МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

**Методичні рекомендації
до практичних завдань
для студентів усіх спеціальностей
першого (бакалаврського) рівня**

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2019

УДК 519.8(07.034)
Д70

Укладачі: С. В. Прокопович
О. В. Панасенко
Л. О. Чаговець

Затверджено на засіданні кафедри економічної кібернетики.
Протокол № 1 від 14.09.2018 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Д70 **Дослідження** операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. С. В. Прокопович, О. В. Панасенко, Л. О. Чаговець. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 64 с.

Розглянуто основні питання розроблення планових рішень у виробничих, транспортних та інших економічних системах на основі застосування лінійних і нелінійних оптимізаційних методів та моделей. Подано завдання для практичних занять з навчальної дисципліни та наведено методичні рекомендації до їхнього виконання.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня.

УДК 519.8(07.034)

Вступ

Пошук оптимального рішення у процесі планування економічної діяльності в умовах обмеженості ресурсів базується на навчальній дисципліні "Дослідження операцій та методи оптимізації", що належить до циклу базових дисциплін.

Практичні роботи з поданої навчальної дисципліни призначені для закріплення теоретичного матеріалу, оволодіння практичними навичками ухвалення науково обґрунтованих рішень у процесі планування економічної діяльності на основі ефективного використання інформації, що характеризує кількісний зв'язок між економічними процесами і явищами за допомогою використання економіко-математичних моделей для оптимізації та прогнозування діяльності економічних систем.

Практичні роботи рекомендуються виконувати послідовно, оскільки послідовне виконання дозволяє краще засвоїти та закріпити матеріал навчальної дисципліни.

Практичні роботи наведені стосовно основних тем навчальної дисципліни і ґрунтуються на теоретичному матеріалі відповідної теми, а також попередніх тем. Кожна робота містить мету, завдання для виконання й індивідуальні варіанти для самостійного рішення.

Для захисту практичної роботи студенту необхідно оформити індивідуальний звіт, який має містити: постановку задачі, основні результати побудови моделі, аналіз розрахунків і висновки. На титульному аркуші вказується номер роботи, її назва, П. І. Б. студента, що виконав роботу, і П. І. Б. викладача, що прийняв роботу.

Оцінка за виконання роботи ставиться за результатами виконання та захисту практичної роботи. Особлива увага приділяється вивченню теоретичного матеріалу, правильності висновків і повноті економічної інтерпретації отриманих результатів.

Практичне заняття 1
Математична постановка оптимізаційних задач

Мета – набуття навичок розроблення математичної постановки задачі, зважаючи на задані економічні, технологічні, ресурсні та інші обмеження і цілі.

Задача

Кондитерська фабрика для виробництва двох видів карамелі *A* і *B* використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку та фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво однієї партії карамелі заданого виду, загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також прибуток, від реалізації однієї партії карамелі наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Вихідні дані

Види сировини	Норми витрат сировини (т) на одну партію карамелі виду		Загальна кількість сировини (т)
	A	*B*	
Цукровий пісок	3	1	75
Патока	2	2	60
Фруктове пюре	1	4	84
Прибуток від реалізації однієї партії карамелі (тис. грн)	15	20	–

Ураховуючи, що карамель *A* і карамель *B* можуть виготовлятися у будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їхнього випуску, за якого прибуток кондитерської фабрики від реалізації всієї продукції буде максимальним.

Розв'язання

Нехай буде виготовлено x_1 партій карамелі *A* і x_2 партій карамелі *B.* Тоді для виробництва такої кількості виробів буде потрібно витратити $3x_1 + 1x_2$ т цукрового піску.

Оскільки загальна кількість сировини заданого типу не може перевищувати 75 т, то має виконуватись нерівність:

$$3x_1 + x_2 \le 75.$$

Аналогічні міркування щодо можливого використання патоки та фруктового пюре приведуть до таких нерівностей:

$$2x_1 + 2x_2 \le 60,$$
$$x_1 + 4x_2 \le 84.$$

За цих умов, оскільки кількість виготовленої карамелі не може бути від'ємною, то:

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \tag{1}$$

Якщо буде виготовлено x_1 партій карамелі *А* і x_2 партій карамелі *В,* то прибуток від їхньої реалізації становитиме:

$$F = 15x_1 + 20x_2.$$

Отже, приходимо до такої математичної моделі задачі: потрібно серед усіх невід'ємних рішень системи нерівностей з двома невідомими $x_j \; (j = 1, 2)$ знайти таке, за якого функція щодо цих же змінних набуде максимального значення:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 75, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_1 + 4x_2 \le 84, \end{cases} \tag{2}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$F = 15x_1 + 20x_2 \to max. \tag{3}$$

Лінійна функція (3), максимум якої потрібно визначити, разом із системою нерівностей (2) і умовою невід'ємності змінних (1) утворюють математичну модель вихідної задачі.

Оскільки функція (3) лінійна, а система (2) містить тільки лінійні нерівності, то задача (1) – (3) є задачею лінійного програмування (ЗЛП).

Практичне заняття 2
Розв'язання задач лінійного програмування графічним і симплексним методами

Мета – набуття навичок у розв'язанні двовимірних задач лінійного програмування і таких, що зводяться до них.

Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом

Методичні рекомендації

Непорожня множина планів основної ЗЛП утворює опуклий багатогранник (багатокутник розв'язків). Кожна вершина (кутова точка) цього багатогранника визначає опорний план. В одній з вершин багатогранника розв'язків (тобто для одного з опорних планів) значення цільової функції є максимальним (за умови, що функція обмежена зверху на безлічі планів). Якщо максимального значення функція набуває більш, ніж в одній вершині, то цього ж значення вона набуває в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією заданих вершин (у будь-якій точці відрізка, що з'єднує ці вершини).

Слід знайти розв'язок задачі, яка полягає у визначенні максимального значення функції:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max \tag{4}$$

за умов

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad \left(i = \overline{1,k}\right). \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Кожна з нерівностей (5) і (6) системи обмежень задачі геометрично визначає напівплощину відповідно до граничних прямих $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $\left(i = \overline{1,k}\right)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. У тому випадку, якщо система нерівностей (5), (6) сумісна, область її розв'язку є множиною точок, які належать усім зазначеним півплощинам. Оскільки множина точок перетину цих заданих напівплощин – опукла, то областю допустимих розв'язків задачі (5) – (6) є опукла множина, яка називається *багатокутником розв'язків*.

Отже, вихідна задача лінійного програмування полягає в знаходженні такої точки багатокутника розв'язків, у якій цільова функція F набуває максимального значення. Ця точка існує тоді, коли багатокутник рішень не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху. У разі виконання зазначених умов в одній із вершин багатокутника розв'язків цільова функція набуває максимального значення.

Алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування (4) – (6) на основі її геометричної інтерпретації містить такі етапи:

1. Будують прямі, рівняння яких знаходять у результаті заміни в обмеженнях (5) і (6) знаків нерівностей на знаки точних рівностей.

2. Знаходять півплощини, зумовлені кожним з обмежень задачі.

3. Знаходять багатокутник розв'язків.

4. Будують вектор $\bar{C} = (c_1, c_2)$ – градієнт цільової функції, який задає напрямок зростання функції.

5. Будують лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h,$ (де h – деяка постійна) яка перпендикулярна градієнту та перетинає багатокутник розв'язків.

6. Пересувають пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ *в напрямку вектора* $\bar{C}$, у результаті чого або знаходять точку (точки), в якій цільова функція набуває максимального значення, або встановлюють необмеженість зверху функції на множині планів.

7. Визначають координати точки максимуму функції й обчислюють значення цільової функції в цій точці.

Слід зазначити, що знаходження мінімального значення лінійної функції у разі заданої системи обмежень відрізняється від перебування її максимального значення за умови тих самих обмежень лише тим, що лінія рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ *пересувається в напрямку антиградієнта – у напрямку, який протилежний вектору* $\bar{C} = (c_1, c_2)$.

Розв'язання

Сформульована задача має вигляд:

$$F = 15x_1 + 20x_2 \to max.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 \le 75, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_1 + 4x_2 \le 84, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Серед усіх невід'ємних розв'язків цієї системи лінійних нерівностей потрібно знайти таке, за якого функція набуває максимального значення.

Слід знайти розв'язання за допомогою графічного методу на основі геометричної інтерпретації. Спочатку визначити багатокутник розв'язків. Для цього в нерівностях системи обмежень та умов невід'ємності змінних знаки нерівностей замінити на знаки точних рівностей і знайти відповідні прямі:

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 = 75, & \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 = 60, & \text{(II)} \\ x_1 + 4x_2 = 84, & \text{(III)} \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Ці прямі зображені на рис. 1. Кожна з побудованих прямих ділить площину на дві півплощини. Координати точок однієї півплощини задовольняють вихідну нерівність, а іншої – ні. Щоб визначити шукану півплощину, потрібно взяти якусь точку (наприклад, т. О (0,0)), яка належить одній із напівплощин, і перевірити, чи задовольняють її координати цю нерівність. Якщо координати взятої точки задовольняють цю нерівність, то шуканою є та півплощина, якій належить ця точка, в іншому випадку – інша півплощина.

Слід визначити півплощини для цієї задачі та відзначити їх штрихуванням. Перетин отриманих напівплощин і визначає багатокутник розв'язків заданої задачі – п'ятикутник *OABCD.* Координати будь-якої точки, яка належить цьому п'ятикутнику, задовольняють цю систему нерівностей і умову невід'ємності змінних. Тому задача буде розв'язаною, якщо буде знайдено точку, яка належить п'ятикутнику *OABCD,* у якій функція набуває максимального значення. Щоб знайти зазначену точку, треба побудувати вектор $\bar{C} = (c_1, c_2) = (15; 20)$, координати якого визначають коефіцієнти функції мети.

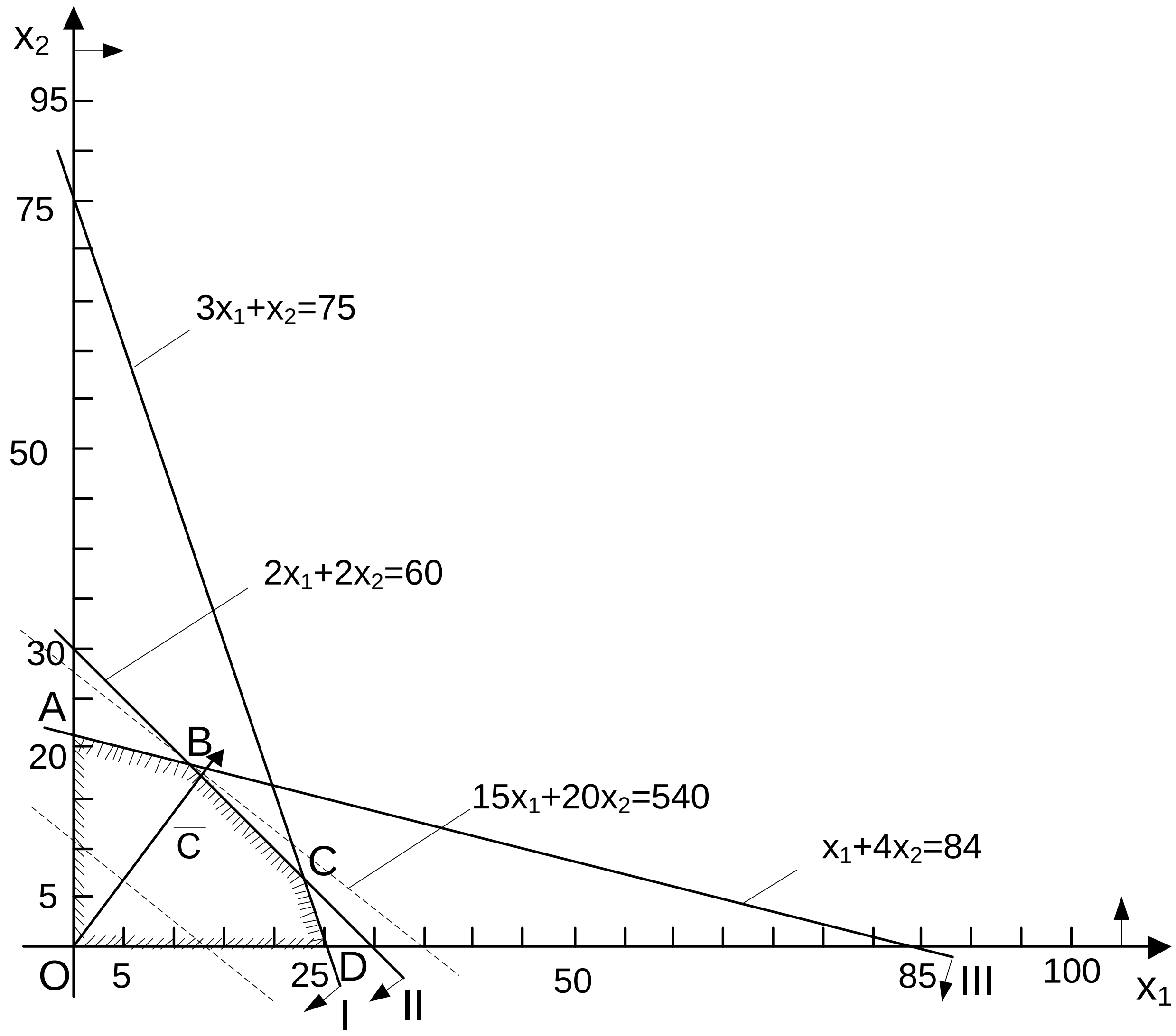

Рис. 1. **Багатокутник розв'язків**

Слід побудувати пряму $15x_1 + 20x_2 = h$ (де h – деяка константа), яка ***перпендикулярна*** вектору і яка ***має спільні точки з багатокутником розв'язків*** (див. рис. 1). Якщо тепер взяти яку-небудь точку, що належить побудованій прямій і багатокутнику рішень, то її координати визначають такий план виробництва карамелі *A* і *B,* за якого прибуток від її реалізації дорівнює h грн.

Переміщуючи побудовану пряму $15x_1 + 20x_2 = h$ ***у напрямку*** вектора $\bar{C}$, можна побачити, що *останньою* спільною точкою її з багатокутником розв'язків задачі є точка *B. Координати* цієї точки і визначають план випуску карамелі *A* і *B,* за якого прибуток від її реалізації є максимальним. На наступному кроці слід знайти координати точки *B* як точки перетину прямих II і III. Отже, її координати задовольняють рівняння цих прямих:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 60, & \text{(II)} \\ x_1 + 4x_2 = 84. & \text{(III)} \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$.

Отже, якщо фабрика виготовить 12 партій карамелі виду *A* та 18 партій карамелі виду *B,* то вона отримає такий максимальний прибуток:

$$Fmax = 15 \cdot 12 + 20 \cdot 18 = 540 \text{ тис. грн.}$$

Розв'язання задач лінійного програмування симплексним методом

Методичні рекомендації

Для розв'язання задачі лінійного програмування симплексним методом її необхідно записати у формі основної (канонічної) ЗЛП.

Симплексний метод розв'язання ЗЛП заснований на переході від одного опорного плану до іншого, за якого значення цільової функції зростає (за умови, що ця задача має оптимальний план, а кожен її опорний план є невиродженим). Зазначений перехід можливий, якщо відомий вихідний опорний план. Розглянемо задачу, для якої цей план можна безпосередньо записати. Нехай потрібно знайти максимум функції:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + a_{1\,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \dots \\ x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}\,x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}).$$

Тут a_{ij}, b_i і c_j $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ – задані постійні числа $(m < n$ і $b_i > 0)$.

Векторна форма цієї задачі має такий вигляд: знайти максимум функції F:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

за умов

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_m P_m + \cdots + x_n P_n = P_0;$$
$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}),$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};\ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix};\ P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1\,m+1} \\ a_{2\,m+1} \\ \dots \\ a_{m\,m+1} \end{pmatrix};$$
$$P_n = \begin{pmatrix} a_{1\,n} \\ a_{2\,n} \\ \dots \\ a_{m\,n} \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Оскільки $b_1 P_1 + b_2 P_2 + \cdots + b_m P_m = P_0$, то за визначенням опорного плану $X = (b_1;\ b_2;\ \dots;\ b_m;\ 0;\ \dots;\ 0)$ є опорним планом цієї задачі (останні $n - m$ компонент вектора X дорівнюють нулю). Цей план визначається системою одиничних векторів $P_1, P_2, \dots, P_m$, які утворюють базис m-вимірного простору. Тому кожен з векторів $P_1, P_2, \dots, P_m$, а також вектор P_0 *можуть бути подані у вигляді лінійної комбінації векторів цього заданого базису.*

Нехай $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \ \ (j = \overline{1,n})$; $\Delta_j = z_j - c_j, (j = \overline{1,n})$. Оскільки вектори $P_1, P_2, \dots, P_m$ – одиничні, то $x_{ij} = a_{ij}$ і $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, а

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, \ (j = \overline{1,n}). \qquad (7)$$

Опорний план $X^* = (x_1^*,\ x_2^*, \dots, x_m^*;\ 0;\ 0;\ \dots;\ 0)$ задачі є *оптимальними*, якщо $\Delta_j \geq 0$ для будь-якого j $(j = \overline{1,n})$.

Дослідження опорного плану на оптимум і подальший обчислювальний процес зручніше вести у вигляді симплексної таблиці (табл. 2).

Таблиця 2

Симплекс-таблиця

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	...	…	…	…	…
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m + 1$			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

У цій таблиці перші m рядків визначаються вихідними даними задачі, а показники рядка $(m+1)$ обчислюють. У цьому рядку в стовпці вектора P_0 записують значення цільової функції, якого вона набуває такого опорного плану $F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i,$ а в стовпці вектора P_j – значення $\Delta_j = z_j - c_j$.

У стовпці $C_б$ цієї таблиці записують коефіцієнти за невідомих цільової функції, які мають ті самі індекси, що і вектори заданого базису.

У стовпці P_0 записують додатні компоненти вихідного опорного плану, в ньому ж у результаті обчислень отримують додатні компоненти оптимального плану. Стовпці векторів P_j є коефіцієнтами розкладання цих векторів за векторами заданого базису.

Перехід від одного опорного плану до іншого зводиться до переходу від однієї симплексної таблиці до іншої.

Алгоритм пошуку оптимального плану симплексним методом містить такі етапи:

1. Знаходять первісний опорний план.
2. Складають симплекс-таблицю.
3. Переглядають елементи рядка $(m+1)$. Якщо $\Delta_j \geq 0$, $(j = \overline{1,n})$, то знайдений опорний план оптимальний. В іншому випадку переходять до етапу 4.

4. Якщо $\Delta_j < 0$ для деякого j і всі відповідні цьому індексу величини $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m})$, то задача не вирішується. Якщо $\Delta_j < 0$ для деяких j і для кожного такого j принаймні одне з чисел $a_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$, то переходять до нового опорного плану на етапі 5.

5. Знаходять направляючі стовпець k і рядок r. Стовпець k визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом Δ_j $(max\left|\Delta_j < 0\right| = \Delta_k, (j = \overline{1,n}))$. Якщо ж таких чисел декілька, то в базис вводиться вектор, який відповідає максимальному числу c_j (для $\Delta_j < 0$). Тоді в базис увійде вектор P_k. Рядок r визначається мінімальним відношенням компонентів стовпця вектора P_0 до додатних компонентів направляючого стовпця $(min(b_i/a_{ik})$ для всіх $a_{ik} > 0$. Тоді з базису вилучають вектор P_r, а число a_{rk} називають *провідним елементом.*

6. Визначають додатні компоненти нового опорного плану, коефіцієнти розкладання векторів за векторами нового базису та числа F_0', Δ_j', за формулами:

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right) \cdot a_{ik}, & i \neq r, \\ \frac{b_r}{a_{rk}}, & i = r. \end{cases} \tag{8}$$

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) \cdot a_{ik}, & i \neq r, \\ \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, & i = r. \end{cases} \tag{9}$$

$$F_0' = F_0 - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right) \cdot \Delta_k, \qquad \Delta_j' = \Delta_j - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) \cdot \Delta_k. \tag{10}$$

або на підставі їхнього визначення. Наявність двох способів знаходження елементів рядка $(m+1)$ дозволяє здійснювати контроль правильності проведених обчислень. Усі ці числа записуються в новій симплекс-таблиці.

7. Перевіряють знайдений опорний план на оптимальність. Якщо план не оптимальний і необхідно перейти до нового опорного плану, то повертаються до етапу 5, а в разі отримання оптимального плану або встановлення неможливості розв'язання, процес розв'язання задачі закінчують.

Розв'язання

Сформульована задача має такий вигляд:

$$F = 15x_1 + 20x_2 \to max \tag{11}$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 75, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_1 + 4x_2 \le 84, \end{cases} \tag{12}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Серед усіх невід'ємних розв'язків цієї системи лінійних нерівностей потрібно знайти таке, за якого функція F набуває максимального значення.

Для цього слід перейти від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей. Треба ввести три додаткові змінні, в результаті чого обмеження запишуться у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 75, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 60, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 84. \end{cases} \tag{13}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{14}$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають невикористану за заданого плану виробництва кількість сировини того чи іншого виду. Наприклад, x_3 – це невикористана кількість сировини I виду (цукровий пісок).

Перетворену систему рівнянь слід записати у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0,$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_0 = \begin{pmatrix} 75 \\ 60 \\ 84 \end{pmatrix}.$$

Оскільки серед векторів P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 є три одиничних вектори, для цієї задачі можна безпосередньо записати опорний план. Таким є план $X = (0;\ 0;\ 75;\ 60;\ 84)$, обумовлений системою тривимірних одиничних векторів $P_3,\ P_4,\ P_5$, які утворюють базис тривимірного векторного простору. Слід скласти симплексну таблицю для І ітерації (табл. 3), підрахувати значення F_0, $\Delta_j = z_j - c_j$ і перевірити вихідний опорний план на оптимальність.

Таблиця 3

Симплекс-таблиця для І ітерації

i	Базис	*Сб*	*P*0	15	20	0	0	0	θ
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_3	0	75	3	1	1	0	0	75 / 1
2	P_4	0	60	2	2	0	1	0	60 / 2
3	P_5	0	84	1	**4**	0	0	1	**84 / 4**
m + 1			0	–15	**–20**	0	0	0	

Як видно з табл. 3, значення основних змінних $x_1,\ x_2$, дорівнюють нулю, додаткові змінні набувають свої значення відповідно до обмежень задачі. Ці значення змінних відповідають такому "плану", за якого нічого не виробляється, сировина не використовується та значення цільової функції дорівнює нулю (тобто вартість виробленої продукції відсутня). Цей план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно і з рядка $(m+1)$ табл. 4, тому що в ньому є два від'ємних числа: $z_1 - c_1 = -15$ і $z_2 - c_2 = -20$. Від'ємні числа не тільки свідчать про можливість збільшення загального прибутку від реалізації виробленої карамелі, але і показують, на скільки збільшиться ця сума за умови введення в план 1 т того чи іншого виду карамелі.

Так, число –15 означає, що у разі включення в план виробництва однієї партії карамелі *А* забезпечується збільшення прибутку на 15 тис. грн. Якщо включити в план виробництва однієї партії карамелі *В*, то загальний прибуток від реалізації продукції зросте на 20 тис. грн. Тому з економічного погляду найбільш доцільним є включення в план виробництва карамелі *В.* Це саме необхідно зробити і на підставі формальної ознаки симплексного методу, оскільки максимальне за абсолютною величиною від'ємне число $\Delta_j < 0$ *розташоване в 4-му рядку стовпця вектора* P_2. Отже, *в базис слід ввести вектор* P_2.

Тепер необхідно визначити вектор, який підлягає вилученню з базису. Для цього знаходимо $\theta_0 = min\,(b_i\,/a_{i2})$ для $a_{i2} > 0$, тобто $\theta_0 = min$ (75 / 1; 60 / 2; 84 / 4) = 84 / 4. $\theta_0 = min\,(b_i\,/a_{i2})$. Знайшовши число 84/4 = 21, тим самим з економічного погляду було визначено, яку кількість карамелі *В* фабрика може виготовляти з урахуванням норм витрат і наявних обсягів сировини кожного виду.

Оскільки сировини заданого виду відповідно є 75, 60 і 84 т, а на одну партію карамелі *В* потрібно витрачати сировини кожного виду відповідно 1, 2 і 4 т, то максимальна кількість карамелі *В,* яка може бути виготовлена фабрикою, дорівнює min(75 / 1; 60 / 2; 84 / 4) = 84 / 4 = 21, тобто обмежувальним фактором для виробництва карамелі *В* є наявний обсяг сировини III виду (фруктове пюре). З урахуванням його наявності підприємство може виготовити 21 партію карамелі *В.* До того ж цьому сировину III виду (фруктове пюре) буде повністю використано.

Отже, *вектор* P_5 *підлягає вилученню з базису*. Стовпець вектора P_2 і третій рядок – направляючі. Слід скласти таблицю для II ітерації (табл. 4). Спочатку треба заповнити рядок вектора, знову введеного в базис, тобто рядок [6], який відповідає направляючому рядку [3]. Елементи цього рядка табл. 4 знаходять із відповідних елементів табл. 3 діленням їх на вирішальний елемент (тобто на 4).

Таблиця 4

Симплекс-таблиця для II ітерації

i	Базис	$C_б$	P_0	30	40	0	0	0	θ	Формула
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5		
4	P_3	0	54	11/4	0	1	0	–1/4	54 · 4 / 11	[1] – [6] · 1
5	P_4	0	18	**3/2**	0	0	1	–1/2	**18 · 2 / 3**	[2] – [6] · 2
6	P_2	20	21	1/4	1	0	0	1/4	21 · 4	[3] / 4
m + 1			420	**–10**	0	0	0	5		

У стовпці $C_б$ треба записати коефіцієнт $C_2 = 20$, розташований у стовпці вектора P_2*, який входить у базис.* Потім заповнити елементи стовпців для векторів, які входять у новий базис. У цих стовпчиках на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставити одиниці, а всі інші елементи вважати рівними нулю. Для визначення інших елементів табл. 4 застосувати рекурентні формули (8) – (10).

Після закінчення розрахунку всіх елементів у табл. 4 отримано новий опорний план і коефіцієнти розкладання векторів P_j $\left(j = \overline{1,5}\right)$ через базисні вектори P_3, P_4, P_2 і значення Δ_j' і F_0'. Як видно з цієї таблиці, новим опорним планом задачі є план $X = (0;\ 21;\ 54;\ 18;\ 0)$. За такого плану виробництва виготовляється 21 партія карамелі *B,* залишається невикористаною 54 т сировини І виду (цукрового піску) і 18 т сировини ІІ виду (патоки). Прибуток від реалізації всієї виробленої за цього плану продукції дорівнює 420 тис. грн. Зазначені числа записані в стовпці вектора P_0.

Економічний сенс даних інших стовпців є складнішим. Так, наприклад, можна взяти дані стовпця вектора P_1. Число 1/4 в третьому рядку цього стовпця показує, на скільки потрібно зменшити виготовлення карамелі *B,* якщо запланувати випуск однієї партії карамелі *A.* Числа 11/4 і 3/2 в першому і другому рядках вектора P_1 показують відповідно, скільки буде потрібно сировини І і ІІ виду за умови урахування у плані виробництва однієї партії карамелі *A,* а число (-10) в рядку $(m+1)$ показує, що якщо буде заплановано випуск однієї тонни карамелі *A,* то це забезпечить збільшення прибутку від реалізації продукції у вартісному вираженні на 10 тис. грн. Іншими словами, якщо включити в план виробництва продукції одну партію карамелі *A,* то це потребує зменшення випуску карамелі *B* на 1/4 партії і потребує додаткових витрат 11/4 т сировини І виду (цукрового піску) і 3/2 т сировини ІІ виду (патоки), а загальний прибуток від реалізації продукції відповідно до нового оптимального плану зросте на 10 тис. грн. Отже, числа 11/4 і 3/2 виступають ніби новими "нормами" витрат сировини І і ІІ виду на виготовлення однієї тонни карамелі *A,* що пояснюється зменшенням випуску карамелі *B.*

Дещо інший економічний зміст мають числа, записані в стовпці вектора P_5. Число 1/4 в третьому рядку цього стовпця показує, що збільшення обсягів сировини ІІІ виду (фруктового пюре) на одну тонну, дозволило б збільшити випуск карамелі *B* на 1/4 партії. Одночасно потрібно було б додатково 1/4 т сировини І виду (цукрового піску) і 1/2 т сировини ІІ виду (патоки). Збільшення випуску карамелі *B* на 1/4 партії приведе до зростання прибутку від реалізації продукції на 5 тис. грн.

З викладеного економічного сенсу даних табл. 4 виходить, що знайдений на II ітерації план задачі не є оптимальним. Це видно з рядка $(m+1)$ табл. 4, оскільки в стовпці вектора P_1 цього рядка знаходиться від'ємне число -10. Виходить, *у базис варто ввести вектор* P_1, тобто в новому плані необхідно передбачити випуск карамелі *А.* У ході визначення можливого обсягу випуску карамелі *А* потрібно враховувати наявну кількість сировини кожного виду, а саме: можливий випуск карамелі *А* визначається $\theta_1 = min\,(b_i\,/a_{i1})$ для $a_{i1} > 0$, тобто $\theta_1 = min\,(54 \cdot 4/11;\ 18 \cdot 2/3;\ 21 \cdot 4/1) = 36/3 = 12.$

Отже*, вилученню з базису підлягає вектор* P_4*,* іншими словами, випуск карамелі *А* обмежений сировиною II виду, що є в розпорядженні підприємства. З урахуванням наявних обсягів цієї сировини фабриці варто виготовити 12 партій карамелі *А.* Число 3/2 є провідним елементом, а стовпець вектора P_1 і другий рядок (рядок [5]) табл. 5 – направляючі. Слід скласти таблицю для III ітерації (табл. 5).

У табл. 5 спочатку заповнити елементи другого рядка (рядок [8]), який є рядком вектора P_1, який *вводиться знову в* базис. Елементи цього рядка буде отримано з елементів рядка [5] табл. 5 діленням останніх на провідний елемент (тобто на 3/2).

Таблиця 5

Симплекс-таблиця для III ітерації

i	Базис	$C_б$	P_0	30	40	0	0	0	θ	Формула
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5		
7	P_3	0	21	0	0	1	–1 5/6	2/3		[4] – [8] · 11/4
8	P_1	15	12	1	0	0	2/3	–1/3		[5] / (3/2) = [5] · 2/3
9	P_2	20	18	0	1	0	–1/6	1/3		[6] – [8] · 1/4
m + 1			540	0	0	0	6 2/3	1 2/3		

У ході цього в стовпці $C_б$ цього рядка записуємо $C_1 = 15$. Потім необхідно заповнити елементи стовпців векторів базису та за правилом трикутника обчислити елементи інших стовпців. У підсумку в табл. 6 буде отримано новий опорний план $X =$ (12; 18; 21; 0; 0) і коефіцієнти розкладання векторів P_j $\left(j = \overline{1,5}\right)$ через базисні вектори P_3, P_1, P_2, і значення

Δ_j'' і F_0''. Розв'язання цього прикладу симплексним методом можна проводити, використовуючи лише одну таблицю, в якій послідовно записані всі три ітерації обчислювального процесу, як це наведено в табл. 6.

Таблиця 6

Симплекс-таблиця для всіх ітерацій

i	Базис	$C_б$	P_0	15	20	0	0	0	θ	Формула
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5		
1	P_3	0	75	3	1	1	0	0	75/1	–
2	P_4	0	60	2	2	0	1	0	60/2	–
3	P_5	0	84	1	**4**	0	0	1	**84/4**	–
m + 1			0	–15	–**20**	0	0	0	–	–
4	P_3	0	54	2 3/4	0	1	0	–1/4	54 · 4/11	[1] – [6] · 1
5	P_4	0	18	**1 1/2**	0	0	1	–1/2	**18 · 2/3**	[2] – [6] · 2
6	P_2	20	21	1/4	1	0	0	1/4	21 · 4	[3] / 4
m + 1			420	–**10**	0	**0**	0	5	–	–
7	P_3	0	21	0	0	1	–1 5/6	2/3	–	[4] – [8] · 11/4
8	P_1	15	12	1	0	0	2/3	–1/3	–	[5] / (3/2) = [5] · 2/3
9	P_2	20	18	0	1	0	–1/6	1/3	–	[6] – [8] · 1/4
m + 1			540	0	0	0	6 2/3	1 2/3	–	–

Слід перевірити, чи є заданий опорний план оптимальним чи ні. Для цього розглянути рядок $(m+1)$ табл. 5 (або табл. 6). У цьому рядку серед чисел Δ_j'' немає від'ємних. Це означає, що знайдений опорний план є оптимальним і $Fmax = 540$. Отже, план випуску продукції, який охоплює виготовлення 12 партій карамелі *A* та 18 партій карамелі *B*, є оптимальним. За заданим планом випуску карамелі повністю використовується сировина II і III видів (патока та фруктове пюре) і залишається невикористаним 21 т сировини I виду (цукрового піску), а прибуток від реалізації виробленої продукції дорівнює 540 тис. грн.

Коротка відповідь може бути записана так:

$$x_1^* = 12;\ x_2^* = 18;\ Fmax = 540.$$

Практичне заняття 3
Побудова математичної моделі двоїстої задачі і пошук її оптимального плану

Мета – набуття навичок розроблення математичної моделі та пошуку розв'язку двоїстої задачі лінійного програмування, виходячи з заданих економічних, технологічних, ресурсних та інших обмежень.

Постановка двоїстої задачі

Методичні рекомендації

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином зіставити деяку іншу ЗЛП, яка називається двоїстою або суміжною щодо вихідної (прямої). Нехай вихідна задача має вигляд:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max. \tag{15}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k1}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,1}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m\,2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{16}$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1, l},\ \ l \le n\right). \tag{17}$$

Задача, яка полягає в знаходженні мінімального значення функції:

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to min. \tag{18}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \dots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_n. \end{cases} \tag{19}$$

$$y_i \ge 0, \quad \left(i = \overline{1, k},\ \ k \le m\right), \tag{20}$$

називається *двоїстою* щодо задачі (15) – (17).

Задачі (15) – (17) і (18) – (20) утворюють пару задач, які називаються в лінійному програмуванні *двоїстою парою*.

Порівнюючи дві сформульовані задачі, можна побачити, що двоїста задача щодо вихідної формується відповідно до таких правил:

1. Цільова функція вихідної задачі (15) – (17) задається на максимум, а цільова функція двоїстої (18) – (20) на мінімум.

2. Матриця A складена з коефіцієнтів за невідомих у системі обмежень (16) вихідної задачі (15) – (17), і аналогічна матриця A^T у двоїстій задачі (18) – (20) отримані послідовним транспортуванням (тобто заміною рядків стовпцями, а стовпців – рядками).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Кількість змінних у двоїстій задачі (18) – (20) дорівнює кількості обмежень у системі (16) вихідної задачі (15) – (17), а кількість обмежень у системі (19) двоїстої задачі – кількості змінних у вихідній задачі.

Коефіцієнтами за невідомих у цільовій функції (18) двоїстої задачі (18) – (20) є вільні члени в системі (16) вихідної задачі (15) – (17), а правими частинами в обмеженнях системи (19) двоїстої задачі – коефіцієнти за невідомих у цільовій функції (15) вихідної задачі.

3. Якщо змінна x_j вихідної задачі (15) – (17) може набувати тільки лише невід'ємні значення, то j-та умова в системі (19) двоїстої задачі (18) – (20) є нерівністю виду "≥". Якщо ж змінна x_j може набувати як додатні, так і від'ємні значення, то j-те обмеження в системі (19) є рівнянням. Аналогічні зв'язки мають місце між обмеженнями системи (15) вихідної задачі (15) – (17) і змінними двоїстої задачі (18) – (20). Якщо i-те обмеження в системі (16) вихідної задачі є нерівністю, то i-та змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В іншому випадку змінна y_i може набувати як додатні, так і від'ємні значення.

Двоїсті пари задач зазвичай поділяють на симетричні і несиметричні. У симетричній парі двоїстих задач обмеження (16) прямої задачі і обмеження (19) двоїстої задачі є нерівностями виду "≤" і "≥" відповідно. Отже, змінні обох задач можуть набувати тільки невід'ємні значення.

Розв'язання

Сформульована задача має вигляд:

$$F = 15x_1 + 20x_2 \to max$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 75, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_1 + 4x_2 \le 84, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Серед усіх невід'ємних рішень цієї системи лінійних нерівностей потрібно знайти таке, за якого функція F набуває максимального значення.

Слід скласти двоїсту задачу щодо вихідної.

Кількість змінних у двоїстій задачі дорівнює кількості рівнянь у системі (2), тобто дорівнює трьом. Коефіцієнтами в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи рівнянь (2), тобто числа 75, 60, 84.

Цільова функція вихідної задачі (1) – (3) досліджується на максимум, а система умов (2) містить тільки нерівності. Тому в двоїстій задачі цільова функція досліджується на мінімум, а її змінні можуть набувати тільки невід'ємні значення. Оскільки всі три змінні вихідної задачі (1) – (3) набувають невід'ємні значення, то в системі умов двоїстої задачі мають бути три нерівності виду "≥". Отже, для задачі (1) – (3) двоїста задача така: знайти мінімум функції F^*:

$$F^* = 75y_1 + 60y_2 + 84y_3 \to min \tag{23}$$

за умов

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 15, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 20. \end{cases} \tag{24}$$

$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,3}). \qquad (25)$$

Треба розглянути економічну інтерпретацію двоїстої задачі.

Двоїсті змінні – це оцінки для кожного з видів сировини. Так y_1 – це оцінка сировини I виду (цукрового піску), y_2, y_3, – оцінки сировини II і III видів (патоки і фруктового пюре). Ці оцінки мають бути такими, щоб оцінка всієї використовуваної сировини була мінімальною, тобто:

$$F^* = 75y_1 + 60y_2 + 84y_3 \to min.$$

Сумарна оцінка сировини, що використовується на виробництво одиниці продукції кожного виду (однієї партії карамелі), має бути не менше ціни (прибутку від реалізації) одиниці продукції цього виду, тобто y_1, y_2, y_3 мають задовольняти таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 15, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 20, \end{cases}$$
$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,3}).$$

Як видно, задачі (1) – (3) і (23) – (25) утворюють симетричну пару двоїстих задач. Розв'язок прямої задачі дає оптимальний план виробництва карамелі *A* і *B,* а рішення двоїстої – оптимальну систему оцінок сировини (цукрового піску, патоки та фруктового пюре), використовуваної для виробництва цих виробів.

Пошук оптимального плану двоїстої задачі

Методичні рекомендації

Якщо **основна** задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, *то для двоїстої задачі може бути знайдено оптимальний план* Y^*.

Отже, якщо симплексним методом знайти оптимальний план задачі (11) – (14) (тобто задачі (1) – (3), записаної у формі основної ЗЛП), то, використовуючи останню симплекс-таблицю, можна визначити оптимальний план двоїстої задачі (23) – (25).

У тому випадку, коли серед векторів $P_1, P_2, \dots, P_n$, *складених з коефіцієнтів за невідомих у системі рівнянь* (12), є m одиничних, то компоненти оптимального плану двоїстої задачі збігаються з відповідними елементами рядка $(m+1)$ стовпців одиничних векторів (тобто стовпців первісного базису).

Зазначене має місце і для симетричної пари двоїстих задач. За цих умов, оскільки система обмежень вихідної задачі містить нерівності виду "≤", то *компоненти оптимального плану двоїстої задачі збігаються з відповідними числами рядка* $(m+1)$ *останньої симплекс-таблиці розв'язку вихідної задачі*. Зазначені числа розташовані в стовпцях векторів, які відповідають додатковим змінним.

За умови, що знайдений оптимальний план, мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі збігається з максимальним значенням цільової функції вихідної задачі, тобто $F^*min = Fmax$.

Розв'язання

Оскільки побудована модель (23) – (25) двоїстої задачі є симетричною щодо прямої (1) – (3), то оптимальний план двоїстої задачі може бути знайдений як значення відносних оцінок рядка $(m+1)$ останньої симплексної таблиці (табл. 6), розташовані в стовпцях, відповідних первинному опорному плану, тобто в стовпцях додаткових змінних P_3, P_4, P_5.

Отже, $y_1^* = 0$; $y_2^* = 20/3$; $y_3^* = 5/3$.

Змінні y_2^* і y_3^* позначають умовні двоїсті оцінки одиниці сировини, відповідно II і III видів (патоки і фруктового пюре). Ці оцінки відмінні від нуля, а сировину II і III видів повністю використано за оптимальним планом виробництва карамелі. Двоїста оцінка одиниці сировини I виду (цукрового піску) дорівнює нулю. Цей вид сировини не повністю використовується за оптимальним планом виробництва продукції (як було зазначено раніше, залишок становить 21 т).

Отже, додатну двоїсту оцінку мають лише ті види сировини, які повністю використовуються за оптимальним планом виробництва карамелі. Тому двоїсті оцінки визначають дефіцитність використовуваної фабрикою сировини. Більше того, величина цієї двоїстої оцінки показує, на скільки зростає максимальне значення цільової функції прямої задачі у разі збільшення кількості сировини відповідного виду на одиницю (1 т). Так, збільшення кількості сировини II виду (патоки) на 1 т приведе до того, що з'явиться можливість знайти новий оптимальний план випуску карамелі, за якого загальний прибуток від реалізації виготовленої продукції зросте на 20/3 ≈ 6,667 тис. грн і становитиме 540 + 6,667 = 546,667 тис. грн. Точно так само збільшення на 1 т сировини III виду (фруктового пюре) дозволить знайти новий оптимальний план випуску карамелі, за якого загальний прибуток від реалізації виготовленої продукції зросте на 5/3 ≈ ≈ 1,667 тис. грн і становитиме 540 + 1,667 = 541,667 тис. грн. Слід продовжити розгляд оптимальних двоїстих оцінок. Обчислюючи мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі:

$$F^{*}min = 75 \cdot 0 + 60 \cdot \left(\frac{20}{3}\right) + 84 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = 540,$$

можна побачити, що воно збігається з максимальним значенням цільової функції вихідної задачі.

Отже, сумарна оцінка всієї використаної на виробництво карамелі сировини (цукрового піску, патоки та фруктового пюре) дорівнює 540 тис. грн.

У ході підстановки оптимальних двоїстих оцінок у систему обмежень двоїстої задачі отримуємо:

$$\begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot \left(\frac{20}{3}\right) + 1 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = 15, \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot \left(\frac{20}{3}\right) + 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = 20. \end{cases}$$

Перше і друге обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі рівності. Це означає, що двоїсті оцінки сировини, яка використовується для виробництва однієї партії відповідно карамелі А і В, дорівнюють прибуткам від їхньої реалізації. Тому випускати ці два види продукції за двоїстими оцінками економічно доцільно. Їхнє виробництво передбачено оптимальним планом прямої задачі.

У випадку, якщо одне з обмежень виконувалося б як сувора нерівність, то це означало б, що двоїста оцінка сировини, яка використовується на виробництво однієї партії карамелі, вища прибутку від реалізації цього виду продукції і, отже, випускати карамель цього виду невигідно. Його виробництво і не передбачалося б оптимальним планом прямої задачі.

Отже, двоїсті оцінки тісно пов'язані з оптимальним планом прямої задачі. Будь-яка зміна вихідних даних прямої задачі може вплинути як на її оптимальний план, так і на систему оптимальних двоїстих оцінок.

Аналіз стійкості двоїстих оцінок

Методичні рекомендації

Розглянемо основну ЗЛП (15) – (17) і двоїсту до неї (18) – (20). Припустимо, що задача (15) – (17) має невироджені опорні плани і хоча б один з них є оптимальним. Максимальне значення цільової функції (15) задачі (16) – (17) розглянемо як функцію вільних членів системи лінійних рівнянь (16): F_{max} $(b_1, b_2, ..., b_m)$.

Теорема 1. *У оптимальному плані двоїстої задачі* (18), (19) *значення змінної* y_i* *чисельно дорівнює частковій похідній функції* F_{max} $(b_1, b_2, ..., b_m)$ за *заданим аргументом, тобто:*

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i} = y_i^*. \qquad (26)$$

Останнє рівняння означає, що зміна значень величин b_i веде до збільшення або зменшення F_{max} $(b_1, b_2, ..., b_m)$. Ця зміна F_{max} $(b_1, b_2, ..., b_m)$ визначається величиною $|y_i^*|$ і може бути охарактеризована лише тоді, коли зі зміною величин b_i значення змінних y_i^* в оптимальному плані відповідної двоїстої задачі (18) – (20) залишаються незмінними. Тому становить інтерес визначити такі інтервали зміни кожного з вільних членів системи лінійних рівнянь (16), в яких оптимальний план двоїстої задачі (18) – (20) не змінюється. Це має місце для всіх тих значень $b_i + \Delta b_i$, за яких стовбець вектора P_0 останньої симплекс-таблиці розв'язання задачі (15) – (17) не містить від'ємних чисел, тобто тоді, коли серед компонент вектора:

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots \\ b_n + \Delta b_n \end{pmatrix}$$

немає від'ємних. Тут B^{-1} – матриця, зворотна матриці *B*, складеної з компонентів векторів базису, який визначає оптимальний план завдання (15) – (16).

Отже, якщо знайдено розв'язок задачі (15) – (17), то можна провести аналіз стійкості двоїстих оцінок щодо змін *bi.* Це, в свою чергу, дозволяє проаналізувати стійкість оптимального плану задачі (18) – (20) щодо змін вільних членів системи лінійних рівнянь (16), оцінити ступінь впливу зміни *bi* на максимальне значення цільової функції задачі (15) – (17) і дає можливість визначити найбільш доцільний варіант можливих змін b_i.

Задача

За даним практичного завдання 1 знайти:

а) інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно змін ресурсів кожного типу;

б) зміну загальної вартості виготовленої продукції, яка визначається оптимальним планом її виробництва у разі зменшення кількості ресурсу I типу на 20 од. і збільшенні кількості ресурсів II та III типів відповідно на 30 і 100 од.; провести аналіз можливої зміни загальної вартості продукції як під час зміни обсягів кожного з ресурсів окремо, так і за їхньої одночасної зміни в зазначених розмірах.

Розв'язання

1. Визначимо інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно змін ресурсів кожного виду. Для цього знайдемо компоненти вектора

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 + \Delta b_1 \\ 60 + \Delta b_2 \\ 84 + \Delta b_3 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} 75 + \Delta b_1 - \dfrac{11}{6(60+\Delta b_2)} + \dfrac{2}{3(84+\Delta b_3)} \\ \dfrac{2}{3(60+\Delta b_2)} - \dfrac{1}{3(84+\Delta b_3)} \\ -\dfrac{1}{6(60+\Delta b_2)} + \dfrac{1}{3(84+\Delta b_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 + \Delta b_1 - \dfrac{11}{6}\Delta b_2 + \dfrac{2}{3}\Delta b_3 \\ 12 + \dfrac{2}{3}\Delta b_2 - \dfrac{1}{3}\Delta b_3 \\ 38 - \dfrac{1}{6}\Delta b_2 + \dfrac{1}{3}\Delta b_3 \end{pmatrix}
$$

і визначимо, за яких значеннях Δb_1, Δb_2 и Δb_3 вони не від'ємні. Перш ніж це зробити, відзначимо, що матриця B^{-1} зворотна матриці *B,* складеної з компонентів векторів P_1 і P_2 базису, який визначає оптимальний план задачі (11) – (13), записана безпосередньо на підставі даних табл. 6, а саме: елементи матриці B^{-1} взяті зі стовпців векторів P_3, P_4 *і* P_5, утворюють початковий одиничний базис. Умова невід'ємності компонент зазначеного вище вектора призводить до такої системи нерівностей:

$$
\begin{gathered}
21 + \Delta b_1 - \frac{11}{6}\Delta b_2 + \frac{2}{3}\Delta b_3 > 0, \\
12 + \frac{2}{3}\Delta b_2 - \frac{1}{3}\Delta b_3 > 0, \\
18 - \frac{1}{6}\Delta b_2 + \frac{1}{3}\Delta b_3 > 0.
\end{gathered}
$$

Очевидно, якщо $\Delta b_2 = 0$ и $\Delta b_3 = 0$, то $\Delta b_1 > -21$. Це означає, що якщо кількість ресурсів I типу буде збільшена або зменшена в межах 21 од., то, незважаючи на це, оптимальним планом двоїстої задачі (23) – (25) залишається $Y^*=(0; 20/3; 5/3)$.

Далі, якщо $\Delta b_1 = 0$ и $\Delta b_3 = 0$, то $-18 < \Delta b_2 < 11{,}45$, а якщо $\Delta b_1 = 0$ і $\Delta b_2 = 0$, то $-31{,}5 < \Delta b_3 < 36$. Отже, якщо кількість одного з типів ресурсів II або III належить відповідно до проміжку $42 < b_2 < 71{,}45$ або $52{,}5 < b_3 < 120$, а кількість інших ресурсів залишається первинним, то двоїста задача (23) – (25) має один і той самий оптимальний план $Y^* = (0; 20/3; 5/3)$.

2. Якщо b_1, b_2 і b_3 змінюються одночасно, то дослідження стійкості двоїстих оцінок дещо ускладнюється, оскільки в цьому випадку потрібно знайти багатогранник розв'язків системи лінійних нерівностей (24). Точки цього багатогранника визначають кількість ресурсів кожного типу, за яких двоїсті оцінки залишаються колишніми.

Проаналізуємо, як одночасно змінюється кількість ресурсів усіх трьох типів. До того ж кількість ресурсу I типу зменшується на 20 од. ($\Delta b_1 = -20$), а кількість ресурсів II і III типів відповідно збільшуються на 50 і 100 од. ($\Delta b_2 = 30$ и $\Delta\ b_3 = 100$). Отже, щоб з'ясувати, чи залишається $У^* = (0;\ 20/3;\ 5/3)$ оптимальним планом двоїстої задачі (23) – (25) у разі зазначеної зміни кількості ресурсів чи ні, потрібно перевірити, задовольняють дані значення Δb_1, Δb_2 і Δb_3 систему нерівностей (24) чи ні. Для цього підставимо в нерівності (24) замість Δb_1, Δb_2 і Δb_3 їх значень – 20, 50 та 100:

$$21 - 20 - \frac{11}{6}50 + \frac{2}{3}100 > 0,$$
$$12 + \frac{2}{3}50 - \frac{1}{3}100 > 0,$$
$$18 - \frac{1}{6}50 + \frac{1}{3}100 > 0.$$

Отже, незважаючи на зміну обсягів ресурсів у вказаних розмірах, оптимальним планом двоїстої задачі залишиться $Y^* = (0;\ 20/3;\ 5/3)$. Цей висновок дозволяє скористатися формулою (26) для визначення приросту максимального значення функції (23) за зазначених змін кількості ресурсів. У цьому випадку:

$$\Delta F_{max} = y_1^*\Delta b_1 + y_2^*\Delta b_2 + y_3^*\Delta b_3 = 0 \cdot (-20) + \frac{20}{3} \cdot 50 + \frac{5}{3} \cdot 100 = 500.$$

Це означає, що зменшення кількості ресурсів I типу на 20 од. і збільшення кількості ресурсів II і III типів відповідно на 50 і 100 од. призведе до можливості побудови такого плану виробництва продукції, реалізація якого забезпечить випуск виробів на 500 грн. більше, ніж за плану виробництва продукції, обумовленого початковою кількістю ресурсів. Зменшення кількості ресурсів I типу на 20 од. не вплине на зміну максимального значення функції, в той час як збільшення кількості ресурсів II і III типів на 50 і 100 од. приведе до збільшення максимального значення функції відповідно на $y^*_2\Delta b_2 = (20/3)\ 50 = 333{,}3$ та $y^*_3\Delta b_3 = (5/3)100 = 166{,}7$.

Розв'язання задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом

Методичні рекомендації

Двозначний симплекс-метод, як і симплекс-метод, застосовується під час розв'язання задачі лінійного програмування, записаного у вигляді основної задачі, для якого серед векторів Р, складених з коефіцієнтів за змінних в системі рівнянь, існує m одиничних. Разом з тим двоїстий симплекс-метод можна застосовувати під час розв'язання задач лінійного програмування, вільними членами системи рівнянь якої можуть бути будь-якими числами (під час розв'язання задачі методом симплексного методу ці числа вважаються невід'ємними). Таку задачу і розглянемо, попередньо поклавши, що одиничними є вектори $P_1\ , P_2, \ldots, P_m$, тобто розглянемо задачу, яка складається із визначення максимального значення функції:

$$F = c_1x_1\ +\ c_2x_2 + \cdots +\ c_nx_n \qquad (27)$$

за умов

$$x_1P_1\ +\ x_2P_2 + \cdots +\ x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + \cdots + x_nP_n = P_0, \qquad (28)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix};\ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix};\ P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1\,m+1} \\ a_{2\,m+1} \\ \ldots \\ a_{m\,m+1} \end{pmatrix}; \qquad (29)$$

$$P_n = \begin{pmatrix} a_{1\,n} \\ a_{2\,n} \\ \ldots \\ a_{m\,n} \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

і серед чисел $b_i(\mathrm{i}\ =\ \overline{1, m})$ є невід'ємні.

У цьому випадку $X = (b_1;\ b_2;\ ...;\ b_m;\ 0;\ ...;\ 0)$ – це рішення системи лінійних рівнянь (28). Однак це рішення не виникає за планом завдання (27) – (29), так як серед його компонентів є негативні числа.

Оскільки вектори $P_1, P_2, ..., P_m$- одиничні, кожний з векторів $P_j\big(j = \overline{1,n}\big)$, можна подати у вигляді лінійної комбінації цих векторів, причому коефіцієнти розкладання векторів по векторам $P_1, P_2, ..., P_m$ служать числам $x_{ij} = a_{ij}$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Отже, можна знайти:

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, (j = \overline{1,n}).$$

Визначення. Розв'язок $X = (b_1;\ b_2;\ ...;\ b_m;\ 0;\ ...;\ 0)$ системи лінійних відношень (28), що визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, називається псевдопланом завдання (27) – (29), якщо $\Delta_j \geq 0$ для будь-якого j $(j = \overline{1,n})$.

Теорема 1. Якщо в псевдоплані $X = (b_1;\ b_2;\ ...;\ b_m;\ 0;\ ...;\ 0)$, визначеним базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, є хоча б одне від'ємне число $b_j < 0$ таке, що всі $a_{ij} > 0$ $(j = \overline{1,n})$, то задача (27) – (29) взагалі не має планів.

Теорема 2. Якщо в псевдоплані $X = (b_1;\ b_2;\ ...;\ b_m;\ 0;\ ...;\ 0)$, визначеним базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, існують від'ємні числа $b_j < 0$ такі, що для будь-який з них існує число $a_{ij} < 0$ $(j = \overline{1,n})$, то можна перейти до нового псевдоплану, за якого значення цільової функції задачі (27) – (29) не зменшується.

Сформульовані теореми дають підстави для побудови алгоритму двоїстого симплексу-методу.

Продовжимо розв'язання задачі (27) – (29). Нехай $X = (b_1;\ b_2;\ ...;$ $b_m;\ 0;\ ...;\ 0)$ – псевдоплан цієї задачі. На основі вхідних даних складається симплекс-таблиця (табл. 7), в якій деякі елементи стовпця вектора P_0 є від'ємними числами. Якщо таких чисел немає, то з симплексу-таблиці записано оптимальний план завдання (27) – (29), оскільки, за фактом, всі $\Delta_j \geq 0$. Отже, для визначення оптимального плану (за умови, що він існує) слід здійснити упорядкований перехід від однієї таблиці до іншої до тих пір, поки з вектора P_0 не будуть вилучені від'ємні елементи. До того ж мають залишатися невід'ємними всі елементи рядка $(m + 1)$, тобто $x_j - c_j \geq 0$ для будь-якого j $\big(j = \overline{1,n}\big)$.

Таблиця 7

Симплекс-таблиця двоїстого симлекс-метода

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_r	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1r}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2r}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	...	…	…	…	…
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rr}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mr}	…	a_{mn}
$m + 1$			F_0	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_r	…	Δ_n

Отже, після складання симплекс-таблиць перевіряють, чи є в графі вектора P_0 від'ємні числа. Якщо їх немає, то оптимальний план задачі знайдено. Якщо ж вони мають (що ми і припускаємо), то вибираємо найбільш велике в абсолютному значенні від'ємне число. У тому випадку, коли таких чисел кілька, беруть будь-яке з них, наприклад число b_i. Вибір цього числа визначає вектор, виключається з базису, тобто в цьому випадку з базису виводиться вектор Р. Щоб визначити, який вектор слід ввести в базис, знайдемо $min\ (-\Delta_j,/\ a_{ij})$, де $a_{ij} < 0$.

Нехай це мінімальне значення приймається за $j = r$, тож в основу вводять вектор P_r. Число a_{lr} є дозволеним елементом. Перехід до нової симплекс-таблиці виконується за звичайними правилами симплексного методу. Ітераційний процес продовжують до тих пір, поки в стовпці вектора P_0 не буде більше негативних чисел. При цьому знайдуть оптимальний план прямої задачі, а відповідно, і двоїстої. Якщо на деякому кроці з'ясовується, що в і-ому рядку симплекс-таблиць (див. табл. 7) у стовпці вектора P_0 стоїть від'ємне число, а серед інших елементів цього рядка немає від'ємних, то вихідна задача не має розв'язку .

Пошук розв'язання задач (27) – (29) двоїстим симплексом-методом охоплює чотири етапи:

1. Знаходять псевдоплан задачі.

2. Перевіряють цей псевдоплан на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то розв'язок задачі знайдено. У протилежному випадку встановлюють або нерозв'язність задачі, або переходять до нового псевдоплану.

3. Знаходять направляючий рядок з допомогою обчислення найбільшого за абсолютною величиною від'ємного числа вектора P_0 і далі вибирають стовпець, що направляє, за допомогою найменшого числа за абсолютною величиною серед тих, які обчислюють як ділення елементів рядка $(m+1)$ до відповідного від'ємного елемента направляючого рядка.

4. Знаходять новий псевдоплан і повторюють усі дії, що відбувалися з етапу 2.

Розв'язання

За даними складеної двоїстої задачі (23) – (25) наведемо її формальну постановку для розглянутого раніше прикладу:

$$F^* = 75y_1 + 60y_2 + 84y_3 \to min.$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 15, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 20, \end{cases}$$
$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,3}).$$

Запишемо систему обмежень у вигляді канонічної форми з додатковим змінними:

$$\begin{cases} -3y_1 - 2y_2 - y_3 + y_4 = -15, \\ -y_1 - 2y_2 - 4y_3 + y_5 = -20. \end{cases}$$

Додавши у систему нерівностей додаткові змінні, вибравши як базис вектори P_4 і P_5, складемо симплексну таблицю для задачі (табл. 8).

Таблиця 8

Симплекс-таблиця для першої ітерації

i	Базис	$C_б$	P_0	75	60	84	0	0	Формула
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_4	0	–15	–3	–2	–1	1	0	[3] = [1] + [4]
2	P_5	0	**–20**	–1	–2	–4	0	1	[4] = [2] / (–4)
m + 1			0	–75	–60	–84	0	0	
θ				75	30	**21**	–	–	

З цієї таблиці видно, що початковим планом двоїстої задачі є $y = (0, 0, 0)$. За цього плану $F^* = 0$. Так як у стовпці вектора P_0 табл. 8 є два від'ємних числа (–15 і –20), а в рядку $m + 1$ від'ємних чисел немає, то в співвідношенні з алгоритмом двоїстого симплексу-методу перейдемо до нової симплекс-таблиці. У цьому випадку це можна зробити, так як в рядках векторів P_4 та P_5 є від'ємні числа. Якщо б вони не були в одному з рядків, то задача була б нерозв'язаною.

Вектор, що вилучається з базису, визначається найбільшим за абсолютним значенням від'ємним числом в стовпці вектора P_0. У цьому випадку це число –20. Звідси з базису вилучаємо вектор P_5. Щоб визначити, який вектор потрібно ввести в базис, знайдемо $\theta = min\,(-\Delta_j,/\ a_{2j})$, де $a_{2j} < 0$. $\theta = min\left(-\frac{75}{-1}; -\frac{60}{-2}; -\frac{84}{-4}\right) = 21$. Тобто в базис вводимо вектор P_3. Переходимо до нової симплекс-таблиці (табл. 9).

Таблиця 9

Симплекс-таблиця для другої ітерації

i	Базис	Cб	P0	75	60	84	0	0	Формула
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
3	P_4	0	**–10**	–2 3/4	–1 1/2	0	1	–1/4	[5] = [3] / (–3/2) = [3] · (–2/3)
4	P_3	84	5	1/4	1/2	1	0	–1/4	[6] = [4] – [5] · 1/2
m + 1			–420	54	–18	0	0	–21	
θ				19 2/3	12	–	–	84	

З цієї таблиці видно, що отримано новий план двоїстої задачі $y = (0, 0{,}5)$. За цього плану значення її лінійної форми відповідає $F^* = -420$. Отже, за допомогою алгоритму двоїстого симплекс-методу виконують упорядкований перехід від одного плану двоїстої задачі до іншого. Так як в стовпці вектора P_0 табл. 9 стоїть від'ємне число –10, то розглянемо елементи третього рядка. Серед цих чисел є від'ємні –2 3/4 та –1 1/2. Якщо вони були б відсутні, то задача була б нерозв'язною. У цьому випадку перейдемо до нової симплекс-таблиці аналогічно за розрахунками у першій ітерації $\theta = min\left(-\frac{54}{-11}; -\frac{18 \cdot 2}{-3}; -\frac{21 \cdot 4}{-1}\right) = 12$ (табл. 10).

Таблиця 10

Симплекс-таблиця для третьої ітерації

i	Базис	$C_б$	P_0	75	60	84	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
5	P_2	60	6 2/3	1 5/6	1	0	–2/3	1/6
6	P_3	84	1 2/3	–2/3	0	1	1/3	–1/3
m + 1			540	21	0	0	12	18

Як видно з табл. 10 усі значення вектора P_0 є додатними, знайдено оптимальні плани прямої та двоїстої задачі. Ними є $X^* = (12,\ 18)$ і $Y^* = (0;\ 6\ 2/3;\ 1\ 2/3)$. Розв'язання даного прикладу двоїстим симплекс-методом можна також проводити, використовуючи одну таблицю, в якій послідовно записані всі ітерації обчислювального процесу, як це наведено в табл. 11.

Таблиця 11

Симплекс-таблиця для всіх ітерацій

i	Базис	$C_б$	P_0	75	60	84	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_4	0	–15	–3	–2	–1	1	0
2	P_5	0	**–20**	–1	–2	**–4**	0	1
m + 1			0	75	60	84	0	0
θ				75	30	**21**	–	–
3	P_4	0	**–10**	–2 3/4	**–1 1/2**	0	1	–1/4
4	P_3	84	5	1/4	1/2	1	0	–1/4
m + 1			420	54	18	0	0	21
θ				19 2/3	**12**	–	–	84
5	P_2	60	6 2/3	1 5/6	1	0	–2/3	1/6
6	P_3	84	1 2/3	–2/3	0	1	1/3	–1/3
m + 1			540	21	0	0	12	18

Як видно з табл. 11, для знайдених планів значення цільової функції прямої та двоїстої задачі дорівнюють $F^*min = Fmax = 540$.

Практичне заняття 4
Пошук оптимального плану перевезень у транспортній задачі

Мета – набуття навичок розроблення математичної моделі та пошуку розв'язання транспортної задачі, зважаючи на задані економічні, технологічні, ресурсні та інші обмеження.

Задача

Нехай існує необхідність перевезення однорідного вантажу від чотирьох постачальників до п'яти споживачів.

Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача, запаси вантажу у постачальників і потреби кожного споживача наведені в табл. 12.

Необхідно визначити такий план перевезень вантажу, який забезпечить мінімальну загальну вартість перевезень.

Таблиця 12

Вхідні дані

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	5	8	3	10	4	40
A2	10	7	9	6	5	120
A3	7	2	6	4	12	60
A4	4	6	11	5	4	40
Потреби	80	50	60	20	50	–

Методичні рекомендації

Постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу m з пунктів відправлення $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots. \mathrm{A}_m$ в пункти призначення $B_1, B_2, \ldots, \mathrm{B}_n$. Як критерій оптимальності зазвичай береться або мінімальна вартість перевезень усього вантажу або мінімальний час його доставки. Слід розглянути транспортну задачу, як критерій оптимальності якої взята мінімальна вартість перевезень усього вантажу.

Треба позначити через c_{ij} тарифи перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, через a_i – запаси вантажу в i-му пункті відправлення, через b_j – потреби у вантажі в j-му пункті призначення, а через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозиться з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі набуває такого вигляду:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

за умов

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n}, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m}, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Оскільки змінні x_{ij} задовольняють систему лінійних рівнянь і умову невід'ємності, то забезпечуються доставка необхідної кількості вантажу в кожен із пунктів призначення, вивезення наявного вантажу з усіх пунктів відправлення, а також ураховуються зворотні перевезення.

Достатньою та необхідною умовою для вирішення транспортної задачі є рівність сумарних запасів пунктів відправлення і сумарних потреб пунктів призначення, а саме:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

У такому випадку подібна транспортна задача називається *закритою*.

Якщо ж зазначена умова не виконується, то модель транспортної задачі називається *відкритою* та її необхідно привести до закритого виду.

Для відкритої моделі можливі два випадки:

1. Сумарні запаси перевищують сумарні потреби:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Уводиться фіктивний споживач B_{n+1} (додатковий стовпець), потреби якого визначаються як:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

2. Сумарні потреби перевищують сумарні запаси:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Уводиться фіктивний постачальник A_{m+1} (додатковий рядок), запаси якого дорівнюють:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Пошук оптимального плану транспортної задачі здійснюється за допомогою методу потенціалів, заснованого на побудові системи чисел u_i і v_j *(системи потенціалів).*

Ознакою оптимуму плану (x_{ij}^*) є виконання двох умов:

для кожної зайнятої клітинки сума потенціалів дорівнює вартості одиниці перевезення, яка стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \tag{30}$$

для кожної незайнятої клітинки сума потенціалів має бути меншою або дорівнювати вартості одиниці перевезення, яка стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}. \tag{31}$$

Умови (29) і (30) називаються умовами потенційності, а розв'язок $X^* = (x_{ij}^*)$, якому відповідає система потенціалів, – *потенційним.* Алгоритм розв'язання транспортної задачі методом потенціалів становить два етапи.

Етап 1.

1. Складається первісний опорний план, у якому міститься $(m + n - 1)$ зайнятих клітин.

2. Для отриманого плану будується система $m + n$ чисел $u_1, u_2, \ldots$, u_m і $v_1, v_2, \ldots, v_n$, щоб виконувалася умова $u_i + v_j = c_{ij}$ для всіх заповнених клітин.

3. Побудована система u_i і v_j досліджується на потенційність, тобто X план перевіряється на оптимум.

Етап 2 (застосовується в тих випадках, коли план X, побудований на попередньому етапі, не оптимальний).

1. Поліпшення плану, тобто заміна плану X новим X' планом із вартістю перевезень, яка не перевищує вартість перевезень за планом X.

2. Побудова для плану X' нової системи потенціалів, яка задовольняє умові $u'_i + v'_j = c_{ij}$.

3. Дослідження системи u'_i і v'_j на потенційність.

Розв'язання

Для цієї задачі виконується умова рівності сумарних запасів сумарним потребам: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто, модель задачі є закритою (40 + +120 + 60 + 40 = 80 + 50 + 60 + 20 + 50 = 260).

Етап 1.

1. Первісний план перевезень вантажу можна побудувати за допомогою методу мінімальної вартості.

Сутність методу полягає в тому, що з усієї таблиці вартостей вибирають найменшу вартість c_{ij} і в клітинку, що їй відповідає, записують менше з чисел a_i і b_j. Потім з розгляду вилучають або рядок, який відповідає постачальнику, запаси якого повністю витрачені, або стовпець, який відповідає споживачеві, потреби якого повністю задоволені, або і рядок, і стовпець одночасно. З частини, яка залишилася, таблиці вартостей знову слід вибирати найменшу вартість і процес продовжувати доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

Для задачі, вихідні дані якої наведені в табл. 12, слід вибирати клітинку (А3; В2), у якій знаходиться мінімальна вартість c_{32} = 2. Оскільки $b_2 < a_3$, тобто 50 < 60, то в цю клітинку заносимо x_{32} = 50 і вилучаємо з розгляду стовпець В2. Далі в таблиці вартостей мінімальною буде та вартість, що відповідає клітинці (А1; В3). Оскільки $b_3 < a_1$ (60 > 40), то x_{13} = *40,* а рядок А1 виключається з розгляду. Після викреслювання стовпця В2 і рядка А1 в таблиці вартостей, яка залишилася, найменше значення вартості знаходиться в клітинках (А3; В4), (А4; В1) і (А4; В5). Заповнити будь-яку з них. Процес триває до того часу, поки запаси не будуть розподілені, а потреби – задоволені.

Результати наведено в табл. 13, у якій додатково введені: стовпець "Залишок" та рядок "Залишок", куди заносяться залишки відповідних запасів або потреб після заповнення чергової клітинки.

Таблиця 13

Початковий план перевезень

Постачальники	Споживачі					Запаси	Залишок
	В1	В2	В3	В4	В5		
А1	5 –	8 –	3 **40**	10 –	4 –	40	0
А2	10 **40**	7 –	9 **20**	6 **10**	5 **50**	120	100; 50; 10; 0
А3	7 –	2 **50**	6 –	4 **10**	12 –	60	10; 0
А4	4 **40**	6 –	11 –	5 –	4 –	40	0
Потреби	80	50	60	20	50	260	–
Залишок	40; 0	0	20; 0	10; 0	0	–	–

План є ациклічним (не містить цикли) та невиродженим (містить $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ додатних змінних).

2. Слід побудувати систему потенціалів u_i і v_j.

Тут вісім рівнянь містять дев'ять змінних, тобто система є невизначеною, має безліч розв'язків. Визначимо одне з них, довільно припустивши, що $u_1 = 0$. Тоді систему легко вирішити для u_i і v_j, що залишилися. Якщо $u_1 = 0$, то $v_3 = 3$. Оскільки $v_3 = 3$, то $u_2 = 6$ і т. д.

Обчислення зручно проводити в табл. 14, у якій на всю клітинку проставляються вартості перевезень, які відповідають додатним змінним опорного плану.

3. Слід провести дослідження побудованої системи u_i і v_j на потенційність. Кожну незайняту клітинку ділимо на три частини. У правому верхньому куті записуємо відповідні вартості перевезень c_{ij}, у лівому верхньому куті записуємо суму відповідних потенціалів $(u_i + v_j)$, внизу записуємо величину $E_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$.

Таблиця 14

Розрахунок значень потенціалів

Постачальники	Споживачі					u_i
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	5 –	8 –	**3** 40	10 –	4 –	$u_1 = 0$
A2	**10** 40	7 –	**9** 20	**6** 10	**5** 50	$u_2 = 6$
A3	7 –	**2** 50	6 –	**4** 10	12 –	$u_3 = 4$
A4	**4** 40	6 –	11 –	5 –	4 –	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 0$	$v_5 = -1$	

Якщо всі $E_{ij} \leq 0$, тобто $u_i + v_j \leq c_{ij}$, то система u_i і v_j потенціальна і знайдений план є оптимальним.

Якщо існують числа $E_{ij} > 0$, тобто для деякої клітинки $u_i + v_j > c_{ij}$, то система u_i і v_j не потенціальна та знайдений план не оптимальний.

У табл. 14 наведені результати розрахунків усіх кроків першого етапу алгоритму.

Етап 2.

1. Поліпшення плану. Оскільки дві вільних клітинки (А3; В1) і (А3; В3) не задовольняють умову оптимуму, тому що $E_{31} = 1$ і $E_{33} = 1$, то опорний план є неоптимальним (табл. 15). Його можна поліпшити шляхом розміщення деякої кількості одиниць вантажу у відповідну клітинку, для якої порушується умова оптимуму. У тому випадку, якщо таких клітинок декілька, то вибирається клітинка, яка відповідає $max\ \{E_{ij} > 0\}$.

У розглянутому прикладі $max\ \{E_{31}; E_{33}\}$, тобто $max\ \{1; 1\}$, тому зайнятою можна зробити будь-яку клітинку. Однак перевагу варто віддати клітинці (А3; В3), оскільки вона має меншу вартість одиниці перевезення.

Таблиця 15

Результати розрахунків першого етапу

<table>
<tr><th rowspan="2">Постачальники</th><th colspan="10">Споживачі</th><th rowspan="2">u_i</th></tr>
<tr><th colspan="2">B1</th><th colspan="2">B2</th><th colspan="2">B3</th><th colspan="2">B4</th><th colspan="2">B5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">A1</td><td>4</td><td>5</td><td>–2</td><td>8</td><td colspan="2" rowspan="2">3
40</td><td>0</td><td>10</td><td>–1</td><td>4</td><td rowspan="2">$u_1 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">–1</td><td colspan="2">–10</td><td colspan="2">–10</td><td colspan="2">–5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A2</td><td colspan="2" rowspan="2">10
40</td><td>4</td><td>7</td><td colspan="2" rowspan="2">9
20</td><td colspan="2" rowspan="2">6
10</td><td colspan="2" rowspan="2">5
50</td><td rowspan="2">$u_2 = 6$</td></tr>
<tr><td colspan="2">–3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A3</td><td>8</td><td>7</td><td colspan="2" rowspan="2">2
50</td><td>7</td><td>6</td><td colspan="2" rowspan="2">4
10</td><td>3</td><td>12</td><td rowspan="2">$u_3 = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">–9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A4</td><td colspan="2" rowspan="2">4
40</td><td>–2</td><td>6</td><td>3</td><td>11</td><td>0</td><td>5</td><td>–1</td><td>4</td><td rowspan="2">$u_4 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">–8</td><td colspan="2">–8</td><td colspan="2">–5</td><td colspan="2">–5</td></tr>
<tr><td>v_j</td><td colspan="2">$v_1 = 4$</td><td colspan="2">$v_2 = -2$</td><td colspan="2">$v_3 = 3$</td><td colspan="2">$v_4 = 0$</td><td colspan="2">$v_5 = -1$</td><td></td></tr>
</table>

Для визначення кількості вантажу, який підлягає перерозподілу, слід позначити знаком "+" вільну клітинку, яку потрібно завантажити. Це означає, що вона приєднується до зайнятих і у зв'язку з цим утворюється єдиний цикл. Оминути цей цикл проти стрілки годинника, починаючи з клітинки зі знаком "+", і позначити його клітинки по черзі знаками "+" і "–". Потім знайти $T = \ min\ X_{ij,}$ де X_{ij} – перевезення, які стоять у вершинах циклу, позначених знаком "–". Величина T визначає скільки одиниць вантажу можна перерозподілити за знайденим циклом.

У розглянутому прикладі клітинку (А3; В3) позначаємо знаком "+" і знаходимо цикл, наведений у табл. 16.

Таблиця 16

Переміщення перевезень за циклом

Постачальники	Споживачі					u_i
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	4 | 5 –1	–2 | 8 –10	3 40	0 | 10 –10	–1 | 4 –5	$u_1 = 0$
А2	10 40	4 | 7 –3	9 **20 − Т**	6 **10 + Т**	5 50	$u_2 = 6$
А3	8 | 7 1	2 50	6 **+Т**	4 **10 − Т**	3 | 12 –9	$u_3 = 4$
А4	4 40	–2 | 6 –8	3 | 11 –8	0 | 5 –5	–1 | 4 –5	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 0$	$v_5 = -1$	

Значення T слід записати у вільну клітинку, позначену знаком "+". Рухаючись циклом, віднімати T з обсягів перевезень, розташованих у клітинках зі знаком "–", і додавати до обсягів перевезень зі знаком "+". Якщо T відповідає *мінімальному* обсягу перевезень, то під час віднімання треба залишити у відповідних клітинках нульові перевезення в такій кількості, щоб в отриманому новому опорному плані зайнятих клітинок було $m + n - 1$.

Обсяг перевезення для клітинки (3,3), визначається як $T = min$ (20; 10) = 10. Для інших клітинок циклу 10 одиниць вантажу додається або віднімається залежно від знака "+" або "–", які розташовані в цих клітинках. Отримано новий опорний план X', наведений у табл. 17.

Таблиця 17

Новий опорний план

Постачальники	Споживачі					u_i
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	5 –	8 –	3 40	10 –	4 –	–
A2	10 40	7 –	9 **10**	6 **20**	5 50	–
A3	7 –	2 50	6 **10**	4 –	12 –	–
A4	4 40	6 –	11 –	5 –	4 –	–
v_j	–	–	–	–	–	

2. Побудова для плану X' нової системи потенціалів. Результати розрахунків наведено в табл. 18.

3. Дослідження на потенційність системи u_i і v_j для плану X' здійснюється так, як описано в кроці 3 першого етапу алгоритму. У цьому випадку всі значення $E_{ij} \leq 0$, що підтверджує *потенційність системи* u_i і v_j, а, отже, план, наведений у табл. 18, є оптимальним.

Таблиця 18

Розрахунок нової системи потенціалів та оцінок

Постачальники	Споживачі					u_i
	B1	B1	B1	B1	B1	
A1	4 | 5 –1	–1 | 8 –9	**3** 40	0 | 10 –10	–1 | 4 –5	$u_1 = 0$
A2	10	5 | 7 –2	**9** 10	**6** 20	**5** 50	$u_2 = 6$
A3	7 | 7 0	**2** 50	**6** 10	3 | 4 –1	2 | 12 –10	$u_3 = 3$
A4	**4** 40	–1 | 6 –7	3 | 11 –8	0 | 5 –5	–1 | 4 –5	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 0$	$v_5 = -1$	

Вартість перевезень за отриманим планом становить:

$$F = 40 \cdot 3 + 40 \cdot 10 + 10 \cdot 9 + 20 \cdot 6 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 2 + 10 \cdot 6 + \\ + 40 \cdot 4 = 1\,300\ (\text{од.}).$$

Більше того, значення $E_{31} = 0$ говорить про те, *що знайдений оптимальний план не єдиний.* Є ще один з перевезенням вантажу за маршрутом з А3 в В1, що забезпечує таку ж вартість.

Практичне заняття 5
Розв'язання задач цілочислового програмування методом Гоморі

Мета – набуття навичок постановки математичної моделі та вирішення прикладних задач цілочислового програмування, знаходження оптимального плану в моделі з додатковим обмеженням цілочисловості змінних.

Методичні рекомендації

Розглянемо задачі цілочислового програмування, у яких як цільова функція, так і функції в системі обмежень є лінійними. У зв'язку з цим сформулюємо основну задачу лінійного програмування, у якій змінні можуть набувати тільки цілих значень. У загальному вигляді цю задачу можна записати наступним чином: знайти максимум функції:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, i\ =\ \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

$$x_j - \text{цілі},\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо знайти розв'язок проведеної задачі звичайним симплексним методом, то воно може виявитися як цілочисловим, так і ні. У загальному ж випадку для визначення оптимального плану задачі з додатковим обмеженням цілочисловості змінних потрібні спеціальні методи, серед яких найбільш відомим і розповсюдженим є метод Гоморі, в основі якого лежить реалізація кроків симплекс-методу та двоїстого симплекс-методу. Розглянемо його сутність.

Алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування методом Гоморі охоплює такі основні етапи:

1. Знаходження розв'язку задачі за симплексним методом шляхом пошуку оптимального плану задачі без врахування цілочисловості змінних.

2. Аналіз отриманого оптимального плану та його компонент. Якщо серед знайдених компонентів немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування.

3. Якщо ж в отриманому оптимальному плані задачі змінна x_j набуває дробового значення, складають додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі має максимальне дробове значення (найбільша дробова частина), а в оптимальному плані задачі має бути цілочисловою.

Додаткове обмеження становить таку нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n} f\left(a_{ij}^{*}\right)x_j \geq f(b_i^{*}),$$

де a_{ij}^{*} та b_i^{*} – перетворені вихідні величини, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці;

$f\left(a_{ij}^{*}\right)$ і $f(b_i^{*})$ – дробові частини чисел (під дробовою частиною деякого числа *а* розуміється найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою).

4. Знаходження розв'язку розширеної задачі, що одержується у результаті приєднання додаткового обмеження, використовуючи у алгоритм двоїстого симплекс-методу.

5. Аналіз отриманого нового оптимального плану. Якщо в знайденому плані задачі з додатковим обмеженням змінні набувають дробових значень, то знову додають одне додаткове обмеження та процес обчислень повторюють. Проводячи скінчене число ітерацій, або одержують

оптимальний план задачі цілочислового програмування, або встановлюють її нерозв'язність.

Задача

Виробниче підприємство для виробництва трьох різних номенклатурних виробів з деревини використовує три основних види різних ресурсів, що є обмеженими. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво дерев'яних конструкцій певного виду, загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, а також прибуток, від реалізації дерев'яних конструкцій наведені в табл. 19.

Таблиця 19

Вихідні умови задачі

Обсяги ресурсів	Норми витрат сировини на одиницю продукції		
	Конструкція 1	Конструкція 2	Конструкція 3
10	3	2	0
11	1	4	0
13	3	3	1
Прибуток від реалізації одиниці продукції	4	5	1

Ураховуючи, що вироблена продукція може виготовлятися у будь-яких співвідношеннях, потрібно визначити оптимальний виробничий план випуску, що буде забезпечувати максимальну рентабельність виробництва.

Розв'язання

Якщо позначити, що x_1, x_2 та x_3 – це кількість дерев'яних конструкцій, які має виробляти підприємство для отримання максимального прибутку та забезпечення високої рентабельності виробництва, то маємо задачу цілочислового програмування, розв'язання якої знайдемо методом Гоморі.

Математична модель цієї оптимізаційної задачі буде мати вигляд, наведений далі:

$$F = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow max.$$

Загальна система обмежень за всіма ресурсами становить таку систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x_1,\ x_2 \text{ – цілі.}$$

Для розв'язання задачі симплекс-методом слід перейти від обмежень типу нерівностей до обмежень типу рівностей і ввести три додаткові змінні, в результаті чого система обмежень запишеться у вигляді такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x_1,\ x_2 \text{ – цілі.}$$

Для визначення оптимального плану задачі реалізуємо алгоритм симплексного методу, розв'язок якого наведено в табл. 20.

Таблиця 20

Симплекс-таблиця № 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	Базис	$C_б$	P_0	4	5	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	P_4	0	10	3	2	0	1	0	0
2	← P_5	0	11	1	4	0	0	1	0
3	P_6	0	13	3	3	1	0	0	1
m + 1			**0**	–4	–5	–1	0	0	0
1	← P_4	0	18/4	10/4	0	0	1	–2/4	0
2	→ P_2	5	11/4	1/4	1	0	0	1/4	0
3	P_6	0	19/4	9/4	0	1	0	–3/4	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m + 1			**55/4**	–11/4	0	–1	0	5/4	0
1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10
1	→ P1	4	**18/10**	1	0	0	4/10	–2/10	0
2	P2	5	**23/10**	0	1	0	–1/10	3/10	0
3	← P6	0	**7/10**	0	0	1	–9/10	–3/10	1
m + 1			**187/10**	0	0	–1	11/10	7/10	0
1	P1	4	**18/10**	1	0	0	4/10	–2/10	0
2	P2	5	**23/10**	0	1	0	–1/10	3/10	0
3	→ P_3	1	7/10	0	0	1	–9/10	–3/10	1
m + 1			**194/10**	0	0	0	2/10	4/10	1

Як видно з табл. 20, знайдений оптимальний план $X =$ (*18/10; 23/10; 7/10; 0; 0; 0*) розв'язуваної задачі не є оптимальним, оскільки три знайдені компоненти x_1, x_2 та x_3 мають нецілочислові значення. За загальним алгоритмом методу Гоморі необхідно скласти додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі має максимальне дробове значення. Дробове значення для знайдених змінних відповідно дорівнює: $f(x_1) = \frac{8}{10}$; $f(x_2) = \frac{3}{10}$; та $f(x_3) = \frac{7}{10}$. Максимальну дробову частину має змінна x_1, тому для цієї змінної складається додаткове обмеження. Запишемо відповідне обмеження за результатами значень останньої симплекс-таблиці (див. табл. 20):

$$x_1 + \frac{4}{10}x_4 - \frac{2}{10}x_5 = \frac{18}{10}.$$

Отже, до системи обмежень задачі додаємо нерівність:

$$f(1) \cdot x_1 + f\left(\frac{4}{10}\right) \cdot x_4 + f\left(-\frac{2}{10}\right) \cdot x_5 \geq f\left(\frac{18}{10}\right),$$
$$\frac{4}{10}x_4 + \frac{8}{10}x_5 \geq \frac{8}{10}.$$

Оскільки в вихідній задачі всі обмеження за ресурсами мають значення ≤ , а для додаткової нерівності за алгоритмом утворили обмеження ≥ , зведемо всі обмеження до єдиного виду ≤ та перейдемо від обмежень типу нерівностей до обмежень типу рівностей шляхом додаткової змінної x_7 , в результаті чого отримаємо таке рівняння:

$$-\frac{4}{10}x_4 - \frac{8}{10}x_5 + x_7 = -\frac{8}{10}.$$

Далі за алгоритмом знайдемо максимальне значення функції для задачі з додатковим обмеженням за допомогою двоїстого симплекс-методу. Результати розрахунку наведені в табл. 21.

Таблиця 21

Симплекс-таблиця № 2

i	Базис	$C_б$	P_0	3	2	0	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_1	4	18/10	1	0	0	4/10	–2/10	0	0
2	P_2	5	23/10	0	1	0	–1/10	3/10	0	0
3	P_3	1	7/10	0	0	1	–9/10	–3/10	1	0
4	← P_7	0	–8/10	0	0	0	–4/10	**–8/10**	0	1
m + 1			**194/10**	0	0	0	2/10	4/10	1	0
1	P_1	4	2	1	0	0	1/2	0	0	–1/4
2	P_2	5	2	0	1	0	–1/4	0	0	3/8
3	P_3	1	1	0	0	1	–3/4	0	1	–3/8
4	→ P_5	0	1	0	0	0	1/2	1	0	–10/8
m + 1			**19**	0	0	0	0	0	1	1

Розв'язання отриманої системи передбачає: вибір рядка розв'язку за допомогою визначення найбільшого за абсолютною величиною від'ємного числа стовпця вектора P_0. Вибір цього числа визначає вектор, що вилучається з базису. Отже, для нашого прикладу це вектор P_7 , який і необхідно вилучити з базису.

Далі визначимо стовпець розв'язання за допомогою знаходження найменшого за абсолютною величиною відношення елементів рядка ($m + 1$) до відповідних від'ємних елементів рядка розв'язку:

$$\left(min\left|{}^{\Delta_j}\!/_{a_{ij}} < 0\right|\right).$$

Це може бути вектор або P_4, або P_5 . Для вектора P_4 маємо: (2/10) / (4/10) = 1/2, для P_5 відповідно: (4/10) / (8/10) = 1/2, тобто один з векторів можна вводити до базису. Введемо до базису стовпець P_5 і знайдемо новий псевдоплан за звичайними правилами симплекс-методу, ітераційний процес продовжуємо доти, поки у стовпці вектора P_0 не буде більше від'ємних чисел. За результатами розрахунків (табл. 21) видно, що отриманий опорний план є оптимальним, отже, вихідна задача цілочислового програмування має оптимальний цілочисловий план, а саме:

$$X^* = (2; 2; 1; 0; 1; 0; 0).$$

За знайденого оптимального плану значення цільової функції дорівнює $F_{max} = 19$. Загальний висновок можна сформулювати у такий спосіб: виробничому підприємству доцільно випускати три види дерев'яних конструкцій у кількості: конструкція 1 – 2 шт., конструкція 2 – 2 шт. та конструкція 3 – 1 шт., що гарантує максимальний прибуток у розмірі 19 ум. од. та буде забезпечувати максимальну рентабельність виробництва.

Практичне заняття 6
Розв'язання задач нелінійного програмування методом множників Лагранжа

Мета – набуття навичок розпізнавання, визначення та розв'язання окремих задач нелінійної оптимізації, знаходження оптимальних оцінок з урахуванням певних обмежень на основі методу множників Лагранжа, порівняння безумовних і умовних екстремальних задач.

Методичні рекомендації

Учасникам сучасних ринкових відносин доводиться працювати в умовах постійних економічних коливань, вирішувати проблеми ухвалення оптимальних рішень в умовах конфлікту та невизначеності. Математично вирішення цих питань зводиться до розв'язання нелінійних функцій, запорукою ефективного розв'язання яких є вирішення різними методами задач нелінійного програмування.

Класи задач нелінійного програмування – це задачі оптимізації нелінійних функцій за наявності (або відсутності) лінійних і (або) нелінійних обмежень. Нині методологія нелінійної оптимізації представлена великою кількістю різних чисельних стратегій пошуку рішень, з яких успішне застосування знайшли лише деякі алгоритми. Це пов'язано з тим, що на успішність вирішення впливають багато факторів: початкові умови, точність рішення, вид функції.

Задачі нелінійного програмування широко застосовуються, зокрема для побудови та аналізу моделей управління капіталом підприємства. Вони характеризуються виваженістю та спеціальними обчислювальними методами розв'язку. На відміну від лінійних задач, для задач нелінійного програмування єдиного методу розв'язання не існує. Залежно від виду цільової функції й системи обмежень розроблені спеціальні методи розв'язання, до яких належать:

- методи множників Лагранжа;
- квадратичне й опукле програмування;
- градієнтні методи;
- метод Франка-Вульфа;
- метод штрафних функцій;
- метод Ерроу – Гурвіца.

Переваги методів нелінійного програмування:

- дозволяють отримати точний, "абсолютний" розв'язок;
- дозволяють вирішувати задачі, де вплив ресурсу на кінцевий результат є нелінійним і ефект від розподілу ресурсів між декількома проектами знаходиться у нелінійній залежності;
- наявна можливість задавати цільову функцію у різний спосіб.

Проте слід відмітити також деякі недоліки цих методів, які обмежують темпи їхнього впровадження в практику управління соціально-економічними системами, серед яких:

- трудомісткість і громіздкість розв'язку;
- значні витрати часу порівняно з часом ухвалення рішення;
- неоднозначність отриманих результатів.

Не дивлячись на недоліки досліджуваних методів, масштаб їхнього застосування поширюється все більше, оскільки сучасні пакети прикладних програм дозволяють досить швидко розв'язати будь-яку прикладну математичну задачу чи побудувати економіко-математичну модель.

У загальному вигляді задача нелінійного програмування полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції:

$$f = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{32}$$

за умови, що її змінні задовольняють співвідношенням

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1, k} \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \; i = \overline{k+1, m}, \end{cases} \tag{33}$$

де f і g_i – деякі відомі функції n змінних;

b_i – задані числа.

Мається на увазі, що в результаті розв'язання задачі буде визначена точка $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, координати якої задовольняють співвідношенням (33) і така, що для всякої іншої точки $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняє умовам (33), виконується нерівність:

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \ge f(x_1, x_2, \dots, x_n) \; [f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \le f(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Співвідношення (33) утворюють систему обмежень і містять умови невід'ємності змінних, якщо такі умови є. Умови невід'ємності змінних можуть бути задані безпосередньо. Система обмежень (33) визначає область допустимих розв'язків задачі. На відміну від задачі лінійного програмування вона не завжди є випуклою.

Якщо визначено область допустимих рішень, то знаходження розв'язку задачі (32) і (33) зводиться до визначення точки цієї області, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h.$$

Зазначена точка може перебувати як на межі області допустимих рішень, так і у її середині.

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування (32) і (33), припускаючи, що система обмежень (33) містить тільки рівняння, відсутні умови невід'ємності змінних і $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функції, безперервні разом зі своїми частковими похідними:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max(min), \tag{34}$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \qquad i = \overline{1, m}. \tag{35}$$

У курсі математичного аналізу задачу (34) – (35) називають задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації.

Розглянемо розв'язання наведеної задачі методом множників Лагранжа, який займає значне місце серед економіко-математичних методів розв'язання задач нелінійного програмування.

Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, які називають *множниками Лагранжа*, що складають функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\big). \tag{36}$$

Далі знаходять часткові похідні $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ та розглядають систему $n + m$ рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \; (j = \overline{1, n}); \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \; (i = \overline{1, m}) \end{cases} \tag{37}$$

з $n + m$ невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n, \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Будь-який розв'язок системи рівнянь (37) визначає точку $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0,)$, у якій може мати місце екстремум функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отже, розв'язавши систему рівнянь (37), одержують усі точки, у яких функція (34) може мати екстремальні значення. Подальше дослідження знайдених точок проводять так само, як і у випадку безумовного екстремуму.

Отже, визначення екстремальних точок задачі (34) – (35) методом множників Лагранжа охоплює такі етапи:

1. Складають функцію Лагранжа.
2. Знаходять часткові похідні від функції Лагранжа за змінними x_j і λ_i та прирівнюють їх до нуля.
3. Розв'язують систему рівнянь (37), знаходять точки, у яких цільова функція задачі може мати екстремум.
4. Серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, у яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції (34) у цих точках.

Метод множників Лагранжа можна застосовувати і у тому випадку, коли умови зв'язку є нерівностями. Так якщо потрібно знайти екстремум функції $z = f(X)$ за умови $g(X) \le b$, то спочатку варто знайти точки безумовного екстремуму функції $z = f(X)$ з рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \ (j = \overline{1, n})$, потім серед цих точок відібрати ті, координати яких задовольняють умові зв'язку $g(X) < b$, і, нарешті, визначити точки, що задовольняють таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \ \ (j = \overline{1, n}), \\ g(X) = b. \end{cases}$$

Точки, знайдені в результаті розв'язання цієї системи, разом з точками, що визначені на першому етапі та задовольняють умову $g(X) < b$, підлягають подальшому дослідженню.

Розглянемо необхідні та достатні умови екстремуму функції кількох змінних.

Необхідна умова екстремуму. В точках екстремуму функції кількох змінних її частинні похідні першого порядку або дорівнюють нулю, або не існують:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0. \qquad (38)$$

Точки, в яких виконуються рівності (38), називаються **стаціонарними**. Рівності (32) є необхідними, але не достатніми умовами існування екстремуму. Це означає, що не усі точки, за яких виконується умова (32), є точками екстремуму.

Достатня умова екстремуму функції двох змінних.

Щоб визначити екстремум функції двох незалежних змінних виду: $z = f(x_1, x_2)$, треба:

а) знайти стаціонарні точки (x_1, x_2), у яких функція може досягти екстремуму, для чого треба розв'язати систему рівнянь:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0;$$

б) обчислити значення частинних похідних другого порядку в кожній стаціонарній точці (x_1, x_2), одержані числа позначити відповідно *A*, *B*, *C*:

$$\frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = A; \quad \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = B; \quad \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = C;$$

в) скласти вираз $\Delta = AC - B^2$.

Якщо $\Delta > 0$, то екстремум у стаціонарній точці є, причому за $\mathrm{A} > 0$ – *min*, а за $\mathrm{A} < 0$ – *max*.

Якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в стаціонарній точці немає.

Якщо $\Delta = 0$, то маємо сумнівний випадок і для його з'ясування треба проводити додаткові дослідження, які знаходяться поза навчальною програмою.

Для умовного екстремуму функції $z = f(x_1, x_2) \rightarrow extr$ рівняння зв'язку має такий вигляд: $\varphi(x_1, x_2) = 0$.

Для визначення умовного екстремуму складаємо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \varphi(x_1, x_2).$$

Далі знаходимо частинні похідні першого порядку та визначаємо стаціонарні точки. Після цього складаємо квадратичну форму для значень других похідних виду в кожній стаціонарній точці:

$$d^2F = F''_{x_1x_1}(dx_1)^2 + 2F''_{x_1x_2}(dx_1dx_2) + F''_{x_2x_2}(dx_2)^2.$$

Якщо $d^2F < 0$ – max, $d^2F > 0$ – min.

Приклад 1

Розглянемо задачу оптимізації нелінійної виробничої функції підприємства з обмеженням на ресурси, яка є досить поширеною в практиці управління підприємств з наступними умовами: оброблення статистичних даних і побудова економетричної моделі виявила, що виробнича функція, яка пов'язує випуск готової продукції підприємства з чисельністю працівників x_1 та виробничими фондами x_2, має такий вигляд – $Z = 3x_1 \cdot x_2$. Загальні витрати підприємства на заробітну плату й обладнання визначаються співвідношенням $2x_1 + x_2 = 60$. Необхідно визначити витрати підприємства на купівлю обладнання та витрати на заробітну плату, за яких випуск продукції буде максимальним.

Для розв'язання задачі використовуємо функції Лагранжа, яка має такий вид:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 \cdot x_2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 60).$$

Знаходимо частинні похідні цієї функції за x_1, x_2, λ, зважаючи на необхідну умову екстремуму функції Лагранжа та зводимо їх до нуля. Отримаємо таку систему для розв'язання:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_2 + 2\lambda = 0;$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 3x_1 + \lambda = 0;$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 - 60 = 0.$$

Отже для розв'язку маємо:

$$x_1 = -\frac{\lambda}{3}; \quad x_1 = -\frac{2\lambda}{3}; \text{ тоді } -\frac{2\lambda}{3} - \frac{2\lambda}{3} - 60 = 0.$$

Знаходимо, що $\lambda =-45$. Отже, отримуємо, що $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, значення функції $Z = 1\ 350$.

Тепер необхідно переконатися, що у знайденій точці екстремуму (15; 30) функція F досягає свого максимального значення.

$$F''_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\,2}} = 0;$$

$$F''_{x_1x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 3;$$

$$F''_{x_2x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2^{\,2}} = 0.$$

Складемо квадратичну форму для значень інших похідних:

$$d^2F = F''_{x_1x_1}(dx_1)^2 + 2F''_{x_1x_2}(dx_1dx_2) + F''_{x_2x_2}(dx_2)^2 = 2 \cdot 3(dx_1dx_2)\,.$$

Враховуючи, що диференціали dx_1 та dx_2 пов'язані рівнянням $2dx_1 + dx_2 = 0$, знаходимо, що $dx_2 = -2dx_1$, маємо:

$$d^2F = 2 \cdot 3(dx_1dx_2) = 6 \cdot (-2)(dx_1)^2 = -12(dx_1)^2.$$

$d^2F < 0$, отже знайдена екстремальна точка є точкою умовного максимуму.

Отже, для досліджуваного підприємства за наявних виробничих ресурсів оптимально можливий обсяг виробництва становитиме –1350 ум. од. Виконання цього плану забезпечать 15 працівників та 30 одиниць виробничих фондів.

Приклад 2

Розглянемо приклад застосування методу множників Лагранжа для моделювання поведінки споживача на споживчому ринку. Громадянин хоче розмістити 100 грошових одиниць у банку. Банк пропонує два види внесків: терміном на один рік з прибутковістю 20 % річних або терміном на два роки з прибутковістю 25 % річних. Щоб визначити, як розподілити грошові кошти, застосуємо функцію, наведену далі.

Нехай, x_1, x_2 – сума грошей, що буде розміщена в перший і другий вид внесків. Оскільки громадянин може розмістити не більше тієї суми, якою він володіє, тому перше обмеження матиме такий вигляд: $x_1 + x_2 \le 100$. Також потрібно врахувати, що x_1, x_2 мають бути більше нуля, тому внесок не може виражатися від'ємним числом. Вкладаючи кошти, громадянин бажає отримати максимальну користь. Корисність грошей, згідно з загальними законами споживчої корисності, що залишаться після внеску, дорівнює $\left(\frac{3}{5}\right)^0 \ln(100 - x_1 - x_2)$. Корисність доходу вкладених коштів на один рік і на два роки відповідно становить:

$$\frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{5}x_1\right) \text{ і } \frac{9}{25}\ln\left(\frac{16}{25}x_2\right).$$

Загальну корисність можна записати у вигляді такої функції:

$$\begin{cases} U = (100 - x_1 - x_2) + \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{5}x_1\right) + \frac{9}{25}\ln\left(\frac{16}{25}x_2\right), \\ x_1 + x_2 \le 100, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для знаходження сідлової точки, запишемо функцію Лагранжа:

$$U = (100 - x_1 - x_2) + \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{5}x_1\right) + \frac{9}{25}\ln\left(\frac{16}{25}x_2\right) + \lambda(100 - x_1 - x_2).$$

Частинні похідні цільової функції за кожною змінною, прирівняні до нуля мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{1}{100 - x_1 - x_2} + \dfrac{3}{5} x_1 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{1}{100 - x_1 - x_2} + \dfrac{9}{25} x_2 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Із поданої системи рівнянь знаходимо змінні x_1, x_2, тобто, суму грошей, яка буде розміщена в перший і другий вид внеску. Отже, аналітично вирішивши систему рівнянь $x_1 = 30$, $x_2 = 18$. Таким чином, застосувавши функцію Лагранжа отримаємо, що вкладник розмістить у короткостроковий депозит – 30 %, а в довгостроковий – 18 % своїх коштів. Інша частина коштів залишиться на поточні потреби. Отже, ухвалення цього рішення принесе вкладнику найбільшу корисність.

Отже, використання методу множників Лагранжа для моделювання фінансово-економічних процесів має такі переваги:

- метод є універсальним і тому може бути застосований до широкого загалу завдань із різних галузей науки та практичної діяльності;
- метод є технічно простий, бо не потребує нічого, крім уміння знаходити похідну та дозволяє досягнути мети, виконуючи абсолютно елементарні кроки;
- розв'язання не потребує жодних нестандартних підходів, винахідливості, процес легко алгоритмізується, а отже може бути автоматизований.

Отже, метод множників Лагранжа дає можливість знайти оптимальне рішення серед багатьох альтернативних варіантах у разі максимізації чи мінімізації досліджуваної функції.

Використання різноманітних методів розв'язання нелінійних задач дозволяє вирішувати складні економічні завдання, які постають перед суб'єктами соціально-економічних відносин із урахування впливу зовнішніх факторів на певні явища. Розглянуті приклади застосування нелінійних моделей у практиці фінансово-економічної діяльності та виробничій діяльності підприємства для оптимізації витрат і прибутку підприємства дозволить більш адекватно обґрунтовувати управлінські рішення.

Рекомендована література

Основна

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособ. для студентов эконом. спец. вузов. / И. Л. Акулич. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2011. – 352 с.

2. Боровик О. Л. Дослідження операцій в економіці : навч. посіб. / О. Л. Боровик, Л. В. Боровик. – Київ : Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.

3. Боровська Т. М. Основи теорії управління та дослідження операцій : навч. посіб. / Т. М. Боровська, І. С. Колеснік, В. А. Северілов. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 242 с.

4. Голіков А. П. Економіко-математичне моделювання світогосподарських процесів : навч. посіб. / А. П. Голіков. – 3-тє вид., перероб. і допов. – Київ : Знання, 2009. – 222 с.

5. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / Т. С. Клебанова, О. В. Раєвнєва, С. В. Прокопович та ін. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2010. – 352 с.

6. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 384 с.

7. Просветов Г. И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения : учеб.-практ. пособ. / Г. И. Просветов. – Москва : Изд. "Альфа-Пресс", 2008. – 344 с.

8. Рогоза М. Є. Нелінійні моделі та аналіз складних систем: навч. посіб. в 2 ч. Ч. 1 / М. Є. Рогоза, С. К. Рамазанов, М. К. Мусаєва. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 300 с.

9. Роман Л. Л. Дослідження операцій. Курс лекцій / Л. Л. Роман. – Львів : Видавництво Тараса Сороки, 2008. – 272 с.

Додаткова

10. Дослідження операцій : навч. посіб. для студентів напряму підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика" всіх форм навчання / Т. С. Клебанова, О. Ю. Полякова, Л. О. Чаговець та ін. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2013. – 192 с.

11. Дрогобыцкий И. Н. Экономико-математическое моделирование / И. Н. Дрогобыцкий – Москва : Изд. "Экзамен", 2004. – 798 с.

12. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – 7-ме вид., переоб. і допов. – Київ : Видавничий Дім "Слово", 2006. – 816 с.

13. Кунда Н. Т. Дослідження операцій у транспортних системах : навч. посіб. для студентів напряму "Транспортні технології" вищих навчальних закладів / Н. Т. Кунда. – Київ : Вид. Дім "Слово", 2008. – 400 с.

14. Минько А. А. Принятие решений с помощью Excel. Просто как дважды два / А. А. Минько. – Москва : Эксмо, 2007. – 240 с.

15. Орлова И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование : учеб. пособ. / И. В. Орлова, В. А. Половников. – Москва: Вузовский учебник, 2008. – 365 с.

16. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – Москва : ИД "Вильямс". – 2005. – 912 с.

Методичне забезпечення

17. Дослідження операцій та методи оптимізації : робоча програма для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. С. В. Прокопович, Л. О. Чаговець, О. В. Панасенко. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2018. – 63 с.

18. Прокопович С. В. Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" [Електронний ресурс] / С. В. Прокопович, Л. О. Чаговець, О. В. Панасенко. – Режим доступу : https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=4198.

19. Прокопович С. В. Дослідження операцій та методи оптимізації : тексти лекцій [Електронний ресурс] / С. В. Прокопович. – Режим доступу : https://pns.hneu.edu.ua/course /view.php?id=4198.

20. Робоча програма навчальної дисципліни "Економіко-математичні методи та моделі: Оптимізаційні методи та моделі" для студентів напрямів підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика", 6.0300506 "Прикладна статистика" денної форми навчання / уклад. С. В. Прокопович. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 54 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації до практичних завдань

для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Прокопович** Світлана Валеріївна
Панасенко Оксана Володимирівна
Чаговець Любов Олексіївна

Відповідальний за видання *Л. С. Гур'янова*

Редактор *А. С. Ширініна*

Коректор *А. С. Ширініна*

План 2019 р. Поз. № 85 ЕВ. Обсяг 64 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.