**УДК 519.714.7**

# МЕТОД $\nu$-МІНІМІЗАЦІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Сенчуков В. Ф., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків, Україна

Денисова Т. В., к. т. н., доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків, Україна

***Анотація*** **— Розглядається оригінальний аналітичний метод канонічної мінімізації булевих (перемикальних) функцій, названий $\nu$-мінімізацією. В основу методу покладено подання булевої функції як функції номера набору $\nu$ значень її аргументів. Такий підхід дозволяє оперувати не буквами-змінними, а числами – номерами наборів. Пропонується впровадження $\nu$-мінімізації в задачі економічної динаміки.**

***Ключові слова*** **— булева функція, задачі економічної динаміки, метод мінімізації, мінімальна форма, набір, операція, поглинання, склеювання, скорочена форма, тупикова форма.**

## 1. Булева функція як функція номера набору значень її аргументів

Нехай $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – задана булева функція (БФ) $n$ змінних, а $\nu$ – номер набору значень змінних як зображення в десятковій системі числення кортежів із нулів і одиниць: $\nu = \overline{0, 2^n - 1}$.

Спочатку встановлюємо залежність значень змінних $x_i$, $i = \overline{1, n}$ від номера $\nu$, для чого проаналізуємо відповідні послідовності у разі БФ від трьох змінних (табл. 1).

Кортежам значень змінних зліва направо в четвертому стовпці відповідають десяткові числа від нуля до семи. У п'ятому стовпці наведені значення істинності БФ для $n = 3$. Значеннями $x_1$ є послідовність нулів і одиниць з періодом $T = 2$, значенням $x_2$ відповідає послідовність з періодом $T = 2^2$: $0011$, а змінній $x_3$ – період $T = 2^3$.

Таблиця 1

**Номери наборів значень змінних та значення самих змінних**

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $\nu$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 5 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 6 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 7 | 1 |

Залежність значень аргументів від номера $\nu$ описується формулами, які виводяться за допомогою базисних індикаторів числових послідовностей [4]:– нескінченно вимірних векторів, координатами яких є нулі і одиниці, які з періодом $T$ повторюються:

$$e_i(\nu, T) = \left[\frac{\nu - (i-1)}{T}\right] - \left[\frac{\nu - (i-2)}{T}\right], \quad i = 1, 2, 3, \ldots, T,\ \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

Узагальнююча формула для БФ від $n$ змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, коли $T = 2^i$, $i = \overline{1, n}$ має вигляд:

$$x_i(\nu) = \left[\frac{\nu + 2^{i-1}}{2^i}\right] - \left[\frac{\nu}{2^i}\right];\ i = \overline{1, n},\quad \nu = \overline{0, 2^n - 1}. \tag{2}$$

З урахуванням співвідношень (2) отримуємо:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left| x_i = x_i(\nu),\ i = \overline{1, n} \right| = f(x_1(\nu), x_2(\nu), ..., x_n(\nu)) = F(\nu) \ – \tag{3}$$

БФ як функція номера набору значень її аргументів.

БФ від трьох змінних із табл.1 має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = F(v) = \\ = \left[\frac{v+6}{8}\right] - \left[\frac{v+4}{8}\right] + \left[\frac{v+3}{8}\right] - \left[\frac{v+2}{8}\right] + \left[\frac{v+1}{8}\right]. \quad (4)$$

На наборах $v = 2,3,5,7$ вона приймає значення, що дорівнюють одиниці, а на наборах $v = 0,1,4,6$ – нулю.

## 2. Послідовності номерів наборів змінних, які набувають значень 1 і 0

Задача канонічної мінімізації БФ аналітичним способом потребує її спрощення з метою отримання диз'юнктивної або кон'юнктивної нормальної форми (ДНФ, КНФ), яка містить найменшу кількість букв.

Позначимо через $\nu_i^1(\nu)$ $(\nu_i^0(\nu))$ підпослідовності номерів $\nu$, що описують значення змінних $x_i$, які дорівнюють одиниці (нулю) залежно від номера набора. Візуальний аналіз табл.1 показує, що значення $x_i$ повторюються з періодом $T_i = 2^{i-1}$. Для $x_1$ маємо:

$$\nu_1^1(\nu) = (1,3,5,7,9,...) = 2\nu + 1,$$

$$\nu_1^0(\nu) = (0,2,4,6,8,...) = 2\nu.$$

Зважаючи на періодичність повторення одиниць і нулів, запишемо загальну формулу $\nu_i^1(\nu)$ – для всіх змінних:

$$\nu_i^1(\nu) = 2^{i-1}\left(1 + \left[\frac{\nu}{2^{i-1}}\right]\right) + \nu, \quad (5)$$

де $i = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0, 2^{i-1} - 1}$.

Послідовності $\nu_i^0(\nu)$, що описують значення змінних $x_i$, які дорівнюють нулеві, не потребують окремого доведення, оскільки вони є логічними доповненнями [3] послідовностей $\nu_i^1(\nu)$: $\nu_i^0(\nu) = \overline{\nu_i^1(\nu)}$, і навпаки.

## 3. Зв'язок суми значень атомів із номером їхніх наборів

Задача мінімізації БФ аналітичним способом потребує її спрощення з метою отримання диз'юнктивної або кон'юнктивної нормальної форми (ДНФ, КНФ), яка містить найменшу кількість букв-змінних (канонічна мінімізація), або формули, яка містить найменшу кількість логічних операцій (загальна мінімізація).

Для цього залучаються операції поглинання і неповного склеювання до досконалих нормальних форм БФ (метод Квайна – Мак-Класки) або операції узагальненого склеювання до ДНФ чи КНФ (метод Блейка).

Введемо в розгляд суму значень аргументів (атомів) для кожного номера $\nu$:

$$\sigma_\nu = \sigma(\nu) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\nu). \quad (6)$$

За допомогою значень $\sigma(\nu)$ вирішується питання про склеювання конституент одиниці та нуля.

**Теорема 1.** (*необхідна умова склеювання конституент*). Якщо конституенти одиниці $c_\nu^1$ чи нуля $c_\nu^0$ склеюються, то модуль різниці сум $\sigma_i$ і $\sigma_j$ дорівнює одиниці:

$$c_i^1 \updownarrow c_j^1 \;\; (c_i^0 \updownarrow c_j^0) \Rightarrow \left|\sigma_i - \sigma_j\right| = 1, \\ i, j \in \{0,1,...,2^n - 1\}, \quad (7)$$

де $\updownarrow$ – символ склеювання.

*Доведення.* Справедливість співвідношення (7) випливає з означень понять "конституента" і "склеювання".

Наведена умова не є достатньою.

Достатня умова потребує використання відстані Гаммінга [5] між двома двійковими векторами як кількості однойменних координат векторів, які не збігаються, тобто $\left|x_k^1 \neq x_k^0\right|$, де $k \in \{1,2,...,n\}$, $|\cdot|$ –.символ кількості.

**Теорема 2.** (*критерій склеювання конституент $c_\nu^1$ чи $c_\nu^0$*). Конституенти одиниці чи нуля склеюються тоді і тільки тоді, коли відстань Гаммінга між двома значеннями $\sigma(\nu)$ дорівнює одиниці:

$$c_i^1 \updownarrow c_j^1 \;\; (c_i^0 \updownarrow c_j^0) \Rightarrow d_H(\sigma_i, \sigma_j) = 1, \\ i, j \in \{0,1,...,2^n - 1\}, \quad (8)$$

де $\updownarrow$ – символ склеювання, $d_H(\sigma_i, \sigma_j)$ – відстань Гаммінга між наборами з номерами $i$, $j$, яким відповідають суми $\sigma_i$, $\sigma_j$.

### 4. Побудова скорочених і тупикових форм БФ

**Скорочені форми.** *Загальний порядок* склеювання конституент одиниці чи нуля здійснюється в такому порядку:

1) *виписуємо* за таблицею значень істинності БФ номери наборів $\nu$ значень змінних $x_i$, $i=\overline{1,n}$, на яких функція приймає значення 1 (0) у разі дослідження диз'юнктивної (кон'юнктивної) форми;

2) *знаходимо* суми значень аргументів для кожного номера $\nu$:

$$\sigma_\nu = \sigma(\nu) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\nu);$$

3) *аналізуємо* суми $\sigma(\nu)$ з метою встановлення того, для яких із них відстань Гаммінга дорівнює одиниці, тобто, які конституенти склеюються;

4) *записуємо* диз'юнкцію (кон'юнкцію) отриманих елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій), тобто скорочену ДНФ (КНФ) заданої БФ [1].

Описаний підхід до побудови скорочених форм застосовний для функції будь-якої скінченної кількості змінних. Його достоїнство полягає в тому, що доводиться оперувати тільки номерами наборів – числами, а остаточний результат подається вже в запису через змінні-аргументи.

**Тупикові форми.** Введемо в розгляд матрицю $M$ розміру $m \times n$, де $m$ – кількість простих імплікант чи імпліцент, $n$ – кількість наборів $\nu$, на яких БФ приймає одиничні значення; подаються вони не буквами, а наборами з одиниць і нулів, які їм відповідають. Відсутність якоїсь змінної позначають прочерком "–".

Так, в умовах розглянутого *прикладу* (див. табл.1)) матриця має вигляд:

$$M = \begin{vmatrix} \bar{x}_3 x_2 \\ x_3 x_1 \\ x_2 x_1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 0\ 1 - - \\ - - 1\ 1 \\ -\ 1 - 1 \end{bmatrix}.$$

Набори імплікант, які накривають всі конституенти заданої БФ визначають мінімальну ДНФ:

$$f_\vee^* = \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 x_1 .$$

Надалі планується розв'язання методом $\nu$-мінімізації задач економічної динаміки, пов'язаних з обробленням даних і плануванням робіт, та моделюванням поведінки соціальних груп [2].

Гадаємо, що програмування процесу мінімізації не викличе труднощів у обчислювачів.

### Список використаної літератури

1. Денисова Т. В. Основи дискретної математики. Навчальний посібник / Т. В. Денисова. В. Ф. Сенчуков. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2007. – 344 с.

2. Левин В. И. Логико-математические методы в технических, гуманитарных и общественных науках : монография / В. И. Левин. – Пенза : ПензГТУ, 2014. – 383 с.

3. Сенчуков В. Ф. Логические операции над последовательностями и закон простых чисел / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 6. – С. 20–23.

4. Сенчуков В. Ф. Логические свойства обобщенных арифметических прогрессий / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – №8. – С. 16–19.

5. Hamming R. W. Error Detecting and Error Correcting Codes / R. W. Hamming // Bell System Technical Journal, Volume 29, Number 2, April, 1950, pp. 147-160.

Автори

**Денисова Тетяна Володимирівна,** доцент, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця (Tetiana.Denysova@hneu.net).

**Сенчуков Віктор Федорович,** доцент, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця (Viktor.Senchukov@m.hneu.edu.ua).

Тези доповіді надійшли 25 січня 2019 року. Опубліковано в авторській редакції.