МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Молдавська О. В.

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Харків. Вид. ХНЕУ, 2008

УДК 336.11:519.2 (042.4)
ББК 65.261я73
М75

Рецензент – начальник управління продажу та розвитку мережі ВАТ «Райффайзен банк Аваль» *Алексійчук В. В.*

Затверджено на засіданні кафедри економічної статистики.
Протокол №2 від 20.09.2007 р.

М75 Фінансова математика. Конспект лекцій. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2008. – 76 с. (Укр. мов.)

Подано різні методи проведення статистичних розрахунків щодо фінансових операцій, пов'язаних з нарощенням або дисконтуванням фінансів, щодо фінансових рент, щодо кредитних операцій та методів погашення кредитів у сучасній банківській практиці, щодо інвестиційних операцій і методів оцінки їх ефективності.

Рекомендовано для студентів економічних спеціальностей.

УДК 336.11:519.2 (042.4)
ББК 65.261я73

Вступ

Навчальна дисципліна «Фінансова математика» присвячена детальному вивченню методів проведення статистичних розрахунків у такій наважливішій сфері діяльності, як фінанси та їх оборот на фінансових ринках. Ринкова економіка кожної розвинутої держави ґрунтується на функціонуванні, постійному розвитку та активній взаємодії різних типів ринків, а саме матеріальних ринків вироблення продукції й надання послуг, ринків праці та всіх складових фінансового ринку. При сучасному рівні розвитку світової економіки функціонування економіки кожної окремої країни зараз уже неможливе без високорозвиненого фінансового ринку. Навіть таке загальне визначення фінансового ринку, як системи економічних та правових відносин, пов'язаних з купівлею-продажем (залученням-розміщенням) або випуском в обіг різних видів фінансових активів, уже містить у собі твердження про те, що сучасна економічна система невід'ємна від поняття фінансового ринку, тому що існування та обіг матеріальних активів неможливі без існування й обігу фінансових активів.

Поняття та вільне оперування фінансовими розрахунками, розуміння сутності різних фінансових інструментів та вміння вільно оперувати фінансивими розрахунками є необхідними якостями сучасного спеціаліста з економмічних дисциплін. Навчальна дисципліна «Фінансова математика» спрямована на формування у студента чітких знань щодо всіх специфічних властивостей саме фінансових розрахунків у різних сферах економіки.

При вивченні даної дисципліни студент детально ознайомиться з методами розрахунків щодо фінансових операцій, пов'язаних з нарощенням або дисконтуванням фінансів, щодо фінансових рент, щодо кредитних операцій і методів погашення кредитів у сучасній банківській практиці, щодо інвестиційних операцій і методів оцінки їх ефективності. Ці знання потрібні для подальшого вивчення всіх фінансових дисциплін й можуть широко використовуватися на практиці. Розвиток фінансової грамотності й навичок вільного оперування фінансами зараз є необхідними якостями спеціаліста з кожної економічної спеціальності.

Модуль 1. Основи здійснення фінансових розрахунків

Тема 1. Предмет, методи та завдання фінансової математики. Основи фінансових розрахунків.

1.1. Сутність і значення дисципліни «Фінансова математика».
1.2. Основи здійснення фінансових розрахунків.

1.1. Сутність і значення дисципліни «Фінансова математика»

Навчальна дисципліна «Фінансова математика» є основною для подальшого розуміння функціонування фінансів та здійснення фінансових розрахунків. Фінансові розрахунки мають місце в усіх сферах функціонування фінансів. Статистичний аналіз у статистиці фінансів потребує використання різних статистичних методів, таких, як: метод середніх і варіаційний аналіз, індексний метод, традиційні та нові підходи до аналізу динаміки процесів, кореляційно-регресійний аналіз. Окреме місце займають методи фінансової математики, яка дозволяє опанувати методи, що виходять за рамки стандартних і застосовуються тільки в складних фінансових розрахунках. В умовах ринку час є фактором вартості. Виміряти й вивчити процеси зростання вартості фінансових ресурсів та впливати на них можна тільки досконало володіючи теорією процентних грошей. Особливе значення вони мають у питаннях оцінки фінансових активів та фінансових потоків у різних умовах постановки задачі.

Предмет фінансової математики достатньо чітко визначено. Основна увага сконцентрована на здійсненні фінансових розрахунків. При вивченні даної дисципліни студент буде ознайомлений з методологічними та методичними основами фінансової математики при здійсненні фінансових операцій. Дисципліну спрямовано на формування у студента комолексу знань і вмінь щодо базових принципів фінансових розрахунків, які застосовуються в різних сферах економічної практики.

Мета дисципліни – сформувати у студентів систему теоретичних знань та практичних навичок щодо здійснення фінансових розрахунків у різних умовах постановки задачі оцінювання грошових потоків.

Отримані в результаті вивчення дисципліни знання будуть базою для подальшого більш поглибленого вивчення питань, пов'язаних із функціонуванням фінансових ринків, ринку банківських послуг, державного бюджету, фінансового аналізу діяльності підприємств.

Опанувавши матеріал дисципліни, студенти повинні вміти:

здійснювати фінансово-економічні розрахунки;

вільно оперувати всіма видами здійснення розрахунків у різних умовах постановки задач, пов'язаних з використанням фінансів;

робити грамотні висновки з проведених розрахунків, які будуть сприяти прийняттю обґрунтованих рішень щодо збільшення ефективності роботи різних фінансових установ;

оцінювати ефективність здійснення фінансових вкладень.

Тематичний план дисципліни складається з двох модулів, пов'язаних один з одним за змістом тем, що викладаються. У перший модуль зібрано теми, які стосуються базових основ здійснення фінансових розрахунків. Вивчаючи теми цього модуля, студент ознайомиться з поняттями нарощення й дисконтування сум на основі простих і складних процентних та облікових ставок у різних умовах постановки задачі, навчиться визначати еквівалентні процентні ставки.

У другий модуль зібрано теми, які стосуються фінансових розрахунків за найбільш поширеними фінансовими операціями. При вивченні цього модуля студент послідовно ознайомиться з поняттями та базовими основами розрахунків стосовно потоків фінансових платежів (фінансові ренти), надання й погашення кредитної заборгованості, здійснення інвестицій та аналізу ефективності реальних інвестицій. Студент навчиться визначати нарощену й дисконтовану вартість фінансових рент; ознайомиться з методами погашення середньострокової та довгострокової кредитної заборгованості: рівними строковими виплатами, рівними частинами основного боргу, змінними виплатами. Буде вміти здійснювати розрахунки при конверсії та консолідації кредитів. Також увага приділятиметься методам оцінки ефективності інвестицій, строків їх окупності, внутрішньої дохідності та аналізу альтернативних проектів.

1.2. Основи здійснення фінансових розрахунків

Фінансово-економічні розрахунки (ФЕР, інша назва – фінансова математика) – це область знань, яка дає цілісну концепцію кількісного фінансового аналізу умов та результатів кредитно-фінансових угод, пов'язаних з наданням фінансових коштів на різних умовах. Потоки фінансових платежів мають місце при здійсненні інвестиційних операцій, кредитних, розрахункових і при використанні різних фінансових Іструментів. Скрізь, де виникає задача приведення у відповідність розмірів та термінів платежів з часом проведення розрахунків і умовами фінансових угод, потрібно застосовувати методи фінансової математики, тобто фінансово-економічні розрахунки.

Потреба в застосуванні методів ФЕР виникає тоді, коли в обчисленнях повинні бути враховані три параметри: вартісні характеристики (суми платежів та позичок), часові дані (дати і терміни виплат, тривалість пільгових періодів, відстрочки платежів та. ін.), а також процентні ставки. Зрештою головна роль ФЕР полягає в тому, що вони дозволяють ефективно здійснити інвестиційну діяльність, проводити проектний аналіз, управління фінансами та фінансовими активами.

Фінансово-економічні розрахунки є достатньо специфічними методами саме фінансової математики. У багатьох випадках методи фінансової математики не можуть застосовуватися для інших сфер дослідження. Однією з проблем нашого суспільства виступає низька фінансова грамотність населення. Зараз у нашій економіці з'являється багато нових фінансових інструментів, нових фінансових інститутів індивідуального та сумісного інвестування, що потребує оволодіння новими знаннями для потенційних інвесторів щодо методів фінансових розрахунків. З цієї точки зору саме дана дисципліна буде дуже актуальною для студентів економічних спеціальностей, які в майбутньому стануть або спів робітниками фінансових інститутів, або, можливо, інвесторами.

На практиці методи фінансової математики досить широко застосовуються в банківській справі, у страхуванні, в роботі інвестиційних та торгових організацій, а також при аналізі роботи фінансових установ, процесів на біржах і валютних ринках.

Застосування фінансово-економічних розрахунків дозволяє вирішувати задачі, які агреговано можуть бути представлені так:

розрахунок кінцевих сум грошей, які знаходяться на депозитах, кредитних рахунках та в цінних паперах;

визначення взаємозалежності між окремими параметрами фінансової операції та параметрів, виходячи з первісної інформації;

визначення альтернативних напрямків вкладень або еквівалентних умов проведення операції;

аналіз наслідків зміни умов фінансової операції;

розробка планів виконання фінансових операцій;

розрахунок показників дохідності фінансових активів та вартості фінансових ресурсів;

розрахунок різних загальних показників аналізу фінансової операції, які дозволяють порівнювати різні фінансові операції між собою та робити обґрунтований вибір найкращої.

Джерелами інформації є фінансові звіти, статистичні масиви даних щодо фінансових операцій, статистична інформація щодо процентних ставок, курсів валют, фінансових індексів, цін та інших критеріїв здійснення фінансових розрахунків.

Література: основна [1; 4], додаткова [8]

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте предмет, об'єкт та завдання фінансової математики.

2. У яких випадках проведення аналізу фінансового ринку виникає необхідність застосування економіко-статистичних методів?

3. У чому полягає сутність фінансово-економічних розрахунків? Визначте ситуації, коли виникає необхідність застосовувати методи фінансової математики.

Тема 2. Сутність процентних платежів. Нарощення й дисконтування на основі простих процентних та облікових ставок

2.1. Сутність процентних платежів.

2.2. Визначення нарощеної суми на основі простої процентної та облікової ставки.

2.3. Визначення дисконтованих сум на основі простої процентної та облікової ставки.

2.1. Сутність процентних платежів

Найважливішою категорією фінансової математики є категорія відсотків, або процентних грошей. Вартість грошей протягом часу змінюється. Капітал повинен приносити дохід його власнику як при вкладеннях, що здійснюються самим власником, так і при таких вкладеннях, коли власник надає свій вільний капітал іншим суб'єктам. У будь-якій фінансовій угоді обумовлюються умови надання капіталу в борг. Відсоток є відображенням зміни вартості грошей у часі. Причому це не тільки плата за користування позиковими коштами, а й показник прибутковості будь-якого вкладення капіталу.

Таким чином, відсоток, або процентні гроші, – це сума, що сплачується за користування коштами, або абсолютна величина доходу з капіталу.

Відношення процентних грошей, отриманих на одиницю часу, до величини капіталу називають процентною ставкою:

$$i = \frac{I}{P \cdot n}. \qquad (2.1)$$

Позначимо ставку у відсотках річних як *i*.

Нехай є P – початковий капітал, *I* – сума доходу, яку інвестор бажає одержати від свого капіталу, *n* – строк фінансової операції в роках.

Якщо дохід *I* отримано за *d* днів, то процентна ставка обчислюється так:

$$i = \frac{I}{P} \cdot \frac{N}{d}, \qquad (2.2)$$

де *N* – число днів у році (360 чи 365 днів).

Для вибору числа днів для розрахунку використовується:

німецька практика – під річною базою розуміють 360 днів, а тривалість місяця приймається рівною 30 дням;

французька практика – під базою розуміють 360 днів, а кількість днів у місяці відповідає календарному;

англійська практика – річна база 365 (366) днів, а кількість днів у місяці відповідає календарному.

Дохід, який може бути отриманий з капіталу при відомій процентній ставці, обчислюється так:

$$I = P \cdot i \cdot n,$$
$$I = P \cdot i \cdot \frac{d}{N}. \qquad (2.3)$$

Якщо не сказано нічого іншого, то процентна ставка завжди відображається у відсотках річних, але якщо зазначено, що прибутковість складає, скажімо, 10% за три місяці, то таку ставку для порівняння зі ставками, вираженими у відсотках річних, необхідно перевести в річні відсотки.

Співвідношення таке:

$$i = i_d \cdot \frac{N}{d} \qquad (2.4)$$

де, i_d – ставка за період;

N – число днів в році (360 чи 365 днів);

d – число днів, тобто період, за який відома дохідність, яку варто перевести в річні відсотки .

Щодо моменту виплати відсотки розділяються на звичайні й авансові.

Звичайні (декурсивні – postnumerando) відсотки нараховуються наприкінці періоду щодо вихідної величини коштів. Дохід виплачується наприкінці періоду фінансової операції. Найчастіше використовується саме цей метод нарахування відсотків.

Якщо ж відсотки виплачуються в момент здійснення фінансової угоди щодо кінцевої суми, то такі процентні виплати є авансовими (антисипативними – prenumerando). Такий спосіб нарахування відсотків ще називають урахуванням і найчастіше застосовують при угодах з дисконтними цінними паперами. Базою розрахунку при цьому є кінцева сума капіталу разом з нарахованими на неї відсотками.

2.2. Визначення нарощеної суми на основі простої процентної та облікової ставки

Практика сплати відсотків заснована на теорії нарощення коштів. Якщо нарощення йде по арифметичній прогресії, то використовується проста процентна ставка, якщо по геометричній, то – складна процентна ставка.

Нехай є P – початковий капітал, I – сума доходу, яку інвестор бажає одержати від свого капіталу. Нарощення вихідної суми P здійснюється за рахунок нарахування відсотків за процентною ставкою i. Нарощення відбувається протягом n періодів (років), нарахування відсотків – раз на рік.

Базова формула для визначення нарощеної суми за простою процентною ставкою:

$$S = P + I = P + P \cdot i \cdot n = P(1 + n \cdot i). \tag{2.5}$$

Якщо термін угоди не дорівнює цілому числу років, то:

$$S = P(1 + i \cdot \frac{d}{N}). \tag{2.6}$$

Якщо встановлена дискретна ставка, то:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_t i_t) = P(1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t). \tag{2.7}$$

Формули нарощення (2.1)-(2.7) застосовуються при декурсивному нарахуванні відсотків. Якщо ж використовується антисипативний спосіб, то тоді застосовується не процентна, а облікова ставка r.

Розрахунок нарощеної суми здійснюється так:

$$S = P \cdot \frac{1}{1 - n \cdot r},$$

$$S = P \cdot \frac{1}{1 - \frac{d}{N} \cdot r}. \tag{2.8}$$

2.3. Визначення дисконтованих сум на основі простої процентної та облікової ставки

Зворотний процесу нарощення є процес дисконтування. Термін дисконтування вживається у фінансовій практиці дуже широко. Най частіше під цим терміном розуміється спосіб визначення суми *P* на деякий момент за умови, що в майбутньому при нарахуванні на неї відсотків вона могла б скласти нарощену суму *S*. Суму *P*, що отримана шляхом дисконтування нарощеної суми *S*, називають сучасною, або приведеною, сумою. За допомогою дисконтування у фінансових розрахунках мурахо-вується фактор часу. У кредитній практиці під дисконтуванням також розуміють спосіб надання кредиту, коли відсотки за обліковою ставкою нараховуються на суму, що підлягає погашенню наприкінці терміну позички. Тому розрізняють математичне і банківське дисконтування.

При математичному дисконтуванні вирішується задача, що є зворотною визначенню нарощеної суми. Задача формулюється так: яку суму треба дати в борг сьогодні (інвестувати) на *n* років, щоб при нарахуванні на неї відсотків за ставкою *i* одержати нарощену суму *S*?

Якщо в операції використовується проста процентна ставка, то формули для математичного дисконтування будуть такі:

$$P = S \cdot \frac{1}{1+n \cdot i} = \frac{S}{1+n \cdot i},$$

$$P = \frac{S}{1+i \cdot \frac{d}{N}}. \tag{2.9}$$

Якщо мова йде про банківське дисконтування, то формули визна-чення дисконтованих сум при використанні простої облікової ставки такі:

$$P = S \cdot (1-n \cdot r),$$

$$P = S \cdot (1-\frac{d}{N} \cdot r). \tag{2.10}$$

Література: основна [1], додаткова [8]

Контрольні запитання

1. Сутність процента та процентних грошів. Який параметр фінансових операцій характеризується за допомогою процентних ставок?

2. Що таке процентна та облікова ставки?

3. Що визначає термін нарощення? У яких випадках проведення фінансових розрахунків виникає необхідність застосування формул нарощення?

4. Що визначає термін дисконтування? У яких випадках проведення фінансових розрахунків виникає необхідність застосування формул дисконтування?

5. У чому полягає різниця математичного та банківського дисконтування?

6. Наведіть формули нарощення й дисконтування на основі простих процентних та облікових ставок.

Тема 3. Нарощення та дисконтування на основі складних процентних та облікових ставок

3.1. Визначення нарощеної суми на основі складної процентної та облікової ставки.

3.2. Визначення дисконтованих сум на основі складної процентної та облікової ставки.

3.3. Дії з безперервними відсотками.

3.4. Розрахунок нарощених сум в умовах інфляції.

3.1. Визначення нарощеної суми на основі складної процентної та облікової ставки

Крім простих відсотків, у фінансовій практиці широко використовується складна ставка відсотка. Основна відмінність складних відсотків від простих полягає в тому, що в кожен період нарахування відсотків змінюється база подальшого нарахування доходу, тому що сума нарахованих відсотків додається до первісної суми. Тому процес нарощення капіталу відбувається значно швидше. Механізм нарощення первісного капіталу з використанням складних відсотків називається капіталізацією.

Розрізняють річну капіталізацію (відсотки нараховуються й додаються до первісної суми раз на рік), піврічну, квартальну, місячну та щоденну.

У цьому випадку нарахування відсотків також може здійснюватися декурсивним і антисипативним способами.

Розглянемо декурсивний спосіб нарахування складних відсотків.

Базова формула визначення нарощеної суми при використанні складної процентної ставки така:

$$S = P(1 + i)^{n}. \tag{3.1}$$

Якщо термін угоди не дорівнює цілому числу років, то:

$$S = P(1 + i)^{\frac{d}{N}}. \tag{3.2}$$

Для складних відсотків принципове значення має період нарахування відсотків. Нехай *m* – число разів нарахування відсотків за рік. Тоді формулу (3.1) треба змінити так:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{n \cdot m}, \tag{3.3}$$

де *j* – номінальна річна процентна ставка.

Виділяють поняття ефективної процентної ставки, тобто такої, котра показує реальну дохідність операції за рік. Тобто ефективна ставка складних відсотків – це така ставка, яка дозволяє отримати такий же дохід, як і при *m*-разовому нарахуванні відсотків за номінальною ставкою *j*.

Позначимо ефективну ставку як i_c.

$$\begin{gathered}(1 + i_c)^{n} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}, \\ i_c = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Ефективна ставка більше номінальної.

При використанні складних відсотків нарощення може відбуватися й антисипативним методом. Загальна формула визначення нарощеної суми така:

$$S = P \cdot \frac{1}{(1-r)^n},$$
$$S = P \cdot \frac{1}{(1-r)^{\frac{d}{N}}}. \qquad (3.5)$$

де *r* - облікова ставка складного відсотка.

Якщо нарахування відсотків відбувається кілька разів на рік, тоді:

$$S = P \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}} \qquad (3.6)$$

де *f* – номінальна облікова ставка складного відсотка.

3.2. Визначення дисконтованих сум на основі складної процентної та облікової ставки

Дисконтування, тобто визначення первісної вартості за допомогою складної процентної ставки, є найбільш поширеним методом у фінансовій математиці щодо приведення платежів майбутніх періодів до сучасного моменту часу. Знання принципу цього виду дисконтування дозволяє з легкістю вирішувати складні фінансові задачі, в яких потоки платежів розтягнуті в часі. Наприклад, здійснення оцінки дохідності фінансових інвестицій або знаходження дохідності чи вартості облігації.

Формула для знаходження дисконтованої суми на основі складної процентної ставки, як і в разі використання простої процентної ставки, може бути отримана шляхом перетворення формул нарощення. Якщо в операції застосовувалася складна процентна ставка, то формули для математичного дисконтування будуть такі:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n},$$
$$P = \frac{S}{(1+i)^{\frac{d}{N}}}, \qquad (3.7)$$
$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{n \cdot m}}.$$

Банківське дисконтування при використанні складної облікової ставки здійснюється за такими формулами:

$$P = S(1-r)^n,$$
$$P = S(1-r)^{\frac{d}{N}}, \qquad (3.8)$$
$$P = S(1-\frac{f}{m})^{n \cdot m}.$$

3.3. Дії з безперервними відсотками

Нарахування відсотків на первинний капітал, або дисконтування нарощених сум, може проводитися так часто, що цей процес можна розглядати як безперервний. У цьому випадку використовуються безперервні відсотки. Суть безперервних відсотків полягає в тому, що кількість періодів нарощення або дисконтування наближається до нескінченності, а часовий інтервал між періодами – до нуля.

Безперервні відсотки використовуються при обґрунтуванні й виборі інвестиційних проектів, при кількісному аналізі складних економічних процесів.

Безперервне нарощення процентів проводиться за допомогою особливого виду процентної ставки, яка називається силою зростання. Сила зростання є відносним приростом нарощеної суми в нескінченно малому проміжку часу, тобто

$$\frac{\Delta S}{S} = f(t),$$
$$\lim t \to \infty. \tag{3.9}$$

Вона може бути постійною або змінною величиною.

Постійна сила зростання

При використанні дискретної номінальної ставки нарощена сума визначається за допомогою виразу:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{mn}. \tag{3.10}$$

Чим більше величина m, тим менші часові проміжки між періодами нарахування відсотків (вони наближаються до нуля):

$$S = \lim_{m\to\infty} P(1 + \frac{j}{m})^{mn} = P\lim_{m\to\infty}[(1 + \frac{j}{m})^{m}]^{n},$$
$$\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{j}{m})^{m} = e^{j}, \tag{3.11}$$

де e – основа натуральних логарифмів.

Тоді вираз для визначення нарощеної суми за n років при безперервному нарахуванні відсотків матиме такий вигляд:

$$S = P \cdot e^{jn}. \tag{3.12}$$

Безперервна і дискретна ставки зв'язані між собою:

$$(1 + i)^{n} = e^{jn},$$
$$e^{j} = (1 + i),$$
$$j = \ln(1 + i),$$
$$i = e^{j} - 1. \tag{3.13}$$

Формула для визначення сучасної вартості при безперервному нарахуванні відсотків така:

$$P = S\frac{1}{e^{jn}}. \qquad (3.14)$$

При безперервному нарахуванні процентні та облікові ставки рівні. Безперервна облікова ставка називається силою дисконту.

3.4. Розрахунок нарощених сум в умовах інфляції

Інфляційні процеси, які характерні для економіки багатьох країн, вимагають, щоб вони враховувалися у фінансових розрахунках. Особливо необхідно звертати увагу на дію інфляції при обчисленні сум і визначенні дійсної ставки відсотків.

Зовнішніми ознаками інфляції є, перш за все, зростання цін і, як наслідок, зниження купівельної спроможності грошей.

Позначимо індекс цін I_p, а купівельну спроможність грошей через I_d, тоді $I_d = 1/I_p$.

Оскільки індекс купівельної спроможності грошей є величиною оберненою індексу цін, то відношення нарощеної суми грошей до індексу цін (S/I_p) характеризує реальну купівельну спроможність нарощеної суми.

Оскільки темп приросту цін (α) в основному відповідає темпу приросту інфляції, то річний індекс цін складе величину $1+\alpha$. За n років при збереженні передбачуваного середньорічного темпу зростання інфляції індекс цін буде дорівнювати $(1+\alpha)^n$.

Таким чином, нарощена сума за термін n років з урахуванням її знецінення в результаті інфляції визначається за формулою:

$$S_{інфл} = P \cdot (1+i)^n \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^n} = P \cdot \left(\frac{1+i}{1+\alpha}\right)^n. \qquad (3.15)$$

Відношення $\left(\frac{1+i}{1+\alpha}\right)^n$ є множником нарощення, що враховує середньорічні темпи інфляції.

Величина множника нарощення залежить головним чином від зміни банківської ставки і темпу приросту інфляції. Якщо темп приросту інфляції рівний ставці відсотків, що нараховуються, то купівельна спроможність нарощеної суми буде дорівнювати купівельній спроможності первинної суми, тобто $S_{інфл} = P$.

У цьому випадку вкладник у деякій мірі нейтралізує інфляційний чинник.

Якщо $\alpha > i$, то отримана нарощена сума не компенсує втрату купівельної спроможності капіталу в результаті інфляції. У данному випадку банківську ставку називають негативною ставкою.

Тільки в разі, коли $\alpha < i$, може спостерігатися реальне зростання купівельної спроможності вкладеного в банк капіталу. Таку процентну ставку називають позитивною.

З метою зменшення дії інфляції й компенсації втрат від зниження купівельної спроможності грошей використовують різні методи. Один з них – індексація процентної ставки. Сутність цього методу полягає в тому, що процентна ставка корегується відповідно до темпу інфляції. Величина корегування обумовлюється в контракті. Ставку, скореговану на інфляцію, умовно можна назвати брутто-ставкою. Множник нарощення за брутто-ставкою визначається, виходячи з номінальної банківської процентної ставки і поправного множника.

Позначимо брутто-ставку символом i_α, тоді

$$i_\alpha = \frac{(1 + n \cdot i) \cdot I_n - 1}{n}, \tag{3.16}$$

де I_n – індекс інфляції;

n – термін кредиту;

i – номінальна процентна ставка.

При видачі довгострокових кредитів складна ставка відсотків, що забезпечує при річному рівні інфляції α реальну ефективність кредитної операції *i,* визначається за формулою:

$$i_\alpha = i + \alpha + i \cdot \alpha. \tag{3.17}$$

У разі, коли застосовується величина індексу інфляції за весь термін кредиту, процентна ставка, що враховує інфляцію, визначається за формулою:

$$i_{\alpha} = \left[(1+i)\cdot \sqrt[n]{I_n}\right] - 1. \tag{3.18}$$

Література: основна [1; 4], додаткова [8].

Контрольні запитання

1. Наведіть формули нарощення й дисконтування на основі складних процентних та облікових ставок.
2. Чому виникає необхідність у безперервному нарахуванні відсотків?
3. За якими принципами проходить нарощення при безперервному нарахуванні відсотків?
4. Яким чином необхідно врахувати інфляцію при здійсненні фінансових розрахунків? Наведіть формули нарощення з урахуванням інфляції.

Тема 4. Еквівалентність процентних ставок. Зміна умов проведення розрахунків

4.1. Поняття щодо еквівалентних процентних ставок.
4.2. Середні процентні ставки.

4.1. Поняття щодо еквівалентних процентних ставок

Види ставок вирішують, по суті, однакові задачі визначення зміни вартості капіталів протягом часу. У зв'язку з цим у фінансових операціях можливо здійснити вибір таких процентних чи облікових ставок, при використанні яких фінансові результати будуть однаковими.

Ставки, що забезпечують однакові фінансові результати операцій, називаються еквівалентними, або релятивними (відносними).

Наприклад, рівноцінні фінансові результати можуть бути одержані при рівності множників нарощення й дисконтування:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = P_1(1+ni),\\
&S_2 = P_2\frac{1}{1-nr},\\
&S_1 = S_2,\\
&P_1 = P_2,\\
&1+ni = \frac{1}{1-nr}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Розв'язавши даний вираз *i* або *r*, вираз для визначення еквівалентних ставок. Такий же принцип використовується і для визначення еквівалентних ставок в інших випадках.

Для випадку (4.1) вираз для еквівалентних ставок виходить таким:

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{r}{1-nr},\\
r &= \frac{i}{1+ni}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Якщо термін операції не рівний цілому числу років, а визначається як $n = \frac{d}{N}$, то:

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{Nr}{N-dr},\\
r &= \frac{Ni}{N+di}.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Якщо часова база *у* ставок, для яких треба знайти еквівалентну, була різна (360 або 365 днів), то треба врахувати це при розрахунках.

Дуже важливим завданням є визначення еквівалентних простих і складних ставок.

При нарахуванні один раз на рік вираз матиме такий вигляд:

$$i_{пр} = \frac{(1+i_{сл})^n - 1}{n},$$
$$i_{сл} = (1+ni_{пр})^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (4.4.)$$

Еквівалентність простої процентної ставки із складною ставкою при нарахуванні відсотків m разів на рік:

$$i_{пр} = \frac{(1+\frac{i_{сл}}{m})^{nm} - 1}{n},$$
$$i_{сл} = m[(1+ni_{пр})^{\frac{1}{mn}} - 1]. \qquad (4.5)$$

Еквівалентність складної процентної ставки і простої облікової ставки:

$$i_{сл} = (1-nr)^{-\frac{1}{n}} - 1],$$
$$d = \frac{1}{n}[1-(1+i_{сл})^{-n}]. \qquad (4.6)$$

Еквівалентність номінальної складної процентної ставки при нарахуванні m разів на рік і простої облікової ставки:

$$i_{сл} = m[(1-nr)^{-\frac{1}{mn}} - 1],$$
$$d = \frac{1}{n}[1-(1+\frac{i_{сл}}{m})^{-mn}]. \qquad (4.7)$$

Еквівалентність номінальної складної процентної ставки і складної облікової ставки:

$$i_{сл} = \frac{r_{сл}}{1 - r_{сл}},$$
$$r_{сл} = \frac{i_{сл}}{1 - i_{сл}}. \qquad (4.8)$$

Еквівалентність номінальної складної процентної ставки при нарахуванні m разів на рік і складної облікової ставки:

$$i_{сл} = m[(1-r)^{-\frac{1}{m}} - 1],$$
$$d = 1 - (1 + \frac{i_{сл}}{m})^{-m}. \qquad (4.9)$$

4.2. Середні процентні ставки

Розглядаючи принцип еквівалентності процентних ставок, необхідно звернути увагу й на розрахунок середніх процентних ставок, тому що для декількох процентних ставок їх середнє значення є еквівалентною величиною.

У випадку якщо нарахування на суму капіталу проводиться з використанням різних ставок у різні періоди часу (або якщо нарахування здійснюється на однакові суми), то усереднення ставок проводиться за формулою середньої арифметичної зваженої, в якій вагами служать періоди часу, в які діяла та чи інша ставка:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{j=1}^{k} i_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j}, \qquad (4.10)$$

де $\bar{i}$ – середня ставка;

n_j – періоди дії ставки i_j.;

k – кількість періодів, у які діяли різні ставки.

Якщо необхідно знайти середню ставку серед ставок, які застосовуються до різних сум у різні періоди, то визначення такої середньої буде проводиться також з використанням формули середньої зваженої, але вагами виступатиме добуток суми P_j на термін дії ставки за цією сумою n_j:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{j=1}^{k} i_j n_j P_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j P_j}. \qquad (4.11)$$

Розрахунок середньої простої облікової ставки здійснюється за таким же принципом.

Якщо у фінансових операціях використовуються складні ставки, то їх усереднення треба проводити за формулою середньої геометричної:

$$\overline{i_{сл}} = [(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \ldots \cdot (1+i_n)^{n_k}]^{\frac{1}{N}} - 1, \qquad (4.12)$$

де $i_1 \ldots i_k$ – ставки складних відсотків;

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$ – інтервали часу, протягом яких проводиться нарахування за складними відсотками.

Література: основна [1, 3], додаткова [8].

Контрольні запитання

1. Які результати фінансових розрахунків повинні бути отримані при використанні еквівалентних ставок?

2. Яким чином проводиться усереднення простих та складних ставок?

Модуль 2: Розрахунки щодо здійснення найпоширеніших фінансових операцій

Тема 5. Розрахунки щодо потоків фінансових платежів

5.1. Фінансові ренти. Основні поняття.

5.2. Нарощення потоку платежів за принципом фінансової ренти.

5.3. Визначення сучасної вартості фінансової ренти.

5.1. Фінансові ренти. Основні поняття

У попередній темі було розглянуто випадки, коли нарахування відсотків або дисконтування проводилося відносно одноразового внеску чи кредиту. Тим часом виплати за укладеними операціями можуть передбачати як разовий платіж, так і ряд виплат, розподілених у часі. Погашення середньострокової або довгострокової позики, інвестування засобів, створення грошових фундацій частіше за все передбачають виплати, які проводяться через певні проміжки часу. При цьому виникає ряд платежів, які іменують потоком платежів.

Ряд послідовних фіксованих платежів, що проводяться через рівні проміжки часу, називають фінансовою рентою, або ануїтетом.

Фінансова рента може бути охарактеризована наступними параметрами:

член ренти – величина кожного окремого платежу;

період ренти – часовий інтервал між двома платежами;

термін ренти – час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу;

процентна ставка – ставка, яка використовується для розрахунку нарощення або дисконтування платежів, що становлять ренту.

Також для визначення нарощених і дисконтованих величин ренти необхідно, щоб були відомі кількість платежів протягом року, частота нарахування відсотків за рік та час нарахування відсотків (на початку року, в кінці, в середині і т. д.).

На практиці використовуються різні види рент.

Ренти, за якими платежі проводяться раз на рік, називаються річними рентами. Якщо платежі проводяться кілька разів на рік (p раз), то ренти називаються p - терміновими. Крім того, можуть бути ренти, в яких період між платежами становить більше року. Всі перераховані ренти називаються дискретними.

Разом з дискретними зустрічаються ренти, в яких платежі проводяться так часто, що їх можна розглядати як безперервні.

З погляду нарахування відсотків розрізняють ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік, m разів на рік і безперервним нарахуванням.

З погляду стабільності розміру платежів ренти підрозділяються на постійні (члени ренти рівні між собою) і змінні. Рента, виплата за якою не обмежена ніякою умовою, називається правильною. Якщо ж платіж за рентою обумовлений якою-небудь умовою, то рента буде умовною. Кількість членів умовної ренти наперед невідоме.

Ренти можуть бути кінцевими (кількість членів обмежене) та не скінченними.

За моментом, з якого починається реалізація рентних платежів, ренти діляться на негайні, коли платежі проводяться відразу ж після укладення контракту, і відкладені, коли виплати відстрочені до вказаного в контракті моменту.

За моментом виплат членів ренти останні підрозділяються на звичайні (постнумерандо), в яких платежі проводяться в кінці відповідних періодів, і пренумерандо, в яких платежі проводяться на початку цих періодів.

Узагальнюючими показниками ренти є нарощена сума і сучасна (приведена) вартість.

Нарощена сума – це сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками на кінець терміну, тобто на дату останньої виплати. Нарощена сума показує, яку величину представлятиме капітал, що вноситься через рівні проміжки часу протягом усього терміну ренти разом з нарахованими відсотками.

Сучасна вартість ренти – сума всіх його членів, зменшена (дисконтована) на величину процентної ставки на певний момент часу, що збігається з початком потоку платежів або передує йому. Іншими словами, сучасна вартість показує, яку суму треба мати спочатку, щоб розбивши її на рівні внески, на які б нараховувалися встановлені відсотки протягом терміну ренти, можна було б забезпечити отримання нарощеної суми.

Узагальнюючі характеристики ренти використовуються у фінансовій статистиці для фінансового аналізу контрактів, планування погашення заборгованості, порівняння різних фінансових операцій, оцінки характерристик фінансових інструментів і т. д.

5.2. Нарощення потоку платежів за принципом фінансової ренти

Нехай R – величина щорічного внеску;

i - відсоткова ставка;

n - термін ренти;

m – число разів нарахування відсотків за рентою за рік;

p – число разів внесення платежів за рентою за рік.

Проаналізуємо декілька методів розрахунку нарощеної суми річної ренти:

1. Розглядається проста рента, в якій відсотки нараховуються один раз на рік у кінці року і рентний платіж також здійснюється раз на рік. Потоком платежів є суми щорічних внесків та нараховані на ці суми відсотки. Потік буде таким:

$$R(1+i)^{n-1},\ R(1+i)^{n-2},\dots,\ R(1+i)^{n-n}. \qquad (5.1)$$

На перший внесок відсотки будуть нараховані n-1 раз, на другий - n-2 рази і так далі, а на останній внесок відсотки не нараховуються.

Нарощена сума ренти до кінця терміну складатиметься з суми членів зростаючої геометричної прогресії, де R – 1-й член прогресії, а величина (1+i) – знаменник прогресії. Суму членів ряду, тобто нарощену суму ренти, можна визначити як суму членів геометричної прогресії:

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\,\frac{(1+i)^n}{i}. \qquad (5.2)$$

Величина $\frac{(1+i)^n}{i}$ називається коефіцієнтом нарощення ренти, або коефіцієнтом акумуляції вкладів, і може бути позначена як $s_{n,i}$. Даний коефіцієнт показує, в скільки разів сума ренти більше першого члена ренти. Для таких коефіцієнтів існують розроблені таблиці значень, які полегшують практичні розрахунки.

2. Якщо рентні платежі вносяться раз на рік, а відсотки на них нараховуються m разів на рік, (у даному випадку нарахування відсотків проводиться за ставкою j/m, де j – номінальна (річна) ставка складних відсотків), тоді формула визначення нарощеної суми буде такою:

$$S = R\,\frac{(1+\frac{j}{m})^{nm} - 1}{(1+\frac{j}{m})^{m} - 1}. \qquad (5.3)$$

Чисельник множника нарощення позначимо $S_{mn;\frac{j}{m}}$, а знаменник – $S_{m;\frac{j}{m}}$. Це також коефіцієнти, для яких існують таблиці розрахунків.

3. Якщо рентні платежі вносяться кілька разів на рік рівними сумами (р-строкова рента), а нарахування відсотків проводиться раз на рік (у кінці року, m = 1), нарощена сума буде визначена за формулою:

$$S = R\frac{(1+i)^{n} - 1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]}. \tag{5.4}$$

Множник нарощення позначимо $S_{n;i}^{(p)}$. Для даного коефіцієнта існують розроблені таблиці значень, які полегшують практичні розрахунки.

4. Якщо рентні платежі вносяться р разів на рік, нарахування відсотків здійснюється m разів, причому p = m, то коефіцієнт нарощення буде визначений за формулою:

$$S_{n;j}^{(p=m)} = \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{j}, \tag{5.5}$$

А відповідно нарощена сума за формулою:

$$S = R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{j}. \tag{5.6}$$

5. І останній випадок, коли рентні платежі вносяться р разів на рік, нарахування відсотків здійснюється m разів, причому $p \neq m$, (у подібних випадках рента називається загальною), то коефіцієнт нарощення загальної ренти визначається за формулою:

$$S_{n;j}^{(p,m)} = \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]}, \tag{5.7}$$

а відповідно нарощена сума за формулою:

$$S = R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]}. \qquad (5.8)$$

Залежно від умов ренти множники нарощення будуть різними, причому в розглянутих випадках ці множники зростатимуть (у першому випадку найменший і у 5-му найбільший). Знаючи цю закономірність, можна варіювати умовами контрактів.

5.3. Визначення сучасної вартості фінансової ренти

Розуміння сутності даного процесу й методів його обчислення дає можливість вирішення багатьох статистичних задач: розрахунок ефективності інвестицій, визначення прибутковості операцій і т. д.

Розглянемо методи розрахунку приведеної вартості для простої ренти на момент початку її реалізації. Всі основні позначення такі ж, як і попередні.

1. Нехай величина рентного платежу R = 1. Дисконтовану величину першого рентного платежу позначимо V, другого – V^2 і т. д. При цьому виникає ряд дисконтованих платежів, що є геометричною прогресією. Перший член і знаменник даної прогресії – V, а число членів – n.

Підсумуємо члени даної прогресії, позначивши цю суму $a_{n;i}$ (коефіцієнт дисконтування табульований):

$$V = \frac{1}{(1+i)} \dots V^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n},$$
$$a_{n;i} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{(1+i)^{-n}-1}{\frac{1}{1+i}-1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (5.9)$$

Для ренти з членами, рівними R, сучасна вартість розраховується за формулою:

$$A = R \cdot a_{n;i}\,. \tag{5.10}$$

2. При нарахуванні відсотків m разів на рік сучасна вартість ренти обчислюється так:

$$A = R\frac{1-(1+\dfrac{j}{m})^{-mn}}{(1+\dfrac{j}{m})^{m}-1}\,. \tag{5.11}$$

Щоб мати нагоду використовувати для розрахунку приведеної величини таблиці значень коефіцієнтів, перетворимо вираз, помноживши і розділивши його на j/m:

$$A = R\frac{1-(1+\dfrac{j}{m})^{-mn}}{\dfrac{j}{m}}\cdot\frac{\dfrac{j}{m}}{(1+\dfrac{j}{m})^{m}-1}\,. \tag{5.12}$$

Перший співмножник позначимо $a_{mn;\frac{j}{m}}$ (табульоване значення), а другий є величиною оберненою величині коефіцієнта нарощення ренти: тобто формула може бути записана так:

$$A = R\frac{a_{mn;\frac{j}{m}}}{S_{m;\frac{j}{m}}}\,. \tag{5.13}$$

3. Якщо рентні платежі вносяться кілька разів на рік рівними сумами (p-строкова рента), а нарахування відсотків проводиться раз на рік (у кінці року), сучасна вартість буде визначена за формулою:

$$A = R\cdot a_{n;i}^{(p)} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}\,. \tag{5.14}$$

4. Якщо рентні платежі вносяться p разів на рік, нарахування відсотків здійснюється m разів, причому p = m, сучасна вартість буде визначена за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \cdot a_{mn;\frac{j}{m}} = \frac{R}{p} \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{\frac{j}{m}}. \qquad (5.15)$$

5. Якщо рентні платежі вносяться p разів на рік, нарахування відсотків здійснюється m разів, причому $p \neq m$, то сучасна вартість буде визначена за формулою:

$$A = R \cdot a^{(p)}{}_{mn;\frac{j}{m}} = R \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{p[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1]} = \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{\frac{j}{m}}. \qquad (5.16)$$

6. При безперервному нарахуванні відсотків рентні платежі з нарахованими на них безперервними відсотками при дисконтуванні за безпервною ставкою створюють послідовність, яка становить геометрричну прогресію:

$$R, \cdot e^{-\delta}, R \cdot e^{-2\delta}, ..., R \cdot e^{-(n-1)\delta}. \qquad (5.17)$$

Таким чином, приведена вартість даного ряду розраховується за формулою:

$$\mathrm{A} = R \frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}. \qquad (5.18)$$

Література: основна [1; 2; 4], додаткова [8; 9].

Контрольні запитання

1. Що таке фінансова рента? Які основні параметри фінансових рент?

2. Дайте визначення нарощеної суми фінансової ренти. Яким чином вона може бути розрахована?

3. Дайте визначення сучасної вартості фінансової ренти. Яким чином вона може бути розрахована?

Тема 6. Розрахунки щодо погашення кредитної заборгованості

6.1. Короткострокові, середньострокові та довгострокові кредити.

6.2. Різні схеми погашення позик.

6.3. Погашення боргу рівними строковими виплатами (ануїтетами) та рівними частинами основного боргу.

6.4. Конверсія та консолідація позик.

6.1. Короткострокові, середньострокові та довгострокові кредити

Найважливішою банківською операцією є кредитування. Саме кредитний портфель банку виступає основним джерелом отримання процентних доходів.

Кредит – це позиковий капітал, представлений банком позичальникам на умовах строковості, платності та цільового використання.

Принципи класифікації кредитів:

1) залежно від суб'єктів кредитних відносин: інші банки, юридичні особи, державні органи, фізичні особи;

2) залежно від терміну: короткострокові, середньострокові, довгострокові;

3) залежно від галузевої спрямованості: кредити в промисловість, кредити в сільське господарство, кредити в торгівлю, кредити в будівництво;

4) залежно від об'єкта кредитування: на фінансування капіталовкладень, на поточні потреби, на поповнення оборотних засобів;

5) залежно від валюти кредитування: в національній валюті, в іноземній валюті.

Фінансовими характеристиками кредитних операцій є:

1) сума кредиту;

2) строк дії кредиту;
3) розмір відсотків;
4) періодичність нарахування відсотків;
5) умови погашення кредиту.

Усі наведені характеристики обговорюються при складанні кредитного договору. Умови кредитування можуть бути стандартними за єдиною, розробленою в банку програмою видачі того чи іншого виду кредиту, але в той же час умови кредитування можуть бути індивідуальними. У такому випадку вони прописуються в кредитному договорі.

Існують різні способи погашення заборгованості. Учасники кредитної операції обумовлюють їх при укладенні контракту. Відповідно до умов контракту складається план погашення заборгованості.

6.2. Різні схеми погашення позик

Одним із найважливіших елементів плану є визначення числа виплат протягом року, тобто визначення числа так званих термінових оплат і їх величин.

Термінові сплати розглядаються як засоби, призначені для погашення як основного боргу, так і поточних процентних платежів. При цьому засоби, що направляються на погашення (амортизацію) основного боргу, можуть бути рівними або змінюються за якими-небудь законами. Іноді протягом ряду років виплачуються тільки відсотки за кредит, а сам борг погашається в час, що залишився, в розстрочку, тобто декількома платежами або разовим платежем.

Погашення кредиту може також проводитися ануїтетами, тобто платежами, що вносяться через рівні проміжки часу та містять як виплату основного боргу, так і процентний платіж за користування кредитом. Величина ануїтету може бути постійною, а може змінюватися в арифметичній або геометричній прогресії.

Величина термінових оплат залежить від величини кредиту, його терміну, наявності та тривалості пільгового періоду, розміру процентної ставки і т. п.

6.3. Погашення боргу рівними строковими виплатами (ануїтетами) та рівними частинами основного боргу

Далі розглядається ряд методів розробки планів погашення кредитів.

Схема 1. Умовами кредитного контракту може передбачатися погашення боргу рівними терміновими оплатами в кінці кожного розрахункового періоду. Кожна термінова сплата (Y) буде сумою двох величин: річної витрати на погашення основного боргу R та виплати на погашення процентів I, тобто

$$Y = R + I. \tag{6.1}$$

У цьому випадку залишок основного боргу і суми процентних платежів зменшуються від періоду до періоду, а термінові сплати будуть ануїтетами ренти постнумерандо.

Величина кредиту (D) становить суму всіх дисконтованих ануїтетів, тобто є сучасною величиною всіх термінових оплат.

Виходячи з цього, можна записати:

$$D = \frac{Y_1}{(1+i)} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}, \tag{6.2}$$

де $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_n$ – термінові сплати;

i – ставка відсотків за позикою.

Для зручності запису визначимо $(1+i) = r$, тоді

$$D = \frac{Y}{r} + \frac{Y}{r^2} + \frac{Y}{r^3} + \cdots + \frac{Y}{r^n}. \tag{6.3}$$

Помножимо перший вираз на величину r:

$$D \cdot r = Y + \frac{Y}{r} + \frac{Y}{r^2} + \frac{Y}{r^3} + \cdots + \frac{Y}{r^{n-1}} \tag{6.4}$$

Зменшивши дане рівняння на перше рівняння, отримаємо:

$$D \cdot (r-1) = Y \cdot \left(1 - \frac{1}{r^n}\right), \tag{6.5}$$

тоді

$$D = \frac{Y \cdot \left(1 - \frac{1}{r^n}\right)}{r-1} = Y \cdot \frac{\frac{r^n - 1}{r^n}}{r-1} = Y \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r-1)}. \tag{6.6}$$

Підставивши замість r його перше значення, отримаємо:

$$D = Y \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}. \tag{6.7}$$

З виразу (6.7) визначимо величину термінової сплати:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}, \qquad Y = D \cdot \frac{\frac{i}{m} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}. \tag{6.8}$$

Другий вираз застосовується тоді, коли ануїтети виплачуються m разів на рік.

Величина

$$\frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \text{ – коефіцієнт погашення заборгованості.} \tag{6.9}$$

Наведені методи складання плану погашення позики рівними платежами не є єдиними. Розглянемо деякі інші.

При погашенні позики рівними платежами залишок боргу з кожною виплатою зменшується, отже зменшуються і процентні виплати. У результаті зростає від періоду до періоду розмір платежів, що йдуть на погашення основного боргу. Між двома послідовними виплатами основного боргу існує взаємозв'язок. Для визначення цього взаємозв’язку візьмемо два послідовні розрахункові періоди – k і (k + 1).

У k-му розрахунковому періоді річна термінова сплата розраховується за формулою:

$$Y = D_k \cdot i + R_k , \qquad (6.10)$$

а залишок неоплаченого боргу відповідно визначається як:

$$D_k = \frac{Y - R_k}{i} . \qquad (6.11)$$

Проте для визначення D_k необхідно заздалегідь визначити R_k. В періоді $(k+1)$ залишок основного боргу такий:

$$D_{k+1} = D_k - R_k , \qquad (6.12)$$

отже, термінова сплата в цьому періоді може бути записаний у вигляді:

$$Y_{k+1} = (D_k - R_k) \cdot i + R_{k+1}. \qquad (6.13)$$

За умовою

$$Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_k = Y_{k+1}. \qquad (6.14)$$

звідси

$$D_k \cdot i + R_k = (D_k - R_k) \cdot i + R_{k+1}. \qquad (6.15)$$

Розрахувавши це рівняння відносно R_{k+1},

$$R_{k+1} = R_k \cdot (1 + i). \qquad (6.16)$$

Тобто кожна виплата, здійснена в рахунок погашення основного боргу, відрізняється від попередньої на величину (1+i).

Знаючи цю залежність, можна розрахувати величину виплати основного боргу в будь-якому розрахунковому періоді.

Так

$$R_2 = R_1 \cdot (1+i); \qquad R_3 = R_1 \cdot (1+i)^2;$$
$$R_4 = R_1 \cdot (1+i)^3; \qquad R_k = R_1 \cdot (1+i)^{k-1}. \qquad (6.17).$$

Знаючи розмір кредиту D, процентну ставку *i* та термін погашення кредиту n, розрахуємо величину першої виплати погашення основного боргу R_1.

Величина позики D рівна сумі виплат R_1, тобто

$$D = R_1 + R_1 \cdot (1+i) + R_1 \cdot (1+i)^2 + \cdots + R_1 (1+i)^{n-1}. \qquad (6.18)$$

Після деяких перетворень даного виразу величину R_1 можна визначити за формулою:

$$R_1 = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}. \qquad (6.19)$$

Величина

$$\frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad (6.20)$$

називається ставкою погашення.

Розмір платежу основного боргу в будь-якому періоді (R_k) можна визначити не тільки за формулою (6.16), але й іншим способом.

Відомо, що перша виплата (R_1) визначається виразом (6.19), а величина кредиту дорівнює:

$$D = Y \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}. \qquad (6.21)$$

Підставивши це значення D у формулу (6.19), отримаємо:

$$R_1 = Y \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot 1} \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = Y \cdot (1+i)^{-n}, \qquad (6.22)$$

Оскільки

$$R_k = Y \cdot (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{k-1} = Y \cdot (1+i)^{-n+k-1}, \text{ або } R_k = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{k-1} \qquad (6.23)$$

Використовуючи вираз (6.23), можна розрахувати для будь-якого періоду величину процентного платежу I_k.

Оскільки $Y = I_k + R_k$, то $I_k = Y - R_k$.

Підставимо в $I_k = Y - R_k$ вираз значення R_k, та отримуємо:

$$I_k = Y - Y \cdot (1+i)^{-n+k-1} = Y \cdot \left[1 - (1+i)^{-n+k-1}\right]. \qquad (6.24)$$

Для розрахунку залишку неоплаченого основного боргу на будь-який k-й період скористаємося виразом:

$$D_k = \frac{Y - R_k}{i}. \qquad (6.25)$$

Підставивши в цей вираз значення Y і R_k, отримаємо:

$$D_k = \frac{D \cdot \left[(1+i)^n - (1+i)^{k-1}\right]}{(1+i)^n - 1}. \qquad (6.26)$$

Схема 2. У кредитному контракті може бути обумовлена умова – проводити погашення основного боргу рівними щорічними платежами.

У цьому випадку розміри платежів за основним боргом будуть дорівнювати:

$$\frac{D}{n} = R_1 = R_2 = \cdots = R_k = R_n. \qquad (6.27)$$

Залишок основного боргу на початку кожного розрахункового періоду (D_k) визначиться як

$$D_k = D - R \cdot (k-1), \tag{6.28}$$

де D – сума всього боргу;

k – номер розрахункового періоду.

Величина термінової сплати в кожному розрахунковому періоді дорівнює:

$$Y_k = D_k \cdot i + R. \tag{6.29}$$

Підставимо у формулу (6.29) значення D_k і отримаємо:

$$Y_k = [D - R \cdot (k-1)] \cdot i + R. \tag{6.30}$$

Величина процентного платежу для k-го розрахункового періоду визначається за формулою:

$$I_k = D_k \cdot i = [D - R \cdot (k-1)] \cdot i. \tag{6.31}$$

Схема 3. Припустимо, що контрактом передбачено погашення основного боргу проводити платежами, які збільшуються або зменшуються в арифметичній прогресії з різницею d. У цьому випадку виплати основного боргу складуть:

1-й рік – R_1.

2-й рік – $R_1 \pm d$.

3-й рік – $R_1 \pm 2 \cdot d$.

…………………………………………………………………..

Передостанній рік – $R_1 \pm (n-2) \cdot d$.

Останній рік – $R_1 \pm (n-1) \cdot d$.

Отже, величина виплати основного боргу в період k дорівнює:

$$R_k = R_1 \pm (n-k) \cdot d. \tag{6.32}$$

Величина виплати основного боргу рівна сумі всіх виплат, тобто сумі членів зростаючої арифметичної прогресії:

$$D = \frac{\left[R_1 + R_2 + (n-1)\cdot d\right]\cdot n}{2} = \frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot R_1 + (n-1)\cdot d\right]. \qquad (6.33)$$

Розрахувавши це рівняння відносно R_1, отримаємо формулу для обчислення величини першої виплати:

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{(n-1)}{2}\cdot d \qquad (6.34)$$

Або

$$R_1 = \frac{D}{n} + \frac{(n-1)}{2}\cdot d\,. \qquad (6.35)$$

За формулою (6.34) обчислюється R_1 для зростаючої прогресії, за формулою (6.35) - для тієї, яка зменшується.

Схема 4. Одним із варіантів погашення кредитної заборгованості може бути такий, при якому погашення основного боргу повинне проводитися платежами, кожен з яких більше або менше попереднього у q разів. Таким чином, ці платежі будуть членами зростаючої геометричної прогоресії або тієї, яка зменшується. Члени цієї прогресії матимуть наступний вигляд:

R_1 – перший член;

$R_2 = R_1 \cdot q$ – другий член;

$R_3 = R_1 \cdot q^2$ – третій член;

………………………………………………………

$R_{n-1} = R_1 \cdot q^{n-2}$ – передостанній член;

$R_n = R_1 \cdot q^{n-2}$ – останній член.

Величина основного боргу є сумою цих членів і визначається за формулою геометричної прогресії, де R_1 – перший член прогресії і одночасно перший платіж основного боргу, а q - знаменник прогресії.

Тоді основний борг D дорівнює:

$$D = R_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{6.36}$$

де $q > 1$,

або

$$D = R_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \tag{6.37}$$

де $q < 1$.

Розв'язавши ці два рівняння відносно R_1, отримаємо:

$$R_1 = D \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}, \tag{6.38}$$

де $q > 1$

$$R_1 = D \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}, \tag{6.39}$$

где $q < 1$.

6.4. Конверсія та консолідація позик

Зміна умов погашення кредитів називається конверсією позики. Досягнувши угоди про конверсію, можуть змінюватися термін погашення позики, процентна ставка, порядок річних виплат і т. п.

При будь-якому методі конверсії спочатку визначаються сума сплаченого основного боргу і величина непогашеної його частини.

Непогашена частина боргу розглядається як новий борг, що підлягає сплаті на нових умовах.

Розглянемо один із варіантів конверсії, коли змінюються термін погашення позики і процентна ставка, а термінові сплати як за старих, так і за нових умов проводяться рівними платежами; відсотки нараховуються один раз у кінці кожного розрахункового періоду.

Позначимо параметри позик:

n – первинний термін погашення позик до конверсії;

n_1 – термін, на який продовжений період погашення в результаті конверсії;

k – число сплачених розрахункових періодів до конверсії;

i – процентна ставка до конверсії;

i_1 – процентна ставка після конверсії;

Y – величина термінової сплати до конверсії;

Y_1 – величина термінової сплати після конверсії;

D – величина основного боргу;

D_{n-k}- залишок боргу на момент конверсії.

Для складання плану погашення конверсійної позики визначають:

1) величину строкової сплати за старих умов:

$$Y = D \cdot \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot \qquad (6.40)$$

2) залишок боргу на момент конверсії:

$$D_{n-k} = Y \cdot \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \times i}, \qquad (6.41)$$

3) величину строкової сплати за нових умов:

$$Y_1 = D_{n-k} \cdot \frac{i_1 (1+i_1)^{n-k+n_1}}{(1+i_1)^{n-k+n_1} - 1}. \qquad (6.42)$$

У фінансовій практиці може виникнути ситуація, коли кредитору, що надав декілька позик одному позичальнику, більш зручно або вигідно об'єднати ці позики в одну, тобто провести їх консолідацію. У разі згоди обох сторін першим кроком при консолідації позик є знаходження величин залишків кожного боргу. Розрахувавши залишки боргів і підсумувавши їх, одержують з'єднаний борг, на який складається новий план погашення.

Література: основна [1; 2], додаткова [5; 6; 8; 9].

Контрольні запитання

1. Що таке конверсія і консолідація позик? Чому виникає необхідність у таких трансформаціях кредитів?

2. Чому в кредитній практиці застосовуються різні схеми послідовного погашення позики частинами? Які основні схеми Ви знаєте?

3. Які дві найпоширеніші схеми часткового погашення кредитів ви знаєте? У чому різниця між ними?

4. Погашення позики змінними виплатами основної суми боргу, що змінюються в геометричній і арифметичній прогресіях.

Тема 7. Розрахунки щодо аналізу ефективності фінансових вкладень

7.1. Дохідність як показник ефективності фінансових операцій.

7.2. Визначення повної дохідності в кредитних та облікових операціях.

7.3. Визначення параметрів фінансових операцій для досягнення найбільшої дохідності.

7.4. Визначення параметрів для досягнення найбільшої дохідності в окремих операціях.

7.1. Дохідність як показник ефективності фінансових операцій

Абсолютна величина доходу ще не свідчить про ефективність фінансової операції. Показником ефективності може служити результат зіставлення доходу (прибутку), отриманого за певний проміжок часу, з витратами. Так, процентна ставка найчастіше розглядається як показник прибутковості кредитної операції. Однак навіть у кредитній операції дохід кредитора може не обмежуватися одержанням процентних грошей. Багато банків, крім стягнення процентної ставки за наданий кредит, установлюють комісійні винагороди за здійснення операцій за розрахунковими рахунками клієнтів, а також утримують з клієнта певну суму, що покриває витрати банку на кожну операцію. Таким чином, при кредитній операції загальний дохід банку від її проведення є сумою доходів від декількох джерел.

В інших фінансових операціях загальний дохід також може обчислюватися як результат додавання доходів від декількох джерел. Отже, вимір прибутковості (ефективності) будь-якої фінансової операції зводиться до обліку всіх джерел доходу, тобто знаходження сумарного доходу за певний проміжок часу й зіставлення його з первісними витратами. Для кредитних операцій цими витратами є величина капіталу, наданого в позичку, для власника цінних паперів – сума, витрачена при придбанні, і т. п.

Загальним принципом визначення фінансової ефективності різних операцій є прибутковість, еквівалентна прибутковості від проведення позичкової операції, тобто проблема зводиться до визначення розрахункової процентної ставки, що відображає загальну прибутковість на вкладений капітал.

Розрахункову процентну ставку в позичкових операціях звичайно називають ефективною ставкою. У розрахунках по оцінці облігацій її називають прибутковістю на момент погашення.

При аналізі виробничих інвестиційних проектів показник прибутковості називають внутрішньою нормою прибутку.

В економічній літературі найчастіше розрахункову процентну ставку позначають терміном *«повна прибутковість»*.

Під мінімальною величиною повної прибутковості (ПП) розуміють розрахункову річну ставку відсотків, при якій усі доходи, будучи капіталізованими, складуть суму, не меншу, ніж сума інвестицій.

Для позичкової операції це означає, що сума дисконтованих річних виплат дорівнює фактично отриманій сумі кредиту (номінальна сума кредиту мінус комісійні виплати).

Зрозуміло, що чим вище величина ПП, тим більше прибутковість операції. При несприятливих умовах ПП може бути менше мінімальної, тобто може мати негативне значення.

Показник ПП має двоїстий характер, тобто, будучи вимірником прибутковості для кредитора, він одночасно служить ціною кредиту для позичальника.

Для розрахунку величини мінімальної ПП необхідно скласти рівняння, що математично виражало б зміст цього показника: різниця між сумою наданого кредиту (сумою інвестицій) і сумою всіх дисконтованих доходів на момент одержання кредиту або початку інвестиційного процесу повинна дорівнювати нулю:

$$D-(Y_1\cdot V^{t_1}+Y_1\cdot V^{t_1+1}+Y_1\cdot V^{T})=0, \qquad (7.1)$$

де D – сума наданого кредиту;

Y – термінові платежі в рахунок погашення заборгованості;

V^T – дисконтні множники;

$T = \sum t_j$ – строк фінансової операції, тобто час від моменту платежу Y_1 до моменту погашення кредиту.

7.2. Визначення повної дохідності в кредитних та облікових операціях

Розглянемо формування прибутковості під час проведення таких фінансових операцій, як позичкові та облікові.

Позичкові операції. Без обліку комісійних утримань прибутковість позичкових операцій вимірюється еквівалентною річною ставкою складних відсотків. Однак банки й інші кредитори із суми виданого кредиту утримують різні виплати. Таким чином, плата за кредит для позичальника підвищується, а прибутковість кредитора зростає.

Припустимо, що позичальник одержав позичку D на строк n за ставкою простих відсотків i. При видачі позички утримуються комісійні в розмірі – G. Тоді величина фактично виданої позички складе $D-G$. При визначенні ставки повної прибутковості $i_П$ вважаємо, що нарощення величини $D-G$ за ставкою $i_П$ повинно дорівнювати нарощеній величині D за ставкою i, що можна записати у вигляді рівняння:

$$(D-G)\cdot(1+i_П)^n = D\cdot(1+n\cdot i). \qquad (7.2)$$

Через те, що комісійні й інші утримання в більшості випадків указуються не в абсолютній величині, а у вигляді відсотка від суми кредиту або від суми проведеної операції, то можна записати:

$$G = D\cdot g, \qquad (7.3)$$

де g – відсоток комісійних утримань від суми кредиту.

Підставивши значення G у попереднє рівняння й вирішивши його відносно $i_П$, одержимо:

$$i_П = (\frac{1+n \cdot i}{1-g})^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (7.4)$$

При розрахунку $i_П$ приймаємо часову базу K = 365 днів. При нарахуванні відсотків на суму позички часова база K = 360 або 365 днів.

Характеристика прибутковості у вигляді ставки простих відсотків $i_{ПП}$ розраховується за формулою:

$$\mathrm{i}_{ПП} = \frac{1+\mathrm{n} \cdot \mathrm{i}}{(1-\mathrm{g}) \cdot \mathrm{n}} - 1. \qquad (7.5)$$

При видачі позички під складні відсотки рівняння для визначення ставки $i_П$ приймає наступний вигляд:

$$(D-G) \cdot (1+i_п)^n = D \cdot (1+i)^n, \qquad (7.6)$$

тоді

$$\mathrm{i}_П = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{g})^{\frac{1}{\mathrm{n}}}} - 1. \qquad (7.7)$$

Облікові операції. При реалізації облікової операції з використанням простої дисконтної ставки без утримання комісійних її прибутковість визначається за формулою еквівалентної ставки. При утриманні дисконту й комісійних власник векселя одержить наступну суму:

$$D - D \cdot n' \cdot d - G, \qquad (7.8)$$

де D – номінальна вартість фінансового інструмента (векселя);

n' – часовий інтервал від моменту дисконту векселя до моменту сплати за ним;

d – дисконтна ставка;

$D \cdot n' \cdot d$ – величина дисконту;

$G = D \cdot g$ – сума комісійних утримань.

Підставивши в розглянуте вираження значення G, одержимо:

$$D - D \cdot n' \cdot d - D \cdot g = D \cdot (1 - n' \cdot d - g). \qquad (7.9)$$

Отже, сума боргу може бути виражена рівнянням:

$$D \cdot (1 - n' \cdot d - g) \cdot (1 + i_П)^n = D, \qquad (7.10)$$

звідки показник прибутковості $i_П$ дорівнює:

$$i_П = \left(\frac{1}{1 - n' \cdot d - g} \right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (7.11)$$

Якщо ж розрахунок проводиться за ставкою простих відсотків $i_{ПП}$, тобто

$$D \cdot (1 - n' \cdot d - g) \cdot (1 + n \cdot i_{ПП}) = D, \qquad (7.12)$$

тоді

$$i_{ПП} = \frac{1}{(1 - n' \cdot d - g) \cdot n} - 1. \qquad (7.13)$$

7.3. Визначення параметрів фінансових операцій для досягнення найбільшої доходності

Для проведення фінансових операцій банками укладаються великі комерційні контракти, які, як правило, здійснюються на умовах їхнього кредитування.

Споживач, купуючи товар, що володіє рівними якісними параметрами, вибирає не тільки найбільш низьку ціну, а й найкращі умови кредиту – його строк, розмір процентної ставки і т. п. Дуже жорсткі умови кредиту (висока процентна ставка, малий строк для його погашення тощо) можуть звести до мінімуму вигоди низької ціни товару.

Тому при укладанні контракту дії споживача можуть бути націлені у двох напрямках. Перший – вибір товару з найбільш низькою ціною й вибір кредитора (банку, фінансової компанії), що забезпечує найбільш вигідні умови кредиту. Другий – вибір виробника (продавця) товару, який готовий дати комерційний кредит і при цьому забезпечить найбільш прийнятні ціни й умови кредиту.

Аналіз фінансових наслідків реалізації комерційних контрактів може проводитися на основі використання методу порівняння сучасних величин усіх платежів, передбачених цими контрактами, коли всі платежі приводяться до моменту початку їхньої дії.

Сучасна величина всіх витрат буде характеризувати грошову суму, що з нарахованими на неї відсотками забезпечить виконання всіх платежів, передбачених контрактом. Для покупця найбільш вигідною є найменша сучасна величина.

При обчисленні сучасних величин дисконтування всіх платежів, передбачених контрактами, проводиться за єдиною процентною ставкою, так званою ставкою порівняння.

Ставка порівняння становить своєрідний вимірник фактора часу. Збільшення строку кредиту дозволяє зменшити розмір ставки, зменшення строку кредиту викликає зростання ставки. При виборі рівня ставки порівняння орієнтуються на діючий або прогнозований середній рівень позичкової процентної ставки.

Порівняння різних контрактів проводиться на основі однієї й тієї ж ставки. У всіх випадках ставка порівняння повинна відрізнятися від пропонованих у контрактах процентних ставок – перевищувати найбільшу або бути менше найменшої ставки.

Отримані з використанням ставки порівняння сучасні величини є умовними показниками, однак вони досить вірогідно відображають рейтинг контрактів. Отриманий рейтинг збережеться й при зміні розміру ставок порівняння.

У більшості випадків у контрактах передбачається внесення авансових платежів. Моменти їхнього внесення можуть бути різними (під час укладання контракту або в інший час). У зв'язку з цією важливою умовою для визначення сучасної величини є встановлення моменту часу, з якого обчислюється заборгованість і починається її погашення, а також розмір самої заборгованості.

При одноразовій поставці товару заборгованість, як правило, визначається на момент поставки.

При поставці товару партіями із заздалегідь обговореними строками поставки для кожної партії встановлюють відповідні моменти часу, що визначають заборгованість.

При аналізі умов різних контрактів необхідно враховувати, що збільшення строку поставки скорочує сучасну величину витрат покупця. Тому порівнянні результати можуть бути отримані в тому випадку, коли строки поставок однакові.

Якщо аванс вноситься при укладанні угоди, товар поставляється однією партією, погашення заборгованості проводиться рівними терміновими оплатами наприкінці року, відсотки за заборгованістю в пільговому періоді сплачуються наприкінці строку, то для перерахованих умов сучасна величина за ставкою порівняння q складе:

$$A = Q + I \cdot V^{t+L} + Y \cdot a_{n;q} \cdot V^{t+L}, \tag{7.14}$$

де Q – сума авансового платежу;

I – відсотки в пільговому періоді (прості або складні);

$V = (1+q)^{-1}$;

t – час від моменту укладання угоди до моменту поставки товару;

L – час пільгового періоду;

n – строк погашення заборгованості;

Y – величина щорічних термінових оплат.

Якщо Y – постійна величина, то

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}, \tag{7.15}$$

де $D = P - Q$ – залишок заборгованості після сплати авансу (P – повна вартість товару).

При використанні складних процентних ставок величина процентного платежу за пільговий період визначається в такий спосіб:

$$I = D \cdot \left((1+i)^L - 1\right). \qquad (7.16)$$

Підставивши це рівняння у формулу (7.14) і перетворивши його, одержимо:

$$A = Q + D \cdot V^{t+L} \cdot \left\{ \left[(1+i)^L - 1\right] + \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot a_{n;q} \right\}. \qquad (7.17)$$

При щорічній виплаті відсотків протягом пільгового періоду наприкінці кожного року замість формули (7.17) одержимо (за умови, що L – ціле число):

$$A = Q + D \cdot \left\{ \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot a_{n;q} \cdot V^{t+L} + i \cdot a_{L;q} \cdot V^t \right\}. \qquad (7.18)$$

Розглянувши метод порівняння контрактів при разовій поставці товару, звернемося далі до випадку, коли поставка товару провадиться декількома партіями. Принципом оцінки конкуруючих контрактів і в даному випадку залишається метод зіставлення сучасних величин. Однак при цьому необхідно враховувати вартість товару, що поставляється в кожній партії, і строки поставок.

Для обчислення сучасної величини, що відображає всі платежі, позначимо параметри цієї угоди:

M_j – вартість кожної партії товару, що поставляється ($M = \sum M_j$ – загальна вартість товару);

T_j – строки поставок кожної партії товару ($T = \sum T_j$ – загальний строк);

T_k – час від моменту виплати останнього авансового платежу до кінця строку поставок $(T_k = T - t)$;

t – строк виплати останнього авансового платежу;

Q_1 і Q_2 – суми авансових платежів;

L – пільговий період (відсотки виплачуються щорічно);

n – строк погашення заборгованості (погашення проводиться рівними річними платежами);

i – договірна процентна ставка;

I – нараховані за пільговий період відсотки;

q – ставка порівняння;

$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ – величина щорічних термінових оплат,

D – накопичена заборгованість на кінець строку поставки за умов, що на авансові платежі нараховуються відсотки:

$$D = \sum_j M_j \cdot (1+i)^{T_j} - \sum_k Q_k \cdot (1+i)^{T_k}. \qquad (7.19)$$

Сучасна величина сукупності платежів при ставці порівняння q визначається за формулою:

$$D = Q_1 + Q_2 \cdot V^t + I \cdot a_{L;q} \cdot V^T + Y \cdot a_{n;q} \cdot V^{T+L}, \qquad (7.20)$$

де $I = D \cdot \left((1+i)^L - 1\right)$.

Таким чином, для кожної конкретної ситуації виводиться рівняння, що дозволяє визначити сучасну величину всіх витрат.

Для порівняння конкурентоспроможності двох альтернативних контрактів може також використовуватися метод визначення граничних значень їхніх параметрів, при якому зіставляються ціни або процентні ставки.

Граничним значенням параметра контракту є величина, що забезпечує його конкурентоспроможності щодо іншого, базового, тобто порівнюваного з ним контракту при незмінності інших умов. Подібний аналіз покупець може використовувати при визначенні припустимих значень ціни або ставки відсотків при згоді продавця змінити первісні умови.

Облік усіх умов контрактів при використанні граничних значень їх параметрів повинен забезпечити рівність сучасних величин платежів покупця за обома контрактами.

Якщо один з постачальників пропонує ціну, що менше, ніж в іншого $(P_1 < P_2)$, і процентна ставка $i_1 < i_2$, то вибір очевидний. Якщо ж $(P_1 < P_2)$, а ставка $i_1 > i_2$, то виникає проблема вибору контракту.

Припустимо, що ставка порівняння не оголошена, тому замість порівняння сучасних величин платежів розрахуємо граничне максимальне значення ставки другого варіанта (позначимо його як i_2^*), при якому він буде конкурентоспроможний. Тоді при будь-якому значенні ставки i_2, меншому i_2^*, він виявиться кращим. Аналогічно знаходять максимально припустиме значення P_2 (позначимо його як P_2^*).

Метод розрахунку граничних значень може бути використаний при знаходженні параметрів, що обмежують область прийнятних рішень. В економічній літературі цю межу називають крапкою рівноваги, або критичною крапкою.

Для контрактів, що передбачають разові розрахунки за ними наприкінці строку угоди без авансових платежів, за умови рівності сучасних величин витрат можна записати:

$$P_1 \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+q} \right)^{-n_1} = P_2 \cdot \left(\frac{1+i_2}{1+q} \right)^{-n_2}, \qquad (7.21)$$

де P_1 і P_2 – вартість товару за умовами першого й другого контрактів;

i_1 і i_2 – процентні ставки;

n_1 і n_2 – строки платежів;

q – ставка порівняння.

З наведеного рівняння знайдемо i_2^* й P_2^*:

$$i_2^* = (1+q)\cdot\left[\frac{P_2}{P_1}\cdot\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}\right]^{\frac{1}{n_2}} - 1, \qquad (7.22)$$

$$P_2^* = P_1\cdot\frac{(1+i_2)^{n_2}}{(1+i_1)^{n_1}}\cdot(1+q)^{n_1-n_2}. \qquad (7.23)$$

При $i_2 > i_2^*$ умови другого варіанта гірші для покупця, ніж умови першого варіанта;

якщо $i_2 = i_2^*$, то забезпечується рівноцінність варіантів;

при $i_2 < i_2^*$ умови другого варіанта кращі ніж, умови першого.

при $P_2 = P_2^*$ друга угода рівноцінна першій; переважає вона при $P_2 < P_2^*$.

Значення i_2^* й P_2^* істотно залежать від прийнятої ставки порівняння та строку кредитування. У випадку якщо $n_1 = n_2 = n,$ то для розрахунків граничних значень параметрів угоди можна обійтися без ставки порівняння, а саме:

$$i_2^* = (1+i_1)\cdot\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad (7.24)$$

$$P_2^* = P_1\cdot\left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^{n}. \qquad (7.25)$$

7.4. Визначення параметрів для досягнення найбільшої дохідності в окремих операціях

Для проведення фінансових операцій грошово-кредитний ринок використовує різні види фінансових інструментів – векселі, депозитні сертифікати, облігації й т. п. Власник фінансового інструмента може, якщо буде потреба, продати його до настання строку платежу.

Ефективність подібних операцій вимірються у вигляді простих або складних відсотків, величина яких залежить від різниці цін купівлі-продажу, строків до настання погашення цих інструментів і величини дисконтних ставок.

Припустимо, що номінал векселя дорівнює величині S і він був куплений (урахований) банком за дисконтною ставкою d_1 за t_1 днів до настання строку платежу. Ціна, заплачена банком за вексель у момент його купівлі (обліку), склала:

$$P_1 = S \cdot \left(1 - \frac{t}{k} \cdot d_1\right), \tag{7.26}$$

де k – тимчасова база = 360 днів.

Максимальний дохід, що може одержати банк, обмежуючись тільки цією сумою, становить різницю між номінальною вартістю векселя й сумою, сплаченою за вексель при його обліку, тобто $S - P_1$.

У випадку виникнення сприятливої фінансової ситуації банк продасть вексель за ціною P_2, яка повинна бути більше P_1, але менше величини S, тобто $P_1 < P_2 < S$.

Отже,

$$P_2 = S \cdot \left(1 - \frac{t_2}{k} \cdot d_2\right), \tag{7.27}$$

де часовий інтервал між моментом купівлі векселя за ціною P_1 і продажу за ціною P_2 дорівнює $t_1 - t_2$.

Сума P_1, заплачена банком при дисконті векселя до моменту його продажу за ціною P_2, могла б принести дохід за простою або складною річною процентною ставкою, яку приймають за міру ефективності.

Якщо $i_{ПП}$ – проста процентна ставка, то можна записати:

$$P_1 \cdot \left(1 + \frac{t_1 - t_2}{k} \cdot i_{ПП}\right) = P_2, \quad (7.28)$$

де k – часова база (365 днів),
звідки прибутковість цієї угоди (у вигляді ставки простих відсотків) розрахується за формулою:

$$i_{ПП} = \frac{P_2 - P_1}{P_1 \cdot (t_1 - t_2)} \cdot k. \quad (7.29)$$

Підставивши у формулу (7.28) раніше розраховані значення P_1 і P_2 одержимо:

$$i_{ПП} = \frac{(t_1 d_1 - t_2 d_2)}{(K' - t_1 d_1)} \cdot \frac{K}{(t_1 - t_2)}, \quad (7.30)$$

де K = 365 днів або 360 днів.

Прибутковість операцій забезпечується при дотриманні нерівності $t_2 d_2 < t_1 d_1$ або $P_1 < P_2$.

При використанні як міри ефективності річної складної ставки можна записати:

$$P_1 \cdot (1 + i_П)^{\frac{(t_1 - t_2)}{K}} = P_2, \quad (7.31)$$

де K = 365 днів,
звідки

$$i_П = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{K}{(t_1 - t_2)}} - 1. \quad (7.32)$$

Підставивши у формулу (7.32) значення P_1 і P_2, одержимо:

$$i_{П} = \frac{(K' - t_2 d_2)^{\frac{K}{(t_1 - t_2)}}}{(K' - t_1 d_1)} - 1, \qquad (7.33)$$

де K = 365 або 360 днів.

Прибутковість операції забезпечується, як і у випадку з простими відсотками, при дотриманні нерівності:

$$t_2 d_2 < t_1 d_1;\ P_1 < P_2 \text{ або } d_2 < \frac{t_1 d_1}{t_2}.$$

Одним з найпоширеніших фінансових інструментів, що приносять фіксований процентний дохід, є депозитні сертифікати (ДС).

ДС у його класичному вигляді становить зобов'язання, що випускається першокласним банком із зобов'язанням оплатити внесок (депозит) з нарахованими на нього відсотками в конкретний день. Цей документ виписується на пред'явника й тому не може передаватися іншій особі шляхом продажу без обов'язкового повідомлення про це емітента сертифіката.

ДС продаються в момент випуску за номіналом і передбачають виплату певних відсотків, що нараховують за простими або складними ставками.

У випадку, коли власник ДС пред'являє його до оплати раніше встановленого строку, емітент передбачає штрафні санкції у вигляді втримання частини процентних платежів, що є рівносильним зниженню оголошеної процентної ставки.

При здійсненні операцій з ДС на фінансовому ринку, тобто коли він продається не тільки емітентом, а й іншими учасниками ринку, для визначення ефективності угоди можливі наступні варіанти розрахунку:

а) ДС купується в емітента за номіналом, а продається за t_2 днів раніше встановленого строку погашення (t_1)*;*

б) ДС придбаний на вторинному фінансовому ринку через якийсь час після випуску, а погашається наприкінці встановленого строку (t_1);

в) ДС придбаний через якийсь час після випуску на фондовому ринку й продається раніше встановленого строку погашення.

Для оцінки ефективності угоди у випадку варіанта «а» скористаємося рівнянням (7.28):

$$P_1 \cdot \left(1+\frac{t_1-t_2}{k}\cdot i_{пп}\right)=P_2,$$

де P_1 – номінал фінансового інструмента, встановлений емітентом у момент первинного продажу;

P_2 – ціна продажу інструмента раніше встановленого строку його погашення;

t_1 – встановлений строк погашення;

t_2 – строк, що залишається до дати погашення.

Ставка, яка визначає прибутковість цієї угоди ($i_{ПП}$), обчислюється за формулою (7.29).

Якщо ж при продажу ДС процентна ставка змінилася, тобто $i_1 \neq i_2$, то ставка ефективності обчислюється за формулою:

$$i_{пп}=\left(\frac{1+\frac{t_1}{K}\cdot i_1}{1+\frac{t_2}{K}\cdot i_2}\right)\cdot\frac{K}{t_1-t_2}, \tag{7.34}$$

де K = 365 або 360 днів.

У випадку коли вимірником ефективності угоди є складна процентна ставка, то:

$$i_п=\left(\frac{K+t_1\cdot i_1}{K+t_2\cdot i_2}-1\right)^{\frac{K}{t_1-t_2}}-1. \tag{7.35}$$

Прибутковість операції забезпечується тільки при дотриманні нерівності $t_1\cdot i_1 > t_1\cdot i_2$.

Для варіанта «б» виконується наступне рівняння:

$$P_2 \cdot \left(1 + \frac{t_2}{K} \cdot i_{пп}\right) = P_1 \cdot \left(1 + \frac{t_1}{K} \cdot i\right), \qquad (7.36)$$

де P_1 – номінал фінансового інструмента;

P_2 – ціна придбання фінансового інструмента;

i – процентна ставка, оголошена емітентом, що випустив фінансовий інструмент.

З наведеного рівняння одержимо:

$$i_{пп} = \left[\frac{P_1 \cdot \left(1 + \frac{t_1}{K} \cdot i\right)}{P_2} - 1\right] \cdot \frac{K}{t_2}. \qquad (7.37)$$

Використана як вимірник ставка складних відсотків дорівнює:

$$i_{п} = \left[\frac{P_1 \cdot \left(1 + \frac{t_1}{K} \cdot i\right)}{P_2} - 1\right]^{\frac{365}{t_2}}. \qquad (7.38)$$

Для визначення $i_{ПП}$ й $i_{П}$ у варіанті «в», коли купівля сертифіката проводиться через якийсь час після його випуску, а продаж – до моменту погашення, можна використати раніше наведені формули. Однак варто мати на увазі, що в цих формулах P_1 означає ціну придбання, а не номінал.

Література: основна [1; 3; 4], додаткова [7-9].

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняття «дохідність». Чому дохідність операції може бути різною навіть при умові відповідності процентної ставки, за якою здійснюється нарощення?

2. За яким параметром перш за все буде оцінюватися доцільність здійснення тієї чи іншої фінансової операції? Поясніть відповідь.

3. Наведіть приклади рівноцінних фінансових операцій за параметром дохідності, але різних за іншими параметрами.

Тема 8. Розрахунки щодо аналізу ефективності реальних інвестицій

8.1. Принципи прийняття інвестиційних рішень та оцінка грошових потоків.

8.2. Метод розрахунку чистого приведеного доходу.

8.3. Ризик та планування інвестиційних проектів.

8.1. Принципи прийняття інвестиційних рішень та оцінка грошових потоків

Інвестування – це довгострокові вкладення економічних ресурсів з метою створення об'єктів, що приносять вигоду в майбутньому, тобто основний аспект цих вкладень – перетворення власних і позикових коштів інвесторів в активи, які при їх використанні створять нову лік від-ність.

Принципи прийняття інвестиційних рішень та оцінка грошових потоків прямо пов'язані з оцінкою інвестиційного проекту.

Інвестиційний проект, насамперед, оцінюється з погляду його технічного виконання, екологічної безпеки й економічної ефективності, під якою розуміють результат складання одержуваного прибутку та витрат, тобто норму прибутку.

Зрозуміло, що перевага віддається проекту, який обіцяє найбільшу ефективність.

Очевидно, що при наявності декількох проектів можна одержати рівний розмір прибутку, але ефективність цих проектів може бути різною, тому що на їхню реалізацію будуть потрібні неоднакові витрати. Оцінюючи ефективність інвестиційного проекту, варто враховувати й ступінь ризику. При реалізації інвестиційних проектів розглядаються ризики двох видів: підприємницький і фінансовий.

Під підприємницьким ризиком розуміється ризик, пов'язаний з діяльністю компанії. Він обумовлений характером бізнесу. Фінансовий ризик залежить від змін ринкової ставки доходу на вкладений капітал.

Для спрощення дослідження ефективності інвестиції передбачається, що необхідна норма прибутку задана й однакова для всіх інвестиційних проектів і, крім того, для кожного з розглянутих проектів ступінь ризику однаковий.

При наявності необхідних передумов для інвестиційної діяльності керуються наступними основними принципами:

вибирають напрямок та об'єкти інвестиційних вкладень;

проводять розрахунок грошових потоків, здатних забезпечити реалізацію інвестиційних проектів;

оцінюють очікувані грошові потоки в результаті реалізації інвестиційного проекту;

вибирають оптимальний проект, керуючись існуючими критеріями оцінки інвестиційних проектів;

проводять періодичну переоцінку інвестиційних проектів після їхнього прийняття.

Найважливішим завданням економічного аналізу інвестиційних проектів є розрахунок майбутніх грошових потоків, що виникають при реалізації зробленої продукції.

Тільки грошові потоки, що надходять, можуть забезпечити окупність інвестиційного проекту. Тому саме вони, а не прибуток стають центральним фактором в аналізі. Інакше кажучи, економічний аналіз інвестиційних рішень повинен бути заснований на дослідженні доходів і витрат у формі грошових потоків.

8.2. Метод розрахунку чистого приведеного доходу

При економічній оцінці інвестиційних проектів використовується ряд методів. Основний з них зводиться до розрахунку чистої поточної вартості – *NPV (net present value),* яку можна визначити наступним чином: поточна вартість грошових надходжень за винятком поточної вартості грошових відтоків. Даний метод передбачає дисконтування грошових потоків з метою визначення ефективності інвестицій.

Оскільки надходження коштів розподілене в часі, його дисконтування проводиться за процентною ставкою i. Важливим є вибір рівня процентної ставки, за якою проводиться дисконтування. Ця ставка називається ставкою порівняння, тобто повинна відображати очікуваний усереднений рівень позичкового відсотка на фінансовому ринку.

При одноразовій інвестиції математично розрахунок чистого приведеного доходу (ефекту) можна представити формулою:

$$NPV = \sum_{1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^n} - IC, \tag{8.1}$$

де P_k – річні грошові надходження протягом n років;

IC – стартові інвестиції;

i – ставка порівняння;

$PV = \sum_{1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^n}$ – загальна накопичена величина дисконтованих надходжень.

Очевидно, що при *NPV* > 0 проект варто прийняти; при *NPV < 0* – проект не повинен бути прийнятим; при *NPV* = 0 – проект не прибутковий, але й не збитковий.

Якщо проект припускає не разову інвестицію, а послідовне інвестування фінансових ресурсів протягом декількох років *(*m років), то формула для розрахунку *NPV* модифікується в такий спосіб:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j}. \tag{8.2}$$

Показник *NPV* відображає прогнозну оцінку зміни економічного потенціалу підприємства у випадку прийняття розглянутого проекту. Дуже важлива властивість, котра виділяє цей критерій з усіх інших і дозволяє використовувати його основний при аналізі оптимальності інвестиційного портфеля, полягає в тому, що *NPV* різних проектів можна підсумувати.

У випадку, коли інвестиції й прибуток від них є потоками платежів, що представляють певні закономірності, які змінюються в часі, то розрахунок

NPV можна зробити, використовуючи формули приведених величин рент. Якщо вкладення й надходження рівномірні та дискретні, причому доходи починають надходити відразу ж після завершення вкладень, то величина *NPV* становить різницю сучасних величин двох рент:

$$NPV = P_k \cdot a_{n_2;i} \cdot V^{n_1} - CI \cdot a_{n_2;i}, \tag{8.3}$$

де P_k – доходи в періоди 1, 2, ..., n_2;

CI – інвестиційні витрати в періоді 1, 2,..., n_1;

V^{n_1} – коефіцієнт дисконтування за ставкою приведення i;

n_1 – тривалість періоду інвестицій;

n_2 – тривалість одержання доходу від інвестицій;

$a_{n_2;i}$ – коефіцієнт приведення ренти.

У випадку, коли необхідно визначити *NPV* на момент завершення процесу вкладень або на інший момент часу, то чистий приведений дохід на момент t визначається як:

$$NPV_t = NPV_0 (1+i)^t, \tag{8.4}$$

де NPV_0 і NPV_t – величини приведеного доходу, розраховані на початок інвестиційного процесу й деякий момент часу t після нього.

Строк окупності *(payback period method – PP)* – один з найчастіше застосовуваних показників для аналізу інвестиційних проектів.

Якщо не враховувати фактор часу, тобто коли рівні суми доходу одержуються в різний час та розглядаються як рівноцінні, то показник строку окупності можна визначити за формулою:

$$n_y = \frac{CI}{P_k}, \tag{8.5}$$

де n_y – спрощений показник строку окупності;

CI – розмір інвестицій;

P_k – щорічний чистий дохід.

Інакше кажучи, період окупності *(payback period)* – тривалість часу, протягом якого недисконтовані прогнозовані надходження коштів перевищать недисконтовану суму інвестицій, тобто це число років, необхідних для відшкодування стартових інвестиційних витрат.

Більш обґрунтованим є інший метод визначення строку окупності. При використанні даного методу під строком окупності n_{ok} (PP) розуміють тривалість періоду, протягом якого сума чистих доходів, дисконтованих на момент завершення інвестицій, дорівнює сумі інвестицій:

$$\sum_{1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^n} = \sum_{1}^{t} CI, \tag{8.6}$$

де P_k – річні доходи;

$\sum_{1}^{t} CI$ – сума всіх інвестиції.

Є можливість визначити строк окупності для доходів, які можна представити у вигляді деяких упорядкованих послідовностей (ануїтетів). У випадку рівномірного дискретного (один раз наприкінці року) надходження доходів за умовами повної окупності за строк n_{ok} при заданій ставці i формується рівність суми капітальних вкладень сучасної вартості ануїтету:

$$IC = P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-n_{ok}}}{i}, \tag{8.7}$$

звідси

$$n_{ok} = \frac{-\ln\left(1 - \dfrac{IC}{P_k} \cdot i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{8.8}$$

Аналогічним шляхом можна знайти строк окупності для інших видів розподілу віддачі. У кожному такому випадку капіталовкладення прирівнюються до сучасної величини фінансових рент, тобто IC дорівнює A, а члени грошового потоку P_k рівні R – члену ренти (число членів потоку в році – P *).*

Не всякий рівень доходу за інших рівних умов приводить до окупності інвестицій.

Строк окупності існує, якщо не порушуються певні співвідношення між надходженнями й розміром інвестицій. Так, при щорічному надходженні постійних доходів (один раз на рік) це співвідношення має вигляд: $P_k > IC \cdot i;$ при надходженні постійних доходів кілька разів на рік (р) – $P_k > P\left[(1+p)^{1/p} - 1\right] \cdot IC;$ при безперервному надходженні доходів – $P_k > \ln(1+i)IC.$

Якщо перераховані вимоги не виконуються, то капіталовкладення не окуповуються за будь-який строк, точніше, цей строк дорівнює нескінченності.

Основний недолік показника строку окупності n_{ok} як міри ефективності полягає в тому, що він не враховує весь період функціонування інвестицій і, отже, на нього не впливає вся та віддача, що лежить за межами n_{ok}. Тому показник строку окупності не повинен служити критерієм вибору, а може використовуватися лише у вигляді обмеження при ухваленні рішення. Тобто якщо строк окупності проекту більше, ніж прийняті обмеження, то він виключається зі списку можливих інвестиційних проектів.

Внутрішня норма прибутковості, прибутку *(international rate of return – IRR*) є показником, що широко використовується при аналізі ефективності інвестиційних проектів.

Реалізація будь-якого інвестиційного проекту вимагає залучення фінансових ресурсів, за які завжди необхідно платити. Так, за позикові кошти платять відсотки, за притягнутий акціонерний капітал – дивіденди й т. п.

Показник, що характеризує відносний рівень цих витрат, є ціною за використаний (авансований) капітал. При фінансуванні проекту з різних джерел даний показник визначається за формулою середньої арифметичної зваженої.

Щоб забезпечити дохід від інвестованих коштів або їх окупність, необхідно домогтися такого стану, коли чиста поточна вартість буде більше нуля або дорівнюватиме йому.

Для цього необхідно підібрати таку процентну ставку для дисконтування членів потоку платежів, що забезпечить одержання рівняння *NPV > 0* або *NPV = 0.*

Дана ставка (бар'єрний коефіцієнт) повинна відображати очікуваний усереднений рівень позичкового відсотка на фінансовому ринку з урахуванням фактора ризику.

Тому під внутрішньою нормою прибутковості розуміють ставку дисконтування, використання якої забезпечує рівність поточної вартості очікуваних грошових відтоків і поточної вартості очікуваних грошових надходжень, тобто при нарахуванні на суму інвестиції відсотків за ставкою, рівною внутрішній нормі прибутковості, забезпечується одержання розподіленого в часі доходу.

Показник внутрішньої норми прибутковості – *IRR* – характеризує максимально припустимий відносний рівень витрат, які можуть бути зроблені при реалізації даного проекту.

Наприклад, якщо для реалізації проекту отримана банківська позичка, то значення *IRR* показує верхню межу припустимого рівня банківської процентної ставки, перевищення якої робить проект збитковим.

Таким чином, зміст цього показника полягає в тому, що інвестор повинен зрівняти отримане для інвестиційного проекту значення *IRR* з ціною притягнутих фінансових ресурсів *(cost of capital – CC).*

Якщо *IRR > CC*, то проект варто прийняти;

якщо *IRR < CC* – проект варто відкинути;

якщо *IRR = CC* – проект ні прибутковий, ні збитковий.

Практичне застосування даного методу зводиться до послідовної ітерації, за допомогою якої визначається множник, що дисконтує, та забезпечує рівність *NPV* = 0.

Згідно з процентними ставками на позичковий капітал, які існують у момент аналізу, вибираються два значення коефіцієнта дисконтування $V_1 < V_2$ таким чином, щоб в інтервалі (V_1, V_2) функція *NPV = f(V)* міняла своє значення з «+» на «-» або навпаки. Далі використовують формулу:

$$IRR = i_1 + \frac{NPV(i_1)}{NPV(i_1) - NPV(i_2)} \cdot (i_2 - i_1), \qquad (8.9)$$

де i_1 – значення процентної ставки в дисконтному множнику, при якому $f(i_1) < 0; f(i_1) > 0;$

i_2 – значення процентної ставки в дисконтному множнику, при якому $f(i_2) < 0; f(i_2) > 0.$

Точність обчислень обернена довжині інтервалу (i_1, i_2). Тому найкраща апроксимація досягається у випадку, коли довжина інтервалу приймається мінімальною (1%).

Аналіз альтернативних проектів проводиться у двох напрямках. У першому випадку фірма вибирає з декількох перспективних і вигідних інвестиційних проектів один або декілька – це обмеженість фінансових коштів. Лімітування фінансових коштів для інвестицій є фіксованою межею річного розміру капітальних вкладень, що може собі дозволити фірма, виходячи зі свого фінансового становища. При наявності фінансових обмежень на інвестиції фірма може прийняти деякі інвестиційні проекти, що становлять таку комбінацію, яка забезпечить найбільший ефект.

При розгляді декількох альтернативних інвестиційних проектів залежно від обраного методу його економічної оцінки можна одержати далеко не однозначні результати, найчастіше суперечні один одному.

У роботах, присвячених методам економічної оцінки інвестицій, віддається перевага показнику *NPV.* Пояснюється це наступними факторами:

1. Даний показник характеризує прогнозовану величину приросту капіталу підприємства у випадку реалізації пропонованого інвестиційного проекту.

2. Проектуючи використання декількох інвестиційних проектів, можна підсумувати показники *NPV* кожного з них, що дає в агрегованому вигляді величину приросту капіталу.

При аналізі альтернативних інвестиційних проектів використання показника внутрішньої норми прибутковості – *IRR* повинне носити обмежений характер:

1. Оскільки *IRR* є відносним показником, то, виходячи з його величини, неможливо зробити висновок про розмір збільшення капіталу підприємства при розгляді альтернативних проектів.

2. Якщо *IRR* однаковий для двох інвестиційних проектів і перевищує ціну інвестиції, то для вибору між проектами необхідно використати інші критерії.

3. Показник *IRR* непридатний для аналізу проектів, у яких грошовий потік чергується надходженням і відтоком капіталу. У цьому випадку висновки, зроблені на основі показника *IRR,* можуть бути некоректні.

При порівнянні проектів різної тривалості доцільно використати наступну процедуру:

1. Визначити загальне кратне для числа років реалізації кожного проекту.

2. Ураховуючи, що кожний із проектів буде повторюватися кілька циклів, розрахувати сумарне значення показника *NPV* для повторюваних проектів.

3. Вибрати той проект із вихідних, у якого сумарне значення *NPV* потоку, що повторюється, буде найбільше.

Сумарне *NPV* повторюваного потоку розраховується за формулою:

$$NPV_{(j;n)} = NPV_{(j)}\left(1+\frac{1}{(1+i)^{j}}+\frac{1}{(1+i)^{2j}}+\frac{1}{(1+i)^{3j}}+...+\frac{1}{(1+i)^{nj}}\right), \qquad (8.10)$$

де $NPV_{(j)}$ – чиста приведена вартість вихідного (повторюваного) проектту;

j – тривалість цього проекту;

n – число повторень (циклів) вихідного проекту (число доданків у дужках);

i – процентна ставка в частках одиниці, використана при дисконтуванні (ставка передбачуваного доходу).

8.3. Ризик та планування інвестиційних проектів

Ризик – це ймовірність несприятливого результату фінансової операції. Кожен інвестиційний проект має різний ступінь ризику.

Сукупний підприємницький ризик пов'язаний з операційним Левериджем (важелем).

Операційний леверидж – показник, що дозволяє визначити залежність між темпом приросту (зниження) прибутку від темпу приросту (зниження) виручки від реалізації продукції.

Витрати на виробництво продукції можна розділити на змінні й постійні.

До змінних витрат відносяться такі, які змінюються (збільшуються або зменшуються) залежно від збільшення чи зменшення обсягу продукції. Витрати на закупівлю сировини й матеріалів, споживання енергії, транспортні витрати, витрати на заробітну плату (при наявності відрядної системи оплати праці) та ін. При теоретичних розрахунках передбачається, що змінні витрати пропорційні обсягу виробленої продукції.

До постійних витрат відносяться витрати, які можна прийняти як незалежні від обсягу виробленої продукції (амортизаційні відрахування, виплата відсотків за кредит, орендна плата, утримання управлінського персоналу й інші адміністративні витрати).

Необхідно зазначити, що розподіл витрат на змінні і постійні є досить умовним. Разом з тим ця відмінність між витратами виступає базою для проведення аналізу крапки беззбиткового ведення господарства. Концепція беззбитковості виражається в наступному: визначається, скільки одиниць продукції або послуг необхідно продати з метою відшкодування зроблених при цьому постійних витрат. Природно, що ціни на продукцію встановлюються таким чином, щоб відшкодувати всі змінні витрати й одержати надбавку, достатню для відшкодування постійних витрат і одержання прибутку.

При реалізації цієї концепції можна виявити, що будь-яка зміна виручки від реалізації продукції й послуг викликає ще більшу зміну прибутку. Це явище одержало назву ефекту виробничого левериджу, або операційного важеля.

Для виконання практичних розрахунків щодо виявлення залежності зміни прибутку від зміни реалізації пропонується наступна формула:

$$C = \frac{PN - З_{зм}}{П_в} = \frac{З_{пост} + П_в}{П_в}, \qquad (8.11)$$

де C – сила впливу виробничого важеля;

P – ціна одиниці продукції;

N – кількість одиниць реалізованої продукції;

PN – обсяг реалізації в грошовому вираженні;

$З_{зм}$ – загальна величина змінних витрат;

$З_{пост}$ – загальна величина постійних витрат;

$П_{в}$ – валовий прибуток.

Дуже часто в економічній літературі зустрічається поняття, що має безліч назв: «поріг рентабельності», «крапка самооплатності», «крапка беззбитковості». Розглянемо назву «крапка беззбитковості». Цій крапці відповідає така виручка від реалізації продукції, при якій виробник уже не має збитків, але не має й прибутків, тобто результат від реалізації після відшкодування змінних витрат достатній для покриття постійних витрат, а прибуток дорівнює нулю.

Отже, в крапці беззбитковості різниця між виручкою від реалізації продукції й сумою змінних і постійних витрат дорівнює нулю, тобто:

$$PN - (З_{пост} + VN) = 0, \tag{8.12}$$

де $З_{пост}$ – витрати постійні;

V – змінні витрати на одиницю продукції;

N – кількість (одиниць) випущеної продукції;

P – ціна одиниці продукції.

Перетворивши формулу (8.12) одержуємо, що для досягнення крапки беззбитковості необхідний випуск наступної кількості виробів:

$$N = \frac{З_{пост}}{P - V}. \tag{8.13}$$

У зв'язку з використанням операційного важеля фінансовий менеджер має можливість з метою максимізації прибутку оцінити вплив трьох факторів: постійних витрат, змінних витрат і цін.

Менеджер може змінити величину постійних і змінних витрат, керуючись внутрішньофірмовими можливостями, а ціни на продукцію в більшій мірі залежать від зовнішньої конкуренції. Тому, бажаючи підвищити конкурентоспроможність своєї продукції шляхом зниження ціни, виробник повинен для досягнення крапки беззбитковості підвищити обсяг продукції, що випускається.

Основні співвідношення постійних і змінних витрат також можуть бути використані для визначення впливу частки боргових зобов'язань у структурі капіталу фірми на величину прибутку.

Властивість фінансового важеля полягає в тому, що виникає можливість використати капітал, узятий у борг під фіксований відсоток, для інвестицій, що приносять прибуток більш високий, ніж сплачений відсоток.

Ідею фінансового важеля формально можна виразити рядом формул. Позначимо економічні компоненти, використані в розрахунках фінансового важеля:

$П_r$ – прибуток після сплати податків;

E – власний капітал;

D – довгострокова заборгованість;

i – відсотки за довгостроковою заборгованістю;

R – ставка прибутковості власного капіталу;

r – ставка прибутковості інвестованого капіталу (власний капітал + довгострокова заборгованість).

Визначимо ставку прибутковості власного капіталу:

$$R = \frac{П_r}{E}. \tag{8.14}$$

Чистий прибуток виразимо через його складові:

$$П_r = (E + D) \cdot r - D \cdot i, \tag{8.15}$$

де $(E + D) \cdot r$ – прибуток на загальну суму інвестованого капіталу;

$D \cdot i$ – процентні платежі за непогашеною частиною довгострокової позики з урахуванням податку.

Формулу ставки прибутковості власного капіталу перетворимо, підставивши в неї значення $П_r$:

$$R = \frac{(E + D) \cdot r - Di}{E} = r + \frac{D}{E}(r - i). \qquad (8.16)$$

Вираз (8.16) показує ефект важеля, що представлений позитивною величиною – другим доданком, тобто відношенням позикового капіталу й власного капіталу, помноженим на різницю між прибутком від чистих активів і вартістю сплачених відсотків за кредитами з урахуванням податку. Таким чином, завдяки притягнутим коштам (D) прибутковість власного капіталу прискорено зростає за умови, що $r > i$.

Коли частка боргу в структурі капіталу збільшується, ставка прибутковості власного капіталу зростає, тому що в кожному випадку прибутковість інвестицій перевищує вартість сплачених кредиторам відсотків.

За визначенням ризик інвестиційного проекту виражається у відхиленні потоку коштів для даного проекту від очікуваного. Чим відхилення більше, тим проект вважається більш ризикованим. При розгляді кожного проекту можна оцінити потоки коштів, керуючись експертними оцінками ймовірності надходження цих потоків або величиною відхилень членів потоку від очікуваних величин.

Існує декілька методів, за допомогою яких можна оцінити ризик того чи іншого проекту.

Суть імітаційної моделі оцінки ризику полягає в наступному:

1. На основі експертної оцінки за кожним проекту будують три можливих варіанти розвитку:

а) найгірший;

б) найбільш реальний;

в) оптимістичний.

2. Для кожного варіанта розраховується відповідний показник *NPV*, тобто одержують три величини: $NPV_н$ (для найгіршого варіанта); $NPV_р$ (для найбільш реального); $NPV_о$ (для оптимістичного).

3. Для кожного проекту розраховується розмах варіації (R_{NPV}) – найбільша зміна $NPV \cdot R_{NPV} = NPV_о - NPV_н$ і середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma_{NPV} = \sqrt{\sum_{1}^{3} (NPV_i - \overline{NPV})^2 \cdot P_i}, \qquad (8.17)$$

де NPV_i – приведена чиста вартість кожного з розглянутих варіантів;

$\overline{NPV}$ – середнє значення, зважене за привласненими ймовірностями (P_i);

$$\overline{NPV} = \sum_{1}^{3} NPV_i \cdot P_i. \tag{8.18}$$

Із двох порівнюваних проектів вважається більш ризикованим той, у якого більше варіаційний розмах (R_{NPV}) або середнє квадратичне відхилення (σ_{NPV}).

В основі методики зміни грошового потоку використовується отримана експертним шляхом імовірнісна оцінка величини членів щорічного грошового потоку, на основі яких корегується й розраховується значення *NPV.*

Перевага віддається проекту, що має найбільше значення відкоригованого *NPV;* даний проект вважається найменш ризикованим.

При розрахунку показника NPV. Якщо процентна ставка, використана для дисконтування, береться на рівні прибутковості державних цінних паперів, то вважається, що ризик розрахованого наведеного ефекту інвестиційного проекту близький до нуля. Тому якщо інвестор не бажає ризикувати, то він вкладе свій капітал у державні цінні папери, а не в реальні інвестиційні проекти.

Реалізація реального інвестиційного проекту завжди пов'язана з певною часткою ризику. Тобто чим проект ризиковий, тим вище повинна бути премія. Для обліку ступеня ризику до безризикової процентної ставки (прибутковість державних цінних паперів) додається величина премії за ризик, виражена у відсотках, що визначається експертним шляхом.

Сума безризикової процентної ставки й премії за ризик використовується для дисконтування грошових потоків проекту, на підставі яких обчислюються *NPV* проектів.

Проект із більшим значенням *NPV* вважається кращим.

Розглянувши методи оцінки інвестиційних проектів в умовах ризику, необхідно відзначити, що отримані результати, які послужили підставою для прийняття рішення, досить умовні й у значній мірі носять суб'єктивний характер, тому що залежать від професійного рівня осіб, які проводять аналіз.

Література: основна [1; 3; 4], додаткова [7-9].

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади інвестиційних вкладень, описавши основні параметри інвестицій.
2. Яким чином здійснюється оцінювання інвестиційних проектів?
3. Чому при розрахунку окупності інвестицій необхідно використовувати принцип дисконтування грошових потоків?
4. Що таке внутрішня норма дохідності інвестиційних проектів? Як вона може бути розрахована?
5. Наведіть основні формули для розрахунку строку окупності інвестицій.
6. За якими принципами обираються інвестиційні проекти?

Рекомендована література

Основна

1. Мелкумов Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика: Учебно-справочное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 384 с.
2. Основи здійснення банківських операцій. 4.1.Фінансово-економічні розрахунки при проведенні основних банківських операцій: Навчальний посібник / Укл. О. В. Молдавська – Харків.ВД «ІНЖЕК», 2005 – 32 с.
3. Статистика финансов: Учебник / под ред. проф. В. Н. Салина. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 816 с.
4. Уотшем Т. Дж. Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов / Перевод с англ. под ред. М. Р. Ефимовой; [Т. Дж. Уотшем; К. Паррамоу. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 528 с.

Додаткова

5. Ковбасюк М. Р. Економічний аналіз діяльності комерційних банків і підприємств. – К.: Вид. дім “Скарби”, 2001. – 336 с.

6. Коммерческие банки: модели и информационные технологии в процедурах принятия решений. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 400 с.

7. Фундаментальный анализ финансовых рынков. – СПб.: Питер, 2005. – 288 с.

8. Четыркин Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Дело Лтд, 1995. – 320 с.

9. Шелудько В. М. Фінансовий ринок: Навчальний посібник. – К.: Знання-Прес, 2002. – 535 с.

Ресурси мережі Internet

10. Ліга Бізнес Інформ. // www.liga.net
11. Нормативні акти України // www.nau.kiev.ua
12. Сайт Національного банку України // www.bank.gov.ua
13. Фінансовий ринок України // www.finmarket.info
14. Фінансовий сайт // www.finance.com.ua
15. Фінансовий сайт // www.ufs.kiev.ua

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Молдавська Олена Владиславівна

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск **Сєрова І. А.**
Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Лященко Т. О.**
Коректор **Чистякова А. В.**

План 2008 р. Поз. №124-К.
Підп. до друку Формат 60 $\times$ 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 4,75. Обл.-вид. арк. 5,46. Тираж прим. Зам. №
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ***Дк №481 від 13.06.2001 р.***
Видавець і виготівник — видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Молдавська О. В.

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій