МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
за темою "Ряди"

для студентів усіх спеціальностей
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2019

УДК 517(07.034)
В95

Укладачі: А. П. Рибалко
К. В. Стєпанова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.
Протокол № 7 від 06.03.2019 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Вища математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Ряди" для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. А. П. Рибалко, К. В. Стєпанова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 64 с.
В95

Подано основні положення щодо організації та виконання самостійної роботи за темою "Ряди" навчальної дисципліни, план-графік та програму виконання роботи. Наведено детальний опис та методичні рекомендації до виконання завдань для самостійної роботи, перелік літературних джерел і запитання для самодіагностики. Визначено професійні компетентності, яких набувають студенти в результаті вивчення теоретичного матеріалу та виконання практичних завдань за цією темою. Методична розробка містить варіанти завдань самостійної контрольної роботи.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня всіх форм навчання.

УДК 517(07.034)

Вступ

"Вища математика" є базовою навчальною дисципліною, що вивчають, згідно з навчальним планом підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня всіх форм навчання. Вивчення цієї дисципліни надає студентам систематизованих знань із фундаментальних методів математичного моделювання та дослідження процесів, формує в майбутнього фахівця аналітично-дослідницькі компетентності, що є необхідними в сучасних умовах.

Однією з основних сучасних тенденцій розвитку вищої освіти є переорієнтація із процесу навчання на результат. Метою навчання є набуття студентами конкретних професійних умінь, навичок та компетентностей. Від сучасного спеціаліста вимагають не тільки володіння певною сумою знань, але й ініціативності, здатності до автономного вирішення виробничих завдань, самовдосконалення та неперервного підвищення кваліфікації. Саме тому вища школа робить акцент на самостійній, а значить, більш осмисленій, відповідальній і творчій роботі студентів. Так, за навчальним планом дисципліни "Вища математика" кількість годин, відведених на самостійну роботу для денної форми навчання становить більшу частину навантаження.

Цю методичну розробку присвячено організації самостійної роботи студентів у процесі вивчення теми "Ряди", що є складовою частиною навчальної дисципліни "Вища математика". Структуру та зміст методичних рекомендацій повністю погоджено з навчальним планом і робочою програмою навчальної дисципліни.

Метою методичних рекомендацій є планування самостійної роботи студентів загалом; допомога в засвоєнні теоретичних знань і методів, що дозволяють моделювати, аналізувати та вирішувати економічні й технічні завдання; формування вмінь та навичок у застосуванні математичного апарату функцій багатьох змінних до розв'язування практичних задач.

Для досягнення визначеної мети поставлено такі основні **завдання**:

здобуття систематизованих знань із теорії числових і функціональних рядів, необхідних для математичного моделювання та дослідження процесів і явищ різної природи;

оволодіння основними методами та розрахунковими прийомами щодо застосування апарату рядів до розв'язування прикладних задач;

вироблення навичок у самостійному вивченні довідкової та спеціальної літератури.

У результаті вивчення теми "Ряди" дисципліни "Вища математика" студент має:

знати:

теоретичні основи: означення поняття числового ряду; властивості числових рядів; поняття про збіжність, абсолютну збіжність та розбіжність числового ряду; поняття про знакосталі, знакозмінні та знакопереміжні ряди; поняття функціонального ряду, основні властивості функціональних рядів; область збіжності функціонального ряду; означення степеневого ряду, рядів Тейлора та Маклорена, ряду Фур'є;

методи дослідження числових рядів на збіжність: необхідна ознака збіжності числового ряду; достатні умови збіжності числових рядів із додатними членами (ознака Д'Аламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші, ознаки порівняння в мажорантній і граничній формах); достатні умови збіжності рядів зі знакозмінними членами; еталонні ряди та їхні властивості;

методи дослідження функціональних рядів на збіжність: теорема Абеля та її наслідки; формули для відшукання радіуса збіжності степеневого ряду, інтервалу та області збіжності степеневого ряду; умови та зміст збіжності ряду Фур'є функцій;

застосування апарату рядів: поняття про ряди Тейлора й Маклорена, ряди Фур'є; розкладання функцій у степеневі та тригонометричні ряди; використання степеневих рядів у наближених обчисленнях значень функцій, визначених інтегралів, наближеному розв'язанні задачі Коші для диференціального рівняння; практичне використання рядів Фур'є;

уміти:

розрізняти типи рядів, володіти методами дослідження рядів на збіжність;

досліджувати на збіжність числові ряди з додатними та знакозмінними членами, обчислювати суму ряду;

знаходити радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду;

розкладати елементарні функції у степеневі та тригонометричні ряди, наближено обчислювати суми рядів;

виконувати наближені обчислення за допомогою степеневих рядів та визначати похибку обчислення;

знаходити розвинення періодичної функції у тригонометричний ряд Фур'є;

застосовувати апарат числових та функціональних рядів до моделювання й аналізу об'єктів, процесів та явищ у різних галузях знань;

самостійно використовувати під час розв'язування задач додаткову літературу;

відповідати на контрольні за питання для самодіагностики;

виконувати завдання для самостійного вирішення;

застосовувати здобуті знання в подальшому навчанні та розв'язуванні практичних задач;

У процесі вивчення теми "Ряди" студенти набувають таких **професійних компетентностей**:

здатність усвідомлювати можливості використання математичного апарату рядів у прикладних задачах;

здатність розуміти зміст прикладних задач, пов'язаних із поняттям ряду;

розуміння проблеми збіжності рядів, уміння й навички досліджувати числові та функціональні ряди на збіжність;

здатність застосовувати функціональні ряди до наближених обчислень;

здатність використовувати степеневі та тригонометричні ряди в задачах дослідження реальних процесів;

здатність рекомендувати засоби й методи теорії числових та функціональних рядів до розв'язування прикладних задач.

Структура наданих методичних рекомендацій така. По-перше, ураховуючи характер та специфіку позааудиторної роботи, спрямованої на формування у студентів навичок у самостійному здобутті певного обсягу нових знань і засвоєння їх під час розв'язування задач, наведено план-графік та програму самостійної роботи за цією темою, які дозволяють студенту дістати узагальнене уявлення про зміст самостійної роботи та запланувати її виконання, відповідно до методичних вимог. Крім того, методичні рекомендації містять основні поняття та формули за темою, приклади розв'язання задач самостійної контрольної роботи, запитання для самодіагностики та варіанти індивідуальних практичних завдань для самостійної контрольної роботи. Наприкінці розробки наведено список рекомендованої літератури.

1. Загальні положення щодо виконання та оцінювання самостійної роботи студентів

Самостійну роботу студентів спрямовано на набуття ними професійних умінь, навичок та компетентностей. Вона сприяє інтенсифікації пізнавальної діяльності загалом, значно підвищує мотивацію, рівень самоорганізації та відповідальність студентів.

Завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища математика" мають як теоретичний, так і практичний характер. До теоретичних завдань належать вивчення лекційного матеріалу та самостійне оволодіння певним теоретичним матеріалом за допомогою рекомендованої літератури. Практичні завдання розподіляють на поточні домашні завдання (вправи для самостійної роботи) та контрольні самостійні роботи. Завдання для контрольних робіт мають індивідуальний характер, тобто студенти їх виконують за варіантами, оформляють у вигляді письмового звіту, вони обов'язково містять відповіді на контрольні запитання для самодіагностики та їх подають викладачеві в установлений термін.

Виконання завдань для самостійної роботи передбачає:

вивчення та нотування основних питань теоретичного матеріалу з рекомендованих джерел;

оформлення звіту з виконання завдання для самостійної роботи, відповідей на контрольні запитання;

подання викладачеві виконаного завдання для самостійної роботи та відповідей на контрольні запитання.

Виконання завдань для самостійної роботи будуть оцінювати, зважаючи на:

розуміння, ступінь засвоєння теорії та методології проблем, що розглядають;

ступінь ознайомлення з рекомендованою літературою й засвоєння фактичного матеріалу навчальної дисципліни;

уміння поєднувати теорію із практикою під час розгляду практичних ситуацій, розв'язуванні задач, здійсненні розрахунків, виконанні завдань, винесених для самостійного опрацювання;

повноту врахування вимог до виконання завдання;

логічність викладеного матеріалу та відповідність його структурі, передбаченим у завданні змістовим елементам;

наявність та повноту розгляду ключових понять (визначень, термінів, різновидів і т. ін.) предметної області завдання;

наявність та обґрунтованість підсумкових висновків студента;

ілюстрування опрацьованого матеріалу наведенням власних прикладів та графічного матеріалу.

2. План-графік виконання самостійної роботи студентів

Вивчення теми "Ряди" відбувається у другому семестрі навчання. Тематика завдань, терміни їхнього виконання, подання та перевірки наведено в табл. 1.

Таблиця 1

План-графік виконання самостійної роботи

№ п/п	Тематика завдань	Тривалість виконання (години)	Порядковий номер навчального тижня, відведеного для:		
			виконання	звіту	оцінювання*
1	Основні поняття числових рядів; дослідження числових рядів на збіжність: необхідна умова; достатні ознаки збіжності знакосталих рядів	6	9	10	12
2	Знакозмінні числові ряди; абсолютна та умовна збіжності; дослідження на збіжність знакопереміжних рядів	6	9	10	12
3	Поняття про функціональні ряди; визначення степеневого ряду, відшукання радіуса, інтервалу та області збіжності степеневого ряду	2	10	11	12
4	Ряди Тейлора й Маклорена; розкладання функцій у степеневі ряди та їхнє застосування до наближених обчислень	5	11	11	12
5	Ряди Фур'є; особливості розкладання функцій у тригонометричні ряди та їхнє застосування	5	12	12	13

*Після закінчення цього терміну студент отримує відповідну оцінку або йому визначають час на доопрацювання завдання.

3. Програма самостійної роботи студентів

Зміст основних завдань для самостійної роботи студентів із теми "Ряди", а також форми роботи, звітності й контролю наведено в табл. 2. Слід зауважити, що, окрім наведених основних видів робіт, самостійна робота студентів передбачає поточну підготовку до практичних та лабораторних занять, підготовку до написання письмової практичної контрольної роботи й колоквіуму тощо.

Таблиця 2

Програма самостійної роботи

№ п/п	Зміст завдань	Форма (вигляд)		
		самостійної роботи	звітності	контролю
1	2	3	4	5
1	Вивчення лекційного матеріалу. Оволодіння навичками в дослідженні знакосталих рядів. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання: властивості збіжних рядів	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу	Конспект або доповідь-презентація	Поточне усне мікроопитування
2	Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з таких питань: методи обчислення суми збіжного числового ряду; доведення та практичне використання умов збіжності еталонних рядів (геометричної прогресії та рядів Діріхле)	Вирішення індивідуального практичного *завдання 1* для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на запитання для самодіагностики 1 – 11	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання
3	Вивчення лекційного матеріалу. Оволодіння основними методами дослідження знакозмінних рядів на абсолютну та умовну збіжність, застосування теореми Лейбніца до дослідження знакопереміжних рядів	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу. Підготовка відповідей на контрольні запитання для самодіагностики 12 – 16	Конспект або доповідь-презентація. Звіт у письмовому вигляді	Поточне усне мікроопитування. Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання

Продовження табл. 2

1	2	3	4	5
4	Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питань застосування теореми Лейбніца для визначення похибки обчислення частинної суми ряду	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу. Вирішення індивідуального практичного *завдання 2* для самостійної контрольної роботи	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання
5	Вивчення лекційного матеріалу. Оволодіння навичками у знаходженні радіуса, інтервалу та області збіжності степеневого ряду. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання рівномірної збіжності функціональних рядів, властивостей збіжних функціональних рядів	Вирішення індивідуального практичного *завдання 3* для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на контрольні запитання для самодіагностики 17 – 21	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання
6	Вивчення лекційного матеріалу. Оволодіння методами розвинення елементарних функцій у ряди Тейлора й Маклорена	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання
7	Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання: умов існування розвинення функції у степеневий ряд, його збіжності	Підготовка відповідей на запитання для самодіагностики 22 – 27	Конспект або доповідь-презентація	Поточне усне мікроопитування
8	Оволодіння методами застосування степеневих рядів до наближених обчислень. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання визначення точності (обчислення похибки) наближених обчислень	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу. Вирішення індивідуальних практичних *завдань 4 – 7* для самостійної контрольної роботи	Конспект або доповідь-презентація. Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання

Закінчення табл. 2

1	2	3	4	5
9	Оволодіння методами розкладання функцій у тригонометричні ряди. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питань рядів Фур'є за ортогональною сумою; комплексної форми ряду Фур'є; поняття про інтеграл Фур'є та його застосування	Вирішення *завдання 8* для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на запитання для самодіагностики 28 – 31	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання

4. Теоретичні відомості

Наведемо основні поняття, теореми та формули за темою "Ряди". Цей матеріал рекомендовано використовувати як довідковий під час виконання вправ та завдань для самостійної контрольної роботи, а також він може бути основою для конспекту теоретичного матеріалу, винесеного на самостійне опрацювання.

1. Числові ряди

1.1. Основні поняття

Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нескінченна послідовність чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots$, тобто існує закон, згідно з яким можна знайти будь-який член послідовності a_n за його номером n. Інакше кажучи, $a_n = f(n)$ – деяка функція натурального аргументу: $n \in \mathbf{N} \to a_n \in \mathbf{R}$.

Числовим рядом називають нескінченну суму членів числової послідовності та позначають:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Вираз і позначення a_n з довільним номером n називають **загальним членом ряду** (або n-м членом); числа a_i, $i \in \mathrm{N}$ – членами ряду.

Наприклад, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ – числовий ряд, $a_n = \frac{1}{n+1}$ – загальний член ряду, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_9 = \frac{1}{10}$ – члени ряду.

Суму скінченної кількості $n \in \mathbf{N}$ перших членів ряду називають n-**ю частковою сумою** ряду й позначають:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n. \tag{2}$$

Числовий ряд називають **збіжним**, якщо існує скінченна границя $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \neq \infty$ часткових сум; тоді пишуть:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \text{або} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

а число S називають **сумою ряду**.

Інакше, тобто коли границя частинних сум не існує або є нескінченною, числовий ряд називають **розбіжним** та пишуть: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Для ряду геометричної прогресії із знаменником q:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (q \in \mathbf{R}) \tag{3}$$

часткова сума має вигляд: $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$.

Здійснення граничного переходу за $n \to \infty$ приводить до такого результату:

- якщо $|q| < 1$, тоді ряд (3) збігається: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$;

(4)

- якщо $|q| \geq 1$, тоді ряд (3) розбігається.

Ряд геометричної прогресії є одним з еталонних рядів.

1.2. Основні властивості рядів

1. Ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ $(\lambda \in R, \quad \lambda \neq 0)$, збігаються або розбігаються одночасно.

Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda S$.

2. Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$ збігаються, тоді ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ також збігаються й сума дорівнює $S_1 \pm S_2$.

3. Ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ $(k > 1)$ збігаються або розбігаються одночасно, тобто відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність.

Величину $r_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ називають k-м **залишком ряду** (1). Таким чином, збіжність ряду залежить лише від поведінки його залишку.

Теорема 1.1. *Необхідна ознака збіжності ряду.* Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{5}$$

Наслідок. Якщо умову (5) не виконують, ряд розбігається.

Саме наслідок із теореми 1.1 використовують, зазвичай, під час практичного дослідження рядів на збіжність.

1.3. Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів

Сформулюємо ознаки збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ із додатними членами: $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n > 0$. (З огляду на властивість 1, їх можна застосовувати й для рядів з від'ємними членами).

Теорема 1.2. *Ознака Д'Аламбера.* Нехай для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ \ (a_n > 0)$ існує така границя:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{6}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ якщо } l < 1, \text{ тоді ряд збігається;} \\ &\bullet \text{ якщо } l > 1, \text{ тоді ряд розбігається.} \end{aligned} \tag{7}$$

Зауваження 1. Якщо $l = 1$, тоді висновок щодо збіжності ряду зробити неможливо. У цьому разі необхідно застосовувати іншу ознаку.

Зауваження 2. Рекомендовано застосовувати ознаку Д'Аламбера за наявності у формулі загального члена ряду показникових функцій та факторіалів.

Теорема 1.3. *Радикальна ознака Коші.* Нехай для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ \ (a_n > 0)$ існує границя

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}. \tag{8}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ якщо } l < 1, \text{ тоді ряд збігається;} \\ &\bullet \text{ якщо } l > 1, \text{ тоді ряд розбігається.} \end{aligned} \tag{9}$$

Зауваження 3. Якщо $l = 1$, тоді висновок щодо збіжності ряду зробити неможливо; необхідно застосовувати іншу ознаку.

Зауваження 4. Рекомендовано застосовувати радикальну ознаку Коші за наявності у формулі загального члена ряду n-го степеня.

Теорема 1.4. *Інтегральна ознака Коші.* Нехай для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ члени ряду задано $a_n = f(n)$, де $f(x)$ – функція, що набуває додатних значень та монотонно спадає за $x \in [1; +\infty)$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та невласний інтеграл 1 роду $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

За допомогою інтегральної ознаки Коші ряди Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p > 0) \tag{10}$$

можна дослідити на збіжність та здобути такий результат:

- якщо $p > 1$, тоді ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається;

(11)

- якщо $p \le 1$, тоді ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ розбігається.

Дійсно, коли $p \le 1$, то:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right)\Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1. \end{array} \right.$$

У разі, коли $p = 1$, буде:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Теорема 1.5. *Мажорантна ознака порівняння.* Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ задовольняють умову $0 < a_n \le b_n$, тоді:

- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то збігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то розбігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 1.6. *Ознака порівняння в граничній формі.* Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n:\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\quad (k\neq 0,\ k\neq\infty),$$

тоді: ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Зауваження 5. Застосування ознак порівняння використовують, наприклад, ряди (3) і (10), умови збіжності яких (4) та (11) відомі. Ряди (3) та (10) називають **еталонними.**

1.4. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

Ряд називають **знакозмінним**, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні.

Ряд називають **абсолютно збіжним**, якщо ряд з абсолютних величин його членів збігається: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Ряд називають **умовно збіжним**, якщо він збігається, але не збігається абсолютно.

Теорема 1.7. Якщо ряд абсолютно збігається, тоді він збігається.

Ряди, знаки членів яких чергуються, називають **знакопереміжними**; їх можна подати у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{або} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n\ (a_n>0). \tag{12}$$

Теорема 1.8. *Ознака Лейбніца.* Якщо знакопереміжний ряд вигляду (12) задовольняє такі умови:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) $a_n > a_{n+1}, \forall n$ його члени монотонно спадають, тоді він збігається.

Ряди, для яких виконується ознака Лейбніца, називають **рядами лейбніцевого типу**.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (12) його частковою сумою не перевищує модуля першого відкинутого члена ряду:

$$\left|S - S_n\right| = \left|r_n\right| \le a_{n+1}. \tag{13}$$

2. Функціональні ряди

2.1. Основні поняття

Функціональним називають ряд, членами якого є функції:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{14}$$

У кожній фіксованій точці ряд (14) перетворюється на числовий.

Множину всіх точок, у яких ряд (14) збігається називають його **областю збіжності**.

Степеневим рядом називають функціональний ряд такого вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{15}$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{16}$$

де x_0, a_n – дійсні числа.

Очевидно, що ряд (15) збігається в точці $x = 0$, а ряд (16) збігається в точці $x = x_0$. Крім того, ряд (16) завжди можна звести до вигляду (15) заміною змінної.

Теорема 2.1. *(Абеля.)* Якщо степеневий ряд (15) збіжний за $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$, тоді він є абсолютно збіжним для всіх значень x: $|x| < |x_1|$. Якщо ряд (15) розбіжний за $x = x_2$, тоді він є розбіжним для всіх значень x: $|x| > |x_2|$.

Наслідок. *(Щодо структури області збіжності степеневого ряду).* Можливі три випадки області збіжності степеневого ряду (16):

1) ряд збіжний лише в точці $x = x_0$;

2) ряд збіжний за всіх $x \in \mathbf{R}$;

3) існує таке скінченне число $R > 0$, що ряд абсолютно збігається за $|x - x_0| < R$ та розбігається за $|x - x_0| > R$.

Число $R > 0$ називають **радіусом збіжності**, а $(x_0 - R; x_0 + R)$ – **інтервалом збіжності.**

Зауваження 1. У точках $x = x_0 \pm R$ дослідження на збіжність необхідно проводити окремо.

Зауваження 2. Таким чином, область збіжності степеневого ряду відрізняється від інтервалу збіжності не більше ніж двома точками – $x_0 \pm R$.

За допомогою узагальнених ознак Д'Аламбера та Коші не складно визначити такі формули для обчислення радіуса збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|; \tag{17}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{18}$$

2.2. Ряди Тейлора й Маклорена

Рядом Тейлора функції $f(x)$ називають степеневий ряд такого вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \,. \tag{19}$$

Теорема 2.2. Якщо функцію $y = f(x)$ можна розвинути у степеневий ряд в інтервалі $(x_0 - R;\, x_0 + R)$, тоді цей ряд єдиний і є рядом Тейлора цієї функції:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (20)$$

Часткові суми ряду Тейлора називають **многочленами Тейлора.**

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називають ряд Тейлора за $x_0 = 0$ і в інтервалі збіжності цього ряду:

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\,. \qquad (21)$$

Будь-яку елементарну функцію можна розкласти в ряд Тейлора (19) в околі будь-якої внутрішньої точки області визначення x_0.

Наведемо ряди Маклорена деяких елементарних функцій та інтервали їхньої збіжності:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty. \qquad (22)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty. \qquad (23)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty. \qquad (24)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots,\ -1 < x \le 1. \qquad (25)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ -1 \le x \le 1. \qquad (26)$$

$$(1+x)^m = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n = \\ = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots, \quad -1<x<1. \tag{27}$$

Наведемо також декілька окремих випадків рядів (27):

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1-x+x^2-x^3+\dots(-1)^n x^n+\dots\ . \tag{28}$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\dots\ . \tag{29}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\dots\ . \tag{30}$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4+\dots\ . \tag{31}$$

2.3. Ряди Фур'є

Нехай функція $f(x)$ – інтегрована на відрізку $[-l;l]$. Тоді числа

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n=0,1,2\dots; \tag{32}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n=1,2\dots\ . \tag{33}$$

називають **коефіцієнтами Фур'є** функції $f(x)$. Зауважте, що в окремому випадку $n=0$ формула (32) набуває такого вигляду:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx.$$

Рядом Фур'є функції $f(x)$ називають такий тригонометричний ряд:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{34}$$

коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є (32), (33).

Теорема 2.3. *Достатня умова подання функції через її ряд Фур'є.* Нехай періодична з періодом $2l$ функція є кусково-монотонною та обмеженою на відрізку $[-l;l]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ є збіжним на всій числовій осі та його сума $S(x)$ дорівнює: значенню $f(x)$ в усіх точках неперервності; середньому арифметичному $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ односторонніх границь у точці розриву x_0; на кінцях відрізку – $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$. У цьому сенсі пишуть:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right). \tag{35}$$

Рівність (35) називають **розвиненням** функції $f(x)$ у ряд Фур'є. Частинні суми ряду Фур'є називають **многочленами Фур'є.**

Під час практичного знаходження коефіцієнтів Фур'є корисними є такі властивості:

1) для $2l$-періодичної функції $f(x)$ інтеграли в (32), (33) можна брати за довільним відрізком довжини $2l$, тобто:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx, \quad n=0,1,2...$$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx, \quad n=1,2...$$

2) для непарної функції $f(x)$: $f(-x)=-f(x)$ усі коефіцієнти $a_n=0$; у цьому разі кажуть, що функція розкладається за синусами; формули для обчислення ненульових коефіцієнтів Фур'є набувають такого вигляду:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n=1,2... \tag{36}$$

3) для парної функції $f(x)$: $f(-x)=f(x)$ усі коефіцієнти $b_n=0$; у цьому разі кажуть, що функція розкладається за косинусами; формули для обчислення ненульових коефіцієнтів Фур'є набувають такого вигляду:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx; \tag{37}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n=1,2.... \tag{38}$$

5. Приклади виконання завдань самостійної контрольної роботи

Завдання 1. Дослідіть на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{n^2+3}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n-1)!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{5n^3-2n+1}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Розв'язання:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{n^2+3}{n+2}$.

Перевірте необхідну умову (5) збіжності ряду (теорема 1.1), для цього обчисліть границю:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Оскільки границя загального члена ряду не дорівнює нулю, необхідну умову збіжності не виконано, тому заданий ряд розбігається;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{(2n-1)!}$.

Оскільки формула для загального члена ряду містить факторіал, застосуйте ознаку Д'Аламбера (теорему 1.2). Для цього складіть границю (6) й обчисліть її:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(2(n+1)-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot (2n+1)} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2+2n} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0 < 1.$$

Тоді за ознакою Д'Аламбера заданий ряд збігається;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

Оскільки формула для загального члена ряду містить n-й степінь, застосуйте радикальну ознаку Коші. Для цього складіть границю (8) й обчисліть її, використовуючи другу чудову границю:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \left|1^\infty\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n}{n+1}} = e^2 > 1.$$

Таким чином за радикальною ознакою Коші (теорема 1.3) заданий ряд розбігається;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{5n^3 - 2n + 1}$.

Застосуйте ознаку порівняння у граничній формі (теорема 1.6). Спочатку знайдіть еталонний ряд для порівняння. Для цього потрібно у формулі загального члена залишити старші степені без числових коефіцієнтів:

$$a_n = \frac{n\sqrt{n}}{5n^3 - 2n + 1} \sim \frac{n\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Рядом для порівняння виберіть ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, який, згідно з (11), збігається, оскільки $p = \frac{3}{2} > 1.$

Складіть та обчисліть границю:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{5n^3 - 2n + 1} \cdot \frac{n^{3/2}}{1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{5n^3 - 2n + 1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{5n^3} = \frac{1}{5}.$$

Оскільки $k \neq 0, k \neq \infty$ заданий ряд збігається, як і ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Розгляньте функцію, що задає загальний член ряду:

$$f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Вона задовольняє всі умови теореми 1.4: є додатною та монотонно спадає. Тому є можливість застосувати інтегральну ознаку Коші. Для цього складіть відповідний невласний інтеграл першого роду та дослі-джуйте його на збіжність:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln[\ln(x+1)]\Big|_1^b \right) =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \ln[\ln(b+1)] - \ln\ln 2 = \infty .$$

Оскільки границя є нескінченною, розглянутий невласний інтеграл першого роду розбігається, а тому, згідно з інтегральною ознакою Коші, розбігається й вихідний ряд.

Відповідь: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+3}{n+2} = \infty$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(2n-1)!} < \infty$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2} = \infty$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{5n^3 - 2n + 1} < \infty$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \infty$.

Завдання 2. Дослідіть знакопереміжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 7n - 1}}$$

на абсолютну та умовну збіжність.

Розв'язання. Спочатку розгляньте ряд із абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 7n - 1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 7n - 1}} .$$

Це знакододатний ряд, для дослідження його на збіжність застосуйте ознаку порівняння з рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$, який за (11) є розбіжним $\left(p = \frac{2}{3} < 1 \right)$. Оскільки

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 7n - 1}} \cdot \frac{n^{2/3}}{1} = 1,$$

ряд із модулів також розбігається за ознакою порівняння у граничній формі. Таким чином абсолютної збіжності немає.

Перевірте виконання умов теореми 1.8 Лейбніца. Дійсно,

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 7n - 1}} = 0$;

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} > \frac{1}{\sqrt[3]{17}} > \frac{1}{\sqrt[3]{29}} > \ldots$, тому ряд збігається за теоремою Лейбніца.

Відповідь. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 7n - 1}}$ збігається умовно.

Завдання 3. Для заданого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$ знайдіть область збіжності та запишіть явно часткову суму $S_2(x) = \sum_{n=0}^{2} u_n(x)$.

Розв'язання. За формулою (17) знаходять радіус збіжності цього степеневого ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{1} = 3,$$

тоді інтервал збіжності має такий вигляд $(x_0 - R; x_0 - R) = (-5; 1)$, тобто за $x \in (-5; 1)$ заданий ряд збігається абсолютно, а за $x \in (-\infty; -5) \bigcup (1; +\infty)$ – розбігається.

Окремо дослідіть ряд у граничних точках інтервалу збіжності.

За $x=-5$ ряд набуває такого вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5+2)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n .$$

Цей ряд розбігається, оскільки границі загального члена ряду не існує, тобто не виконано необхідну умову збіжності ряду (5).

За $x=1$ вихідний ряд перетворюється на такий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1.$$

Цей ряд розбігається, оскільки границя загального члена ряду не є нулем, тобто не виконано необхідну умову збіжності ряду (5).

Остаточно областю збіжності цього ряду є інтервал $(-5;1)$.

Знайдіть часткову суму $S_2(x)=\sum_{n=0}^{2}u_n(x)$:

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{2}\frac{(x+2)^n}{3^n}=1+\frac{x+2}{3}+\frac{(x+2)^2}{3^2}=\frac{1}{9}\left(x^2+7x+19\right).$$

Відповідь. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n}$ збігається абсолютно за $x\in(-5;1)$ і розбігається за $x\in(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$; $S_2(x)=\frac{1}{9}\left(x^2+7x+19\right)$.

Завдання 4. За допомогою розвинення функцій у ряд Маклорена обчисліть наближено $\sqrt{1{,}2}$ з точністю до $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. Скористайтеся формулою (29):

$$\sqrt{1+0{,}2}=1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}2-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}0{,}2^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}0{,}2^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}0{,}2^4+\ldots=$$
$$=1+0{,}1-0{,}005+0{,}0005-0{,}0000625+\ldots\ .$$

Оскільки цей ряд лейбніцевого типу, згідно з (19), абсолютна похибка від заміни ряду його частинною сумою не перевищує модуля першого відкинутого члена. Тому щоб забезпечити необхідну точність, слід узяти чотири перших доданки, оскільки в цьому разі:

$$\left|S - S_4\right| \le \left|a_5\right| = 0{,}0000625 < \varepsilon = 10^{-4} = 0{,}0001.$$

Із точністю до 10^{-4} шукане значення дорівнює

$$\sqrt{1{,}2} \approx 1 + 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}0005 = 1{,}0955.$$

Відповідь. $\sqrt{1{,}2} \approx 1{,}0955.$

Завдання 5. Наблизьте функцію $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x + 3}}$ квадратним тричленом в околі точки $x_0 = 0$ за допомогою розвинення в ряд Маклорена.

Розв'язання. Скористайтеся формулою (21) розкладання функції в ряд за степенями x. Для цього знайдіть похідні першого та другого порядку від заданої функції та обчисліть значення цих похідних і вихідної функції в точці $x_0 = 0$. Буде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x + 3}}; \;\; f(0) = \frac{1}{\sqrt{\cos 0 + 3}} = \frac{1}{2};$$

$$f'(x) = \left((\cos x + 3)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{\sin x}{2\sqrt{(\cos x + 3)^3}}; \;\; f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = \left(\frac{\sin x}{2\sqrt{(\cos x + 3)^3}}\right)' = \frac{\cos x(\cos x + 3) + 1{,}5\sin^2 x}{2\sqrt{(\cos x + 3)^5}}; \;\; f''(0) = \frac{1}{16}.$$

Тоді, згідно з (21), в околі точки $x_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x + 3}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{32}x^2.$$

Відповідь. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x + 3}} \approx \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{32}x^2.$

Завдання 6. Обчисліть наближено інтеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^3}dx$, узявши чотири члени розвинення у степеневий ряд підінтегральної функції. Оцініть похибку обчислень.

Розв'язання. Цей інтеграл не може бути обчислено точно.

Покроково знайдіть розклад підінтегральної функції в ряд Маклорена. За формулою (24), за всіх x:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots\ .$$

Замінивши аргумент на x^2, буде:

$$\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\frac{x^{16}}{8!}+\ldots\ .$$

Помножте почленно ряд на (-1) та додайте 1:

$$-\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{(2n)!}=-1+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{12}}{6!}-\frac{x^{16}}{8!}+\frac{x^{20}}{10!}-\ldots$$

$$1-\cos x^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{(2n)!}=\frac{x^4}{2!}-\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{12}}{6!}-\frac{x^{16}}{8!}+\frac{x^{20}}{10!}-\ldots$$

Нарешті, поділивши почленно на x^3, визначте розвинення в ряд підінтегральної функції:

$$\frac{1-\cos x^2}{x^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-3}}{(2n)!}=\frac{x}{2!}-\frac{x^5}{4!}+\frac{x^9}{6!}-\frac{x^{13}}{8!}+\frac{x^{17}}{10!}-\ldots$$

Оскільки визначений ряд збігається всюди на числовій осі, його можна почленно інтегрувати:

$$\int\limits_0^1\frac{1-\cos x^2}{x^3}dx=\int\limits_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-3}}{(2n)!}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int\limits_0^1 x^{4n-3}dx. \qquad (39)$$

Обчисліть наближено заданий інтеграл, залишаючи чотири доданки знайденого розвинення:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^3}dx \approx \int_0^1 \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \frac{x^9}{6!} - \frac{x^{13}}{8!} \right) dx = \left. \frac{x^2}{2!\cdot 2} - \frac{x^6}{4!\cdot 6} + \frac{x^{10}}{6!\cdot 10} - \frac{x^{14}}{8!\cdot 14} \right|_0^1 \approx$$

$$\approx 0{,}25 - 0{,}00694444 + 0{,}00013888 - 0{,}00000177 = 0{,}24319267.$$

Оскільки цей ряд є знакопереміжним рядом лейбніцевого типу, згідно з (19), абсолютна похибка від заміни ряду його частинною сумою не перевищує модуля першого відкинутого члена: $|S - S_4| \le |a_5|$. Обчисліть п'ятий доданок розвинення (39):

$$|a_5| = \left| \int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^3} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{17}}{10!} dx = \left. \frac{x^{18}}{10!\cdot 18} \right|_0^1 \approx 0{,}15 \cdot 10^{-7}.$$

Отже, абсолютна похибка обчислень не перевищує 10^{-7}:

$$|S - S_4| \le |a_5| \approx 0{,}15 \cdot 10^{-7} < 10^{-7}.$$

Таким чином, заданий інтеграл наближено дорівнює $0{,}2431927$ із точністю до 10^{-7}.

Відповідь. Із точністю до 10^{-7} $\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^3} dx \approx 0{,}2431927$.

Завдання 7. Для цієї задачі Коші знайдіть наближено розв'язання, обмежуючись трьома доданками розвинення невідомої функції в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} y' = 2yx^3 - \ln y \\ y(-1) = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Припустіть, що для функції $y(x)$ існує розвинення у ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -1$:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2\,!}(x - x_0)^2 + \dots\,. \qquad (40)$$

Із початкової умови буде:

$$x_0 = -1;$$

$$y(x_0) = y(-1) = 1.$$

Підставляючи ці значення в диференціальне рівняння знаходять значення похідної $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = 2y(x_0)\cdot x_0^3 - \ln(\,y(x_0));$$

$$y'(-1) = -2 - \ln 1 = -2.$$

Щоб знайти другу похідну в заданій точці, продиференціюйте диференціальне рівняння з урахуванням того, що $y = y(x)$ є функцією:

$$y'' = 2y'x^3 + 6yx^2 - \frac{y'}{y}.$$

Обчисліть $y''(-1)$, підставивши в останню формулу значення $x_0 = -1$; $y(-1) = 1$ та $y'(-1) = -2$. Знаходять:

$$y''(-1) = 2\cdot(-2)\cdot(-1)^3 + 6\cdot 1\cdot(-1)^2 - \frac{-2}{1} = 12.$$

Підставте всі знайдені значення у формулу Тейлора (40) і дістанете:

$$y(x) \approx 1 - 2(x+1) + \frac{12}{2!}(x+1)^2 =$$
$$= 1 - 2x - 2 + 6x^2 + 12x + 6 = 6x^2 + 10x + 5.$$

Відповідь. Наближене розв'язання задачі Коші $\begin{cases} y' = 2yx^3 - \ln y \\ y(-1) = 1 \end{cases}$ має такий вигляд: $y(x) \approx 6x^2 + 10x + 5$.

Завдання 8. Розкладіть в ряд Фур'є $2l$ періодичну функцію $y = f(x)$, для якої задано півперіод l і:

а) $f(x)$ задана на періоді $[-l; l]$;

б) $f(x)$ є парною, заданою на своєму півперіоді $[0; l]$.

$l = 4$ а) $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-1; 2] \\ 0, & x \notin [-1; 2] \end{cases}$ б) $f(x) = 2x + 1$.

Випишіть тригонометричні многочлени Фур'є $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$, що наближають $f(x)$.

Розв'язання.

а) є функція, задана на періоді $[-4; 4]$ такою формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-1; 2] \\ 0, & x \notin [-1; 2] \end{cases}.$$

Щоб розвинути в ряд Фур'є (35) функцію, необхідно обчислити її коефіцієнти Фур'є. Для їхнього відшукання використовують формули (32) і (33). Зауважте, що задана функція є нульовою на частині проміжку, тому інтеграли набувають такого вигляду:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2} 3dx = \frac{3}{4}\left(x\Big|_{-1}^{2}\right) = \frac{9}{4};$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2} 3\cos\frac{\pi nx}{4}dx = \frac{3}{4}\frac{4}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi nx}{4}\Bigg|_{-1}^{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} + \sin\frac{\pi n}{4}\right), \qquad n = 1, 2...;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2} 3\sin\frac{\pi n x}{4}dx = \frac{3}{4}\frac{4}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n x}{4}\Bigg|_{-1}^{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{2}\right), \quad n = 1, 2...$$

Підставте обчислені вирази у формулу (35) і визначте розвинення заданої функції в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right) =$$

$$= \frac{9}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} + \sin\frac{\pi n}{4}\right)\cos\frac{\pi n x}{4} + \frac{3}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{2}\right)\sin\frac{\pi n x}{4}\right) =$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\sin\frac{\pi n}{2} + \sin\frac{\pi n}{4}\right)\cos\frac{\pi n x}{4} + \left(\cos\frac{\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{2}\right)\sin\frac{\pi n x}{4}\right).$$

Щоб виписати тригонометричні многочлени Фур'є $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, що наближають $f(x)$, обчисліть необхідні перші коефіцієнти ряду:

$$a_1 = \frac{3}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\pi}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3(2+\sqrt{2})}{2\pi} \approx 1{,}63;$$

$$a_2 = \frac{3}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{2} + \sin\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\pi}(0+1) = \frac{3}{2\pi} \approx 0{,}48;$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-2}{\pi} \approx -0{,}19;$$

$$b_1 = \frac{3}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \approx 0{,}67;$$

$$b_2 = \frac{3}{2\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right) = \frac{3}{2\pi} \approx 0{,}48;$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \approx -0{,}23.$$

Підставте обчислені значення коефіцієнтів у формулу розвинення і визначте перші три наближення заданої функції тригонометричними многочленами:

$$S_1(x) = \frac{9}{8} + 1{,}63\cos\frac{\pi x}{4} + 0{,}67\sin\frac{\pi x}{4};$$

$$S_2(x) = \frac{9}{8} + 1{,}63\cos\frac{\pi x}{4} + 0{,}67\sin\frac{\pi x}{4} + 0{,}48\cos\frac{\pi x}{2} + 0{,}48\sin\frac{\pi x}{2};$$

$$S_3(x) = \frac{9}{8} + 1{,}63\cos\frac{\pi x}{4} + 0{,}67\sin\frac{\pi x}{4} + 0{,}48\cos\frac{\pi x}{2} + 0{,}48\sin\frac{\pi x}{2} +$$
$$+ 0{,}19\cos\frac{3\pi x}{4} - 0{,}23\sin\frac{3\pi x}{4}.$$

б) $f(x) = 2x + 1.$

Є парна функція, яку задано на півперіоді $[0; l] = [0; 4]$.

Застосовуючи властивості ряду Фур'є для парних функцій підсумовують, що коефіцієнти при синусах усі дорівнюють нулю, тобто задана функція розкладається лише за косинусами.

Обчисліть коефіцієнти Фур'є за формулами (37), (38):

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{4}\int_0^4 (2x+1)dx = \frac{1}{2}\left(x^2 + x\Big|_0^4\right) = 10.$$

Для обчислення решти коефіцієнтів доведеться скористатися формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1)\cos\frac{\pi n x}{4}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 2x+1 & du = (2x+1)'dx = 2dx \\ dv = \cos\frac{\pi n x}{4}dx & v = \int dv = \int \cos\frac{\pi n x}{4}dx = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2(2x+1)}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Bigg|_0^4 - \frac{4}{\pi n}\int_0^4 \sin\frac{\pi n x}{4}dx =$$

$$= \frac{2(2x+1)}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Bigg|_0^4 + \frac{16}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{4}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{18}{\pi n}\sin(\pi n) - \frac{2}{\pi n}\sin 0 + \frac{16}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n) - \frac{16}{\pi^2 n^2}\cos 0 =$$

$$= \left| \begin{matrix} \sin 0 = 0; \quad \cos 0 = 1 \\ \sin(\pi n) = 0 \end{matrix} \right| = \frac{16}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n) - \frac{16}{\pi^2 n^2}.$$

Обчислені вирази для коефіцієнтів Фур'є (пам'ятайте, що $b_n = 0$) підставте у формулу (35) і визначте:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right) =$$

$$= \frac{10}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n) - \frac{16}{\pi^2 n^2} \right)\cos\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= 5 + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos(\pi n) - 1)\cos\frac{\pi n x}{l}.$$

Щоб виписати тригонометричні многочлени Фур'є $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, що наближають $f(x)$, обчисліть необхідні перші коефіцієнти ряду:

$$a_1 = \frac{16}{\pi^2}\cos\pi - \frac{16}{\pi^2} = -\frac{16}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^2} = -\frac{32}{\pi^2} \approx -3{,}24;$$

$$a_2=\frac{4}{\pi^2}\cos 4\pi-\frac{4}{\pi^2}=\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{4}{\pi^2}\right)=0;$$

$$a_3=\frac{4}{9\pi^2}\cos 9\pi-\frac{4}{9\pi^2}=\left(-\frac{4}{9\pi^2}-\frac{4}{9\pi^2}\right)=-\frac{8}{9\pi^2}\approx -0{,}09.$$

Підставте обчислені значення коефіцієнтів у формулу розвинення та визначте перші три наближення заданої функції тригонометричними многочленами:

$$S_1(x)=5-3{,}24\cos\frac{\pi x}{4};$$

$$S_2(x)=S_1(x)=5-3{,}24\cos\frac{\pi x}{4};$$

$$S_3(x)=5-3{,}24\cos\frac{\pi x}{4}-0{,}09\cos\frac{3\pi x}{4}.$$

Відповідь:

а) Ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{9}{8}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\sin\frac{\pi n}{2}+\sin\frac{\pi n}{4}\right)\cos\frac{\pi n x}{4}+\left(\cos\frac{\pi n}{4}-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\sin\frac{\pi n x}{4}\right).$$

Перші три наближення:

$$S_1(x)=\frac{9}{8}+1{,}63\cos\frac{\pi x}{4}+0{,}67\sin\frac{\pi x}{4};$$

$$S_2(x)=\frac{9}{8}+1{,}63\cos\frac{\pi x}{4}+0{,}67\sin\frac{\pi x}{4}+0{,}48\cos\frac{\pi x}{2}+0{,}48\sin\frac{\pi x}{2};$$

$$S_3(x)=\frac{9}{8}+1{,}63\cos\frac{\pi x}{4}+0{,}67\sin\frac{\pi x}{4}+0{,}48\cos\frac{\pi x}{2}+0{,}48\sin\frac{\pi x}{2}+$$
$$+0{,}19\cos\frac{3\pi x}{4}-0{,}23\sin\frac{3\pi x}{4}.$$

б) Ряд Фур'є:

$$f(x) = 5 + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos(\pi n) - 1\right)\cos\frac{\pi n x}{l}.$$

Перші три наближення:

$$S_1(x) = S_2(x) = 5 - 3{,}24\cos\frac{\pi x}{4};$$

$$S_3(x) = 5 - 3{,}24\cos\frac{\pi x}{4} - 0{,}09\cos\frac{3\pi x}{4}.$$

6. Контрольні запитання для самодіагностики

1. Розкрийте зміст поняття "числовий ряд".
2. За яких умов ряд називають збіжним; розбіжним?
3. Наведіть приклади збіжних та розбіжних рядів.
4. Охарактеризуйте властивості числових рядів.
5. У чому полягає необхідна ознака збіжності числового ряду? Як її, зазвичай, застосовують?
6. Що означає поняття "знакододатні ряди"?
7. Які достатні ознаки збіжності знакододатних рядів вам відомі?
8. Наведіть відомі вам еталонні ряди. Чому їх так називають? Які умови їхньої збіжності?
9. У чому полягає сутність ознаки порівняння? Які різновиди ознаки порівняння ви знаєте?
10. Наведіть ознаку Даламбера, радикальну ознаку Коші, інтегральну ознаку Коші.
11. Наведіть приклади загальних членів ряду до кожної достатньої ознаки.
12. Що означає поняття "знакозмінний ряд"? "знакопереміжний ряд"?
13. Розкрийте зміст ознаки Лейбніца.
14. Наведіть визначення абсолютної й умовної збіжності рядів.
15. Наведіть приклади абсолютно збіжних рядів.
16. Наведіть приклади умовно збіжних рядів.

17. Визначте поняття "функціональний ряд", "степеневий ряд".

18. Розкрийте зміст теореми Абеля.

19. Що таке "інтервал" й "область збіжності степеневого ряду"?

20. Які формули для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду вам відомі?

21. Як дослідити степеневий ряд на межі області збіжності?

22. Якими є особливості розкладу в ряд Маклорена основних елементарних функцій?

23. У чому полягає сутність необхідної та достатньої умови розвинення функції в ряд Тейлора?

24. Як використовують степеневі ряди для обчислення наближених значень функції?

25. Як обчислити наближено визначений інтеграл?

26. Як знайти наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння?

27. Коли і як можна оцінити похибку наближеного обчислення?

28. Що таке "тригонометричний ряд"?

29. Що називають рядом Фур'є?

30. Який вигляд мають коефіцієнти Фур'є?

31. Які достатні умови існування розвинення функції в ряд Фур'є?

7. Варіанти завдань для самостійної контрольної роботи

Завдання 1. Дослідіть на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо загальний член ряду a_n має такий вигляд:

Варіант 1. а) $a_n = \operatorname{arcctg} \dfrac{n-3}{n+2}$; б) $a_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{7^n}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{2\pi n^2}{6n^2+n} \right)^{-n}$; г) $a_n = \dfrac{3n+1}{5n^2-2n}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n(4+\ln n)^3}$.

Варіант 2. а) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; б) $a_n = \frac{(1{,}1)^n}{n^2}$;

в) $a_n = \left(\ln\left(\pi + \frac{2}{n}\right)\right)^{-n}$; г) $a_n = \frac{2n\sqrt{n}+1}{3n^2+n}$;

д) $a_n = \frac{1}{(n^2+1)\operatorname{arctg}^3 n}$.

Варіант 3. а) $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n+2}$; б) $a_n = \frac{n!}{100^n}$;

в) $a_n = \left(\operatorname{arctg}\frac{n}{2n^2+3}\right)^{\frac{n}{2}}$; г) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+5)}$;

д) $a_n = \frac{1}{n(\ln n + 9)}$.

Варіант 4. а) $a_n = \sqrt[3]{\frac{8n^2+1}{n^2+5n-1}}$; б) $a_n = \frac{e^n}{n3^n}$;

в) $a_n = \left(\cos\frac{\pi n}{3n+2}\right)^{-n}$; г) $a_n = \frac{2n^3+n}{n^5-n^2+6}$;

д) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{1+\ln n}}$.

Варіант 5. а) $a_n = \ln\left(\frac{2n^2+3}{n^2+n}\right)$; б) $a_n = \frac{n^6+4n+7}{2^n}$;

в) $a_n = \left(\sin\frac{\pi n}{4n+1}\right)^{-2n}$; г) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n^3+2n^3+5}}$;

д) $a_n = \frac{1}{(\ln^2 n+5)n}$.

Варіант 6. а) $a_n = \sqrt[n]{e}$; б) $a_n = \frac{(n+1)!}{n^{100}}$;

в) $a_n = \left(\arccos\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$; г) $a_n = \frac{n^2+2n}{3n^4-1}$;

д) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n + 1}}$.

Варіант 7. а) $a_n = \arccos\frac{1}{n}$; б) $a_n = \frac{3^n}{n^2 2^n}$;

в) $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+5}\right)^{n^2}$; г) $a_n = \frac{4\sqrt{n}+n}{3n^3+2}$;

д) $a_n = \frac{1}{n\ln(4n)}$.

Варіант 8. а) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; б) $a_n = \operatorname{tg}\frac{2}{3^n}$;

в) $a_n = (\ln\sqrt{n+6})^{-n}$; г) $a_n = \frac{n^2\operatorname{arctg}(n+1)}{n^3+5}$;

д) $a_n = \frac{1}{(n^2+1)\operatorname{arctg}^4 n}$.

Варіант 9. а) $a_n = \cos\frac{\pi}{n+1}$; б) $a_n = \frac{n^2+3n}{(1{,}1)^{2n}}$;

в) $a_n = \left(\frac{5n+2}{4n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; г) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}(\sqrt{n}+3n)}$;

д) $a_n = \frac{1}{n(\ln n+1)^3}$.

Варіант 10. а) $a_n = \frac{n^2+5n-1}{100n^2+1}$; б) $a_n = \sin\frac{1}{2^n}$;

в) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$; г) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{3n^2-1}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n\ln(3n)}$.

Варіант 11. а) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^2+1}}{\sqrt{4n+3}}$; б) $a_n = n^4\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$;

в) $a_n = \left(\arccos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{-n}$; г) $a_n = \dfrac{n^2+n+7}{3n^3+2}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n+3)^4}$.

Варіант 12. а) $a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}$; б) $a_n = (n^2+2)e^{-n}$;

в) $a_n = \sqrt{\left(\dfrac{n^2+3}{4n^2-1}\right)^n}$; г) $a_n = (n+1)\sin\dfrac{1}{n^2+5}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{(\ln^2 n+2)n}$.

Варіант 13. а) $a_n = n\sin\dfrac{1}{n}$; б) $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^{-3n}$; г) $a_n = \dfrac{2n^3+1}{3n^4-4n}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{2+\ln n}}$.

Варіант 14. а) $a_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^{\sqrt{n}}$; б) $a_n = \dfrac{n^3+3}{(2n+1)!}$;

в) $a_n = \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi n}{3n+1}\right)\right)^{2n}$; г) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^4+3n^2-1}}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n+3)^2}$.

Варіант 15.

а) $a_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{4n+9}$; б) $a_n = \dfrac{n^7+1}{n!}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{-n^2}$; г) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^5+3}}{(n^2+1)^2}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{(7\ln n+1)^2 n}$.

Варіант 16.

а) $a_n = (1{,}01)^{n+1}$; б) $a_n = \dfrac{n+3}{2^n(n-10)}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^{n}$; г) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n\ln(5n)}$.

Варіант 17.

а) $a_n = \dfrac{n^n}{2n!}$; б) $a_n = \dfrac{n+4}{2^{n+1}n}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$; г) $a_n = \dfrac{1}{(n+3)(n+5)}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n(3\ln n+7)}$.

Варіант 18.

а) $a_n = \dfrac{4^n}{(2^n+1)^2}$; б) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-4}\right)^{n^2}$; г) $a_n = \dfrac{n+2}{3(n^4+1)}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{(n^2+1)\operatorname{arctgn}}$.

Варіант 19.

а) $a_n = (2{,}5)^{n+1}$;

б) $a_n = \dfrac{3^n + 2^n}{n!}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{2n+5}{2+n}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{arctg\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2+n}}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{(\ln^2 n+1)n}$.

Варіант 20.

а) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{5n^2-3}$;

б) $a_n = \dfrac{n}{3^n}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{2n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{(3\ln n+2)^4 n}$.

Варіант 21.

а) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$;

б) $a_n = \dfrac{n^2+1}{2^n}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{10n+5}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{7n^2+n}{n^4+5n+16}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n(2\ln n+3)}$.

Варіант 22.

а) $a_n = \dfrac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$;

б) $a_n = \dfrac{n!}{5^n}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{4}{\sqrt{7n}(3n+\sqrt{n})}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{1+\ln^2 n}}$.

Варіант 23. а) $a_n = \ln\left(\frac{5n^2-7}{n^2+n+1}\right)$; б) $a_n = \frac{n!}{n^{80}}$;

в) $a_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^{n^3}$; г) $a_n = \frac{n+8}{9n^2-3n}$;

д) $a_n = \frac{1}{n\sqrt[4]{3+\ln n}}$.

Варіант 24. а) $a_n = \sqrt[3]{\frac{27n^2+6}{n^2-5n+4}}$; б) $a_n = \frac{n^2}{3^n}$;

в) $a_n = \left(\frac{4n+7}{5n+9}\right)^{n^3}$; г) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n-8}}{\sqrt{n^3+3n^2+2}}$;

д) $a_n = \frac{1}{(\ln n+3)^3 n}$.

Варіант 25. а) $a_n = \left(\frac{9}{8}\right)^{\sqrt{n}}$; б) $a_n = \frac{n^n}{2^n n!}$;

в) $a_n = \left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^n$; г) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$;

д) $a_n = \frac{1}{n(\ln n+2)}$.

Варіант 26. а) $a_n = \operatorname{arcctg}\frac{n+2}{n-3}$; б) $a_n = \frac{\sqrt{n}+n}{6^n}$;

в) $a_n = \left(\ln\left(\frac{3}{n}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-n}$; г) $a_n = \frac{5n+4}{7n^2-3n+1}$;

д) $a_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n+1}}$.

Варіант 27.

а) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 3}{n+1}$;

б) $a_n = \dfrac{4^n}{3^n n^2}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{7n+1}{7n-5}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{n + 5\sqrt{n}}{3n^3 + 2}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n \ln(2n)}$.

Варіант 28.

а) $a_n = \left(\dfrac{1}{n} + 1\right)^{5n}$;

б) $a_n = \operatorname{tg}\dfrac{3}{4^n}$;

в) $a_n = (\ln\sqrt{n+5})^{-n}$;

г) $a_n = \dfrac{n^3 \operatorname{arctg}(n+5)}{n^4 + 1}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{(n^2+1)\operatorname{arctg}^2 n}$.

Варіант 29.

а) $a_n = \cos\dfrac{\pi}{n+2}$;

б) $a_n = \dfrac{(n^2+4)}{e^n}$;

в) $a_n = \left(\dfrac{2n+5}{n+4}\right)^{\frac{n}{2}}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{3n} + 2n)}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n + 3)^2 n}$.

Варіант 30.

а) $a_n = \dfrac{n^2 + n - 5}{20n^2 + 7}$;

б) $a_n = n^5 \left(\dfrac{\pi}{8}\right)^n$;

в) $a_n = \left(\dfrac{n+4}{n-3}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{4n^2 + 2}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{4 + \ln n}}$.

Завдання 2. Дослідіть знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ на абсолютну та умовну збіжність, якщо a_n має такий вигляд:

Варіант 1. $a_n = \dfrac{2n+5}{(3n-1)(n+1)}$.

Варіант 2. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n!}$.

Варіант 3. $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+7)}$.

Варіант 4. $a_n = \dfrac{n^3+4}{(n+1)!}$.

Варіант 5. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+9}}$.

Варіант 6. $a_n = \dfrac{n^2+3}{5^{n+1}}$.

Варіант 7. $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{n+3}}$.

Варіант 8. $a_n = \dfrac{n+8}{(2n-1)!}$.

Варіант 9. $a_n = \dfrac{1}{7+\sqrt[4]{2n+1}+\sqrt{n}}$.

Варіант 10. $a_n = \dfrac{6n-1}{n^2+3n+2}$.

Варіант 11. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{4+3n+n\sqrt{n}}$.

Варіант 12. $a_n = \dfrac{n^2+3}{(2n+1)!}$.

Варіант 13. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{2n^3+3n^2+1}}$.

Варіант 14. $$a_n = \frac{n^2+5}{5^{n-1}}.$$

Варіант 15. $$a_n = \frac{3^{n+1}}{n^2+3}.$$

Варіант 16. $$a_n = \frac{n+2}{n^2+4}.$$

Варіант 17. $$a_n = \frac{n}{5^n}.$$

Варіант 18. $$a_n = 1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Варіант 19. $$a_n = arctg\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$$

Варіант 20. $$a_n = \frac{2n+1}{7n+3}.$$

Варіант 21. $$a_n = \frac{1}{n\ln(3n)}.$$

Варіант 22. $$a_n = \frac{n^4+5}{(n+2)!}.$$

Варіант 23. $$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}+2\sqrt{n}}.$$

Варіант 24. $$a_n = \frac{1}{\ln(5+n)}.$$

Варіант 25. $$a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{2n+1}-3}.$$

Варіант 26. $$a_n = \frac{3n^2+2}{15^{n+1}}.$$

Варіант 27. $$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}(7n+1)}.$$

Варіант 28. $$a_n = \frac{n-6}{(3n+1)!}.$$

Варіант 29. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1} + \sqrt{n} + 4}$.

Варіант 30. $a_n = \dfrac{8n+1}{n^2 - 4n - 2}$.

Завдання 3. Для заданого степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ знайдіть область збіжності та запишіть явно часткову суму $S_2(x) = \sum\limits_{n=0}^{2} u_n(x)$:

Варіант 1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{(n+4)(n+1)}$.

Варіант 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2\sqrt{n}}{3^{n+1}} (x-1)^n$.

Варіант 3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3n^2 - 1}{2n^2 + 1} (x-5)^n$.

Варіант 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{6^{n-2}(n+1)}$.

Варіант 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(3n+2)(2n-1)}$.

Варіант 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^{n+2}}{4n+1} (x+2)^n$.

Варіант 7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} (x-3)^n$.

Варіант 8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{3^n (n^2 + 2)} (x+1)^n$.

Варіант 9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n-1}{2n^2 + 9} (x+4)^n$.

Варіант 10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2 + 3}{5^{n-1}} (x-2)^n$.

Варіант 11. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+3}(x+2)^n.$$

Варіант 12. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+4}(x+7)^n.$$

Варіант 13. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{6n^3-5}(x-4)^n.$$

Варіант 14. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-2)^n.$$

Варіант 15. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3n^3+4}(x-3)^n.$$

Варіант 16. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{2n^3-3}(x-4)^n.$$

Варіант 17. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n}{n^2+4}(x-1)^n.$$

Варіант 18. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+5}(x-1)^n.$$

Варіант 19. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)}(x-3)^n.$$

Варіант 20. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n9^n}(x-1)^{2n}.$$

Варіант 21. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)}{2^{n+1}(n+1)^2}(x-3)^n.$$

Варіант 22. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n+1)}(x-1)^n.$$

Варіант 23. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}(x-3)^{2n}.$$

Варіант 24. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(2n-1)}(x-2)^n.$$

Варіант 25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}(x+1)^n.$

Варіант 26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n+1}(x+2)^n.$

Варіант 27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n+1}(x-3)^n.$

Варіант 28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n(n^2+3)}(x+1)^n.$

Варіант 29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{2n^2+9}(x-4)^n.$

Варіант 30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{5^n}(x-2)^n.$

Завдання 4. За допомогою розвинення функцій у ряд Маклорена обчисліть наближено задані значення з точністю ε:

Варіант 1.	$\ln 1{,}1$	$\varepsilon = 0{,}01.$
Варіант 2.	$e^{-0{,}2}$	$\varepsilon = 0{,}00001.$
Варіант 3.	$\sin 9^\circ$	$\varepsilon = 0{,}0001.$
Варіант 4.	$\operatorname{arctg} 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}001.$
Варіант 5.	$\cos 10^\circ$	$\varepsilon = 0{,}0001.$
Варіант 6.	$\sqrt{1{,}1}$	$\varepsilon = 0{,}001.$
Варіант 7.	$\sqrt[3]{1{,}2}$	$\varepsilon = 0{,}001.$
Варіант 8.	$\ln 1{,}2$	$\varepsilon = 0{,}01.$
Варіант 9.	$e^{-0{,}3}$	$\varepsilon = 0{,}0001.$
Варіант 10.	$\sin 6^\circ$	$\varepsilon = 0{,}0001.$
Варіант 11.	$\operatorname{arctg} 0{,}3$	$\varepsilon = 0{,}001.$
Варіант 12.	$\cos 2^\circ$	$\varepsilon = 0{,}0001.$
Варіант 13.	$\sqrt{1{,}3}$	$\varepsilon = 0{,}001.$

Варіант 14. $\sqrt[3]{1,4}$ $\varepsilon = 0{,}001$.

Варіант 15. $\sqrt{130}$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 16. $\ln 1{,}25$ $\varepsilon = 0{,}01$.

Варіант 17. $e^{-0{,}1}$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 18. $\sqrt[10]{1024}$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 19. $\ln 1{,}3$ $\varepsilon = 0{,}01$.

Варіант 20. $\operatorname{arctg} 0{,}4$ $\varepsilon = 0{,}001$.

Варіант 21. $e^{-0{,}4}$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 22. $\sqrt{1{,}2}$ $\varepsilon = 0{,}001$.

Варіант 23. $\sin 4^\circ$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 24. $e^{-0{,}5}$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 25. $\ln 1{,}4$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 26. $\operatorname{arctg} 0{,}2$ $\varepsilon = 0{,}001$.

Варіант 27. $\cos 12^\circ$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Варіант 28. $\sqrt{1{,}4}$ $\varepsilon = 0{,}001$.

Варіант 29. $\sqrt[3]{1{,}1}$ $\varepsilon = 0{,}001$.

Варіант 30. $\sin 8^\circ$ $\varepsilon = 0{,}0001$.

Завдання 5. Наблизьте функцію квадратним тричленом в околі точки $x_0 = 0$ за допомогою розвинення в ряд Маклорена.

Варіант 1. $f(x) = 2^{\cos x}$.

Варіант 2. $f(x) = \lg(1 + x^2)$.

Варіант 3. $f(x) = \sqrt[3]{3x + 2}$.

Варіант 4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 1}$.

Варіант 5. $f(x) = (x^2 + 2)\operatorname{tg} x$.

Варіант 6. $f(x) = e^{\sin 2x}$.

Варіант 7. $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + x^2)$.

Варіант 8. $f(x)=\sqrt{\sin\, x}$.

Варіант 9. $f(x)=\ln(1+x)\cos x$.

Варіант 10. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Варіант 11. $f(x)=\ln^2(x^2+1)$.

Варіант 12. $f(x)=\sqrt{e^x+8}$.

Варіант 13. $f(x)=3^{x^2+2x}$.

Варіант 14. $f(x)=(2x^2+4x+1)^3$.

Варіант 15. $f(x)=\arccos 2x$.

Варіант 16. $f(x)=4^{\sin x}$.

Варіант 17. $f(x)=\ln(x^3+3)$.

Варіант 18. $f(x)=\sqrt[5]{2x+4}$.

Варіант 19. $f(x)=\dfrac{\cos x}{2x^2-1}$.

Варіант 20. $f(x)=(3x^2+4)\,\mathrm{tg}\, x$.

Варіант 21. $f(x)=e^{\cos 5x}$.

Варіант 22. $f(x)=(x^3+4x+1)^4$.

Варіант 23. $f(x)=\sin x\ln(1+x)$.

Варіант 24. $f(x)=\mathrm{arctg}(x^2+1)$.

Варіант 25. $f(x)=\arcsin 3x$.

Варіант 26. $f(x)=\sqrt{2+x^2}$.

Варіант 27. $f(x)=\ln^3(x^2+5)$.

Варіант 28. $f(x)=\sqrt{7+e^x}$.

Варіант 29. $f(x)=4^{3x^2+x}$.

Варіант 30. $f(x)=\lg(x+2)\cos x$.

Завдання 6. Обчисліть наближено інтеграл $\int\limits_0^a f(x)dx$, узявши чотири члени розвинення у степеневий ряд підінтегральної функції. Оцініть похибку обчислень.

Варіант 1. $\int\limits_0^{0,3} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx$.

Варіант 2. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x - x}{2x^2}\,dx$.

Варіант 3. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx$.

Варіант 4. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt[3]{1+2x}\,dx$.

Варіант 5. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x}\,dx$.

Варіант 6. $\int\limits_0^{0,6} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\,dx$.

Варіант 7. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2}\,dx$.

Варіант 8. $\int\limits_0^{1} \frac{e^{-x^2}-1}{x}\,dx$.

Варіант 9. $\int\limits_0^{0,3} x\sqrt{1+x^3}\,dx$.

Варіант 10. $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\,dx$.

Варіант 11. $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{x}{1+x^3}\,dx$.

Варіант 12. $\int\limits_{0}^{0,9} \frac{e^{-2x}-1}{x}\,dx$.

Варіант 13. $\int\limits_{0}^{0,8} \frac{1-\cos x^3}{x^4}\,dx$.

Варіант 14. $\int\limits_{0}^{0,9} \frac{\sin x^2}{2x}\,dx$.

Варіант 15. $\int\limits_{0}^{0,3} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x}\,dx$.

Варіант 16. $\int\limits_{0}^{0,9} \frac{1-\cos x^2}{x^4}\,dx$.

Варіант 17. $\int\limits_{0}^{0,2} \frac{\ln(x^2+1)}{3x}\,dx$.

Варіант 18. $\int\limits_{0}^{0,4} \frac{\sin x - x}{x^3}\,dx$.

Варіант 19. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\cos 2x-1}{x^2}\,dx$.

Варіант 20. $\int\limits_{0}^{0,1} \sqrt[3]{1+3x}\,dx$.

Варіант 21. $\int\limits_{0}^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} 5x - x}{x}\, dx.$

Варіант 22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-x^3} - 1}{x}\, dx.$

Варіант 23. $\int\limits_{0}^{0,2} x\sqrt{1+3x^2}\, dx.$

Варіант 24. $\int\limits_{0}^{1} (e^{-\frac{x^2}{2}} - 1)\, dx.$

Варіант 25. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

Варіант 26. $\int\limits_{0}^{0,3} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x^2}\, dx.$

Варіант 27. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{x}{1-2x^2}\, dx.$

Варіант 28. $\int\limits_{0}^{0,7} \frac{e^{-3x} - 1}{x}\, dx.$

Варіант 29. $\int\limits_{0}^{0,8} (1-\cos x^3)\, dx.$

Варіант 30. $\int\limits_{0}^{0,4} \frac{\ln(1+x^4)}{x}\, dx.$

Завдання 7. Для поданої задачі Коші $\begin{cases} f(x, y, y') = 0; \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ знайдіть наближений розв'язок, обмежуючись трьома доданками розвинення невідомої функції у ряд Тейлора.

Варіант 1. $\begin{cases} y' = \ln(x + y) + x; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 2. $\begin{cases} y' \cos(3x - y) = 2x; \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Варіант 3. $\begin{cases} y'(2x - 3y) = 3y^2 - 2x; \\ y(1) = -1. \end{cases}$

Варіант 4. $\begin{cases} y'(x + 2y) = y^2 e^{x + y^2}; \\ y(-1) = 1. \end{cases}$

Варіант 5. $\begin{cases} y'(x + 1) = x^2 y + xy^3; \\ y(2) = 1. \end{cases}$

Варіант 6. $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} - y + x^2; \\ y(-1) = 1. \end{cases}$

Варіант 7. $\begin{cases} y'(x^2 + y^2) = \sin(xy) - 2x; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 8. $\begin{cases} y' = e^{xy} + 3x^2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Варіант 9. $\begin{cases} y' = y \cos(xy); \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Варіант 10. $\begin{cases} y'(x+3y) = 2\sqrt{x} - y^2; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 11. $\begin{cases} y'(x^2 y+1) = xy^3; \\ y(-1) = 1. \end{cases}$

Варіант 12. $\begin{cases} y' = 2\sin(x-y) + x; \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Варіант 13. $\begin{cases} y' y^2 = \sqrt{x+4y}; \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Варіант 14. $\begin{cases} y' = xe^y + 3x - y; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 15. $\begin{cases} y'\cos x = (1+xy); \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Варіант 16. $\begin{cases} y' = x + \ln(x+y); \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 17. $\begin{cases} y'(2x^2 - 3y) = 3y - 2x; \\ y(-1) = -1. \end{cases}$

Варіант 18. $\begin{cases} xy' = -y^2 - 2\ln y; \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Варіант 19. $\begin{cases} y'(2x+y) = y^2 e^{x^2+y}; \\ y(1) = -1. \end{cases}$

Варіант 20. $\begin{cases} y'(x+8) = xy^2 + x^3 y; \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Варіант 21. $\begin{cases} y' - 2\sqrt{y} + y = 2 + x^2; \\ y(-1) = 1. \end{cases}$

Варіант 22. $\begin{cases} y'(x^2 + y^3) = x + \sin(xy); \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 23. $\begin{cases} y' = e^{3xy} + 2x^3; \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Варіант 24. $\begin{cases} y'(2x + y) = \sqrt{x} + y^4; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 25. $\begin{cases} y'(x^2 y + 3) = x^3 y; \\ y(1) = -1. \end{cases}$

Варіант 26. $\begin{cases} y' + y = xe^y + 4x; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 27. $\begin{cases} 3y' \cos x = (xy - 2); \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Варіант 28. $\begin{cases} xy' = x + \ln(x + y) - 5; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Варіант 29. $\begin{cases} y'(2x^2 - 3y) = 2y - x; \\ y(-1) = -1. \end{cases}$

Варіант 30. $\begin{cases} y' = e^{xy} + 5x^4; \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Завдання 8. Розвиньте у ряд Фур'є $2l$-періодичну функцію $y = f(x)$, для якої задано півперіод l та:

а) $f(x)$ задана на періоді $[-l; l]$;

б) $f(x)$ є парною (для парних номерів варіантів) або непарною (для непарних номерів варіантів), заданою на своєму півперіоді $[0; l]$.

Випишіть тригонометричні многочлени Фур'є $S_1(x), S_2(x)$, що наближають $f(x)$.

Варіант 1. $l = 3$ а) $f(x) = \begin{cases} 7, & x \in [-1; 2] \\ 0, & x \notin [-1; 2] \end{cases}$ б) $f(x) = 3x + 1$.

Варіант 2. $l = 5$ а) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-3; 1] \\ 0, & x \notin [-3; 1] \end{cases}$ б) . $f(x) = 2x - 3$.

Варіант 3. $l = 7$ а) $f(x) = \begin{cases} -6, & x \in [-5; 4] \\ 0, & x \notin [-5; 4] \end{cases}$ б) $f(x) = 3 - x$.

Варіант 4. $l = 8$ а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-6; 5] \\ 0, & x \notin [-6; 5] \end{cases}$ б) $f(x) = 6x - 1$.

Варіант 5. $l = 4$ а) $f(x) = \begin{cases} -7, & x \in [-1; 3] \\ 0, & x \notin [-1; 3] \end{cases}$ б) $f(x) = 5 - x$.

Варіант 6. $l = 9$ а) $f(x) = \begin{cases} 4, & x \in [-8; 2] \\ 0, & x \notin [-8; 2] \end{cases}$ б) $f(x) = 5x + 2$.

Варіант 7. $l = 6$ а) $f(x) = \begin{cases} -3, & x \in [-4; 5] \\ 0, & x \notin [-4; 5] \end{cases}$ б) $f(x) = 7 - 2x$.

Варіант 8. $l = 10$ а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-7; 6] \\ 0, & x \notin [-7; 6] \end{cases}$ б) $f(x) = 3x + 1$.

Варіант 9. $l = 2$ а) $f(x) = \begin{cases} -9, & x \in [-1; 2] \\ 0, & x \notin [-1; 2] \end{cases}$ б) $f(x) = x + 1$.

Варіант 10. $l=12$ а) $f(x)=\begin{cases}4, & x\in[-10;8]\\ 0, & x\notin[-10;8]\end{cases}$ б) $f(x)=2-7x$.

Варіант 11. $l=3$ а) $f(x)=\begin{cases}7, & x\in[-3;2]\\ 0, & x\notin[-3;2]\end{cases}$ б) $f(x)=x-1$.

Варіант 12. $l=5$ а) $f(x)=\begin{cases}-2, & x\in[-4;5]\\ 0, & x\notin[-4;5]\end{cases}$ б) $f(x)=3-x$.

Варіант 13. $l=7$ а) $f(x)=\begin{cases}5, & x\in[-3;5]\\ 0, & x\notin[-3;5]\end{cases}$ б) $f(x)=x+2$.

Варіант 14. $l=8$ а) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-6;3]\\ 0, & x\notin[-6;3]\end{cases}$ б) $f(x)=4-2x$.

Варіант 15. $l=4$ а) $f(x)=\begin{cases}8, & x\in[-1;2]\\ 0, & x\notin[-1;2]\end{cases}$ б) $f(x)=9x+1$.

Варіант 16. $l=9$ а) $f(x)=\begin{cases}-2, & x\in[-7;3]\\ 0, & x\notin[-7;3]\end{cases}$ б) $f(x)=4x-3$.

Варіант 17. $l=6$ а) $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-2;4]\\ 0, & x\notin[-2;4]\end{cases}$ б) $f(x)=1-2x$.

Варіант 18. $l=10$ а) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-8;2]\\ 0, & x\notin[-8;2]\end{cases}$ б) $f(x)=6x+5$.

Варіант 19. $l=2$ а) $f(x)=\begin{cases}9, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$ б) $f(x)=7-3x$.

Варіант 20. $l=12$ а) $f(x)=\begin{cases}-5, & x\in[-4;0]\\ 0, & x\notin[-4;0]\end{cases}$ б) $f(x)=8x+1$.

Варіант 21. $l=3$ а) $f(x)=\begin{cases}6, & x\in[-3;1]\\ 0, & x\notin[-3;1]\end{cases}$ б) $f(x)=4-x$.

Варіант 22. $l=5$ а) $f(x)=\begin{cases}-2, & x\in[-3;4]\\ 0, & x\notin[-3;4]\end{cases}$ б) $f(x)=6x+1$.

Варіант 23. $l=7$ а) $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-6;2]\\ 0, & x\notin[-6;2]\end{cases}$ б) $f(x)=2x+5$.

Варіант 24. $l=8$ а) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-4;7]\\ 0, & x\notin[-4;7]\end{cases}$ б) $f(x)=9-2x$.

Варіант 25. $l=4$ а) $f(x)=\begin{cases}9, & x\in[-1;4]\\ 0, & x\notin[-1;4]\end{cases}$ б) $f(x)=6x-2$.

Варіант 26. $l=9$ а) $f(x)=\begin{cases}-4, & x\in[-5;2]\\ 0, & x\notin[-5;2]\end{cases}$ б) $f(x)=5-3x$.

Варіант 27. $l=6$ а) $f(x)=\begin{cases}5, & x\in[0;4]\\ 0, & x\notin[0;4]\end{cases}$ б) $f(x)=3x+2$.

Варіант 28. $l=10$ а) $f(x)=\begin{cases}4, & x\in[-6;3]\\ 0, & x\notin[-6;3]\end{cases}$ б) $f(x)=1-2x$.

Варіант 29. $l=2$ а) $f(x)=\begin{cases}-11, & x\in[-1;0]\\ 0, & x\notin[-1;0]\end{cases}$ б) $f(x)=4x+2$.

Варіант 30. $l=12$ а) $f(x)=\begin{cases}5, & x\in[0;8]\\ 0, & x\notin[0;8]\end{cases}$ б) $f(x)=7-3x$.

8. Рекомендована література

8.1. Основна

1. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. – Москва : Наука, 1978. – 656 с.

2. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни "Вища математика" : навч.-метод. посіб. / Т. В. Денисова, К. М. Дубовик, В. Ф. Сенчуков, В. Г. Титарев. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 168 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1972. –

Ч. 1. – 1972. – 432 с.

Ч. 2. – 1972. – 576 с.

4. Сенчуков В. Ф. Вища математика. Загальні розділи : навчальний посібник. Ч. 2 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2013. – 296 с.

8.2. Додаткова

5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 2002. – 384 с.

6. Высшая математика : сборник задач / под ред. П. Ф. Овчинникова. – Київ : Вища школа, 1999. – 350 с.

7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. У 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : Высшая школа, 2003. –

Ч. 1. – 2003. – 304 с.

Ч. 2. – 2003. – 416 с.

8. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – Москва : Наука, 2002. – 352 с.

8.3. Інформаційні ресурси

9. Вища математика : математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія [Електронний ресурс] : підручник / [авт. кол. : В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва та ін. ; за ред. В. С. Пономаренка]. – Мультимедійне інтерактивне електрон. вид. комбінованого

використ. (412 Мб). – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – Режим доступу : http://library.hneu.edu.ua/jornal_aut1.php. – Назва з тит. екрана. – ISBN 978-966-676-568-3.

10. Рибалко А. П. Математичний аналіз [Електронний ресурс] : опорний конспект / А. П. Рибалко. – Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

11. Рибалко А. П. Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "Математичний аналіз" [Електронний ресурс] / А. П. Рибалко – Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

12. Рибалко А. П. Методичні рекомендації та завдання для виконання лабораторних робіт із навчальної дисципліни "Математичний аналіз" [Електронний ресурс] / А. П. Рибалко. – Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Ряди"

для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Рибалко** Антоніна Павлівна
Стєпанова Катерина Вадимівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. І. Черненко*

Коректор *О. Г. Доценко*

План 2019 р. Поз. № 17 ЕВ. Обсяг 64 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.