і обчислить кількість вузлів, з яких він складається. Оберіть правильну відповідь:

Множина можливих розв'язків складається з:

а) 12 вузлів; б) 14 вузлів; в) 7 вузлів; г) 5 вузлів.

Відповідь а) є правильною.

4. Переміщуючи лінію рівня цільової функції в напрямку її градієнта, визначаємо вузол, якому відповідає найбільше значення цільової функції. Це є оптимальним планом ЗЦП. Обчисліть його координати. Оберіть правильну відповідь:

а) $\mathbf{X}^*_{\text{ЗЦП}} = (2, 2)$; б) $\mathbf{X}^*_{\text{ЗЦП}} = (1, 3)$; в) $\mathbf{X}^*_{\text{ЗЦП}} = (0, 3)$; г) $\mathbf{X}^*_{\text{ЗЦП}} = (1, 2)$.

Відповідь б) є правильною.

5. Знайдіть найбільше значення цільової функції задачі. Оберіть правильну відповідь:

а) $Z_{\max} = 14$; б) $Z_{\max} = 12$; в) $Z_{\max} = 16$; г) $Z_{\max} = 15$.

Відповідь а) є правильною.

5.3.2. Розв'язання задачі цілочислового програмування методом Гоморі. Повернемося до задачі цілочислового програмування, умова якої надана у прикладі **5.3.1**, і розв'яжемо її за методом Гоморі.

Розв'язання.

1. Згідно з алгоритмом розв'язання спочатку будемо розглядати задачу як задачу лінійного програмування, тобто без урахування умови цілочисельності змінних. Для її розв'язання застосуємо симплексний метод. Однак спочатку треба перетворити математичну модель задачі, яка надана у стандартній формі, до канонічного вигляду. Для цього вводимо додаткові змінні (вони визначають залишки ресурсів). Отримуємо таку модель задачі лінійного програмування:

$$Z = -2x_1 - 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 19/3; \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 10; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Отже, основна система обмежень набуває вигляду системи рівнянь, яка містить одиничний базис. Тепер математична модель задачі готова для запису в симплекс-таблицю, і задачу лінійного програмування можна розв'язувати симплексним методом. Зробіть це самостійно.

Результати останньої ітерації симплексного метода, за якою ми отримуємо оптимальний план задачі лінійного програмування, наведена в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Розв'язок задачі лінійного програмування

Базис	$C_{б.}$	b_i	–2	–4	0	0
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$
$\mathbf{A}_1$	–2	9/5	1	0	3/5	–1/5
$\mathbf{A}_2$	–4	41/15	0	1	–1/5	2/5
$Z_j = \mathbf{C}_б \cdot \mathbf{A}_j$		–218/15	–2	–4	–2/5	–6/5
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	0	–2/5	–6/5

Оскільки рядок оцінок симплекс-таблиці не дає додатних значень, то маємо розв'язок задачі лінійного програмування: $\mathbf{X}^*_{\text{ЗЛП}} = \left(\frac{9}{5}; \frac{41}{15}\right)$. Йому відповідає значення цільової функції $Z\left(\mathbf{X}^*_{\text{ЗЛП}}\right) = 218/15$. Однак знайдений план не є цілочисловим, отже, треба продовжити розв'язання.

2. Визначаємо дробові частини базисних змінних. Так, маємо:

$$x_1: \quad \left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - \left[\frac{9}{5}\right] = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5};$$

$$x_2: \quad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - \left[\frac{41}{15}\right] = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}.$$

Порівняйте дробові частини базисних змінних і виберіть рядок симплексної таблиці, за якою треба ввести додаткову умову обмежень (умову Гоморі).

Оберіть правильну відповідь:
таким рядком є:

а) рядок, за яким базисним є вектор $\mathbf{A}_1$;

б) рядок, за яким базисним є вектор $\mathbf{A}_2$.

Відповідь а) є правильною.

3. Записуємо умову Гоморі. Після перетворення додаткова умова має вигляд (оберіть правильну відповідь):

а) $3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \geq 4$; б) $3 \cdot x_3 + x_4 \geq 4$; в) $3 \cdot x_3 - x_4 \geq 4$;

г) $x_1 + 3 \cdot x_3 - x_4 \geq 4$; д) $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 - x_4 \geq 4$.

Відповідь а) є правильною. У разі отримання іншої відповіді дивіться пояснення до вправи.

4. Для того, щоб мати змогу записати додаткову умову у сиплекс-таблицю, вводимо балансову змінну x_5. Оскільки додаткова умова має знак нерівності $\geq$, то додаткова змінна, яку ми введемо у цю нерівність для перетворення її у рівняння, матиме від'ємний знак, отже, вона не є базисною змінною. Тому для утворення базису в отримане рівняння вводимо фіктивну змінну x_6, тобто базис є штучним. Оскільки цільова функція в цій задачі досліджується на мінімум, то фіктивна змінна входить до цільової функції з необмежено великим коефіцієнтом M. Таким чином, отримуємо нову задачу лінійного програмування зі штучним базисом, математична модель якої має тикай вигляд:

$$Z = -2x_1 - 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10; \\ 3x_3 + 4x_4 - x_5 + x_6 = 4; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

5. Записуємо математичну модель розширеної M-задачі у симплекс-таблицю (табл. 5.2) і розв'язуємо цю нову задачу лінійного програмування симплекс-методом.

Таблиця 5.2

Симплекс-таблиця ЗЛП із додатковим обмеженням

Базис	$C_{б.}$	b_i	–2	–4	0	0	0	M
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
$\mathbf{A}_1$	-2	9/5	1	0	3/5	–1/5	0	0
$\mathbf{A}_2$	-4	41/15	0	1	–1/5	2/5	0	0
$\mathbf{A}_6$	M	4	0	0	3	4	–1	1
$Z_j = \mathbf{C}_б \cdot \mathbf{A}_j$		–218/15 + + 4M	–2	–4	–2/5 + + 3M	–6/5 + + 4M	$-M$	M
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	0	–2/5 + + 3M	–6/5 + + 4M	$-M$	0

Зробіть необхідні перетворення для визначення оптимального плану розширеної M -задачі. Після двох ітерацій отримуємо результат, який наведено в табл. 5.2[1]. Оскільки рядок оцінок останньої ітерації симплексної таблиці не містить додатних оцінок, то знайдений план є оптимальним: $\mathbf{X}^* = (1;\ 3;\ 4/3;\ 0;\ 0)$.

Таблиця 5.2[1]

Розв'язок ЗЛП із додатковим обмеженням

Базис	$C_{б.}$	b_i	–2	–4	0	0	0
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$\mathbf{A}_1$	–2	1	1	0	0	–1	1/5
$\mathbf{A}_2$	–4	3	0	1	0	2/3	-1/15
$\mathbf{A}_3$	0	4/3	0	0	1	4/3	-1/3
$Z_j = \mathbf{C}_б \cdot \mathbf{A}_j$		–14	–2	–4	0	–2/3	–2/15
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	0	0	–2/3	–2/15

Оберіть, який із цих висновків є правильним:

а) оскільки цей план не містить фіктивної змінної, то він не може бути розв'язком ЗЛП зі спеціальним додатковим обмеженням, отже, вихідна задача не має розв'язків;

б) оскільки цей план не містить фіктивної змінної, то він одночасно є і розв'язком ЗЛП зі спеціальним додатковим обмеженням, однак він не є розв'язком задачі цілочислового програмування, оскільки один є його компонентів є дробовим;

в) цей план не містить фіктивної змінної, отже, він одночасно є розв'язком ЗЛП зі спеціальним додатковим обмеженням, також він є розв'язком вихідної задачі цілочислового програмування, оскільки його компоненти, що відповідають основним змінним, є цілочисловими.

Відповідь в) є правильною.

Отже, ми винайшли план закупки обладнання: $\mathbf{X}^* = (1; 3)$, якому відповідає найбільше значення цільової функції $Z_{\max} = Z(\mathbf{X}^*) = 14$.

Зрозуміло, що ми отримали той же самий розв'язок, що і завдяки застосуванню графічного методу. За цим планом кошти, що були виділені на придбання обладнання, використані повністю ($x_4^* = 0$), і при цьому залишається резерв площі цеху, що дорівнює $x_3^* = 4/3$ м^2.

5.3.3. Розв'язання задачі цілочислового програмування методом розгалужень і меж. Розв'яжемо задачу цілочислового програмування, умова якої наведена у прикладі **5.3.1**, методом розгалужень і меж.

Розв'язання.

1. Будемо розглядати задачу лінійного програмування, тобто без враховування умови цілочисельності. Скористаємося тим, що розв'язок цієї задачі нам вже відомий: $\mathbf{X}^*_{\text{ЗЛП}} = \left(\frac{9}{5}; \frac{41}{15}\right)$. А також відомо, що йому відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}^*_{\text{ЗЛП}}) = 218/15$.

Зверніть увагу, що обидва компоненти оптимального плану не є цілочисловими, отже, розгалуження будемо послідовно застосовувати для кожного з них, виключаючи тим самим дробову частину певного компонента.

Так, для x_1^* маємо, що $1 < 9/5 < 2$. Введемо додаткові обмеження за компонентом x_1: $x_1 \le 1$ або $x_1 \ge 2$. Відповідно, вихідна задача дає дві гілки, тобто розпадається на дві задачі лінійного програмування, що мають такі математичні моделі:

1) $Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ x_1 + 3x_2 \le 10; \\ x_1 \le 1; \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2) $Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ x_1 + 3x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 2; \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Введення додаткових обмежень за змінною x_1 призводить до того, що багатокутник планів вихідної задачі лінійного програмування розпадається на дві частини, які відповідають задачам 1 і 2, а смуга $1 < x_1 < 2$ виключається із розгляду (рис. 5.2). Оскільки кожна з задач містить лише дві змінні, то розв'яжемо їх графічним методом.

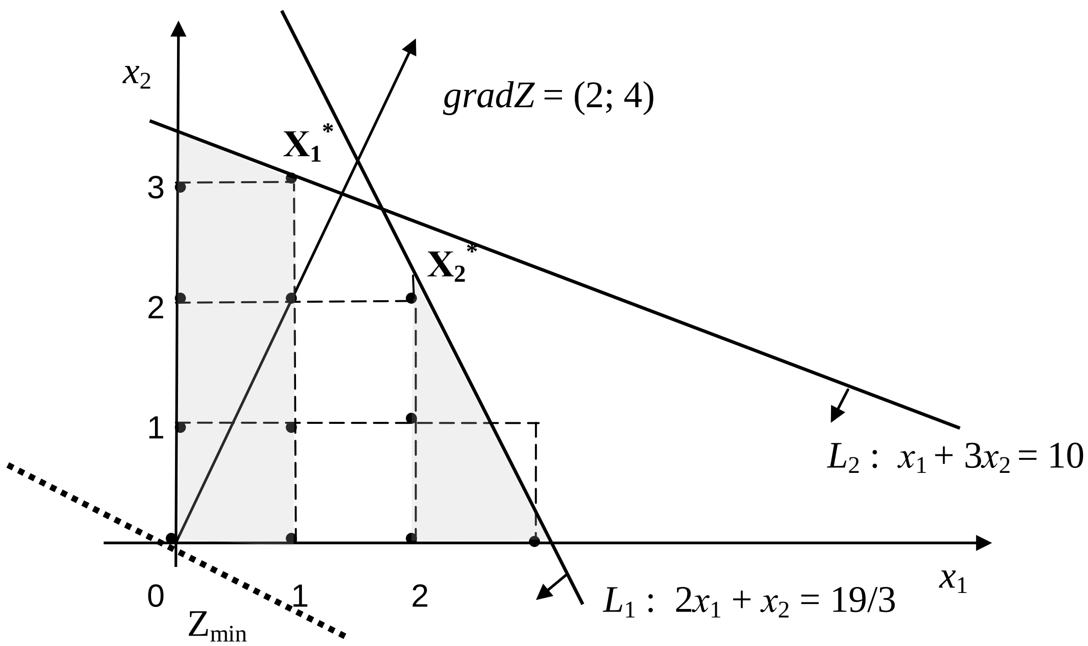


Рис. 5.2. **Графічне розв'язання задач 1 і 2**

2. Для визначення того, чи є гілка перспективною, ми повинні вибрати межу порівняння. При цьому значення цільової функції, з якою будемо порівнювати цільову функцію задачі, що розглядається, повинно відповідати цілочисловому плану. Оскільки план $\mathbf{X}^*$ не є цілочисловим, то для порівняння цільових функцій, що відповідають вузлам дерева розв'язків, в якості еталону вибираємо значення цільової функції за вихідним опорним планом $\mathbf{X}_0 = (0;\ 0)$, тобто $Z(\mathbf{X}_0) = 0$.

З рис. 5.2 видно, що для задачі 1 оптимальним є план $\mathbf{X}_1^* = (1;\, 3)$ і він є цілочисловим. Йому відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}_1^*) = 14$. Це значення перевищує попередній еталон, тому в подальшому ми будемо порівнювати значення цільової функції, що відповідає вузлам дерева розв'язків, саме з цим значенням.

Розв'язок задачі 2 ми отримуємо, визначивши координати вершини многокутника планів як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = 19/3; \\ x_1^* = 2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}_2^* = \left(2;\ \frac{7}{3}\right).$$

Йому відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}_2^*) = 40/3$. До речі, цей план ми отримували й у симплекс-таблиці (табл. 5.2).

Чи можна вважати гілку, що пов'язана з задачею 2, перспективною? Оберіть правильну відповідь:

а) ні, цю гілку розглядати недоцільно, оскільки ми вже отримали цілочисловий план $\mathbf{X}_1^* = (1;\, 3)$, який і є розв'язком вихідної задачі;

б) план $\mathbf{X}_2^*$ не є цілочисловим, однак значення цільової функції, яке відповідає цьому плану, перевищує еталонне $Z(\mathbf{X}_0) = 0$, отже, цю гілку слід вважати перспективною;

в) план $\mathbf{X}_2^*$ не є цілочисловим, однак ми повинні дослідити всі можливі цілочислові плани, тому ця гілка є перспективною.

Відповідь б) є правильною.

3. Проведемо розбиття задачі 2 на дві, виключивши з розгляду смугу $2 < x_2 < 3$, до якої належить компонент $x_2^* = 7/3$.

Задача 2 дає такі дві гілки:

$$3)\quad Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max \qquad\qquad 4)\quad Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ x_1 + 3x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 2; \\ x_2 \le 2: \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ x_1 + 3x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 2; \\ x_2 \ge 3; \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що задача 4 містить протиріччя у системі обмежень (друга умова основної системи обмежень не може виконуватись навіть за найменшими з можливих значеннями x_1 і x_2: $2+3\cdot 3>10$). Звідси випливає, що задача 4 не має розв'язку.

Графічне розв'язання задачі 3 наведено на рис. 5.3.

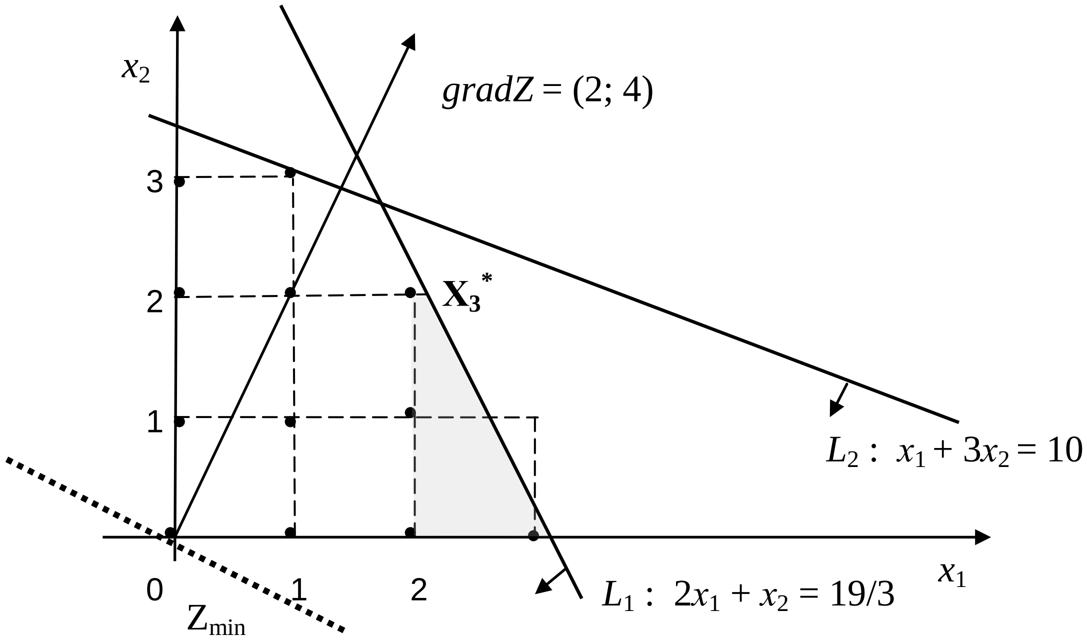


Рис. 5.3. **Графічне розв'язання задачі 3**

Компонентами оптимального плану $\mathbf{X}_3^*$ є координати вершини многокутника планів, які визначаємо як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = 19/3; \\ x_2^* = 2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}_3^* = \left(\frac{13}{6};\ 2\right).$$

Плану $\mathbf{X}_3^*$ відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}_3^*) = 37/3$.

Оскільки для задачі 3 значення цільової функції менше за еталонне $Z(\mathbf{X}_1^*) = 14$, то ця гілка є неперспективною.

Отже, ми вичерпали перелік задач.

4. Надамо у вигляді дерева пошуку перелік задач, які необхідно було розглянути за методом розгалужень і меж (рис. 5.4).

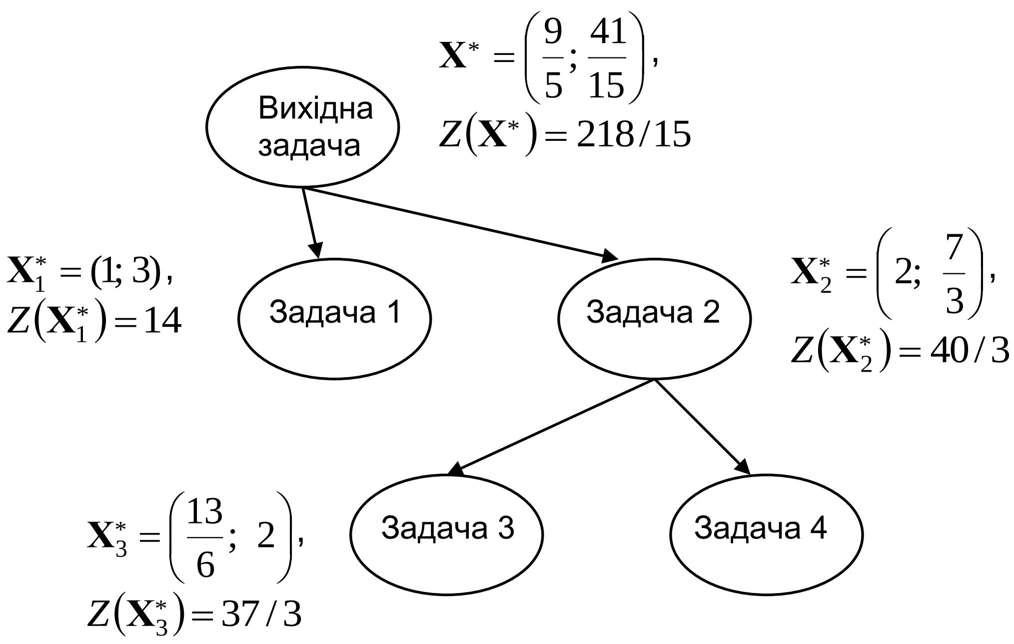


Рис. 5.4. **Дерево пошуку задачі цілочислового програмування**

Таким чином, розв'язком задачі цілочислового програмування є оптимальний план задачі 1: $\mathbf{X}_1^* = (1; 3)$. Йому відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}_1^*) = 14$.

5.4. Запитання для самоперевірки

5.4.1. Які задачі економіки потребують цілочислового розв'язку?

5.4.2. Запишіть в загальному вигляді математичну модель задачі цілочислового програмування.

5.4.3. Яка змінна є булавою? Наведіть приклад ЗЦП з булєвими змінними.

5.4.4. У чому полягає особливість багатокутника планів ЗЦП?

5.4.5. Яка геометрична інтерпретація розв'язків цілочислової задачі на площині?

5.4.6. Як розв'язати задачу цілочислового програмування графічним методом?

5.4.7. Чи можна визначити залишки ресурсів, якщо для розв'язання ЗЦП застосовувати графічний метод?

5.4.8. За допомогою графічної інтерпретації поясніть, чому неможна отримувати розв'язок задачі цілочислового програмування шляхом округлення компонентів оптимального плану ЗЛП, математична модель якої співпадає з моделлю ЗЦП, але не містить вимоги цілочисельності.

5.4.9. Наведіть алгоритм методу Гоморі.

5.4.10. Яке відсікання вважається правильним?

5.4.11. Як визначаються ціла і дробова частини числа?

5.4.12. У чому полягає сутність процедури формування правильного відсікання?

5.4.13. Запишіть нерівність, яка визначає правильне відсікання.

5.4.14. У чому полягає особливість математичної моделі задачі лінійного програмування, у яку згідно з методом Гоморі було введено спеціальне додаткове обмеження?

5.4.15. Сформулюйте загальну ідею методу розгалужень так меж.

5.4.16. Наведіть геометричну ілюстрацію побудови багатокутників планів для вузлів дерева пошуку за методом розгалужень та меж.

5.4.17. Що таке дерево пошуку? Як його побудувати?

5.4.18. Наведіть правило відсікання. Поясніть, яка гілка дерева пошуку вважається перспективною.

5.4.19. Чи доцільно поєднувати графічний метод і метод розгалужень і меж під час розв'язання ЗЦП? Наведіть аргументи відповіді.

5.4.20. Як визначити повний перелік задач, якщо для розв'язання ЗЦП застосовується метод розгалужень і меж?

5.5. Практичні завдання

5.5.1. За допомогою графічного методу розв'яжіть задачу, яка має таку математичну модель:

$$Z = 2x_1 + 2x_2 \quad \rightarrow \quad \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 7; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N \cup \{0\}.$$

5.5.2. Задачу цілочислового програмування, математична модель якої наведена в завданні **5.5.1**, розв'язати методом Гоморі. Надати геометричну інтерпретацію спеціальним додатковим обмеженням, які вводяться на кожному етапі розв'язання.

5.5.3. За методом Гоморі розв'яжіть ЗЦП, що має таку математичну модель:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6; \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5};$$

$$x_1,\, x_2 \in N \cup \{0\}.$$

5.5.4. Математичну модель ЗЦП, яка наведена у завданні **5.5.3**, перетворити до стандартного вигляду і розв'яжіть задачу графічно. Надайте геометричну інтерпретацію опорних планів, які відповідають кожній ітерації симплексного методу.

5.5.5. За методом розгалужень і меж знайдіть розв'язок ЗЛП, що має таку математичну модель:

$$Z = 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 25; \end{cases}$$

$$x_j \in N \cup \{0\}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

5.5.6. За методом розгалужень і меж знайдіть розв'язок ЗЛП, що має таку математичну модель:

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11; \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 \leq 5; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13; \end{cases}$$

$$x_j \in N \cup \{0\}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

5.5.7. Задачу цілочислового програмування, математична модель якої надана у завданні **5.5.6**, розв'яжіть методом Гоморі і порівняйте опорні плани, які відповідають вузлам дерева пошуків, з результатами відповідних ітерацій симплексного методу.

5.5.8. Задана математична модель ЗЦП:

$$Z = 4x_1 + 4x_2 \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ 3x_1 + 8x_2 \le 24; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N \cup \{0\}.$$

Розв'язати задачу методом Гоморі та методом розгалужень і меж. Порівняти загальний хід розв'язку за обома методами.

5.5.9. Фірма прийняла рішення переобладнати один із цехів виробництва, для чого треба придбати нові станки двох видів і частково залишити старі станки. Один новий станок 1-го виду виробляє за годину 11 одиниць продукції, станок 2-го виду – 4 одиниці продукції, а один старий станок – 5 одиниць. На реконструкцію виробництва було виділено кошти загальним обсягом 5 ум. од. Один новий станок 1-го виду коштує 2 ум. од., 2-го виду – 1 ум. од. Для встановлення одного станку 1-го виду потрібно виділити 3 м^2, для станка 2-го виду – 1 м^2, а один старий станок займає 3 м^2. Площа цеху, у якому передбачено встановити обладнання, дорівнює 13 м^2. Слід мати на увазі, що загальна споживча потужність обладнання не повинна перевищувати 11 кВт*год. Споживана потужність одного станку 1-го виду становить 3 кВт*год, станка 2-го виду – 8 кВт*год, а старого станка – 2 кВт*год. Один новий станок 1-го виду дозволяє випускати 11 од. продукції протягом однієї зміни, один станок 2-го виду – 4 од., а один старий станок – 5 од. Визначити такий план заміни обладнання, за яким обсяг продукції, що виробляє цех протягом однієї зміни, був би максимальним.

5.5.10. Підприємець надав дитячому садку спонсорську допомогу, виділивши 100 ум. од. на придбання обладнання для ігрової кімнати. Керівництво дитячого садка вирішило придбати на ці кошти пластмасову гірку, іграшковий палац, батут та килимок для вивчення правил дорожнього руху. При цьому на виділені кошти придбати якомога більшу кількість предметів, одна кількість предметів кожного виду не повинна бути більше трьох. Площа спортивної кімнати, де планується розмістити це обладнання, складає 30 м^2. Гірка має площу 1 м^2, палац – 1,5 м^2, батут – 3 м^2, килимок – 0,7 м^2. За гігієнічними нормами вільна площа не повинна бути меншою 5 м^2. Визначити оптимальний план закупок.

5.6. Тестові завдання

5.6.1. Укажіть, які існують групи методів для розв'язання задач цілочислового програмування:

а) комбінаторні; методи, що зводяться до симплексного методу; графічний метод;

б) комбінаторні методи; симплексний метод; графічний метод;

в) комбінаторні методи; графічний та наближений методи.

5.6.2. Задачею цілочислового програмування з булєвими змінними є:

а) транспортна задача;

б) задача комівояжера;

в) задача про експедицію.

5.6.3. Згідно з жадібним алгоритмом необхідно:

а) визначити питому корисність предмета і вибирати ці предмети в порядку її зростання;

б) визначити питому корисність предмета і вибирати ці предмети в порядку її зменшення;

в) визначити граничну корисність предмета і вибирати ці предмети в порядку її зростання.

5.6.4. Укажіть, який вигляд повинно мати збудоване на основі елементів відповідного рядка останньої ітерації симплексної таблиці додаткове обмеження Гоморі:

а) $\sum\limits_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \le \{b_i\}$; б) $\sum\limits_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \ge \{b_i\}$; в) $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j \ge b_i$; г) $\sum\limits_{j=1}^{n}[a_{ij}]x_j \ge [b_i]$.

5.6.5. Припустимо, що під час застосування методу розгалужень і меж для розв'язання задачі цілочислового програмування на певному етапі отримали оптимальний план, за яким компонент x_i^* не є цілим. Отже, задачу необхідно розбити на дві. Для цього треба виключити з багатокутника планів вихідної задачі смугу:

а) $[x_i^*] \le x_i^* \le [x_i^* + 1]$; б) $[x_i^*] < x_i^* < [x_i^* + 1]$;

в) $[x_i^*] \le x_i^* < [x_i^* + 1]$; г) $[x_i^*] < x_i^* \le [x_i^* + 1]$.

5.6.6. За поданим малюнком (рис. 5.5) визначте оптимальний план задачі цілочислового програмування:

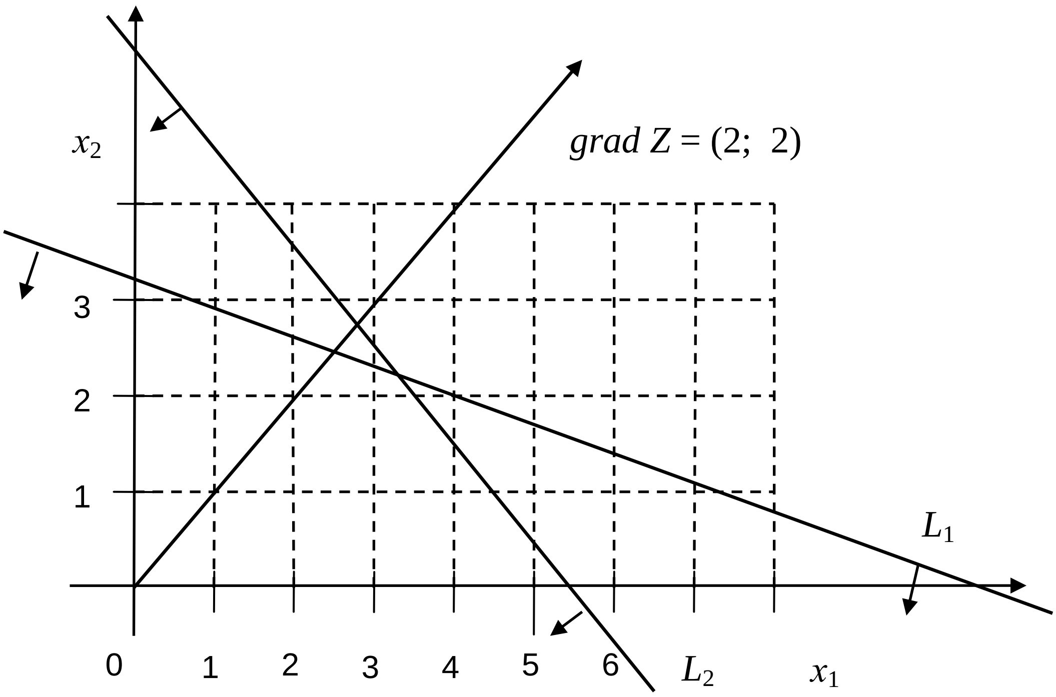


Рис. 5.5. **Графічне розв'язання ЗЦП**

а) $(1; 3)$; б) $(3; 2)$; в) $(4; 1)$; г) $(5; 0)$; д) $(5; 1)$.

5.6.7. За розв'язком задачі **5.6.6** знайдіть максимальне значення цільової функції:

а) $Z(\mathbf{X}^*) = 8$; б) $Z(\mathbf{X}^*) = 10$; в) $Z(\mathbf{X}^*) = 12$.

5.6.8. Згідно з алгоритмом методу Гоморі запишіть додаткове обмеження за останньою ітерацією симплекс-таблиці (табл. 5.3), яка дає оптимальний план задачі лінійного програмування.

Таблиця 5.3

Завершальна ітерація симплекс-таблиці

Базис	$C_{б.}$	b_i	–5	–3	0	0
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$
$\mathbf{A}_3$	0	6,5	0	1	1	–0,5
$\mathbf{A}_1$	–5	2,5	1	1	0	0,5
$Z_j = \mathbf{C}_б \cdot \mathbf{A}_j$		–12,5	–5	–5	0	–2,5
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	–2	0	–2,5

5.6.9. Наведені математична модель вихідної задачі цілочислового програмування й оптимальний план, який отримано для відповідної їй задачі лінійного програмування, а також математична модель задачі однієї з гілок (задача 1) й оптимальний план відповідної їй задачі лінійного програмування:

Вихідна задача

$$Z = 3x_1 + x_2 \quad \to \quad \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18; \\ x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 0 \le x_1 \le 5; \\ 0 \le x_2 \le 4; \end{cases}$$

$$\mathbf{X}_1^* = (4{,}5;\ 0); \quad Z(\mathbf{X}_1^*) = 13{,}5.$$

Задача 1

$$Z = 3x_1 + x_2 \quad \to \quad \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18; \\ x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 0 \le x_1 \le 4; \\ 0 \le x_2 \le 4; \end{cases}$$

$$\mathbf{X}_2^* = (4;\ 2/3); \quad Z(\mathbf{X}_2^*) = 38/3.$$

Визначте, чи є гілка, вузлом якої є задача 1, перспективною:

а) так, вона є перспективною, оскільки компонент x_1^* оптимального плану $\mathbf{X}_1^*$, який мав значення 4,5, за планом $\mathbf{X}_2^*$ стає цілим;

б) так, вона є перспективною, оскільки за єдиним поки що відомим цілочисловим планом $\mathbf{X}_0 = (0;\, 0)$ цільова функція має менше значення;

в) ні, вона не перспективна, оскільки компонент x_2^* оптимального плану $\mathbf{X}_1^*$, що мав ціле значення 0, тепер за планом $\mathbf{X}_2^*$ стає дробовим;

г) ні, вона не перспективна, оскільки відповідне оптимальному плану задачі 1 значення цільової функції є меншим за значення цільової функції, що відповідає оптимальному плану вихідної задачі.

5.6.10. Максимальна вага ранця не повинна перевищувати 80 кг. Для 5 видів предметів, які можна покласти у ранець у необмеженій кількості, вага задана матрицею $\mathbf{A}$, а їх корисність – матрицею $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & 17 & 28 & 21 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 15 & 11 & 18 \end{pmatrix}.$$

Визначте, яким предметом згідно з жадібним алгоритмом потрібно заповнити ранець у максимальній кількості:

а) першим; б) другим; в) третім; г) четвертим; д) п'ятим.

5.6.11. Максимальна вага ранця не повинна перевищувати 20 кг. Для 4 предметів вага задана матрицею $\mathbf{A}$, а їх корисність – матрицею $\mathbf{C}$:

$$P = 20\,\text{кг}; \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача про ранець містить обмеження "так – ні" відносно кожного предмета.

Визначте незаповнений залишок у ранці після того, як туди поклали перших предмет:

а) 10 кг; б) 13 кг; в) 14 кг; г) 17 кг.

5.6.12. За умовами задачі **5.6.11** визначте незаповнений залишок у ранці після того, як туди поклали всі можливі предмети:

а) 4 кг; б) 0 кг; в) 1 кг; г) 1 кг; д) 2 кг.

5.7. Висновки за темою

Клас задач цілочислового програмування поєднує велику кількість задач різних типів, що містять умову цілочисельності змінних. Для розв'язання задач цього класу розроблені спеціальні алгоритми, які засновані на комбінаториці, теорії графів тощо. Як правило, для кожного з типів задач застосовується окремий метод. Так, для розв'язання оптимізаційної задачі доцільно застосовувати принцип жадібного вибору, якщо послідовність локально оптимальних виборів дає глобально оптимальне рішення.

Метод розгалужень і меж є одним із методів розв'язання як повністю цілочислових, так і мішаних задач цілочислового лінійного програмування. Цей метод дає ефективну процедуру перебору всіх цілочислових допустимих рішень.

У завданнях із великою кількістю змінних більш ефективним є метод відсікання Гоморі, який передбачає введення додаткових умов і подальший аналіз значень базисних і небазисних змінних із використанням симплекс-методу. Крім того, цей метод може застосовуватися в параметричному програмуванні, коли вихідні дані – коефіцієнти цільової функції і системи обмежень є не сталими величинами, а функціями, що певним чином залежать від деяких параметрів.

Рекомендована література: [1 – 22].

Пояснення до виконання тренувальних вправ

1. Оптимізаційні економіко-математичні методи та моделі

1.3.1. На першому рівні пізнання вивчаються фізичні ознаки об'єкта, оскільки існує можливість емпірично виміряти фізичну величину; на другому рівні пізнання змістовно уточнюється ознака, вимірюється вартісна форма ознаки, аналізується взаємозв'язок її з іншими ознаками об'єкта (фізичними та нефізичними) й вимірюються його складні ознаки; на третьому рівні вимірюється загальна якість ознак об'єкта, яку можна розглядати як загальну якість об'єкта дослідження.

У табл. 1 наведено розширення даного переходу в економіці.

Таблиця 1

Конкретизація поняття фізичної величини в економіці

<table>
<tr><th rowspan="2">Філософські категорії</th><th rowspan="2">Елементи, що беруть участь у вимірюванні</th><th colspan="2">Властивості (ознаки) об'єкта та знання про них</th></tr>
<tr><th>Загальні</th><th>Форма існування в економіці</th></tr>
<tr><td>Непізнана реальність</td><td>Фізичний об'єкт</td><td>Апріорні ознаки фізичного об'єкта</td><td>Апріорні ознаки фізичного об'єкта в економіці</td></tr>
<tr><td>Пізнана реальність</td><td>Об'єкт дослідження</td><td>Фізична величина X</td><td>Абсолютний показник фізичних ознак об'єкта</td></tr>
<tr><td>Фізичні засоби</td><td>Контрольно-вимірювальні прилади</td><td>Одиниці фізичної величини</td><td>Натуральна форма – кількість – шт.</td></tr>
<tr><td>Знання про реальність</td><td>Інформація</td><td>Значення фізичної величини $X = [X] + \{X\}$</td><td>Форма величини фізичної ознаки – вартісний показник. Числове значення показника, одиниці його вимірювання</td></tr>
</table>

У цілому величини в економіці розділяють на такі групи: основні фізичні величини елементарних ознак, що на даному рівні пізнання можуть кількісно виражати якісні ознаки (екстенсивні); похідні фізичні величини, що отримані за допомогою співвідношення основних фізичних величин.

У цій групі можна окремо виділити:

величини, які мають розмірність (у фізичних одиницях), це, в основному, величини, які отримані як зіставлення результату та витрат;

величини, що не мають розмірності, – це коефіцієнти (інтенсивні);

нефізичні величини, а саме, метричні величини, що одержані за допомогою фізичних шляхом вартісної форми подання та зіставлення таких величин;

утворені, синтезовані метричні величини, що визначають складні ознаки та об'єкт у цілому;

статистичні метричні величини, що відображають масові ознаки сукупностей об'єктів в економіці (екстенсивні та інтенсивні);

неметричні величини, що відображають якісні ознаки об'єктів в економіці (інтенсивні, якісні) (в основному вони вимірюються на неметричних шкалах).

1.3.2. Головна особливість моделювання полягає в тому, що цей метод дозволяє опосередковано досліджувати процеси та явища і здійснює це дослідження за допомогою об'єкта – замінника, яким є модель. Модель виступає як аналог реально існуючої системи. Вона є своєрідним інструментом пізнання, за допомогою якого проводиться вивчення, дослідження і прогнозування поведінки реально існуючого об'єкта.

Оптимізаційні моделі охоплюють деяку кількість варіантів і призначені для вибору таких значень змінних, що характеризують ці варіанти, щоб був знайдений кращий із них. Відмінною рисою цих моделей є те, що вони містять як залежності, що описують взаємозв'язки між змінними, так і критерії для вибору – цільову функцію. Ці моделі належать до класу екстремальних завдань і описують умови функціонування економічної системи.

Детерміновані моделі припускають існування функціональних зв'язків між змінними моделі, що описують певний процес або явище, а стохастичні моделі та моделі з елементами невизначеності допускають наявність випадкових подій, ймовірність яких може бели відомою (стохастичні моделі, або моделі в умовах ризику) або невідомою (моделі з елементами невизначеності) і ці події впливають на досліджувані показники. Під час побудови таких моделей у якості інструментарію використовують методи теорії ймовірностей.

Загальна схема моделей, які складають основу моделювання економічних явищ та процесів, наведена на рис. 1.

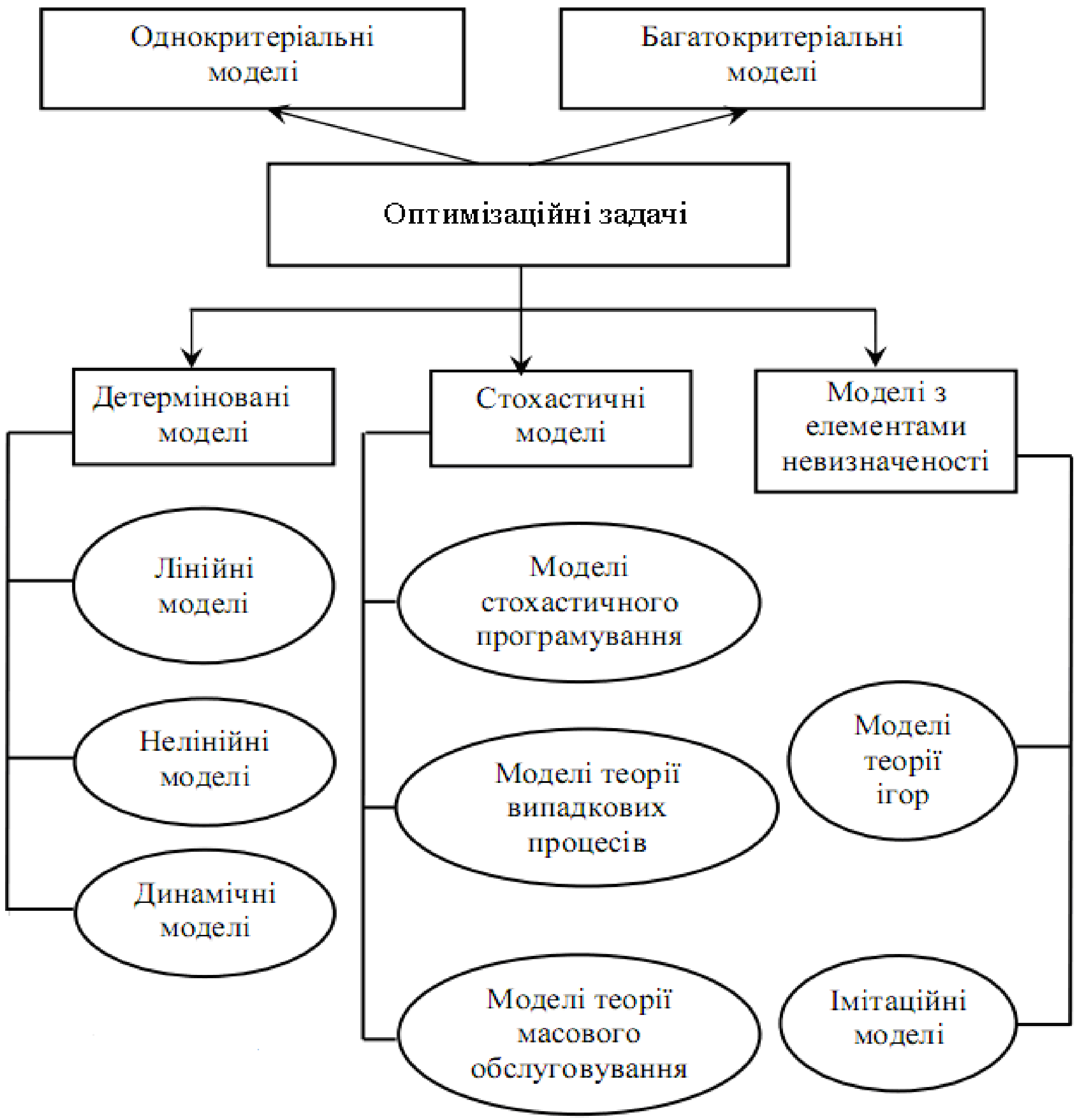


Рис. 1. **Схема класифікації оптимізаційних моделей**

2. Задача лінійного програмування та методи її розв'язання

2.3.1. Побудову математичної моделі здійснюємо поетапно.

1. Визначення змінних моделі та їхньої кількості.

Необхідно визначити оптимальний план постачання продуктів, тому змінними задачі є обсяг постачання кожного виду продуктів до магазинів: x_1, x_2, x_3, x_4.

2. Визначення цілі оптимізації. Оскільки в задачі йдеться про максимізацію прибутку від реалізації продуктів, то напрямом оптимізації є максимум, а метою оптимізації – загальний прибуток від реалізації продуктів. Тому цільова функція має вигляд:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \to \max,$$

де коефіцієнти при змінних є значеннями прибутку від реалізації одиниці продукції кожного з чотирьох видів.

3. Визначення обмежень для змінних задачі оптимізації.

Зауважимо, що за економічним змістом змінні x_1 , x_2, x_3, x_4 повинні набувати тільки невід'ємних значень.

Обмеження за витратами можна записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} \textit{поточні витрати} \\ \textit{на виробництво продукції} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \textit{запаси сировини} \\ \textit{на виробництво продукції} \end{pmatrix}.$$

Оскільки за умовою задачі задано запаси сировини, з якої виготовляють продукцію, та норму витрат на виготовлення 1 кг продукції (див. табл. 2.1), то змінні x_1 , x_2, x_3, x_4 повинні задовольняти такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 + 1{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}3x_4 \le 500 - \textit{витрати тіста}, \\ 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 \le 100 - \textit{витрати фруктового джему}, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 + 1{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}3x_4 \le 500, \\ 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 \le 100, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

2.3.2. Слід зазначити, що графічний метод можна застосовувати у випадку, коли математична модель задачі містить дві змінні. Оскільки дана задача має лише дві змінні, то її можна розв'язати графічно.

Послідовність етапів графічного методу в разі максимізації:

побудова множини допустимих розв'язків;

побудова вектора-градієнта;

побудова лінії рівня;

переміщення лінії рівня в напряму зростання цільової функції та пошук екстремальної (кутової й найбільш віддаленої) точки на перетині лінії рівня й множини допустимих розв'язків;

розв'язання системи рівнянь прямих, які перетинаються в екстремальній точці, пошук оптимального розв'язку;

обчислення значення цільової функції в оптимальній точці.

Варто розглянути послідовно кожний етап розв'язання.

1. Побудова множини допустимих розв'язків.

Завдяки умові невід'ємності змінних x_1 та x_2 множина допустимих розв'язків, в якій одночасно виконуються всі обмеження моделі, має знаходитися в першому квадранті .

Побудуємо на координатній площині прямі, рівняння яких отримано після запису нерівностей основної системи обмежень у вигляді рівнянь.

Розглянемо перше рівняння: $x_1 + x_2 = 10$. Це рівняння прямої. Для побудови цієї прямої (L_1) необхідно знайти дві точки, що належать даній прямій. Так, якщо $x_1 = 0$, то $x_2 = 10$. Для $x_2 = 0$ знаходимо $x_1 = 10$. Отже, пряма $x_1 + x_2 = 10$ проходить через точки $(0; 10)$ та $(10; 0)$.

Аналогічно пряма L_2: $-3x_1 + 2x_2 = 6$ проходить через точки $(0; 3)$ та $(-2; 0)$, пряма L_3: $-3x_1 + 10x_2 = 30$ – через точки $(0; 3)$ та $(-10; 0)$, пряма L_4: $3x_1 + 5x_2 = 60$ – через точки $(0; 12)$ та $(20; 0)$.

Прямі L_1, L_2, L_3 та L_4 зображені на рис. 2.

Розглянемо, як графічно слід давати інтерпретацію нерівностям основної системи обмежень математичної моделі задачі. Кожна пряма розділяє площину $0X_1X_2$ на два півпростори. Точки площини, які розташовані по один бік прямої, задовольняють нерівності, а точки, що розташовані по інший бік – ні.

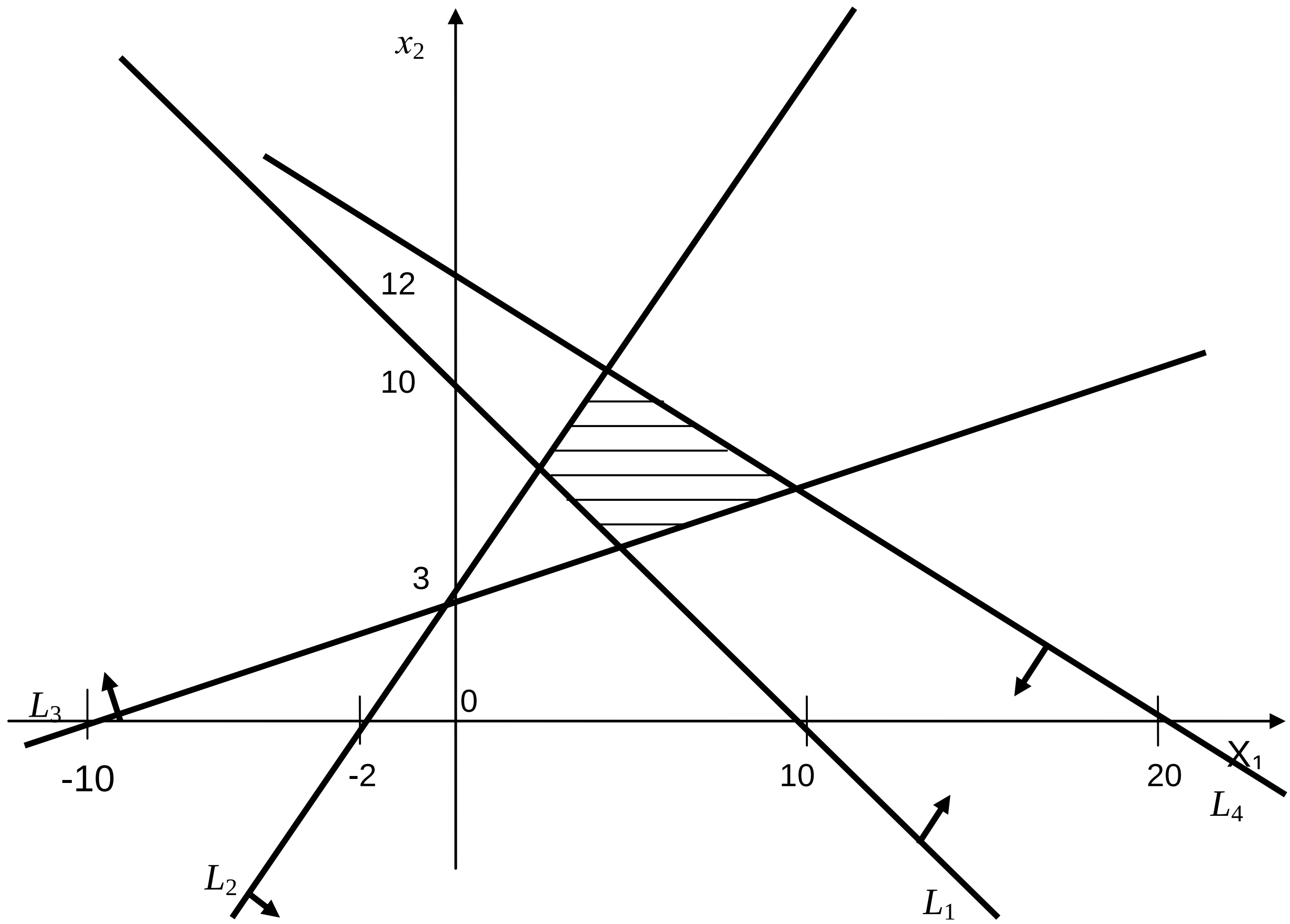


Рис. 2. **Графічне розв'язання задачі**

Перевіримо умови виконання першої нерівності системи обмежень задачі. Точки, що розташовані вище прямої L_1, задовольняють нерівності $x_1 + x_2 \geq 10$. Наприклад, підстановка точки $(0; 0)$ у відповідну нерівність дає неправильну нерівність $0 \geq 12$, тому півпростір з точкою $(0; 0)$ – це точки нижче прямої L_1, які не задовольняють нерівності.

Аналогічно, точки, що розташовані нижче прямої L_2, задовольняють нерівності $-3x_1 + 2x_2 \leq 6$ (підстановка точки $(0; 0)$ дає правильну нерівність $0 \leq 6$), тому півпростір із точкою $(0; 0)$ – це точки, які нижче прямої L_2, саме вони задовольняють нерівності.

Точки, що розташовані вище прямої L_3, задовольняють нерівності $-3x_1 + 10x_2 \geq 30$ (підстановка точки $(0; 0)$ дає неправильну нерівність $0 \geq 30$), тому півпростір з точкою $(0; 0)$ – це точки нижче прямої L_3, які не задовольняють нерівності.

Аналогічно, точки, що розташовані нижче прямої L_4, задовольняють нерівності $3x_1 + 5x_2 \le 60$ (підстановка точки $(0;\,0)$ дає правильну нерівність $0 \le 60$).

Стрілками на рис. 2 показано допустимі півпростори, в яких виконуються відповідні умови основної системи обмежень. Як результат отримано множину розв'язків – заштрихований багатокутник. Точки множини допустимих розв'язків, що розташовані усередині багатокутника та на його межах, задовольняють одночасно всім обмеженням задачі. Тому розв'язки, які відповідають цим точкам, є допустимими.

Оскільки множина допустимих розв'язків містить нескінчену кількість точок, то серед них необхідно знайти оптимальний розв'язок.

2. Побудова вектора-градієнта цільової функції.

Щоб знайти оптимальний розв'язок, визначимо, в якому напрямку зростає цільова функція $Z = 5x_1 + 4x_2$. Коефіцієнти цільової функції при змінних x_1, x_2 є координатами вектора-градієнта, Отже, $gradZ = (5;\,4)$. Цей вектор вказує напрямок найбільш швидкого зростання функції.

3. Побудова лінії рівня.

Рівняння $5x_1 + 4x_2 = 0$ є рівнянням лінії рівня, я всіх точках якій цільова функція приймає значення $Z = 0$. Отже, маємо рівняння прямої, що проходить через початок координат. Лінія рівня проходить перпендикулярно вектору-градієнту $gradZ = (5;\,4)$, оскільки його координати визначаються за коефіцієнтами при змінних x_1 і x_2, а саме вони і є координатами вектора нормалі до прямої. Пунктирною лінією на рис. 3 зображено вектор-градієнт та лінію рівня.

4. Переміщення лінії рівня у напрямку градієнта (напряму найбільш швидкого зростання цільової функції) та пошук екстремальної (кутової) точки на перетині лінії рівня й множини допустимих розв'язків.

Оскільки цільова функція досліджується на максимум, то переміщуємо її лінію рівня в напрямку вектора-градієнта (див. рис. 3) доти, доки вона має спільні точки з областю допустимих розв'язків Багатокутником планів). Останньою спільною точкою лінії рівня з областю допустимих розв'язків є кутова точка, якій відповідає розв'язок задачі – оптимальний план. У цій задачі ця вершина багатокутника планів є точкою перетину прямих L_3 і L_4.

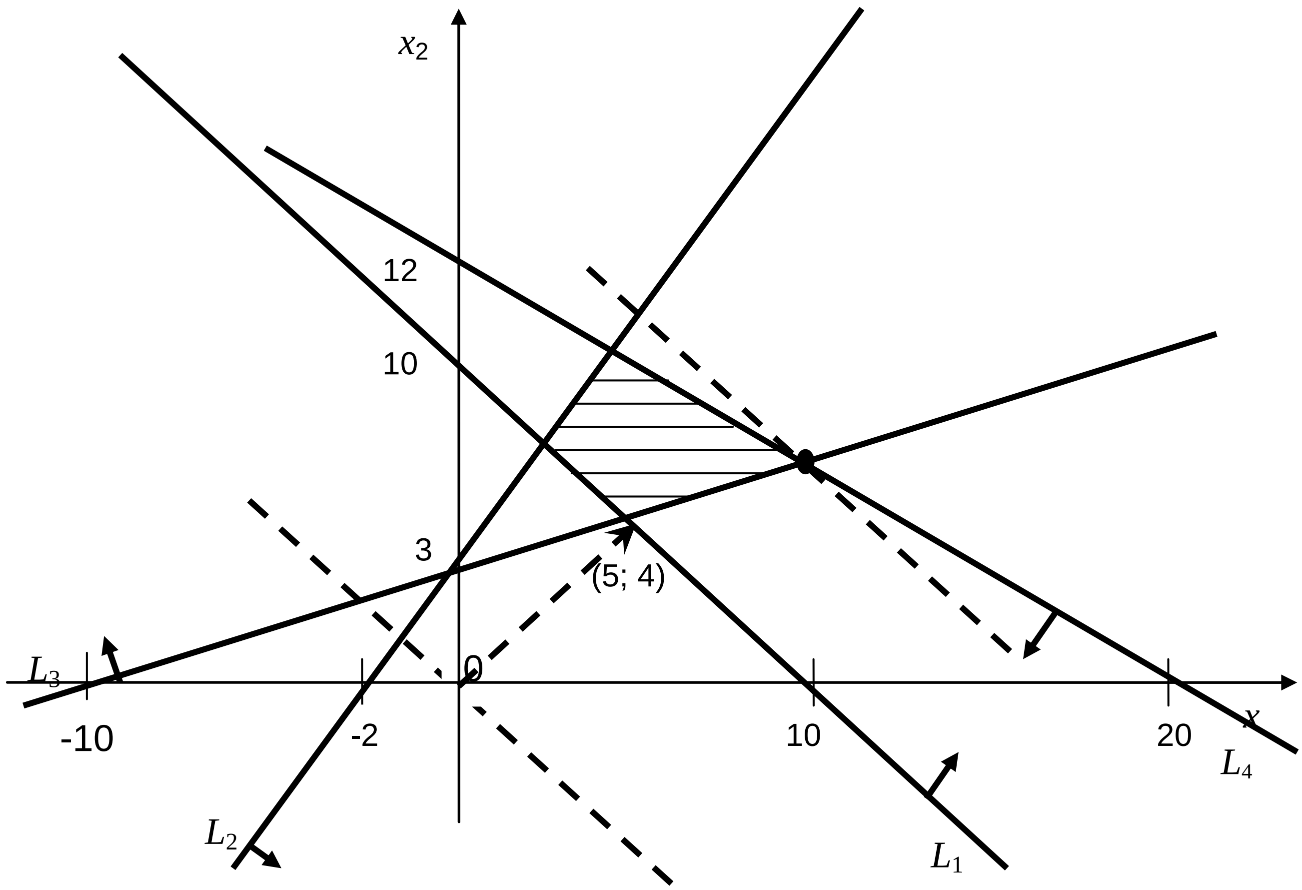


Рис. 3. **Оптимальний розв'язок задачі**

5. Розв'язання системи рівнянь прямих, які перетинаються в екстремальній точці, пошук оптимального розв'язку.

Значення компонентів оптимального плану x_1^* і x_2^* визначають як розв'язок системи рівнянь, що відповідають прямим L_3 та L_4:

$$\begin{cases} -3x_1^* + 10x_2^* = 30, \\ 3x_1^* + 5x_2^* = 60, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 10, \\ x_2^* = 6. \end{cases}$$

Отже, ми отримали оптимальний план: $\mathbf{X}^* = (10; 6)$.

6. Обчислення значення цільової функції в оптимальній точці.

Максимальне значення цільової функції $Z_{\max} = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 6 = 74$.

2.3.3. Складемо математичну модель задачі. Необхідно визначити оптимальний план виробництва цегли двох марок, тому змінними задачі є обсяг виробництва цегли кожної марки: x_1, x_2.

Оскільки в задачі йдеться про максимізацію прибутку від реалізації цегли, то напрямом оптимізації є max, а критерієм оптимальності є загальний прибуток від реалізації цегли. Цільова функція має вигляд:

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \rightarrow \max,$$

де коефіцієнти при змінних є заданими значеннями прибутку від реалізації цегли кожної марки, а саме 40 та 70 грн за 1 тис. шт.

Обмеження на витрати глини, з якої виробляється цегла, можна записати наступним чином:

$$\begin{pmatrix} \textit{поточні витрати глини} \\ \textit{на виробництво цегли} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \textit{максимально можливі витрати} \\ \textit{глини на виробництво цегли} \end{pmatrix}.$$

За економічним змістом змінні x_1, x_2 повинні приймати тільки невід'ємні значення. Оскільки за умовою задачі задано запас глини та норми витрат її на виробництво однієї цеглини, то змінні x_1, x_2 повинні задовольняти такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 \leq 10 - \textit{витрати глини виду } \mathrm{B}_1, \\ 2x_2 \leq 30 - \textit{витрати глини виду } \mathrm{B}_2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 47 - \textit{витрати глини виду } \mathrm{B}_3, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 10, \\ 2x_2 \leq 30, \\ x_1 + 2x_2 \leq 47, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Ця модель, де потрібно знайти максимум лінійної цільової функції при лінійних обмеженнях типу "≤", є першою стандартною формою задачі лінійного програмування.

Для застосування симплекс-методу необхідно подати задачу лінійного програмування в канонічній формі.

У канонічній формі відшукується максимум лінійної цільової функції:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

за наявності основної системи обмежень, що надані у вигляд лінійних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1,m}.$$

Усі невідомі повинні бути невід'ємними: $x_j \geq 0$.

Обмеження-нерівності цієї задачі перетворюємо на рівності шляхом введення додаткових невід'ємних балансових змінних $x_{j+k} \geq 0$, де k – кількість нерівностей в основній системі обмежень.

Слід також зазначити, що рівності в канонічній формі треба записувати так, щоб вільні члени обмежень-рівнянь були невід'ємними.

Отже, математична модель задачі в канонічній формі має вигляд:

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 10, \\ 2x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 47, \\ x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

У такому вигляді модель придатна для запису у симплекс-таблицю. Обчислення за допомогою симплекс-методу здійснюється виконанням однотипних ітераційних процедур. Кожна ітерація містить декілька кроків.

Перший ітераційний блок симплекс-таблиці подано в табл. 2. У цій таблиці перший стовпчик містить порядкові номери, що відповідають рівнянням основної системи (для кожної ітерації); у стовпчику "Базис" указані ті вектори, які є базисними за цією ітерацією за відповідним рівнянням; коефіцієнти цільової функції, які відповідають базисним змінним, записують у стовпчику $\mathbf{C}_{баз.}$; у стовпчиках $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ і $\mathbf{A}_5$

записані компоненти цих векторів, які є коефіцієнтами при відповідних змінних x_j ($j=\overline{1,5}$) в основній системі обмежень задачі; колонка $\mathbf{A}_0$ містить праві частини рівнянь основної системи обмежень; а у рядку c_j записані коефіцієнти цільової функції при змінних x_j ($j=\overline{1,5}$).

Таблиця 2

Перший ітераційний блок симплекс-таблиці

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$	0	10	1	0	1	0	0
2	$\mathbf{A}_4$	0	30	0	2	0	1	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	47	1	2	0	0	1

Компоненти опорних планів визначаємо за стовпчиком $\mathbf{A}_0$ як значення, що відповідають базисним змінним за відповідним рядком. З табл. 2 видно, що базисними є вектори $\mathbf{A}_3$ (за першим рядком), $\mathbf{A}_4$(за другим рядком) та $\mathbf{A}_5$ (за третім рядком). Вектори $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{A}_2$ не входять до базису, тому відповідні цим векторам змінні є вільними, отже, за означенням опорного плану вони дорівнюють нулю. Для цієї задачі маємо такий вихідний опорний план: $\mathbf{X}_0=(0;\,0;\,10;\,30;\,47)$.

Перевіримо, чи виконується умова оптимальності для вихідного опорного плану. Оскільки цільова функція досліджується на максимум, то план є оптимальним, якщо всі його оцінки невід'ємні: $\Delta_j=Z_j-c_j\geq 0$, де $Z_j=\mathbf{C}_{баз.}\cdot\mathbf{A}_j$, $j=\overline{1,n}$.

Додаємо до табл. 2 два рядки, один з яких буде містити значення $Z_j=\mathbf{C}_{баз.}\cdot\mathbf{A}_j$, а другий (індексний рядок) – оцінки плану $\Delta_j=z_j-c_j$ для кожного з векторів. У табл. 3 подано результати обчислення оцінок вихідного плану. Отже, план $\mathbf{X}_0=(0;\,0;\,10;\,30;\,47)$ не є оптимальним, оскільки в індексному рядку є дві від'ємні оцінки: $\Delta_1=-40$ та $\Delta_2=-70$.

Таблиця 3

Перевірка оптимальності початкового плану задачі

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$	0	10	1	0	1	0	0
2	$\mathbf{A}_4$	0	30	0	2	0	1	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	47	1	2	0	0	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–40	–70	0	0	0

Оскільки від'ємних оцінок Δ_j декілька, то в базис треба ввести той з них, якому відповідає $\max\left|\theta_{0j} \cdot \Delta_j\right|$, де $\theta_{0j} = \min\limits_i \dfrac{a_{0i}}{a_{ji}} > 0$ обчислюється для кожного вектора, що має додатну оцінку. Якщо значень $\max\left|\theta_{0j} \cdot \Delta_j\right|$ буде декілька, то до базису включають вектор, якому відповідає $\min c_j$ (у випадку дослідження цільової функції на максимум).

За табл. 3 визначаємо розв'язувальний елемент:

$$\theta_{01} = \min\left(\frac{10}{1}; \frac{47}{1}\right) = 10, \qquad \theta_{02} = \min\left(\frac{30}{2}; \frac{47}{2}\right) = 15,$$

$$\left|\theta_{01}\Delta_1\right| = \left|10 \cdot (-40)\right| = 400, \qquad \left|\theta_{02}\Delta_2\right| = \left|15 \cdot (-70)\right| = 1050.$$

Оскільки $\left|\theta_{02}\Delta_2\right| > \left|\theta_{01}\Delta_1\right|$, то до базису треба ввести вектор $\mathbf{A}_2$, при цьому з базису виходить вектор $\mathbf{A}_4$. Розв'язувальний елемент дорівнює числу 2 (у другому рядку табл. 3).

Перехід до нового базису виконуємо в симплекс-таблиці (табл. 4). Для введення в базис вектора $\mathbf{A}_2$ здійснюємо перетворення за методом Жордана – Гаусса (див. коментар). У наслідок цього отримуємо другий опорний план та перевіряємо його на оптимальність.

Таблиця 4

Друга ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0	Коментар
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	
4	$\mathbf{A}_3$	0	10	1	0	1	0	0	[1]
5	$\mathbf{A}_2$	70	15	0	1	0	0,5	0	[2]:2
6	$\mathbf{A}_5$	0	17	1	0	0	– 1	1	[5]·(–2)+[3]
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			1 050	0	70	0	35	0	–
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–40	0	0	35	0	–

Новий опорний план: $\mathbf{X}_1 = (0; 15; 10; 0; 17)$ неоптимальний, оскільки в індексному рядку є від'ємна оцінка Δ_1.

Визначаємо розв'язувальний елемент: $\theta_{11} = \min\left(\frac{10}{1}; \frac{17}{1}\right) = 10$. Отже, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_3$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1 (у четвертому рядку табл. 4).

Здійснюємо третю ітерацію: виконаємо перетворення в симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса, знайдемо третій опорний план та перевіримо його на оптимальність (табл. 5).

Таблиця 5

Третя ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	40	70	0	0	0	Коментар
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	
7	$\mathbf{A}_1$	40	10	1	0	1	0	0	[4]
8	$\mathbf{A}_2$	70	15	0	1	0	0,5	0	[5]
9	$\mathbf{A}_5$	0	7	0	0	–1	–1	1	[7]·(–1)+[6]
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			1 450	40	70	40	35	0	–
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	0	0	40	35	0	–

Новий опорний план: $\mathbf{X}_2 = (10; 15; 0; 0; 7)$ є оптимальним, оскільки в індексному рядку всі оцінки невід'ємні.

Максимальне значення цільової функції дорівнює $Z_{\max}(\mathbf{X}_2) = 1\,450.$

Отже, для забезпечення максимального прибутку від реалізації цегли в розмірі 1 450 грн цех цегельного заводу має виробляти цегли марки A_1 – 10 тис. шт., марки A_2 – 15 тис. шт. на місяць.

2.3.4. Введемо додаткові змінні і перетворимо систему нерівностей основної системи обмежень у систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Основна система обмежень задачі не містить одиничної матриці. Тому для її отримання додамо в кожне рівняння по одній змінній, які є фіктивними. Оскільки цільова функція досліджується на мінімум, то вони входять до її складу з необмежено великими коефіцієнтами. Отже, маємо математичну модель задачі зі штучним базисом:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + Mx_5 + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-методу. У табл. 6 подано обчислення першої ітерації симплекс-методу.

Таблиця 6

Перша ітерація методу штучного базису

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	2	3	0	0	*M*	*M*
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_5$	*M*	6	3	2	–1	0	1	0
2	$\mathbf{A}_6$	*M*	4	1	4	0	–1	0	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			10*M*	4*M*	6*M*	–*M*	–*M*	*M*	*M*
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	4*M* – 2	6*M* – 3	–*M*	–*M*	0	0

Отримано початковий опорний план: $\mathbf{X}_0 = (0;\, 0;\, 0;\, 0;\, 6;\, 4)$, який не є оптимальним, оскільки в індексному рядку оцінки Δ_1 і Δ_2 є додатними, а цільова функція досліджується на мінімум .

Визначимо розв'язувальний елемент:

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{6}{3}, \frac{4}{1}\right\} = 2, \qquad \theta_2 = \min\left\{\frac{6}{2}, \frac{4}{4}\right\} = 1,$$

$$|\theta_1\Delta_1| = 2\cdot(4M-2), \qquad |\theta_2\Delta_2| = 1\cdot(6M-3).$$

Оскільки $|\theta_1\Delta_1| > |\theta_2\Delta_2|$, то до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 3 в першому рядку (див. табл. 6).

Здійснимо перетворення за методом Жордана – Гаусса (табл. 7), знаходимо другий опорний план та перевіряємо його на оптимальність.

Таблиця 7

Друга ітерація методу штучного базису

№	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	2	3	0	0	M	M
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
3	$\mathbf{A}_1$	2	2	1	$^2/_3$	$-^1/_3$	0	$^1/_3$	0
4	$\mathbf{A}_6$	M	2	0	$^{10}/_3$	$^1/_3$	–1	$-^1/_3$	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.}\cdot\mathbf{A}_j$			$2M+4$	2	$^{10}/_3\,M + {}^4/_3$	$^1/_3\,M - {}^2/_3$	$-M$	$-^1/_3\,M + {}^1/_3$	M
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	0	$^{10}/_3\,M - {}^5/_3$	$^1/_3\,M - {}^2/_3$	$-M$	$-^4/_3\,M + {}^1/_3$	0

Новий план $X_1 = (2;\, 0;\, 0;\, 0;\, 0;\, 2)$ неоптимальний, оскільки індексний рядок містить додатні оцінки Δ_2 і Δ_3.

Визначимо розв'язувальний елемент:

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{2}{2/3}; \frac{2}{10/3}\right\} = \frac{3}{5}, \qquad \theta_3 = \min\left\{\frac{2}{1/3}\right\} = 6,$$

$$|\theta_2\Delta_2| = \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{10}{3}M - \frac{5}{3}\right) = 2M - 1, \qquad |\theta_3\Delta_3| = 6\left(\frac{1}{3}M - \frac{2}{3}\right) = 2M - 4.$$

Отримано, що $|\theta_2\Delta_2| \approx |\theta_3\Delta_3|$, однак $c_2 = 3 > c_3 = 0$, тому до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_2$, з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_6$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 10/3 в четвертому рядку табл. 7.

Здійснивши перетворення за методом Жордана – Гаусса, знайдемо новий опорний план (табл. 8) та перевіримо його на оптимальність.

Таблиця 8

Третя ітерація методу штучного базису

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	2	3	0	0	*M*	*M*
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
5	$\mathbf{A}_1$	2	1,6	1	0	–0,4	0,2	0,4	–0,2
6	$\mathbf{A}_2$	3	0,6	0	1	0,1	–0,3	–0,1	0,3
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			5	2	3	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	0	0	$-1/2$	$-1/2$	$-M + 1/2$	$-M + 1/2$

Новий опорний план $\mathrm{X}_2 = (1{,}6;0{,}6;0;0;0;0)$ є оптимальним, оскільки в індексному рядку нема додатних оцінок. Цьому плану відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}_2) = Z_{\min} = 5$.

3. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач

3.3.1. До кожної задачі лінійного програмування (прямої задачі) можна поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, яка є двоїстою. Її математичну модель будують за такими правилами:

кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі і навпаки;

вільні члени в обмеженнях однієї задачі є коефіцієнтами цільової функції іншої задачі і навпаки;

якщо умови однієї задачі приведені до стандартної форми, то умови іншої задачі будуть представлені в симетричній стандартній формі і навпаки;

обмеженням типу стандартних нерівностей прямої задачі відповідають невід'ємні змінні двоїстої задачі, обмеженням типу рівностей прямої задачі відповідають змінні двоїстої задачі, які не мають обмеження на знак;

матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях обох задач – взаємно транспоновані.

Вияснимо, чи приведено задачу до стандартної форми.

Задана система обмежень прямої задачі не є в стандартній формі, оскільки цільова функція вихідної задачі досліджується на мінімум, то обмеження мають бути у вигляді нерівностей типу " $\geq$ ". Отже, умови задачі приводимо до стандартної форми. Для цього основну систему обмежень перепишемо у вигляді системи нерівностей типу " $\geq$ ", помножимо першу та третю нерівності на (–1):

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_1 - x_2 \geq -6, \\ -x_1 + x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Визначимо змінні двоїстої задачі. Оскільки кількість невідомих двоїстої задачі має дорівнювати кількості нерівностей основної системи обмежень вихідної задачі, то змінними двоїстої задачі є y_1, y_2, y_3, y_4.

Цільова функція математичної моделі двоїстої задачі має вигляд:

$$F = -2y_1 + 3y_2 - 6y_3 \to \max,$$

що відповідає виконанню другого та третього правил побудови моделі двоїстої задачі. Враховуючи п'яте правило побудови двоїстої задачі, формуємо систему обмежень математичної моделі двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 \leq -3, \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \leq 1, \\ y_i \geq 0, \ \ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Отже, математична модель двоїстої задачі побудована.

3.3.2. Складемо математичну модель двоїстої задачі.

Вияснимо, чи приведено задачу до стандартної форми.

Задана система обмежень прямої задачі є в стандартній формі, оскільки функція цілі вихідної задачі максимізується, тому обмеження мають бути у вигляді нерівностей типу " $\le$".

Визначимо змінні двоїстої задачі. Оскільки кількість невідомих двоїстої задачі має дорівнювати кількості обмежень вихідної задачі, то змінними двоїстої задачі є y_1, y_2, y_3.

Цільова функція математичної моделі двоїстої задачі має вигляд:

$$F = 1\,434 y_1 + 1\,224 y_2 + 1\,328 y_3 \to min,$$

вільні члени в обмеженнях вихідної задачі є коефіцієнтами при змінних цільової функції двоїстої задачі.

Ураховуючи, що матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях обох задач – взаємно транспоновані, система обмежень математичної моделі двоїстої задачі має вигляд:

$$\begin{cases} 9y_1 + 7y_2 + 4y_3 \ge 3, \\ 5y_1 + 8y_2 + 16y_3 \ge 2, \\ y_i \ge 0, \;\; i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Отже, математична модель двоїстої задачі побудована.

За умовою задачі відомо, що її розв'язком є оптимальний план: $\mathbf{X}^* = (144;\; 27)$, якому відповідає значення цільової функції $Z_{\max} = 486$.

Використовуючи теореми двоїстості, знайдемо розв'язок побудованої двоїстої задачі.

За першою теоремою двоїстості: $F_{\min} = Z_{\max} = 486$.

Використаємо першу частину другої теореми двоїстості. Оскільки перший та другий компоненти оптимального плану вихідної задачі додатні $x_1 = 144 \ne 0, \;\; x_2 = 27 \ne 0$, то перше та друге обмеження основної системи обмежень двоїстої задачі виконуються у вигляді точних рівнянь.

Використаємо другу частину другої теореми двоїстості. Якщо підставимо компоненти оптимального плану вихідної задачі в її обмеження основної системи обмежень, то отримаємо:

$$\begin{cases} 9\cdot 144+5\cdot 27=1\,431 \quad \Rightarrow \quad y_1^*\neq 0,\\ 7\cdot 144+8\cdot 27=1\,224 \quad \Rightarrow \quad y_2^*\neq 0,\\ 4\cdot 144+16\cdot 27=1\,008<1\,328 \;\Rightarrow y_3^*=0. \end{cases}$$

Таким чином, маємо:

$$\begin{cases} 9y_1^*+7y_2^*+4y_3^*=3,\\ 5y_1^*+8y_2^*+16y_3^*=2,\\ y_3^*=0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо: $y_1^*=10/37$; $y_2^*=3/37$; $y_3^*=0$.

Отже, отримано: $\mathbf{Y}^*=\left(\frac{10}{37};\ \frac{3}{37};\ 0\right)$, $F_{\min}=F(\mathbf{Y}^*)=486$

3.3.3. Вирішуємо перше питання вправи: визначимо дефіцитний вид сировини. Оптимальний розв'язок вихідної задачі визначаємо за колонкою $\mathbf{A}_0$, а оптимальний розв'язок двоїстої задачі міститься в рядку оцінок плану. Тому з наведеної ітерації симплекс-таблиці маємо:

$$\mathbf{X}^*=(5;3;3;4;0;0;0),\qquad Z_{\max}=Z\left(\mathbf{X}^*\right)=33 \text{ грош. од.},$$

$$\mathbf{Y}^*=(0;\ 1/2;\ \ 2;\ \ 3/2;\ 0;\ 0;\ 0).$$

За першою теоремою двоїстості: $F_{\min}=F(\mathbf{Y}^*)=33$ грош. од.

Невідомі y_i є певними вартісними оцінками корисності ресурсів (тіньовими цінами), які характеризують корисність кожного ресурсу для подальшого збільшення прибутку за умови розширення виробництва.

Якщо якийсь ресурс є надлишковим, залишок цього ресурсу відмінний від нуля, отже, його двоїста невідома дорівнює нулю $y_i^*\neq 0$ і подальше збільшення запасу цього ресурсу не буде приводити до зміни прибутку (тіньова ціна цього ресурсу дорівнює нулю). Тобто недефіцитні ресурси – ресурси, які, відповідно до оптимального плану виробництва продукції, витрачаються не повністю. Гранична корисність недефіцитних ресурсів дорівнює нулю. Якщо виявилося, що в оптимальному плані вичерпані запаси відразу декількох ресурсів (балансові невідомі дорівнюють нулю, відповідні обмеження реалізуються як строгі рівності), то тіньові ціни y_i будуть показувати найбільш бажаний шлях розширення ресурсів. Тобто дефіцитні ресурси – ресурси, які відповідно до оптимального плану виробництва продукції витрачаються повністю. Гранична корисність дефіцитних ресурсів є додатною величиною.

Таким чином, визначаємо, що оскільки дефіцитною є сировина, для якої двоїста оцінка ненульова, а інакше сировина є надлишковою, то:

сировина 1-го типу є надлишковою;

сировина 2-го типу є дефіцитною;

сировина 3-го типу є дефіцитною.

Таким чином сировина 2-го та 3-го типу є дефіцитною.

Вирішуємо друге питання вправи. Двоїсті оцінки можна використати як інструмент визначення ефективності окремих господарських рішень (технологічних заходів) та обґрунтування доцільності виробництва нових видів продукції. Для оцінки доцільності введення в план виробництва нового (четвертого) виду виробів порівняємо додаткові витрати на його виробництво з прибутком від його реалізації за формулою:

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{4} a_{i4} y_i^* - c_4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1{,}5 - 15 = -10 < 0 .$$

Отже, прибуток перевищує витрати, тобто введення в план виробництва нового виду виробів є доцільним.

3.3.4. Двоїстий симплексний метод зручно використовувати в задачах лінійного програмування, в яких система обмежень містить вільні члени будь-якого знаку. Для застосування двоїстого симплекс-методу, як і для звичайного симплекс-методу необхідно подати задачу лінійного програмування в канонічній формі. У канонічній формі відшукується екстремум лінійної функції цілі за наявності системи лінійних обмежень-рівностей.

Помножимо другу нерівність заданої системи обмежень задачі на (-1) і приведемо систему до канонічної форми:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Отже, канонічна форма задачі має такий вигляд:

$$Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5, \\ x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиці (табл. 9).

Таблиця 9

Перша ітерація двоїстого симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	–2	1	5	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_4$	0	4	1	1	–1	1	0
2	$\mathbf{A}_5$	0	–5	–1	5	–1	0	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	2	–1	–5	0	0

Початковий опорний план: $\mathbf{X}_0 = (0; 0; 0; 4; -5)$ не є оптимальним, оскільки в індексному рядку оцінка Δ_1 додатна.

Визначаємо розв'язувальний елемент: $\theta_1 = \min\left(\frac{4}{1}; \frac{-5}{-1}\right) = 4$. Отже, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_4$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1 у першому рядку, в стовпці $\mathbf{A}_1$ (див. табл. 9).

Здійснимо другу ітерацію: виконаємо перетворення в симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса, знайдемо другий опорний план та перевіримо його на оптимальність (табл. 10). Новий опорний план $\mathbf{X}_1 = (4; 0; 0; 0; -1)$ має від'ємний компонент $x_5 = -1$ і не є оптимальним планом. Такий план називається псевдопланом (майже допустимий план), він задовольняє всім обмеженням задачі лінійного програмування, крім обмежень на знак змінних. Тому вектор $\mathbf{A}_5$ слід виключити з базису, симплексне відношення θ обчислюємо за значеннями четвертого рядка (табл. 10).

Таблиця 10

Друга ітерація двоїстого симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	–2	1	5	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
3	$\mathbf{A}_1$	–2	4	1	1	–1	1	0
4	$\mathbf{A}_5$	0	–1	0	6	–2	1	1
$z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			–8	–2	–2	2	–2	0
$\Delta_j = z_j - c_j$			–	0	–3	–3	–2	0

Обчислюємо симплексне відношення θ за значенням четвертого рядка (див. табл. 10).

Визначаємо розв'язувальний елемент: $\theta = \min\left\{\dfrac{-1}{-2}\right\} = \dfrac{1}{2}.$ Отже, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_3$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_5$, розв'язувальний елемент дорівнює числу (–2) у четвертому рядку табл. 10. Здійснюємо перетворення й отримуємо новий опорний план (табл. 11).

Таблиця 11

Третя ітерація двоїстого симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j	–2	1	5	0	0
			$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
5	$\mathbf{A}_1$	–2	9/2	1	–2	0	1/2	–1/2
6	$\mathbf{A}_3$	5	1/2	0	–3	1	– 1/2	–1/2
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			–13/2	–2	–11	5	–7/2	–3/2
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	0	–12	0	–7/2	–3/2

Новий опорний план $\mathbf{X}_2 = (9/2;\, 0; 1/2;\, 0;\, 0)$ є оптимальним, оскільки виконуються всі вимоги задачі. Отже, мінімум цільової функції дорівнює $Z_{\min} = -13/2.$

3.3.5. Ця задача є задачею параметричного програмування, яке розглядає оптимізаційні задачі, математичні моделі яких містять параметри в цільовій функції та/або в основній системі обмежень. Дана задача має один параметр у вільних членах основної системи обмежень. У цьому випадку необхідно в симплекс-таблицю ввести додаткову колонку для параметра. Після визначення оптимального розв'язку слід виписати комбінований розв'язок з урахуванням додаткової колонки і провести аналіз залежності розв'язку параметра.

Урахування параметра є необхідним для перевірки стійкості знайденого статичного розв'язку, тобто для визначення його чутливості до незначних порушень умов задачі.

Розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиці (табл. 12).

Таблиця 12

Перша ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j		2	–1	3	–2	1
			$\mathbf{A}_0$	t	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	$\mathbf{A}_3$	3	1	2	–1	1	1	0	0
2	$\mathbf{A}_4$	-2	1	–1	1	–1	0	1	0
3	$\mathbf{A}_5$	1	2	–3	1	1	0	0	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			3	5	–4	6	3	–2	1
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–	–6	7	0	0	0

Припустимо, що $t = 0$, і отримаємо такий вихідний опорний план: $\mathbf{X}_0 = (0;\, 0;\, 1;\, 1;\, 2)$, якому відповідає значення цільової функції $Z(\mathbf{X}_0) = 3$.

Критерій оптимальності порушено (в індексному рядку є від'ємна оцінка $\Delta_1 = -6$), тому визначаємо розв'язувальний елемент:

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{1}{1};\ \frac{2}{1}\right\} = 1.$$

Відповідно, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_1$, а з базису виводимо вектор $\mathbf{A}_4$, розв'язувальний елемент дорівнює числу 1 у другому рядку стовпця $\mathbf{A}_1$ (див. табл. 12). Виконуємо перетворення, результати якого наведені в табл. 13.

Таблиця 13

Друга ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j		2	–1	3	–2	1
			$\mathbf{A}_0$	t	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
4	$\mathbf{A}_3$	3	2	1	0	0	1	1	0
5	$\mathbf{A}_1$	2	1	–1	1	–1	0	1	0
6	$\mathbf{A}_5$	1	1	–2	0	2	0	–1	1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			9	–1	2	0	3	4	1
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–	0	1	0	6	0

Отримано розв'язок: $\mathbf{X}^* = (1-t;\ 0;\ 2+t;\ 0;\ 1-2t)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 9 - t.$

Знайдений розв'язок матиме сенс лише в тому випадку, якщо значення всіх змінних будуть невід'ємні. Визначимо, на якому проміжку зміни t цей план буде допустимим. Результати наведені в табл. 14.

Таблиця 14

Визначення меж параметра

Вимога невід'ємності змінних розв'язку	Обмеження для параметра	Межі параметра
$2+t \geq 0$	$t \geq -2$	–
$1-t \geq 0$	$t \leq 1$	$\mathbf{-2 \leq t \leq 0{,}5}$
$1-2t \geq 0$	$t \leq 0{,}5$	–

Отже, отримали перший проміжок значень параметра $[-2;\ 0{,}5]$, на якому розв'язком задачі є $\mathbf{X}^* = (1-t;\ 0;\ 2+t;\ 0;\ 1-2t)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 9 - t.$

Далі розглянемо, в яких межах зміни параметра t знайдений план залишається допустимим.

Спочатку розглянемо збільшення параметра.

Нехай $t > 0{,}5$. Тоді значення змінної $x_5^* = 1 - 2t$ стане від'ємним, тобто необхідно вивести цей компонент з базису. Здійснюємо перехід до нового базису, застосувавши для цього двоїстий симплекс-метод. Вибираємо шостий рядок табл. 13 як напрямний. У цьому рядку лише один елемент є від'ємним (–1), який і стає розв'язувальним. Отже, до базису вводимо вектор $\mathbf{A}_4$, а виводимо вектор $\mathbf{A}_5$ (табл. 15).

Таблиця 15

Третя ітерація симплекс-методу

№ п/п	Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	c_j		2	–1	3	–2	1
			$\mathbf{A}_0$	t	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
7	$\mathbf{A}_3$	3	3	–1	0	2	1	0	1
8	$\mathbf{A}_1$	2	2	–3	1	1	0	0	1
9	$\mathbf{A}_4$	–2	–1	2	0	–2	0	1	–1
$Z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$			15	–13	2	12	3	–2	7
$\Delta_j = Z_j - c_j$			–	–	0	13	0	0	6

Маємо розв'язок: $\mathbf{X}^* = (2 - 3t;\ 0;\ 3 - t;\ 2t - 1;\ 0)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 15 - 13t$.

Визначимо, на якому проміжку значень параметру t цей план буде допустимим (табл. 16).

Таблиця 16

Визначення меж параметра

Вимога додатності змінних розв'язку	Обмеження для параметра	Межі параметра
$3 - t \geq 0$	$t \leq 3$	–
$2 - 3t \geq 0$	$t \leq 2/3 = 0{,}667$	$0{,}5 \leq t \leq 0{,}667$
$2t - 1 \geq 0$	$t \geq 0{,}5$	–

Отже, на проміжку значень параметра $[0{,}5;\ 0{,}667]$ маємо множину розв'язків $\mathbf{X}^* = (2 - 3t;\ 0;\ 3 - t;\ 2t - 1;\ 0)$, $Z(\mathbf{X}^*) = 15 - 13t$.

Розглянемо подальше збільшення параметра.

Якщо $t > 0{,}667$, то порушиться допустимість в восьмому рядку (див. табл. 15), значення змінної $x_1^* = 2 - 3t$ стане від'ємним. Проте, перетворити таблицю за цим рядком неможливо, оскільки в ньому немає від'ємних елементів.

Отже, якщо $t \in (0{,}667; +\infty)$, то область допустимих планів є $\varnothing$.

Далі розглянемо зменшення параметра: $t < -2$.

У цьому разі порушиться критерій допустимості в четвертому рядку (див. табл. 13), значення змінної $x_3^* = 2 + t$ стане від'ємним. Проте перетворити цю таблицю також не вдасться через відсутність розв'язувального елемента.

Отже, і на цьому проміжку зміни параметра область допустимих планів є $\varnothing$.

Таким чином, розв'язок задачі параметричного програмування з параметром у вільних членах системи обмежень можна представити у вигляді таблиці (табл. 17).

Таблиця 17

Розв'язок задачі параметричного програмування з параметром у вільних членах системи обмежень

Проміжок зміни параметра t	Оптимальний план $\mathbf{X}^*$	Оптимум $Z(\mathbf{X}^*)$
$(-\infty; -2)$	$\varnothing$	
$[-2; 0{,}5]$	$(1-t; 0; 2+t; 0; 1-2t)$	$9-t$
$[0{,}5; 0{,}667]$	$(2-3t; 0; 3-t; 2t-1; 0)$	$15-13t$
$(0{,}667; +\infty)$	$\varnothing$	

4. Транспортна задача

4.4.1. Перевіримо, чи виконується для цієї транспортної задачі балансова умова. Загальні запаси постачальників дорівнюють:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 120 + 150 + 180 = 450 \text{ (т)},$$

потреби споживачів дорівнюють:

$$\sum_{j=1}^{2} b_j = 180 + 270 = 450 \text{ (т).}$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j$, то задача є закритою і матиме розв'язок.

За методом північно-західного кута складаємо вихідний опорний план перевезень (табл. 18)

Таблиця 18

Вихідний опорний план транспортної задачі

Споживачі, постачальники	B_1	B_2	a_i
A_1	50 **120**	80	120
A_2	40 **60**	20 **90**	150
A_3	20	30 **180**	180
b_j	180	270	450 = 450

Вартість перевезень за цим планом становить:

$$Z(X_0) = 50 \cdot 120 + 40 \cdot 60 + 20 \cdot 90 + 30 \cdot 180 = 15\ 600 \text{ (грн).}$$

Вихідному опорному плану відповідає таблиця потенціалів (табл. 19).

Таблиця 19

Таблиця потенціалів, що відповідає вихідному плану

u_i \ v_j	$v_1 = 50$	$v_2 = 30$
$u_1 = 0$	**50**	30 / 80
$u_2 = -10$	**40**	**20**
$u_3 = 0$	50 / 20	**30**

Оскільки серед оцінок плану є додатна: $\Delta_{31} = 50 - 20 = 30 > 0$, то цей план не є оптимальним. Для його поліпшення зробимо поставку в клітину з додатною оцінкою за таким циклом перерозподілу (табл. 20).

Таблиця 20

Цикл перерозподілу поставок

Споживачі, постачальники	B_1	B_2
A_1	120	
A_2	60 –	+ 90
A_3	+	– 180

За цим циклом слід перерозподілити вантаж обсягом

$$\theta = \min\{60; 180\} = 60.$$

Перехід до нового плану постачання дає виграш значення цільової функції: $\Delta Z = 30 \cdot 60 = 1\,800$ (грн). За новим планом цільова функція становитиме:

$$Z(\mathbf{X}_1) = Z(\mathbf{X}_0) - \Delta Z = 15\,600 - 1\,800 = 13\,800 \text{ (грн).}$$

Новому плану відповідає така таблиця потенціалів (табл. 21).

Таблиця 21

Таблиця потенціалів, що відповідає поліпшеному плану

u_i \ v_j	$v_1 = 50$	$v_2 = 60$
$u_1 = 0$	**50**	80 / 60
$u_2 = -40$	40 / 10	**20**
$u_3 = -30$	**20**	**30**

Оскільки за табл. 21 додатних оцінок нема, то знайдений план є оптимальним. Його можна записати у вигляді матриці перевезень:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 150 \\ 60 & 120 \end{pmatrix}.$$

Визначимо цільову функцію за цим планом:

$$Z(\mathbf{X}^*) = 50 \cdot 120 + 20 \cdot 150 + 20 \cdot 60 + 30 \cdot 120 = 13\,800 \text{ (грн).}$$

Цільова функція має те значення, що й очікувалось.

4.4.2. Під час переходу до нових змінних в якості еталона була вибрана продуктивність другої лінії: $x_{21}^I = x_{21}$; $x_{22}^I = x_{22}$; $x_{23}^I = x_{23}$. Тоді для першої лінії $x_{11}^I = 0{,}5 \cdot x_{11}$; $x_{12}^I = 0{,}5 \cdot x_{12}$; $x_{13}^I = 0{,}5 \cdot x_{13}$, а для третьої – $x_{31}^I = 0{,}25 \cdot x_{31}$; $x_{32}^I = 0{,}25 \cdot x_{32}$; $x_{33}^I = 0{,}25 \cdot x_{33}$.

У нових змінних система обмежень за кількістю продукції має вигляд:

$$\begin{cases} 12 \cdot 2 \cdot x_{11}^I + 24x_{21}^I + 6 \cdot 4 \cdot x_{31}^I \geq 1800; \\ 18 \cdot 2 \cdot x_{12}^I + 36x_{22}^I + 9 \cdot 4 \cdot x_{32}^I \geq 1800; \\ 14 \cdot 2 \cdot x_{13}^I + 28x_{23}^I + 7 \cdot 4 \cdot x_{33}^I \geq 1400; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11}^I + x_{21}^I + x_{31}^I \geq 75; \\ x_{12}^I + x_{22}^I + x_{32}^I \geq 50; \\ x_{13}^I + x_{23}^I + x_{33}^I \geq 50. \end{cases}$$

У нових змінних система обмежень за ресурсом часу має вигляд:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_{11}^I + 2 \cdot x_{12}^I + 2 \cdot x_{13}^I \leq 120; \\ x_{21}^I + x_{22}^I + x_{23}^I \leq 90; \\ 4 \cdot x_{31}^I + 4 \cdot x_{32}^I + 4 \cdot x_{33}^I \leq 100; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11}^I + x_{12}^I + x_{13}^I \leq 60; \\ x_{21}^I + x_{22}^I + x_{23}^I \leq 90; \\ x_{31}^I + x_{32}^I + x_{33}^I \leq 25. \end{cases}$$

Запишемо у нових змінних цільову функцію:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{X}^I) = {} & 10 \cdot 2 \cdot x_{11}^I + 20 \cdot 2 \cdot x_{12}^I + 15 \cdot 2 \cdot x_{13}^I + \\ & + 37x_{21}^I + 25x_{22}^I + 14x_{23}^I + \\ & + 7 \cdot 4 \cdot x_{31}^I + 9 \cdot 4 \cdot x_{32}^I + 10 \cdot 4 \cdot x_{33}^I \quad \to \quad \min \end{aligned}$$

й отримуємо

$$Z(\mathbf{X}^I) = 20 \cdot x_{11}^I + 40 \cdot x_{12}^I + 30 \cdot x_{13}^I +$$
$$+ 37x_{21}^I + 25x_{22}^I + 14x_{23}^I +$$
$$+ 28 \cdot x_{31}^I + 36 \cdot x_{32}^I + 40 \cdot x_{33}^I \rightarrow \min .$$

Оскільки задача є закритою, то можна складати вихідний план. Застосуємо для цього метод мінімальної вартості (табл. 22).

Таблиця 22

Вихідний опорний план у нових змінних

$\mathbf{X}_0^I$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	20 / 60	40	30	60
A_2	37	25 / 40	14 / 50	90
A_3	28 / 15	36 / 10	40	25
Потреби	75	50	50	175 = 175

Складаємо таблицю потенціалів (табл. 23) для перевірки, чи є вихідний план $\mathbf{X}_0^I$ оптимальним.

Таблиця 23

Таблиця потенціалів, що відповідає плану $\mathbf{X}_0^I$

u_i \ v_j	$v_1 = 20$	$v_2 = 28$	$v_3 = 17$
$u_1 = 0$	**20**	40 / 28	30 / 17
$u_2 = -3$	37 / 17	**25**	**14**
$u_3 = 8$	**28**	**36**	40 / 25

Додатних оцінок нема, отже, план є оптимальним.

Повернемось до вихідних змінних:

$$\mathbf{X}^{I}_{опт.} = \begin{pmatrix} .60 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 50 \\ 15 & 10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}^{*} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 50 \\ 60 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно із цим планом перша лінія здійснює фасування лише сиркової маси протягом 120 год, друга лінія 40 год працює на фасуванні глазурованих сирків та 50 год – на фасуванні м'якого сиру, третя лінія протягом 60 год здійснює фасування сиркової маси та 40 год – фасування глазурованих сирків.

За цим планом цільова функція має найменше значення:

$$Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^{*}) = 120 \cdot 10 + 40 \cdot 25 + 50 \cdot 14 + 60 \cdot 7 + 40 \cdot 9 = 3\,680 \text{ (год).}$$

5. Цілочислове програмування

5.3.1. Многокутник можливих розв'язків з урахуванням умови цілочисельності є дискретним і складається з 12 вузлів (рис. 4).

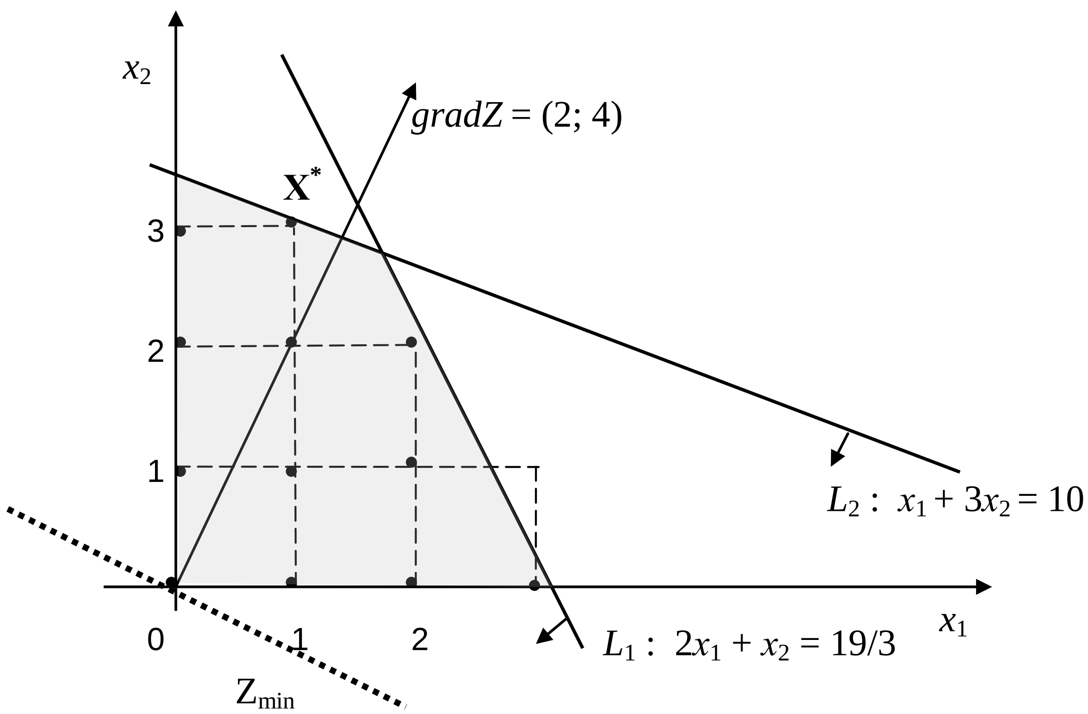


Рис. 4. **Графічний метод розв'язання ЗЦП**

Маємо розв'язок: $\mathbf{X}^* = (1; 3)$, $Z_{\max} = Z(\mathbf{X}^*) = 14$.

5.3.2. У табл. 24 наведено симплекс-таблицю розв'язання задачі.

Таблиця 24

Розв'язання задачі лінійного програмування

Базис	$\mathbf{C}_{баз.}$	b_i	–2	–4	0	0
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$
$\mathbf{A}_3$	0	19/3	2	1	1	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	1	3	0	1
$z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$		0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			2	4	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	3	5/3	0	1	–1/3
$\mathbf{A}_2$	–4	10/3	1/3	1	0	1/3
$z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$		–40/3	–4/3	–4	0	–4/3
$\Delta_j = Z_j - c_j$			2/3	0	0	–4/3
$\mathbf{A}_1$	–2	9/5	1	0	3/5	–1/5
$\mathbf{A}_2$	–4	41/15	0	1	–1/5	2/5
$z_j = \mathbf{C}_{баз.} \cdot \mathbf{A}_j$		–218/15	–2	–4	–2/5	–6/5
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	0	–2/5	–6/5

Оскільки дробова частина компонента x_1 оптимального плану ЗЛП більша за дробову частину компонента x_2, то спеціальне додаткове обмеження вводиться за тим рядком симплекс-таблиці, у якому цей компонент є базисним, тобто за першим рядком:

$$\{1\} \cdot x_1 + \{0\} \cdot x_2 + \left\{\frac{3}{5}\right\} \cdot x_3 + \left\{-\frac{1}{5}\right\} \cdot x_4 \geq \left\{\frac{9}{5}\right\}.$$

Нагадаємо, що дробова частина числа визначається як різниця між самим числом і його цілою частиною. У свою чергу, ціла частина число є найближчим до даного цілим числом, яке не перевищую дане. Отже:

$$\left\{-\frac{1}{5}\right\}=-\frac{1}{5}-\left[-\frac{1}{5}\right]=-\frac{1}{5}-(-1)=\frac{4}{5}.$$

Після перетворення отримаємо таке додаткове обмеження:

$$3x_3+4x_4\geq 4 \;\Rightarrow\; 3x_3+4x_4-x_5+x_6=4.$$

Ми отримали розширену M –задачу, яку розв'язуємо симплексним методом (табл. 25).

Таблиця 25

Симплекс-таблиця ЗЛП зі спеціальним додатковим обмеженням

Базис	$C_{б.}$	b_i	–2	–4	0	0	0	M
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
$\mathbf{A}_1$	–2	9/5	1	0	3/5	–1/5	0	0
$\mathbf{A}_2$	–4	41/15	0	1	–1/5	2/5	0	0
$\mathbf{A}_6$	M	4	0	0	3	4	–1	1
$Z_j=\mathbf{C}_б\cdot\mathbf{A}_j$		–218/15 + + 4M	–2	–4	–2/5 + + 3M	–6/5 + + 4M	$-M$	M
$\Delta_j=Z_j-c_j$			0	0	–2/5 + + 3M	–6/5 + + 4M	$-M$	0
$\mathbf{A}_1$	–2	2	1	0	3/4	0	–1/20	
$\mathbf{A}_2$	–4	7/3	0	1	–1/2	0	1/10	
$\mathbf{A}_4$	0	1	0	0	3/4	1	–1/4	
$Z_j=\mathbf{C}_б\cdot\mathbf{A}_j$		–40/3	–2	–4	1/2	0	–3/10	
$\Delta_j=Z_j-c_j$			0	0	1/2	0	–3/10	
$\mathbf{A}_1$	–2	1	1	0	0	–1	1/5	
$\mathbf{A}_2$	–4	3	0	1	0	2/3	–1/15	
$\mathbf{A}_3$	0	4/3	0	0	1	4/3	–1/3	
$Z_j=\mathbf{C}_б\cdot\mathbf{A}_j$		–14	–2	–4	0	–2/3	–2/15	
$\Delta_j=Z_j-c_j$			0	0	0	–2/3	–2/15	

Рекомендована література

Основна

1. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 384 с.

2. Зайченко О. Ю. Дослідження операцій : збірник задач / О. Ю. Зайченко, Ю. П. Зайченко. – Київ : ВД "Слово", 2007. – 472 с.

3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – Київ : ВД "Слово", 2006. – 816 с.

4. Збірник вправ з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх галузей знань усіх форм навчання / укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.

5. Лебедєва І. Л. Лабораторний практикум з оптимізаційних методів і моделей навчальної дисципліни "Економіко-математичні методи та моделі" : навч.-практ. посіб. / І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. – 216 с.

6. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи і моделі : навч. посіб. / Л. М. Малярець. – Харків : ХНЕУ ім. С.Кузнеця, 2014. – 412 с.

7. Малярець Л. М. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" : навч.-практ. посіб. / Л. М. Малярець, П. М. Куликов, І. Л. Лебедєва та ін. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 136 с.

8. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" в Excel для слухачів післядипломної освіти / укл. І. Л. Лебедєва, Л. М. Малярець, Б. В. Сенкевич. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2007. – 60 с.

9. Методичні рекомендації до виконання контрольних робіт з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх напрямків підготовки заочної форми навчання / укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, І. Л. Лебедєва та ін. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2008. – 36 с.

10. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2005. – 452 с.

Додаткова

11. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособ. для студентов эконом. спец. вузов / И. Л. Акулич. – Москва : Высшая школа, 1986. – 320 с.

12. Афанасьєв М. Ю. Исследование операций в экономике : модели, задачи, решения : учеб. пособ. / М. Ю. Афанасьєв, Б. П. Суворов. – Москва : ИНФРА-М, 2003. – 444 с.

13. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 407 с.

14. Каплан А. В. Решение экономических задач на компьютере / А. В. Каплан, В. Е. Каплан, М. В. Мащенко и др. – Москва : ДМК Пресс; Санкт-Петербург : Питер, 2004. – 600 с.

15. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование : учеб. пособ. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1980. – 300 с.

16. Лебедєва І. Л. Економіко-математичні моделі на базі транспортної задачі : навч. посіб. / І. Л. Лебедєва, Г. К. Снурнікова, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2007. – 160 с.

17. Мур Дж. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Дж. Мур, Л. Р. Уэдерфорд ; пер. с англ. – 6-е изд. – Москва : ИД "Вильямс", 2004. – 1024 с.

18. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха ; пер. с англ. – 7-е изд. – Москва : ИД "Вильямс", 2005. – 912 с.

19. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособ. / под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : БГЭУ, 1999. – 413 с.

Інформаційні ресурси

20. Классификация экономико-математических методов [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://900igr.net/prezentatsii/ekonomika/ekonomicheskij-analiz/027-klassifikatsija-ekonomiko-matematicheskikh-metodov.html.

21. LP Training [Electronic resource]. – Access mode : http://www.eudoxus.com/lp-training.

22. Mathematical Programming [Electronic resource]. – Access mode : http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-01.pdf.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Малярець Людмила Михайлівна
Лебедєва Ірина Леонідівна
Норік Лариса Олексіївна

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Практикум

У 2-х частинах

Частина 1

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Відповідальний редактор *М. М. Оленич*

Редактор *В. О. Бутенко*

Коректор *О. В. Анацька*

План 2017 р. Поз. № 8-ЕНП. Обсяг 169 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру ***ДК № 4853 від 20.02.2015 р.***