МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

DOI: https://doi.org/10.32689/2523-4536/65-11
УДК 519.803:658.15(477)

Мартинова О. В.
кандидат економічних наук, доцент кафедри
вищої математики та економіко-математичних методів,
Харківський національний університет імені Семена Кузнеця
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3381-6060
Шевченко О. К.
кандидат технічних наук, доцент кафедри
вищої математики та економіко-математичних методів,
Харківський національний університет імені Семена Кузнеця
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4258-3147

Martynova Olena
Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
and Economic-Mathematical Methods,
Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics
Shevchenko Oleksandra
Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
and Economic-Mathematical Methods,
Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics

ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ У ПРОЦЕСІ УПРАВЛІННЯ ДІЯЛЬНІСТЮ ПІДПРИЄМСТВА

APPLICATION OF MATRIX GAME IN THE PROCESS OF ENTERPRISE ACTIVITY MANAGEMENT

Успіх підприємства залежатиме від здатності адаптуватися до змін в середовищі їх діяльності: передбачати і змінювати структуру бізнесу, розробляти і впроваджувати у виробництво нові види продукції, правильно визначати напрями інвестицій за різними видами діяльності. В роботі розглянуті можливості використання теорії матричних ігор в економічних дослідженнях. У статті побудована матриця ризиків. Для прийняття рішення використано ряд критеріїв: мінімум математичного очікування ризику, максимінний критерій Вальда, критерій мінімального ризику Севіджа, критерій Гурвіца. Розглянуті теоретичні можливості використання антагоністичних матричних ігор при розв'язку лінійної моделі виробництва. Отримана платіжна функція дозволяє запропонувати наступну модель управління економічною системою: управлінський апарат має два відділу – плановий і фінансовий. Розглянутий математичний апарат можна використовувати для будь-яких фірм, які займаються виробництвом продукції.

Ключові слова: *діяльність підприємства, прийняття рішення, матрична гра, стратегія, критерій, сідлова точка.*

Modern market economy creates new requirements for the enterprise. They are due to the presence of fierce competition and the need to respond flexibly to ambiguous changes in the markets and industries. In this case, the success of the company will depend on the ability to adapt to changes in their environment: to anticipate and change the structure of business, develop and implement new products, correctly identify investment areas for various activities, etc. to succeed and ensure prosperity in the future. The purpose of the formation and implementation of production policy is to adapt the company to market requirements with minimal costs, but it requires managers and specialists to be aware of a wide range of issues outside the sphere of production. In the process of innovative activity of the enterprise entrepreneurs are forced to act in conditions of risk and uncertainty. Uncertainty is caused by the

lack of information about the conditions under which innovations take place, as they do not depend on the conscious actions of the parties to the agreement, but on objective reality, which can be called nature and applied to such problems game theory, namely playing with nature. The risk matrix is constructed in the article. A number of criteria were used to make the decision: minimum mathematical risk expectation, Wald's maximum criterion, Savage's minimum risk criterion, Hurwitz's criterion. Theoretical possibilities of using antagonistic matrix games in solving a linear model of production are considered. The received payment function allows to offer the following model of management of economic system: the administrative device has two departments – planning and financial. The task of the planning department is to form a production plan so as to maximize the total profit of the system - the payment function. The task of the financial department is to set prices for resources in such a way as to minimize the cost of resources and thus minimize the function, the profit of the same economic system. Thus, a balance should be found between these departments. The considered mathematical device can be used for any firms engaged in production.

Keywords: *enterprise activity, decision making, matrix game, strategy, criterion, saddle point.*

Постановка проблеми. Сучасна ринкова економіка формує нові вимоги до підприємства. Вони обумовлюються наявністю жорсткої конкуренції та необхідністю гнучко реагувати на неоднозначні зміни ситуації на ринках і в галузях діяльності підприємств. Ефективне регулювання процесів виробничої та інших форм діяльності людини – загальна мета і завдання будь-якої системи управління, які потребують математичного апарату для їх вирішення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання прийняття управлінських рішень розглядається у працях відомих вітчизняних та закордонних вчених Б. Карлофа, Л. Бауера, В. Г. Андрійчука, В. В. Вітлінського [3], В. М. Приймака, А. П. Ладанюка, О. І. Пономаренко [1], Внукова Н. М. [2] та ін. Аналіз робіт свідчить про необхідності розроблення математичного підходу до вирішення деяких питань управління діяльністю підприємства.

Метою дослідження є розроблення математичного підходу до управління діяльністю підприємства на основі матричної гри, а також формування рекомендацій щодо його використання.

Викладення основного матеріалу дослідження. Виробнича діяльність підприємства – комплексний процес. Він складається з виробництва – процесу виготовлення кінцевої продукції та діяльності з обслуговування виробництва (енергетичне забезпечення, ремонтне, інструментальне, транспортне, складське обслуговування). Своєю чергою, будь-яке виробниче обслуговування чи забезпечення в рамках своїх завдань здійснює функцію перетворення вхідних компонентів у готову продукцію, тобто є виробничою діяльністю.

Виробниче підприємство (фірма) для забезпечення своєї життєдіяльності перш за все орієнтується на ринковий попит з його вимогами до якості, споживчих властивостей та ціни товару (послуги). Метою формування та реалізації виробничої політики є пристосування підприємства до вимог ринку з мінімальними витратами, але це потребує від керівників та спеціалістів обізнаності з широкого кола питань за межами сфери виробництва. Виробництво – це тільки частина процесу, що постійно оновлюється, і тому всі техніко-технологічні та організаційно-економічні рішення можна приймати тільки на підставі аналізу достатньо повної і точної інформації про вимоги ринку, що очікуються, можливості і загрози зовнішнього середовища, слабкі та сильні сторони власної діяльності.

Ефективне регулювання процесів виробничої та інших форм діяльності людини – загальна мета і завдання будь-якої системи управління. У процесі виробництва і розподілу праці виникають виробничі відносини між людьми, різновидом яких є виробничо-технічні відносини. Ці відносини регламентуються, спрямовуються, контролюються управлінською структурою підприємства.

Під структурою управління розуміють сукупність ланок і окремих працівників апарату управління, що виконують різноманітні функції управління, їх взаємозв’язок та взаємодія, що ґрунтуються на виробничій та організаційній структурі підприємства. Управління виробництвом одна з спеціальних функцій управління, яка полягає у плануванні, організації, мотивації та контролі виробничої діяльності підприємства.

У процесі інноваційної діяльності підприємства підприємці змушені діяти в умовах ризику і невизначеності [1, с. 153]. Невизначеність викликана відсутністю інформації про умови, в яких здійснюються інновації, оскільки залежать не від свідомих дій учасників угод, а від об'єктивної дійсності, яку можна назвати природою і застосувати до вирішення таких завдань теорію ігор, а саме гру з природою. В іграх з природою гравець А використовує максмінну стратегію, що дозволяє мінімізувати ризик [2, с. 100]. Другий гравець В (природа) діє абсолютно випадково, можливі стратегії визначаються в залежності, наприклад, від умов погоди, попиту на певну продукцію, обсягу перевезень, від поєднання виробничих факторів на даний момент і т. д.

Умови гри задаються у вигляді платіжної матриці:

$$\prod = \begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & \ldots & B_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}; \quad \prod_{[m\times n]} = \{a_{ij}\}.$$

Гравець A вибирає свої стратегії (рядки) $A_1, A_2, \ldots, A_m$, гравець B (природа) – свої стратегії – стовбці. Елемент платіжної матриці a_{ij} – це виграш гравця A, якщо він користується стратегією A_i у стані природи B_j.

При розв'язанні матричної гри можна використовувати матрицю ризиків $\prod = \{r_{ij}\}$. Елементи матриці r_{ij} різниця між виграшем, який отримав би гравець A, якщо знав би B_j виграш, який він отримає, обравши стратегію A_i, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, де $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$.

Існує ряд критеріїв для прийняття рішення [4, с. 132]:

1) Максимум математичного очікування виграшу $M(V)$ або мінімум математичного очікування ризику $M(V_p)$.

Якщо позначити $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$,– ймовірності стану природи $B_1, B_2, \ldots, B_m$, тоді $M(V) = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} Y_i$, $\quad M(V_p) = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij} Y_i$, $\sum\limits_{j=1}^{n} Y_i = 1$.

2) Максимінний критерій Вальда. Виграш $V = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

3) Критерій мінімального ризику Севіджа. Ризик $V = \max\limits_i \min\limits_j r_{ij}$.

4) Критерій Гурвіца.

Рішення про вибір стратегії приймається за величиною опуклої лінійної комбінації чисел $\min\limits_j a_{ij}$, і $\max\limits_j a_{ij}$, тобто $V = \max\limits_j (\lambda \min\limits_j a_{ij} + (1-\lambda) \max\limits_j a_{ij})$, де $0 \le \lambda \le 1$. Значення λ вибирають на підставі суб'єктивних чинників, а саме, чим менший ризик, тим λ більше.

Основна теорема теорії ігор затверджує, що кожна матрична гра має розв'язок у мішаних стратегіях. Отож кожну матричну гру можна звести до задачі лінійного програмування [4, с. 140]. Дійсно, нехай маємо платіжну матрицю, де $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – стратегії гравця A, тому позначимо $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – імовірності вибору гравцем A своїх стратегій; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – стратегії гравця B, тому позначимо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – імовірності вибору гравцем B своїх стратегій. Оскільки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – повна група подій для гравця A, а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – повна група подій для гравця B, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$; $\quad y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. Тоді математичне сподівання виграшу для гравця А зводиться до системи: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge V$, $i = \overline{1,m}$, нерівність $\ge V$, де V – вартість гри, пояснюється позицією гравця A (maxmin), тобто він максимізує свій виграш.

Для гравця B, оскільки він мінімізує свій програш, математичне сподівання програшу дає систему: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le V$, $j = \overline{1,n}$.

Зробимо декілька перетворень. Поділимо обидві системи на V, та зробимо заміну змінних. Позначимо $x_j / V = t_j$, $\;y_i / V = U_i$, тоді отримаємо дві взаємодвоїсті задачі лінійного програмування.

Вихідна задача:	Вихідна задача:
$Z = \sum\limits_{j=1}^{n} t_j \quad (\min)$	$f = \sum\limits_{i=1}^{m} U_i \quad (\max)$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \ge 1,$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} U_i \le 1,$
$i = \overline{1,m}$; $t_j \ge 0$.	$j = \overline{1,n}$; $U_i \ge 0$.

Отже, будь-яку матричну гру можливо звести до пари двоїстих задач лінійного програмування. Цікаво відмітити, що вірно і зворотне, тобто будь яку задачу лінійного програмування можна звести до матричної гри, в якій оптимальні стратегії першого гравця є розв'язком вихідної задачі, а оптимальні стратегії другого гравця – розв'язок двоїстої задачі. Якщо ми розглядаємо лінійну модель виробництва, тобто:

$$Z = \overline{C}\,\overline{X}\ (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i,$$

$$i = \overline{1,m};\ X_j \ge 0.$$

Відповідну матричну гру можна розглядати, як один із можливих засобів управління економічною системою. Відмітимо, що поняттю гри можна придати інший зміст, не обов'язково вектори $\overline{X}\ (x_1, x_2, ..., x_m)$, $\overline{Y}\ (y_1, y_2, ..., y_n)$ визначати як імовірності вибору гравцями своїх чистих стратегій, але можна визначити, як числа довільного походження. Наприклад, стратегіям гравця A відповідає вектор $\overline{X}\ (x_1, x_2, ..., x_m)$ – кількість продукції, що виготовляється, стратегіям гравця B відповідає вектор $\overline{Y}\ (y_1, y_2, ..., y_n)$ – ціни на сировину. Саму гру можна розглядати, як вибір гравцями своїх стратегій, та обчислення платіжної функції $L\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$, таку гру називають антагоністичною грою. При використанні мішаних стратегій величина виграшу є випадковою величиною. Тобто, виграшом гравця A при використанні їм мішаних стратегій $\overline{X}$ $(x_1, x_2, ..., x_m)$, а його супротивником, тобто гравцем B, мішаних стратегій $\overline{Y}(y_1, y_2, ..., y_n)$, можна вважати математичне сподівання цієї випадкової величини: $L\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j y_i$.

Таким чином, ми отримали платіжну функцію. Оскільки цілі гравців протилежні, тобто гравець A максимізує свій виграш V, а гравець B мінімізує свій програш V, то платіжна функція $L\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ задовольняє наступним умовам. Якщо $\overline{X}=\overline{X}^*$, $\overline{Y}=\overline{Y}^*$ – оптимальні стратегії гравців, то $L\left(\overline{X}^*,\overline{Y}\right)\geq V$, для усіх y_i, а для усіх x_j – $L\left(\overline{X},\overline{Y}^*\right)\leq V$.

Тобто, оптимальними стратегіями гравців в антагоністичній грі будемо вважати стратегії, які є сідловою точкою платіжної функції:

$$L\left(\overline{X},Y^*\right)\leq L\left(\overline{X}^*,\overline{Y}^*\right)\leq L\left(\overline{X}^*,Y\right).$$

Тобто, $\left(\overline{X}^*,\overline{Y}^*\right)$ є точкою max по $\overline{X}$ і точкою min по $\overline{Y}$.

Для лінійної моделі виробництва:

Вихідна задача:

$$Z=\left(\overline{C},\overline{X}\right)\quad(\max)$$

$$A\overline{X}\leq A_0,\ \overline{A_0}(b_1,b_2,...,b_m),\quad \overline{X}\geq 0$$

Двоїста задача:

$$f=\left(\overline{A_0},\overline{Y}\right)\quad(\min)$$

$$\overline{Y}A\geq\overline{C},\quad \overline{Y}\geq 0$$

Можливо скласти платіжну функцію, яку називають функцією Лагранжа:

$$L\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\left(\overline{C}\overline{X}\right)+\left(\overline{A_0}\overline{Y}\right)-\left(\overline{Y}A\overline{X}\right)=$$

$$=\left(\overline{C}\overline{X}\right)+\overline{Y}\left(\overline{A_0}-A\overline{X}\right),$$

Має зміст теорема: для того, щоб вектор $\overline{X}^*$ був рішенням вихідної задачі, а вектор $\overline{Y}$ – рішенням двоїстої задачі (3.11), необхідно і достатньо, щоб точка $\left(\overline{X}^*,\overline{Y}^*\right)$ була сідловою точкою функції Лагранжа. Отже:

$$L\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j+\sum_{i=1}^{m}Y_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j\right).$$

Для вогнутої функції мають місце умови Куна-Таккера:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L\left(\overline{X},\overline{Y}\right)}{\partial\overline{X}}\leq 0\\[2mm]\dfrac{\partial L\left(\overline{X},\overline{Y}\right)}{\partial\overline{Y}}\geq 0\end{cases},\ \text{при цьому}\ \begin{cases}\overline{X}\dfrac{\partial L}{\partial\overline{X}}=0\\[2mm]\overline{Y}\dfrac{\partial L}{\partial\overline{Y}}=0\end{cases}.$$

Рішення знаходимо методом штучного базису і відразу отримуємо оптимальну кількість випуску продукції і оптимальні ціни на ресурси. Зробимо економічну інтерпретацію платіжної функції: перший додаток – прибуток від реалізації продукції $\sum_{j=1}^{n}C_jX_j$; другий додаток $\sum_{i=1}^{m}Y_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j\right)$ можна трактувати як прибуток за перевиконання плану, або штраф за недовиконання плану (Y_i – ціни на ресурси).

Розглянемо приклад. Підприємство бажає розширити виробництво, тобто додати випуск нових чотирьох видів продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Прибуток, який можна отримати, залежить від попиту на цю продукцію B_1, B_2, B_3, B_4, де B_1 – нормальний попит на продукцію, B_2 – слабкий попит, B_3 – помірний попит, B_4 – підвищений попит. Задана платіжна матриця $\prod_{i,j}a_{ij}$, де a_{ij} – прибуток, який може отримати підприємство завдяки випуску i-ої продукції в j-му стані попиту.

Визначити оптимальні пропорції випуску продукції, враховуючи невизначеним стан попиту та гарантуючи середній прибуток в любому випадку.

$$\prod=\begin{array}{c|c} & B_1\quad B_2\quad B_3\quad B_4\\ \begin{array}{c}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{array} & \begin{pmatrix}3&6&5&9\\4&3&12&5\\6&9&10&4\\5&2&8&3\end{pmatrix}\end{array}$$

Знайдемо нижню та верхню ціни гри $\alpha=\max_j\min_i\left(a_{ij}\right)$, $\beta=\min_i\max_j\left(a_{ij}\right)$.

$$\alpha=\max_j\min_i\left(3,3,4,2\right)=4,$$

$$\beta=\min_i\max_j\left(6,9,12,9\right)=6.$$

Сідлової точки немає через те, що $\alpha\neq\beta$.

Рядок A_4 домінантна, її елементі менше за елементи рядка A_3. Тому A_4 можна викреслити, тому що підприємству невигідно випускати цю продукцію.

Платіжна матриця буде мати вигляд:

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 12 & 5 \\ 6 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array}$$

Розв'язуємо матричну гру, як парну гру нульовою сумою. Гравець *А* обирає свої стратегії так, щоб максимізувати свій мінімальний виграш. Гравець *В* обирає стратегії так, щоб мінімізувати свій максимальний програш.

Нехай x_1, x_2, x_3 – ймовірності вибору гравцем *А* своїх стратегій, y_1, y_2, y_3, y_4 – ймовірності вибору гравцем *В* своїх стратегій. Ймовірність y_3 буде дорівнюватиме нулю, через те що стовбець B_3 домінантний та його можна викреслити. Достатньо розглянути B_1 – нормальний попит, B_2 – слабкий попит, B_4 – підвищений попит. Платіжна матриця буде мати вигляд:

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array}$$

Складемо математичну модель задачі. Виграш гравця *А* це математичне сподівання виграшу за стратегією гравця *В* дорівнює B_j. Програш гравця *В* це математичне сподівання програшу за стратегією гравця *А* дорівнює A_i.

Для гравця *А*: Для гравця *В*:

$$\begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ B_4 \end{array} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq \nu \\ 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 \geq \nu \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq \nu \end{cases} \quad \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 9y_4 \leq \nu \\ 4y_1 + 3y_2 + 5y_4 \leq \nu \\ 6y_1 + 9y_2 + 4y_4 \leq \nu \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 + y_4 = 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

де ν – вартість гри, $\sum_i x_i = 1$, $\sum_j y_j = 1$, через те, що стратегії гравців – це повні групи подій.

Зробимо заміну змінних: $t_i = \frac{x_i}{\nu}$, $u_j = \frac{y_j}{\nu}$. Для *А*: ν – досліджуємо на $\max$, *В*: ν – досліджуємо на min. Тоді:

$$A: f = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{\nu} \ (\min).$$

$$B: z = u_1 + u_2 + u_4 = \frac{1}{\nu} \ (\max)$$

$$\begin{cases} 3t_1 + 4t_2 + 6t_3 \geq 1 \\ 6t_1 + 3t_2 + 9t_3 \geq 1 \\ 9t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1 \end{cases};$$

$$t_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

$$\begin{cases} 3u_1 + 6u_2 + 9u_4 \leq 1 \\ 4u_1 + 3u_2 + 5u_4 \leq 1 \\ 6u_1 + 9u_2 + 4u_4 \leq 1 \end{cases}.$$

$$u_j \geq 0, \ j = 1,2,4.$$

Отримали дві взаємно двоїсті задачі. Приводимо до канонічної форми задачу *В*. Розв'язуємо її симплекс-методом та отримаємо розв'язок одразу прямої та двоїстої / задач.

$$U_{\max}\left(\frac{5}{42}, 0, \frac{1}{14}\right), \ z_{\max} = \frac{4}{21},$$

$$\nu = \frac{21}{4}, \ Y_{опт}\left(\frac{5}{8}, 0, \frac{3}{8}\right).$$

$$Y_{опт}\left(\frac{5}{8}, 0, \frac{3}{8}\right), \ f_{\min} = \frac{4}{21},$$

$$\nu = \frac{21}{4}, X_{опт}\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right).$$

Для вихідної задачі $X_{опт}\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, 0\right)$.

Якщо підставити $X_{опт}$ в систему обмежень задачі *А*:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 3 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} & B_1 \\ 6 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{4} > \frac{21}{4} & B_2 \\ 5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{35}{4} > \frac{21}{4} & B_3 \\ 9 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} & B_4 \end{array} \right.$$

Це означає, що в умовах нормального та підвищеного попиту, підприємство отримає прибуток, який дорівнює вартості гри $\frac{21}{4}$. Обмеження B_2 та B_3 в оптимальному плані виконується як нерівність, тому $y_2 = y_3 = 0$, що відповідає $Y_{опт}$.

Якщо підставити $У_{опт}$ в систему обмежень задачі *В*:

$$\begin{cases} 3\cdot\frac{5}{8}+9\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{4} & \Big| \; A_1 \\ 4\cdot\frac{5}{8}+5\cdot\frac{3}{8}=\frac{35}{8}<\frac{21}{4} & \Big| \; A_2 \\ 6\cdot\frac{5}{8}+4\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{4} & \Big| \; A_3 \\ 5\cdot\frac{5}{8}+3\cdot\frac{3}{8}=\frac{34}{8}<\frac{21}{4} & \Big| \; A_4 \end{cases}$$

Це означає, що за умови випуску продукції A_1 та A_3 витрати підприємства дорівнюватимуть вартості гри $\frac{21}{4}$. Обмеження A_2 та A_4 в оптимальному плані виконуються як нерівності. Тому за другою теоремою двоїстості $x_2 = x_4 = 0$, що відповідає $X_{опт}$.

Таким чином, щоб підприємство працювало рентабельно, воно може випускати продукцію A_1 та A_3 в умовах нормального та підвищеного попиту, прибуток підприємства становитиме $\frac{21}{4}$ од.

За допомогою різних критеріїв визначимо, яку продукцію слід випускати.

Максимінний критерій Вальда:

$\alpha = \max_i \min_j (3, 3, 4, 2) = 4$, відповідає стратегії A_3, тобто цю продукцію слід випускати.

Для критерія Севіджа складемо матрицю ризиків, елементи в стовбцях це $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, де $\beta_j = \max_i a_{ij}$: $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 9$, $\beta_3 = 12$, $\beta_4 = 9$. Тоді:

$$R = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Критерій Севіджа:

$\min_i \max_j r_{ij} = \min(3, 7, 7, 6) = 3$.

Варто передбачити випуск продукції A_1.

Критерій Гурвіца:

$\max_i \left(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right)$.

Нехай $\lambda = \frac{1}{2}$, тоді $\max_i \left(\frac{1}{2} \min_j a_{ij} + \frac{1}{2} \max_j a_{ij} \right) =$

$$= \max_i \left(\frac{3}{2}+\frac{6}{2}, \frac{2}{2}+\frac{9}{2}, \frac{5}{2}+\frac{12}{2}, \frac{3}{2}+\frac{9}{2} \right) =$$

$$= \max_i (4,5;\, 5;\, 8,5;\, 6) = 8,5\,.$$

Отже, слід випускати продукцію A_3.

Якщо припустити, що стани попиту рівно ймовірнісні та дорівнюють $\frac{1}{4}$, то математичне сподівання виграшу наступне:

$$M(A_1): \frac{3}{4}+\frac{6}{4}+\frac{5}{4}+\frac{9}{4}=\frac{23}{4}=5\frac{3}{4},$$

$$M(A_2): 4\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+12\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}=\frac{24}{4}=6,$$

$$M(A_3): \frac{6}{4}+\frac{9}{4}+\frac{10}{4}+\frac{4}{4}=\frac{29}{4}=7\frac{1}{4} \quad \max,$$

$$M(A_4): \frac{5}{4}+\frac{2}{4}+\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=\frac{18}{4}=4\frac{1}{4}.$$

Отже, необхідно передбачити випуск продукції A_3.

Висновки з проведеного дослідження. Отже, в роботі розглянуті можливості використання теорії матричних ігор в економічних дослідженнях. Випадковість в економічних системах дає можливість розглядати її, як гру з природою, при цьому можна побудувати матрицю ризиків, а також для прийняття рішення використовувати ряд критеріїв: мінімум математичного очікування ризику, максимінний критерій Вальда, критерій мінімального ризику Севіджа, критерій Гурвіца. Розглянуті теоретичні можливості використання антагоністичних матричних ігор при розв'язку лінійної моделі виробництва. Отримана платіжна функція дозволяє запропонувати наступну модель управління економічною системою: управлінський апарат має два відділу – плановий і фінансовий. Завданням планового відділу є формування плану виробництва таким чином, щоб вдалося максимізувати сумарний прибуток системи – платіжну функцію $L(\overline{X}, \overline{Y})$. Завдання фінансового відділу – формування цін на ресурси таким чином, щоб вдалося мінімізувати витрати на ресурси і таким чином мінімізувати функцію $L(\overline{X}, \overline{Y})$, тобто прибуток тієї ж економічної системи. Таким чином слід знайти баланс між цими відділами, знайти таку комбінацію чисел $(\overline{X}^*, \overline{Y}^*)$, яка є сідловою точкою платіжної функції і є оптимальним планом випуску продукції, а також має оптимальні витрати на ресурси.

Фірмам, які інвестують кошти у виробництво, при невизначеній ситуації попиту на продукцію, слід обчислити матричну гру, як гру з природою, тоді ризик вкладання коштів в виробництво буде зменшеним. Використання антагоністичної матричної гри, тобто дослідження платіжної функції, знаходження її сідлової точки, дає можливість збалансовано розподіляти кошти на випуск продукції і на поповнення ресурсів. Практично не має значення, яку продукцію виготовляє фірма. Розглянутий математичний апарат можна використовувати для будь-яких фірм, які займаються виробництвом продукції.

Список використаних джерел:

1. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз. Мікроекономіка. Київ : Вища школа, 2004. 262 с.
2. Внукова Н. М. Економічна оценка ризику діяльності підприємств. Харків : ВД «ІГОКЕК», 2006. 180 с.
3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.
4. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование. Москва : Высшая школа, 1980. 302 с.

References:

1. Ponomarenko O. I. (2004). Suchasnyi ekonomichnyi analiz. Mikroekonomika. Kyiv: Vyshcha shkola, 262 p.
2. Vnukova N. M. (2006). Ekonomichna otsenka ryzyku diialnosti pidpryiemstv. Kharkiv: VD "IHOKEK", 180 p.
3. Vitlinsjkyj V. V. (2003) Modeljuvannja ekonomiky: navch. posibnyk. Kyiv: KNEU, 408 p.
4. Kuznetsov Yu. N. (1980). Matematycheskoe prohrammyrovanye. Moscow: Vysshaia shkola, 302 p.