

УДК 330.4:519.86

№ державної реєстрації 0120U100438

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця  
61001, м. Харків, проспект Науки, 9а  
тел. (057) 702-03-04, факс (057) 702-07-17

ПОГОДЖЕНО

Проректор з наукової роботи та  
міжнародного співробітництва  
Харківського національного  
економічного університету імені  
Семена Кузнеця, к.е.н., професор

\_\_\_\_\_  
Володимир ЄРМАЧЕНКО  
2021.06.30

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор Харківського національного  
економічного університету імені  
Семена Кузнеця,  
д.е.н., професор

\_\_\_\_\_  
Володимир ПОНОМАРЕНКО  
2021.06.30

ЗВІТ  
КАФЕДРИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА  
ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ  
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

УДОСКОНАЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ  
РОЗВ'ЯЗАННЯ РЕАЛЬНИХ ЗАДАЧ В ЕКОНОМІЦІ І ТЕХНІЦІ

2 етап

Розроблення математичних моделей для розв'язання реальних задач  
в економіці і техніці

Декан факультету

\_\_\_\_\_  
30.06.2021

Павло ПРОНОЗА

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_  
30.06.2021

Людмила МАЛЯРЕЦЬ

Начальник НДС

\_\_\_\_\_  
30.06.2021

Ірина ЛИТОВЧЕНКО

2021

Рукопис закінчено 29 червня 2021 року  
Розглянуто на засіданні кафедри 29.06.2021 року, протокол № 12

**СПИСОК ВИКОНАВЦІВ**

|                                                                 |       |                                                                |
|-----------------------------------------------------------------|-------|----------------------------------------------------------------|
| Керівник НДР<br>завідувач кафедри<br>докт. екон. наук, професор | _____ | Людмила МАЛЯРЕЦЬ<br>(загальне керівництво,<br>розділ 1 – 70 %) |
| Аспірант, викладач                                              | _____ | Даніїл ФАТЪЯНОВ<br>(розділ 1 – 30 %)                           |
| Канд. фіз. - мат. наук, доцент                                  | _____ | Катерина СТЕПАНОВА<br>(розділ 2 – 100 %)                       |
| Канд. фіз. - мат. наук, доцент                                  | _____ | Антоніна РИБАЛКО<br>(розділ 3 – 100 %)                         |

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 36 с., 5 рис., 1 табл., 31 джерело.

Об'єктами є експортно-імпортний потенціал підприємства, звичайні диференціальні рівняння, спектральна задача Неймана для сингулярно-збуреного оператора конвекції-дифузії з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами.

Метою роботи є розроблення теоретичних положень оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства; розгляд можливості використання звичайних диференціальних рівнянь в процесі пізнання навколишньої дійсності; ознайомлення з методами дослідження звичайних диференціальних рівнянь, характерними для якісної теорії диференціальних рівнянь; вивчення асимптотичної поведінки першої власної пари задачі Неймана – власного значення з максимальною дійсною частиною та відповідної власної функції, при великих значеннях часу.

У результаті виконаних досліджень удосконалено теоретичний підхід до оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства, що забезпечує її об'єктивність, адекватність та достовірність; побудовано математичну модель та за допомогою математичних інструментів досліджена задача теорії епідемії; отримано усереднені рівняння, що використовуються для опису процесів конвекції-дифузії в сильно неоднорідних середовищах.

Основні результати дослідження реалізовані в навчальному процесі ХНЕУ ім. С. Кузнеця в навчальних дисциплінах: «Аналіз соціально-економічних даних», «Вища математика», «Економетрика», «Дослідження операцій та методи оптимізації», «Економіко-математичні методи», «Виміри та моделі глобального економічного розвитку», «Прикладна математика», «Кількісні методи».

ПІДПРИЄМСТВО, ЕКСПОРТНО-ІМПОРТНИЙ ПОТЕНЦІАЛ, ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ, ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ЕПІДЕМІЇ, МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КОНВЕКЦІЇ-ДИFUZІЇ, СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНІ ОПЕРАТОРИ, КРАЙОВА ЗАДАЧА НЕЙМАНА, УСЕРЕДНЕННЯ

## ЗМІСТ

|     | стор.                                                                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | Теоретико-методологічне забезпечення оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства .. 5 |
|     | Висновки ..... 14                                                                                                       |
| 2   | Дослідження математичної моделі теорії епідемії ..... 15                                                                |
| 2.1 | Постановка задачі математичної теорії епідемії ..... 16                                                                 |
| 2.2 | Дослідження задачі математичної теорії епідемії та аналіз результатів ..... 17                                          |
|     | Висновки ..... 22                                                                                                       |
| 3   | Математичне моделювання конвективної дифузії в неоднорідних середовищах ..... 24                                        |
| 3.1 | Постановка задачі ..... 25                                                                                              |
| 3.2 | Метод розв'язання задачі ..... 26                                                                                       |
| 3.3 | Результати досліджень ..... 30                                                                                          |
|     | Висновки ..... 33                                                                                                       |
|     | Перелік джерел посилання ..... 34                                                                                       |

## **РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ЕКСПОРТНО- ІМПОРТНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПІДПРИЄМСТВА**

Експортно-імпортний потенціал забезпечує розвиток країн, регіонів та підприємств в сучасних умовах. Саме завдяки використанню цього потенціалу здійснюється входження країни в світове господарство, високий рівень розвитку регіону та ефективність діяльності підприємства. Але ефективність використання експортно-імпортного потенціалу обумовлюється реалізацією всіх функцій управління ним, тому проблеми дослідження цього потенціалу є актуальними та необхідними. Наприклад, про необхідність управління експортно-імпортним потенціалом України свідчать такі статистичні дані: у першому півріччі 2019 р. експорт товарів становив 24469,0 млн.дол. США, або 105,2% порівняно із першим півріччям 2018р., імпорт – 28205,4 млн.дол., або 108,5%; негативне сальдо склало 3736,4 млн.дол. (у першому півріччі 2018р. також негативне – 2742,4 млн.дол.); коефіцієнт покриття експортом імпорту становив 0,87 (у першому півріччі 2018р. – 0,89). Подібні проблеми існують в багатьох країнах. Вирішувати ці проблеми слід як на регіональному рівні, так і для підприємств, які здійснюють експортно-імпорту діяльність.

Одним із важливих економічних векторів, які утворюють основу «Національної економічної стратегії 2030» є репутація України у світі та посилення торговельної дипломатії. Ця спрямованість економічного розвитку країни забезпечується підвищенням ефективності використання експортно-імпортного потенціалу країни, зокрема експортно-імпортного потенціалу підприємств, як безпосередньої суб'єктної ланки. Для забезпечення стійкого функціонування та розвитку економіки країни, подолання впливу кризових явищ у світовій економіці питання ефективності використання експортно-імпортного потенціалу промислових підприємств відіграють вирішальну роль.

Слід зазначити, що на разі в Україні сформувався досить несприятливий клімат для ефективної експортно-імпортової діяльності, який обумовлений недосконалістю податкової та законодавчої системи, несприятливими умовами інвестиційного клімату тощо.

Сьогодні український експорт в основному складається з проміжних товарів з відносно низькою технологічною складовою, тому для підвищення його ефективності існує потреба в оновленні технологічних процесів на українських підприємствах з метою поступового перетворення економіки України в більш інноваційну та наукомістку і, як результат, більш конкурентоспроможну на світових ринках.

Показником економічного розвитку країни є перевага експорту товарів над імпортом, а показник інтенсивності цього розвитку залежить від співвідношення обсягів експорту та імпорту (рис. 1.1).

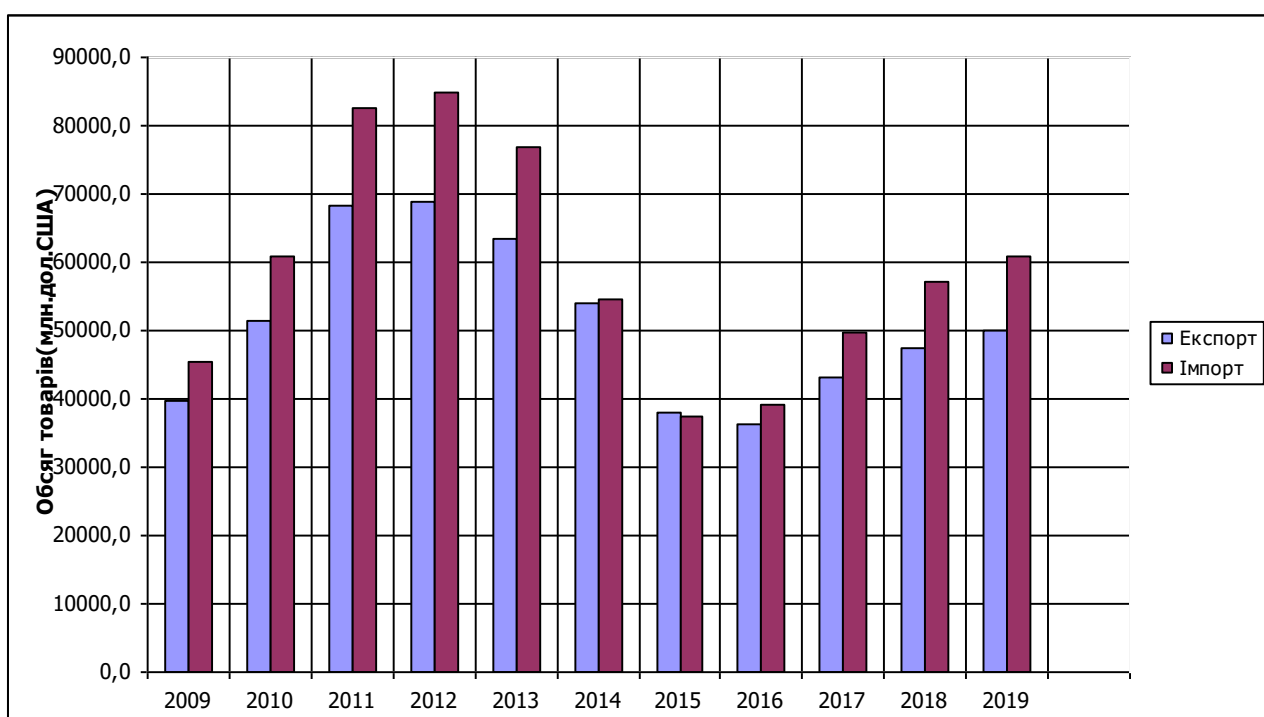


Рис. 1.1. Динаміка показників обсягів експорту товарів та імпорту товарів в Україні протягом 2009 – 2019 р.р.

Згідно даних Державної Служби Статистики України зовнішньоторговельний оборот товарів і послуг за підсумками 2019 року збільшився на 8,5% (+10,2 млрд дол.) у порівнянні з показниками 2018 року і становив 131,0 млрд дол. [15]. Проте сальдо торговельного балансу товарів і послуг склалося негативним у сумі 3,6 млрд дол. і покращилось на 2,6 млрд дол. відносно показника 2018 року. Сальдо зовнішньоторговельного балансу товарів також склалося від'ємним у сумі 10,7 млрд дол. і погіршилось на 870,7 млн дол. Експорт товарів і послуг за підсумками 2019 року збільшився на 11,2%

(+6,4 млрд дол.) у порівнянні з показниками 2018 року та склав 63,7 млрд дол. Експорт товарів збільшився на 5,8% (+2,7 млрд дол.) і становив 50,1 млрд дол. Збільшення обсягів експорту товарів відбулось за окремими товарними групами і пов'язано зі значним зростанням експортного постачання продукції машинобудування – на 55,8 млн дол. (+1,0%). Щодо країн, в які відбулось збільшення експорту товарів, то це Австралія та Океанія – на 21,4%, Африка – на 20,5%, Азія – на 12,1%, Європа – на 3,0%. Також слід сказати про зменшення експорту товарів до таких країн як Америка – на 9,4%, СНД – на 3,8% .

Тому проблеми вдосконалення теоретичних положень, що стосуються формування та впровадження оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу промислових підприємств є актуальними та потребують свого дослідження і вирішення.

Аналіз робіт провідних фахівців з проблем експортного потенціалу, зовнішньоекономічної діяльності, зокрема експортно-імпортною діяльності показав, що формуванням теоретичних засад експортно-імпортного потенціалу займались багато вчених та практиків, а саме А. А. Мазаракі, Т. М. Мельник, В. В. Юхименко [10], В. С. Пономаренко, Л. І. Піддубна [11, 13], Л. Г. Ліпич, А.О. Фатенок-Ткачук [9], Л.М. Малярець, П.О. Гринько [27], І.О. Бараннік [4], О. О. Якушева [18], В.П. Андришин [2], А. Дунська [8], Л.Д. Чалапко (Калник) [16], О. В. Шкурупій [17] та інші. Проте теоретичні проблеми оцінювання ефективності використання експортно-імпортного потенціалу промислових підприємств залишаються не достатньо опрацьованими.

Дієвість та об'єктивність оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємств залежить від сформованих її теоретичних положень, які враховують як структуру процесу оцінки, так і його сутність. Методологічний каркас оцінки експортно-імпортного потенціалу підприємств обумовлюється, перш за все, системою основних елементів оцінки – це є перше теоретичне положення. Не дивлячись, що вище згадані вчені в своїх роботах достатньо детально розглядали визначення сутності понять, які використовуються в теорії та практиці управління експортного потенціалу, проте питання оцінки експортно-імпортного потенціалу залишались поза увагою. Аналіз наукових підходів до оцінки та оцінювання об'єктів в економіці, потенціалу, зокрема, дозволив сформувавши основний перелік елементів її методологічного каркасу, взаємозв'язок цих елементів (рис. 1.2).

Другим положенням оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства є те, що об'єктивність її залежить від адекватної змістовної моделі ефективності використання цього потенціалу. Грунтуючись на підходах Л.М. Малярець, І.П. Отенко [28], І.О. Баранніка [3] та П.О. Гринько [7] до визначення експортно-імпортного потенціалу та ефективності експортно-імпортної діяльності підприємства, цей потенціал слід розглядати як поєднання суб'єктної (здатність) та об'єктної (можливості) його складових, що обумовлюють здатність здійснювати експортні та імпортні операції, можливості забезпечувати їхнє додатне сальдо, а саме ефективно його використовувати в процесі експортно-імпортної діяльності. До змістовної моделі експортно-імпортного потенціалу підприємства доцільно включити такі складові, як структура, елементи, процеси, механізми, види ЕПП, фактори впливу, показники, критерії, результати, затрати, ефект, ефективність.



Рис. 1.2. Методологічний каркас оцінки експортно-імпортного потенціалу підприємства



Тут слід зауважити, що вчені в роботі [28] розглядаючи процес моделювання експортно-імпортного потенціалу підприємства, виокремлюють його когнітивну, змістовну, концептуальну, інформаційну, математичну та мегамоделі, але для оцінки цього потенціалу можна об'єднати змістовну та концептуальну моделі. Отже, змістовна модель експортно-імпортного потенціалу підприємства представлена на рис. 1.3.

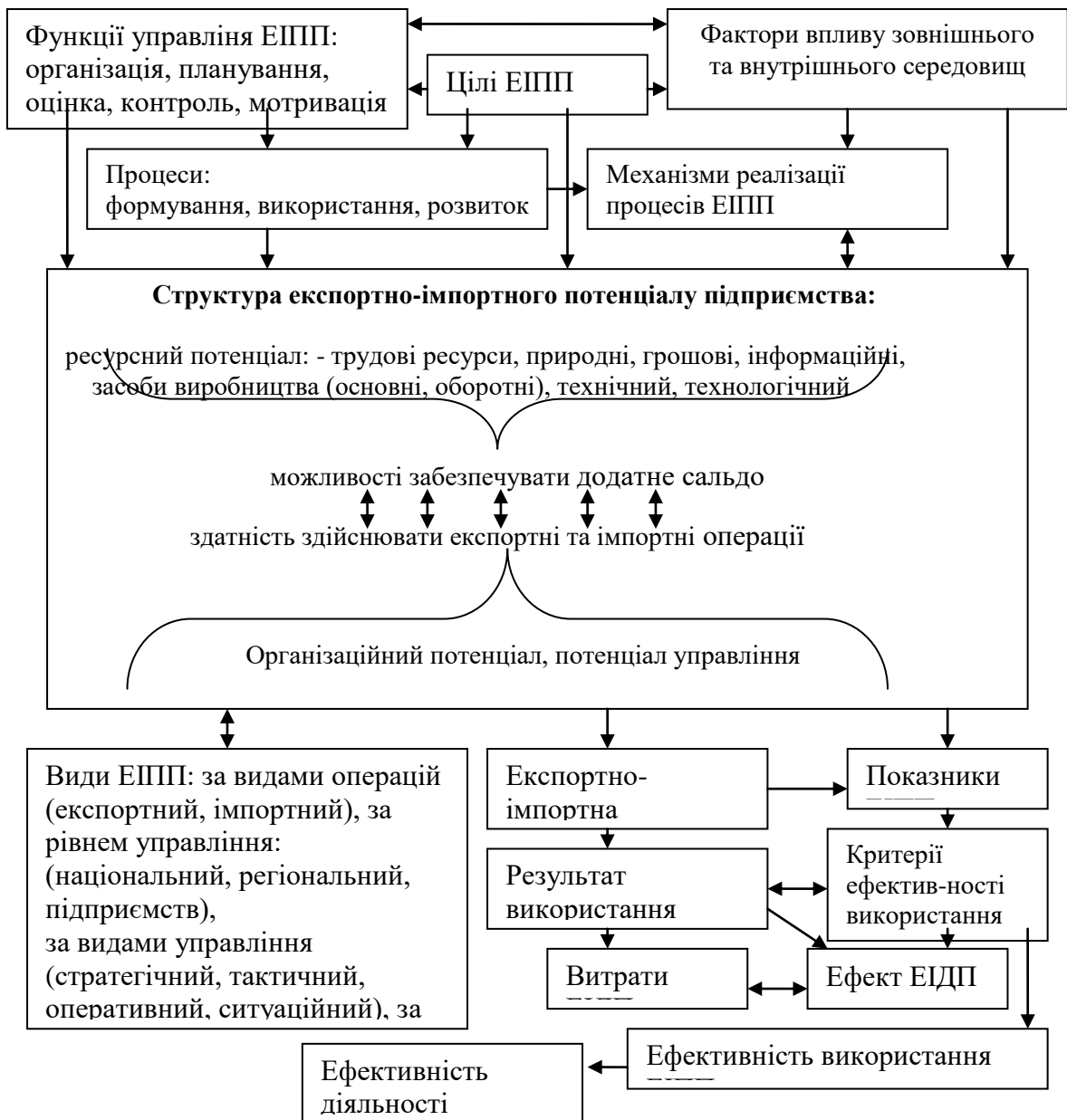


Рис. 1.3. Змістовна модель ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства

В моделюванні об'єктів в економіці обов'язковим є побудова

інформаційної моделі, яка зазвичай представляється ієрархічною системою основних ознак, величини яких вимірюються в різних шкалах (метричних і неметричних) та відображається у відповідних показниках. Звичайно, від об'єктивності розробленої інформаційної моделі залежить достовірність обчисленої математичної моделі в економіці. При формуванні інформаційної моделі дотримуються таких вимог: адекватно відображати змістовну та концептуальну моделі; враховувати ієрархічність, тобто містити показники, що визначають елементарні, складні ознаки; враховувати багатовимірність; вимірюватись завдяки метричних та неметричних величин ознак; бути обмеженою основними, визначальними показниками; містити інформацію, порівняну в просторі і часі; відповідати принципам підготовки статистичної звітності і спиратись на дані первинної облікової документації та зведених відомостей управлінського обліку.

Інформаційну модель експортно-імпортного потенціалу можна в загальному вигляді представити за допомогою кортежа ознак, які відображають його концептуальну модель, а саме у такому вигляді складних та елементарних ознак:

$$O = \langle O_{s_{zp}}, O_s(sk), O_{s_{st}}, O_s(m), O_s(pr), O_s(f), O_e(sk), O_e(st), O_e(m), O_e(pr), O_e(f) \rangle$$

де  $O_{s_{zp}}$  – ознака (складна) загального рівня експортно-імпортного потенціалу;

$O_s(sk)$  – ознаки (складні) складових потенціалу;

$O_{s_{st}}$  – ознака (складна) рівня структури потенціалу;

$O_s(m)$  – ознаки (складні) механізмів реалізації потенціалу;

$O_s(pr)$  – ознаки (складні) процесів потенціалу;

$O_s(f)$  – ознаки (складні) факторів впливу на потенціал;

$O_e(sk)$  – ознаки (елементарні) складових потенціалу;

$O_e(st)$  – ознаки (елементарні) структурних елементів потенціалу;

$O_e(m)$  – ознаки (елементарні) механізмів реалізації потенціалу;

$O_e(pr)$  – ознаки (елементарні) процесів потенціалу;

$O_e(f)$  – ознаки (елементарні) факторів впливу на потенціал.

Для здійснення оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства важливо обґрунтувати ієрархічну систему показників, яка б відображала його елементну структуру та їх характеристики, а також систему критеріїв, і це є третім положенням. Наприклад, І.О. Бараннік [5] рекомендує для здійснення моніторингу ЕПП систему частинних показників, яка описує цей потенціал, а саме: частка експорту; частка імпорту; експортна щільність підприємства на зовнішньому ринку; частка внутрішнього ринку; темп зміни поставок на експорт; темп змін імпорту; рівень продуктової диверсифікації експорту; коефіцієнт використання робочого часу; питома вага працівників, що закінчили ВНЗ; питома вага працівників, навчених новим професіям; питома вага працівників, що підвищили кваліфікацію у звітному періоді; коефіцієнт плинності персоналу; продуктивність праці; коефіцієнт відновлення основних фондів; фондодідача; фондоозброєність; коефіцієнт забезпеченості власними оборотними коштами; частка власних обігових коштів в активах; коефіцієнт оборотності капіталу; коефіцієнт оборотності власного обігового капіталу; коефіцієнт оборотності виробничих запасів; коефіцієнт оборотності готової продукції; коефіцієнт оборотності власного капіталу; коефіцієнт автономії; коефіцієнт маневреності; показник фінансового левериджу; коефіцієнт забезпечення запасів і витрат власними джерелами формування; запаси матеріальних ресурсів; матеріаломісткість продукції; показники структури операційних витрат: сума матеріальних витрат; обсяг амортизації; сума витрат на оплату праці; відрахування на соціальні потреби; інші операційні витрати; виробничі запаси; незавершене виробництво; обсяги готової продукції.

А також пропонується система частинних показників, які характеризують ефективність використання ЕПП, це такі показники, як економічна ефективність експорту; економічна ефективність імпорту; вигідність експорту; прибутковість експортних операцій; рентабельність імпорту, та показники рентабельності підприємства: рентабельність сукупного капіталу; валова рентабельність продажів; операційна рентабельність продажів; чиста рентабельність продажів. Пропонована Баранніком І.О. система частинних показників стану ЕПП має недоліком те, що вона не структурована за структурними складовими цього потенціалу, а перевагою її є виокремлення підсистеми показників, які характеризують ефективність використання потенціалу та ефективність всієї діяльності підприємства. Безумовно, для

визначення рівня ефективності використання експортно-імпортного потенціалу необхідно обчислювати інтегральні показники, які дозволяють згорнути частинних показників в одну величину. В монографії наголошується, що побудована модель тільки тоді має високу статистичну якість, якщо вона формувалась у якісному ознаковому просторі [12].

Оцінка ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства є багатовимірною та багатокритеріальною, і це складає четверте положення. Дане теоретичне положення частково впливає з попереднього. Ефективність використання експортно-імпортного потенціалу підприємства визначається багатьма елементарними та складними ознаками, які в свою чергу, вимірюються частинними показниками та інтегральними. Оцінка ефективності використання експортно-імпортного потенціалу здійснюється за багатьма критеріями, які залежать від місії, цілей, стратегій підприємства. Одним із основних критеріїв є випереджаючі темпи зростання обсягів експорту над імпортом, що забезпечує ефективність експортно-імпортної діяльності, всієї діяльності та розвиток підприємства.

П'яте положення складає факт, що об'єктивність оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства обумовлюється відповідним математичним інструментом, який використовується в процесі оцінки. Вибір математичного інструменту слід ґрунтувати на аналізі переваг та недоліків кожного з інструменту, який використовується. Про переваги та недоліки математичних інструментів детально сказано в роботі В.С. Пономаренко, Л.М. Малярець [12].

Автори також рекомендують ці математичні інструменти для розв'язування типових задач в економіці. Наприклад, вчені наводять перелік практичних задач, які можна розв'язувати за допомогою факторного аналізу: визначення внутрішніх неявних (латентних) складних факторів розвитку підприємства; визначення внутрішніх неявних складних факторів розвитку підприємств у регіоні; визначення внутрішніх неявних складних факторів розвитку об'єктів і суб'єктів економіки в країні; діагностика ступеня інформативності показників, що визначають фактори розвитку підприємств; оцінка ступеня інформативності системи основних показників діяльності підприємства; наукова обґрунтованість виявлених факторів розвитку підприємств; визначення типів розвитку підприємств за критерієм системи факторів, що формують даний розвиток; визначення та оцінка ієрархічної

структури факторів, що обумовлюють розвиток підприємств, регіону, країни; розробка збалансованої системи показників, що забезпечує дієвість системи управління на різних рівнях управління; розробка комплексного економічного аналізу з урахуванням різних рівнів управління.

Слід зазначити, що складні ознаки потенціалу математично моделюються на основі елементарних ознак, які вимірюються в різних шкалах та формуються в показники. На основі елементарних ознак інформаційної моделі обчислюються математична описова мегамоделі потенціалу, яка складається з різних моделей, які відображують блоки концептуальної моделі.

До мегамоделі потенціалу входять інтегральні показники загального рівня розвитку, структури, кожної складової потенціалу, моделі визначення факторів впливу на потенціал, моделі ефективності використання потенціалу, моделі прогнозування, багатокритеріальні оптимізаційні моделі. В табл. 1.1 наведено перелік аналітичних задач визначення потенціалу, математичних методів, завдяки яким вони розв'язуються та результати розв'язування.

Таблиця 1.1

Перелік основних аналітичних задач  
визначення експортно-імпортного потенціалу

| Зміст аналітичних задач                                                                                                                                                     | Метод розв'язання                                      | Результат розв'язання                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 1) Виявлення основних ознак (елементарних та складних) експортно-імпортного потенціалу                                                                                      | Теоретико-логічний аналіз                              | Основні і другорядні ознаки                                             |
| 2) Аналіз тенденцій до зміни значень частинних показників (елементарних ознак)                                                                                              | Інструменти описової статистики                        | Ознаковий простір моделей                                               |
| 3) Визначення загального рівня розвитку експортно-імпортного потенціалу, рівнів розвитку його складових та рівня його структури (складні ознаки) для опису цього потенціалу | Методи побудови інтегральних показників                | Розширений ознаковий простір моделей                                    |
| 4) Визначення причинно-наслідкових взаємозв'язків в структурі експортно-імпортного потенціалу                                                                               | Регресійний, факторний, кластерний, канонічний аналізи | Причинно-наслідкові взаємозв'язки в структурах та процесах і механізмах |

|                                                                                                                                                     |                                        |                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|
| 5) Визначення оптимальних значень показників для встановлення реалізованих можливостей та ефективності використання експортно-імпортного потенціалу | Методи багатокритеріальної оптимізації | Оптимальні значення показників |
| 6) Прогнозування значень показників експортно-імпортного потенціалу для визначення тенденції змінення та діагностики його розвитку                  | Моделі кривих росту                    | Прогнозні значення показників  |

Шостим положенням є те, що на основі результатів оцінки ефективності експортно-імпортової діяльності підприємства ухвалюються дієві управлінські рішення. Іншими словами, результати оцінки ефективності експортно-імпортової діяльності підприємства слугують науковим підґрунтям для ухвалення дієвих управлінських рішень для підвищення цієї ефективності та виявлення резервів. Слід відмітити, що результати цієї оцінки доцільно використовувати як для розроблення стратегічного управлінського рішення, так і для тактичного та оперативного.

### Висновки

Таким чином, запропоновані теоретичні положення оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства удосконалюють теорію потенціалу, теоретичні засади експортно-імпортного потенціалу, теорію ефективності.

Оскільки в експортно-імпортному потенціалі відображаються всі інші види потенціалу промислових підприємств, а саме: ресурсний, організаційний та потенціал управління, а всі означені види потенціалу використовуються для здійснення різних видів діяльності промислового підприємства, то ефективність використання експортно-імпортного потенціалу обумовлює ефективність всієї діяльності підприємства та його розвиток. Цей удосконалений підхід до оцінки ефективності використання експортно-імпортного потенціалу підприємства забезпечує її об'єктивність, адекватність та достовірність.

## РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ЕПІДЕМІЇ

Оскільки однією з найактуальніших проблем сьогодення є пандемія COVID-19, то актуальним є дослідження задачі теорії епідемії. Але перш ніж математично розв'язувати цю проблему, розберемося в медичних термінах.

Поява та поширення інфекційних захворювань, являє собою складний механізм взаємодіючих факторів, таких як навколишнє середовище в якому розташовані хвороботворні мікроорганізми й організми, які їх переносять, а також внутрішня та зовнішня динаміка населення.

Епідемія – тип хвороби, яка є новою для даної популяції впродовж періоду збереження імунної «пам'яті» та поширюється зі швидкістю, що значно перевищує очікувану, ґрунтуючись на попередньому досвіді (тобто, числу нових випадків за одиницю часу). Українське законодавство визначає досліджуваний нами термін наступним чином: «епідемія – масове поширення інфекційного захворювання серед населення відповідної території за короткий проміжок часу», що не відповідає світовому визначенню, яке поширює поняття епідемії на усі випадки масового ураження, в тому числі й отруєння.

Пандемія – це епідемія, що характеризується найбільшим поширенням будь-якого інфекційного захворювання на території усієї країни та сусідніх держав, багатьох країн світу, різних материків. Характеризується відсутністю колективного імунітету в людства, і, зазвичай, ефективних засобів профілактики (вакцини) й лікування. Серед інфекційних захворювань, які сягали масштабу пандемії: чума, холера, грип, коронавірусна хвороба. Зауважимо, що динаміка розвитку епідемії, наприклад, грипу, часто набагато швидша, ніж динаміка народження і смерті населення, тому, в простих полігамних математичних моделях життєвий цикл населення досить часто опускається. Моделі без врахування життєвого циклу населення (народження й смерті, або інколи називають демографією) описана відповідною системою диференціальних рівнянь в книжці Н. Hethcote (2000 р) [23].

Математичне моделювання в епідеміології дає змогу змоделювати появу й поширення хвороботворних мікроорганізмів, зрозуміти складну динаміку та основні особливості цих систем. Для цього населення поділяють на певні групи

осіб, в залежності від стану здоров'я та рівня поширення збудника в популяції. Модель Кермака-МакКендріка є однією з перших базових моделей в епідеміології, яка була побудована та успішно досліджена науковцями в 1927 – 1933 роках (оригінальні статті тих часів було передруковано 1991 році) [24 – 26]. Для дослідження епідеміологічних моделей нами будуть використовуватися звичайні диференціальні рівняння (які є детермінованими), проте, зазначимо тут, що можна розглядати й стохастичні моделі (наприклад, модель Гіллеспі).

## 2.1. Постановка задачі математичної теорії епідемії

Різноманітні питання математики, економіки, біології, хімії, фізики та інших природничих і суспільних наук приводять до необхідності встановлення залежності між величинами, що описують той чи інший еволюційний процес. В багатьох випадках можна встановити зв'язок між величинами та швидкостями їх зміни відносно інших змінних величин, тобто знайти рівняння, в яких невідомі функції входять під знак похідної. Такі рівняння називаються диференціальними. Диференціальне рівняння є одним з основних математичних понять. Диференціальне рівняння – це рівняння для відшукування функцій, похідні яких (або диференціали) задовольняють деяким наперед заданим умовам.

Диференціальне рівняння, отримане в результаті дослідження будь-якого реального явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища або процесу. Зрозуміло, що диференціальні моделі – це окреме питання тієї безлічі математичних моделей, які можуть бути побудовані при вивченні оточуючого нас світу. При цьому необхідно зазначити, що існують і різні типи самих диференціальних моделей. Ми будемо розглядати лише моделі, описувані звичайними диференціальними рівняннями, однією з характерних особливостей яких є те, що невідомі функції в цих рівняннях залежать тільки від однієї змінної.

*Об'єкт дослідження* – звичайні диференціальні рівняння.

*Мета роботи* – показати можливості використання звичайних диференціальних рівнянь в процесі пізнання навколишньої дійсності. Ознайомити з методами дослідження звичайних диференціальних рівнянь, характерними для якісної теорії диференціальних рівнянь.



*Предметом дослідження є аналіз розв'язків математичної моделі.*

*Завдання:*

- побудувати математичну модель
- за допомогою математичних інструментів розв'язати та дослідити задачу теорії епідемії
- зробити висновки

## **2.2. Дослідження задачі математичної теорії епідемії та аналіз результатів**

В найпростішому випадку населення поділяють на дві групи: сприйнятливих до захворювання осіб (позначають, як  $S$  — від англ. *susceptible*), та осіб інфікованих патогеном (позначають, як  $I$  — від англ. *infected*). Таким чином, патогенна взаємодія базується на феноменологічних припущеннях, на основі яких побудована математична модель. В цьому розділі ми будемо ще враховувати кількість осіб, які одужали (позначають, як  $R$  — від англ. *recovered*). Таку модель з розподілом на 3 групи ( $S$  — кількість осіб сприйнятливих до захворювання,  $I$  — кількість інфікованих осіб та  $R$  — кількість осіб, які одужали й мають імунітет) прийнято називати SIR моделлю, вона є дієвою та дає змогу будувати поширення багатьох інфекційних захворювань, в тому числі проти кору, ендемічного паротиту та краснухи [24 – 26]. Для того щоб, показати, що значення  $S$ ,  $I$ ,  $R$  змінюються з часом (навіть якщо загальна чисельність населення залишається незмінною), ми позначатимемо їх як функції залежні від часу  $S(t)$ ,  $I(t)$  та  $R(t)$  та завжди враховувати цей фактор. Ці функції будуть змінюватися в залежності від захворювання та популяції, щоб мати змогу спрогнозувати можливі спалахи й взяти їх під контроль.

Отже, припустимо, що популяція, яку ми досліджуємо складається з  $N$  осіб та підрозділяється на три групи. В першу з них включаються особи, які сприйнятливі до деякої хвороби, але здорові. Число таких осіб в момент часу  $t$  будемо позначати через  $S(t)$ .

До другої групи об'єднуються особи, які є інфікованими - вони самі хворі та являються джерелом поширення хвороби. Загальне число таких осіб в популяції в момент часу  $t$  позначимо через  $I(t)$ . Нарешті, третя група — це особи, які здорові й мають імунітет до даної хвороби. Число таких осіб в момент часу

$t$  позначається через  $R(t)$ . Доцільно визначити: максимальне значення для інфікованих осіб, тобто  $S(\infty)$  та спрогнозувати час закінчення епідемії. Таким чином, з умови задачі ми відразу можемо записати, що

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (2.1)$$

Припустимо, що в разі, коли число інфікованих осіб перевершує деяке фіксоване число  $I^*$ , швидкість зміни числа сприйнятливих до хвороби людей буде пропорційна числу вразливих до цієї хвороби осіб. Що до швидкості зміни числа інфікованих, але видужуючих особин, то її будемо вважати пропорційною числу інфікованих людей. Зрозуміло, що ці припущення спрощують реальну ситуацію, але вони відображають суть справи.

У зв'язку з першим припущенням будемо вважати, що коли число інфікованих осіб  $I(t) > I^*$ , то вони здатні заражати сприйнятливих до хвороби людей. Останнє означає, що береться до уваги факт ізоляції інфікованої людини (до певного моменту часу, наприклад, якщо брати до уваги вимушені міри в вигляді карантину або просто об'єктивне фізичне знаходження далеко від сприйнятливих до хвороби осіб).

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{якщо } I(t) > I^*, \\ 0, & \text{якщо } I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (2.2)$$

Тепер, оскільки кожна сприйнятлива до хвороби особа, яка врешті-решт захворіє, сама стає інфікованою, то швидкість зміни числа інфікованих осіб будь-якої популяції являє собою різницю за одиницю часу між знову хворими особами та тими, які вже одужують.

Отже, з [1]

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & \text{якщо } I(t) > I^*, \\ 0, & \text{якщо } I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (2.3)$$

Постійні пропорційності  $\alpha$  й  $\beta$  будемо називати коефіцієнтами захворюваності і одужання відповідно.

Нарешті, швидкість зміни числа видужуючих особин задається рівнянням

$$\frac{dR}{dt} = \beta I. \quad (2.4)$$

Для того щоб розв'язок відповідних рівнянь визначався однозначно, необхідно задати початкові умови. Для спрощення ситуації припустимо, що в момент часу  $t = 0$  в популяції немає осіб з імунітетом до хвороби, тобто

$$R(0) = 0.$$

і що спочатку цієї епідемії число інфікованих осіб дорівнює  $I(0)$ . Далі припустимо, що коефіцієнти захворюваності й одужання рівні, а саме:

$$\alpha = \beta.$$

У результаті приходимо до необхідності розгляду двох випадків.

**Випадок 1:** число  $I(t) \leq I^*$ .

В цьому випадку з ростом часу особи в популяції не будуть піддаватися зараженню хворобою розглядуваної епідемії, оскільки в цьому випадку

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

тоді, згідно з рівнянням (2.1) і враховуючи початкову умову:

$$R(0) = 0,$$

для всіх  $t$  справедлива рівність

$$S(t) = S(0) = N - I(0). \quad (2.5)$$

Розглянутий випадок відповідає тій ситуації, коли значна частина інфікованих людей знаходяться в ізоляції. В цьому випадку з рівняння (2.3) приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I. \quad (2.6)$$

Звідси

$$I(t) = I(0)e^{-\alpha t},$$

а це в свою чергу означає, що

$$R(t) = N - S(t) - I(t) = I(0)[1 - e^{-\alpha t}]. \quad (2.7)$$

Отже, проілюструємо наглядно на рис. 2.1 графіки, що зображують зміну числа осіб з ростом  $t$  в кожній з трьох груп для першого випадку.

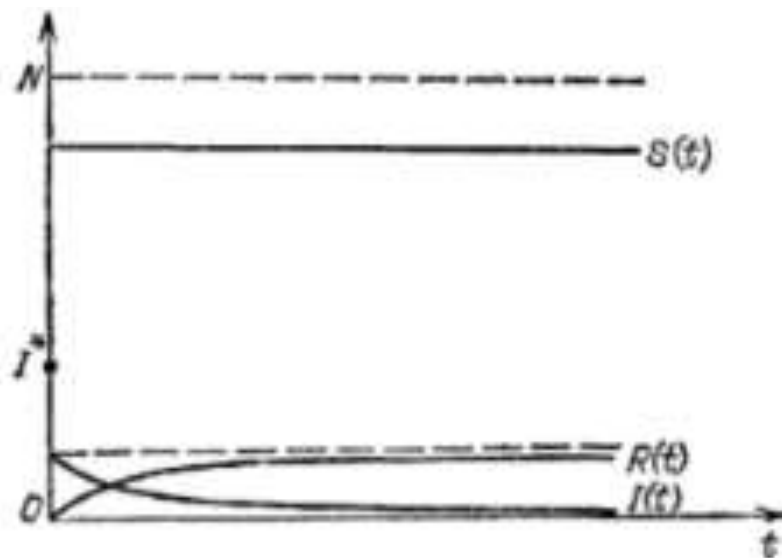


Рис. 2.1. Результат аналізу поведінки функцій зміни числа осіб з ростом  $t$  в кожній з трьох груп для першого випадку

**Випадок 2:** число  $I(t) > I^*$ .

У цьому випадку повинен існувати інтервал  $0 \leq t < T$  для всіх значень  $t$ , для яких справедлива нерівність  $I(t) > I^*$ , бо за змістом завдання  $I$  як функція від  $t$  повинна бути неперервною функцією. Звідси випливає, що для всіх  $t$  з проміжку  $[0; T)$  хвороба поширюватиметься на сприйнятливих до неї осіб. Таким чином, з рівняння (2.2) отримуємо що

$$S(t) = S(0)e^{-\alpha t} \quad (2.8)$$

для  $0 \leq t < T$ . Підставляючи значення  $S(t)$  з останньої рівності (2.8) в рівняння (2.3), приходимо до диференціальних рівнянь

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S(0)e^{-\alpha t}. \quad (2.9)$$

Аналіз (2.9) дає змогу проілюструвати наглядно, як змінюється з часом число осіб в кожній з трьох розглянутих груп для другого випадку.

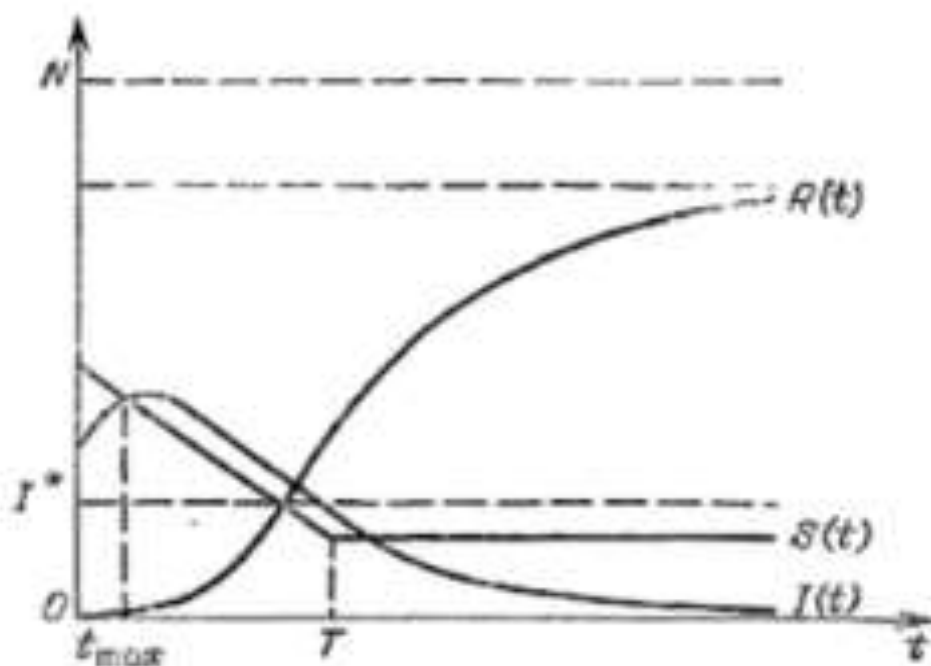


Рис. 2.2. Результат аналізу поведінки функцій зміни числа осіб з ростом  $t$  в кожній з трьох груп для другого випадку

## Висновки

На превеликий жаль, навіть вирішив поставлену задачу та проаналізувавши результат ми не можемо тут надати точну дату закінчення пандемії, оскільки банально не маємо доступу к точним даних про динаміку епідемії COVID-19 в Україні, що відповідають ситуації сьогодення. Але всім відомо, що з початку квітня 2020 р. міжвідомча робоча група представників Національної академії наук України, Київського національного університету імені Тараса Шевченка та Національної академії медичних наук України створювала і тестувала математичну модель SEIR–U.

Прогнозування основних показників розвитку епідемії COVID-19 здійснюється щотижнево з прогнозуванням на 7-денний та максимум 28-денний прогностні періоди. Вони використовували для аналізу такі джерела даних:

1. Дані щоденних звітів Міністерства охорони здоров'я (МОЗ) України завдяки співпраці з UNICEF про кількість нових виявлень, одужань, летальних випадків і підозр для кожної області України.

2. Первинні дані Центру громадського здоров'я Міністерства охорони здоров'я (ЦГЗ МОЗ) України.

3. Дані щодо обсягів ПЛР- та ІФА-тестування по кожній лабораторії України. Ці дані містять інформацію про загальну кількість проведених тестів, кількість позитивних тестів і ретестувань.

4. Дані Національної служби здоров'я України (НСЗУ), які оновлюються щодня та містять дані про госпіталізації по кожній лікарні України.

Враховуючи все вищезазначене та всі часткові та узагальнені прогнози, що розроблені МРГ ІПРЕЕД НАН України [14], ми можемо зробити *наступні висновки:*

- ❖ передбачається збереження на найближчий час та більш віддалену перспективу негативних тенденцій розвитку епідемії COVID-19 в Україні.
- ❖ Середній вік смерті перейшов до зростання, наблизившись до максимальних значень. Така тенденція мала місце на тлі незначних вікових змін серед нових хворих (64-70років), де частка хворих похилого віку також продемонструвала зростання.

- ❖ Частка неповнолітніх хворих після наближення до максимумів у другій декаді весни перейшла до іншої тенденції та оновила мінімум спостережень із початку досліджень.
- ❖ На жаль, темпи поширення інфекції в Україні знову можуть пришвидчитись.
- ❖ Регіонами з найбільшою очікуваною кількістю інфікованих на даний момент є Дніпропетровська, Донецька, Житомирська, Одеська, Полтавська, Сумська, Харківська, Хмельницька області та місто Київ.

Крім того, вважаємо також важливим зазначити тут, що математичне моделювання та дослідження поширення інфекційних патогенів у полігамних моделях в епідеміології дає змогу спрогнозувати різні властивості патогена, наприклад, поширення (загальну кількість осіб інфікованих від епідемії) та тривалість (час) епідемії. До того ж, звичайно, за наявності певних даних допомагає після певного аналізу зрозуміти можливі наслідки епідемії: наприклад, в який спосіб найкраще проводити вакцинацію населення, якщо кількість вакцин обмежена; або обговорювати та приймати відповідні рішення щодо фінансових аспектів, як наслідків епідемії.

### РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Конвективна дифузія (на відміну від молекулярної) обумовлена рухом фаз в результаті струшування, перемішування, зміни температури та інших зовнішніх впливів. У рідкому або газоподібному середовищі це основний вид дифузії, яка здійснюється за рахунок переміщення всередині даної фази конвективних потоків, що несуть дифундуючі речовини. Його перенесення здійснюється внаслідок переміщення окремих дуже малих (елементарних) обсягів рідкої або газоподібної фази, причому речовини всередині цих елементарних обсягів переносяться за допомогою молекулярної дифузії, характерною для нерухомої фази, якої і є елементарний об'єм рідини або газу.

В роботі досліджується спектральна задача Неймана для сингулярно збуреного оператора конвекції-дифузії. Вивчається асимптотична поведінка першої власної пари цієї задачі – власного значення з максимальною дійсною частиною та відповідної власної функції.

Перша власна пара, що також називається основним станом, грає вирішальну роль у багатьох застосуваннях. Ця задача на практиці застосовується для дослідження процесів конвекції-дифузії в середовищах з періодично розташованими включеннями.

В задачах такого типу велике значення має вигляд крайової умови, що поставлене на границях включень. Так, задача Неймана є нестационарною конвекційно-дифузійною моделлю, що описує рух розчиненого хімічної речовини в присутності хімічної реакції на межі включень. Перше власне значення та відповідна власна функція надають розуміння асимптотичної поведінки розв'язків відповідних рівнянь при великих значеннях часу.

Крайові задачі для сингулярно збурених еліптичних операторів активно вивчалися починаючи з 1950-х рр. У роботах [6, 22] вивчалася головне власне значення сингулярно збурених рівняння конвекції-дифузії з граничною умовою Діріхле, що було досліджено методом великих відхилень для дифузійних процесів з малою дифузійною.



У роботі [19] оцінки головного власного значення були отримані за допомогою аргументів порівняння та еліптичної техніки.

У роботі [29] розглянуто методи в'язкості для сингулярно збуреного рівняння Гамільтона – Якобі, що використовувались для вивчення головної власної функції спряженої задача конвекції – дифузії Неймана. Спектральна задача Діріхле для сингулярно збурених операторів зі швидко коливальними локально-періодичні коефіцієнти вивчались у [30] та [31]. У [31] за допомогою методу в'язкості, було отримано границю основного власного значення та логарифмічну асимптотику основної власної функції. Цю асимптотику було також вдосконалено за допомогою blow up аналізу.

Використовуючи логарифмічне перетворення, ми зводимо досліджувану задачу до адитивної задачі власних значень для сингулярно збуреного Гамільтона – Якобі рівняння. Тоді припускаючи, що множина Обрі гамільтоніана складається з скінченної кількості точок або граничні цикли розташовані в області або на її межі, ми знаходимо границю власного значення та формулюємо критерій відбору, який дозволяє вибрати рішення граничного рівняння Гамільтона – Якобі за логарифмічною асимптотикою основної власної функції.

### 3.1. Постановка задачі

Розглянемо спектральну задачу для сингулярно збуреного оператору, що залежить від малого параметру  $\varepsilon > 0$ ,

$$\varepsilon a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + c(x) u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u \quad (3.1)$$

в гладкій обмеженій області  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  з граничною умовою Неймана

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.2)$$

де  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – похідна за напрямом зовнішньої нормалі.

Ми вивчаємо задачу (3.1) – (3.2) за наступних припущень на коефіцієнти рівняння та область:

- (a1)  $\Omega$  є обмеженою областю в  $R^N$ ,  $N \geq 2$  з границею  $\partial\Omega$  класу  $C^2$ ;
- (a1) всі коефіцієнти є функціями класу  $C^2(\overline{\Omega})$ ;
- (a3) матриця  $a_{ij}$  є симетричною та рівномірно еліптичною.

### 3.2. Метод розв'язання задачі

Існує два підходи, що зазвичай використовуються при вивченні граничних та спектральних задач для сингулярно збуреного оператора конвекції-дифузії.

Перший спирається на ймовірнісну інтерпретацію відповідного процесу конвекції-дифузії з малою дифузією. Цей підхід вивчався у [21] та був потім застосований у багатьох інших роботах.

Інший підхід базується на техніці в'язкісних розв'язків для сингулярно збуреного рівняння Гамільтона-Якобі. В цьому підході спершу проводиться логарифмічне перетворення розв'язку, а потім вивчається отримане сингулярно збурене нелінійне рівняння першого порядку. Цей метод був успішно застосований в [20], а потім його використовували у багатьох дослідженнях сингулярно збурених задач.

В даній роботі використано узагальнення підходу, розробленого в [31]. Головний результат отримано шляхом комбінування локального аналізу з методами розв'язків в'язкісного типу.

Оскільки  $u_\varepsilon > 0$  у області  $\Omega$ , ми можемо представити  $u_\varepsilon$  у вигляді:

$$u_\varepsilon = e^{-\frac{W_\varepsilon(x)}{\varepsilon}},$$

тоді для масштабованого логарифмічного перетворення  $W_\varepsilon := -\varepsilon \ln u_\varepsilon$  першої власної функції  $u_\varepsilon$ , отримаємо наступне нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$-a^{ij}(x)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon}H(\nabla W_\varepsilon, x) + c(x) = \lambda_\varepsilon, \quad x \in \Omega \quad (3.3)$$

або

$$-\varepsilon a^{ij}(x)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(\nabla W_\varepsilon, x) + \varepsilon c(x) = \varepsilon \lambda_\varepsilon, \quad x \in \Omega \quad (3.4)$$

з граничною умовою

$$\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.5)$$

де гамільтоніан  $H$  визначається формулою

$$H(p, x, y) = a_{ij}(x, y)p_i p_j - b_i(x, y)p_i.$$

При переході до границі при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в (3.4) за стандартною методикою, що базується на принципі максимуму, можна показати, що  $W_\varepsilon$  збігається рівномірно за виділеною підпоследовністю до в'язкого розв'язку  $W$  рівняння Гамільтона-Якобі:

$$H(\nabla W(x), x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.6)$$

з граничною умовою

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.7)$$

Функцію  $W(x) \in C(\bar{\Omega})$  називають в'язкісним розв'язком рівняння (3.6), якщо для кожної тестової функції  $\Phi(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  виконуються наступні умови:

1) якщо  $W - \Phi$  досягає максимуму в точці  $\xi \in \partial\Omega$ , тоді

$$\min \left\{ H(\nabla\Phi(\xi), \xi), \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\xi) \right\} \leq 0;$$

2) якщо  $W - \Phi$  досягає мінімуму в точці  $\xi \in \partial\Omega$ , тоді

$$\max \left\{ H(\nabla\Phi(\xi), \xi), \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\xi) \right\} \geq 0.$$

Відомо, що будь-який розв'язок задачі (3.6) – (3.7) може бути представлений як

$$W(x) = \inf_{y \in A_H} \{d_H(x, y) + W(y)\}, \quad (3.8)$$

де  $A_{\bar{H}}$  – так звана множина Обрі,  $d_H(x, y)$  – функція відстані.

Для визначення  $A_{\bar{H}}$  та  $d_H(x, y)$  розглянемо розв'язки наступної задачі Скорохода:

$$\begin{cases} \eta(t) \in \Omega, & t \geq 0 \\ \dot{\eta}(t) + \alpha(t)v(\eta(t)) = v(t) \\ \eta(0) = x, \end{cases} \quad (3.9)$$

де  $\alpha(t) \geq 0$ , причому  $\alpha(t) = 0$ , коли  $\eta(t) \notin \partial\Omega$ ;

$v \in L^1((0, \infty); R^N)$  – задане векторне поле;

$x \in \bar{\Omega}$  – задана початкова точка;

функція  $\alpha \in L^1((0, \infty); R_+)$  та крива  $\eta \in W_{loc}^{1,1}((0, \infty); R^N)$  – невідомі.

За сформульованих вище умов на область  $\Omega$  та її границю, розв'язок задачі Скорохода (3.9) існує.

Розглянемо перетворення Лежандра

$$L(v, x) = \sup_{p \in R^N} \{v \cdot p - H(p, x)\}$$

та визначимо функцію відстані:

$$d_H(x, y) = \inf \left\{ \int_0^t L(-v(s), \eta(s)) ds, \eta \text{ задовольняє (3.9),} \right. \\ \left. \eta(0) = x, \eta(t) = y, t > 0 \right\} \quad (3.10)$$

Варіаційне визначення множини Обрі має вигляд:

$$x \in A_H \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \inf \left\{ \int_0^t L(-v(s), \eta(s)) ds, \eta \text{ задовольняє (3.9),} \right. \\ \left. \eta(0) = \eta(t) = x, t > \delta \right\} = 0.$$

Ми будемо припускати, що множина Обрі має скінченну кількість зв'язних компонент  $A_H = \bigcup A_k$ , які є ізольованими точками або замкненими кривими, що цілком належать області  $\Omega$  або її границі. До того ж вважаємо, що:

1) якщо  $A_k \subset \Omega$ , тоді компонента множини Обрі  $A_k$  містить скінченну кількість гіперболічних нерухомих точок або гіперболічних граничних циклів звичайного диференціального рівняння (ЗДР)  $\dot{x} = b(x)$ ;

2) якщо  $A_k \subset \partial\Omega$ , тоді нормальна компонента  $b_\nu(x)$  поля  $b(x)$  є додатною на  $A_k$  та компонента множини Обрі  $A_k$  містить скінченну кількість гіперболічних нерухомих точок та гіперболічних граничних циклів ЗДР  $\dot{x} = b_\tau(x)$  на границі  $\partial\Omega$ , де  $b_\tau(x)$  позначає тангенціальну компоненту поля  $b(x)$  на  $\partial\Omega$ .

Зауважимо, що множина Обрі  $A_H$  не залежить від коефіцієнтів  $a_{ij}(x)$ , вона повністю визначається полем  $b(x)$ . Цей факт впливає з варіаційного

визначення (3.10) множини Обрі та того факту, лагранжіан  $L(v, x)$  задається формулою

$$L(v, x) = \frac{1}{4} a^{ij}(x)(v_i + b_i(x))(v_j + b_j(x)),$$

де  $(a^{ij}(x))_{i, j=1, \overline{N}}$  – обернена матриця до  $(a_{ij}(x))_{i, j=1, \overline{N}}$ .

Більш конкретно,  $A_H$  визначається динамічною системою  $S$ , що відповідає задачі Скорохода задача (3.9)  $v(t) = b(\eta(t))$ . При цьому припущення на множину Обрі вимагають, щоб гранична множина  $\omega$  системи  $S$  складалась зі скінченної кількості гіперболічних фіксованих точок або граничних циклів.

Також можна зауважити, що цей гранична множина завжди не є порожнім. Крім того, у випадку загальної положення, набір Обрі  $A_H$  складається з кінцевої кількості гіперболічних нерухомих точок та граничних циклів  $S$ .

### 3.3. Результати досліджень

Щоб сформулювати головний результат дослідження, введемо допоміжну характеристику. Кожній компоненті множини Обрі  $A_k$  поставимо у відповідність число  $\sigma(A_k)$  за наступними правилами.

Якщо  $A_k$  є нерухомою точкою  $\{\xi\}$  ЗДР  $\dot{x} = b(x)$  та  $\xi \in \Omega$ , ми лінеаризуємо ЗДР поблизу точки  $\xi$ , отримаємо  $\dot{z}(\xi) = B(\xi)z$  та визначаємо число  $\sigma(A_k)$  формулою:

$$\sigma(A_k) = - \sum_{\theta_i > 0} \theta_i + c(\xi), \quad (3.11)$$

де  $\theta_i$  – дійсна частина власних значень матриці  $B(\xi)$ .

Зауважимо, що гіперболічність нерухомих точок означає, що власні

значення матриці  $B(\xi)$  не можуть мати нульову дійсну частину. Якщо  $A_k = \{\xi\}$  та  $\xi \in \partial\Omega$ , розглянемо ЗДР  $\dot{x} = b_\tau(x)$  на  $\partial\Omega$  в околі точки  $\xi$ . Переходячи до лінеаризованого ЗДР  $\dot{z}(\xi) = B_\tau(\xi)z$  на дотичній площині до  $\partial\Omega$  в точці  $\xi$ , ми позначимо  $\tilde{\theta}_i$  дійсну частину власних значень матриці  $B_\tau(\xi)$  та визначимо  $\sigma(A_k)$  формулою:

$$\sigma(A_k) = - \sum_{\tilde{\theta}_i > 0} \tilde{\theta}_i + c(\xi). \quad (3.12)$$

Тепер розглянемо випадок, коли  $\{A_k\} \subset \Omega$  є граничним циклом ЗДР  $\dot{x} = b(x)$ . Нехай  $P > 0$  є мінімальним періодом циклу та нехай  $\Theta_i$  модулі власних значень карти Пуанкаре. При цьому жодне власне значення лінеаризованої карти Пуанкаре не може мати дійсної частини рівної 1, оскільки цикли є гіперболічними. В цьому випадку  $\sigma(A_k)$  визначаються формулою:

$$\sigma(A_k) = -\frac{1}{P} \sum_{\Theta_i > 1} \log \Theta_i + \frac{1}{P} \int_0^P c(\xi(t)) dt, \quad (3.13)$$

де  $\xi(t)$  є розв'язком ЗДР  $\dot{\xi} = b(\xi)$ ;

$$\xi(t) \in A_k.$$

Нарешті, коли  $b_\nu(x) > 0$  на  $A_k$  та  $A_k$  є граничним циклом ЗДР  $\dot{x} = b_\tau(x)$  на  $\partial\Omega$ , ми покладаємо:

$$\sigma(A_k) = -\frac{1}{P} \sum_{\tilde{\theta}_i > 1} \log \tilde{\theta}_i + \frac{1}{P} \int_0^P c(\xi(t)) dt \quad (3.14)$$

де  $\xi(t)$  є розв'язком ЗДР  $\dot{\xi} = b_\tau(\xi)$ ;

$$\xi(t) \in A_k;$$

$P > 0$  є мінімальний період;

$\tilde{\Theta}_i$  – модулі власних значень лінеаризованої карти Пуанкаре.

Основний результат міститься у наступній теоремі.

**Теорема.** Нехай виконуються умови (a1) – (a3) та сформульовані вище припущення на множину Обрі. Тоді перше власне значення збігається

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = \max\{\sigma(A_k) : A_k \subset A_H\} \quad (3.15)$$

де  $\sigma(A_k)$  визначаються: (3.11) або (3.12), якщо  $A_k$  є нерухомою точкою у області  $\Omega$  або на її границі  $\partial\Omega$ ; (3.13) або (3.14), якщо  $A_k$  є граничним циклом у  $\Omega$  або на  $\partial\Omega$ .

Максимум у (3.15) досягається точно на одній компоненті  $M := A_{k_0}$  множини Обрі, і тоді масштабоване логарифмічне перетворення  $W_\varepsilon := -\varepsilon \ln u_\varepsilon$  першої власної функції  $u_\varepsilon$  збігається рівномірно в  $\bar{\Omega}$  до максимального в'язкісного розв'язку  $W$  (3.6) – (3.7), необмежено спадаючого на компоненті  $M$  множини Обрі, тобто  $W(x) = d_{ij}(x, M)$ .

Наведемо також два допоміжних результати, на які спирається доведення основного результату.

**Лемма 1.** Перше власне значення  $\lambda_\varepsilon$  спектральної задачі з крайовими Неймана (3.1) – (3.2) задовольняє оцінку

$$-c(x) \leq \lambda_\varepsilon \leq \max c(x).$$

**Лемма 2.** Якщо власна функція  $u_\varepsilon$  нормалізована умовою  $u_\varepsilon = 0$  (тобто  $W_\varepsilon = 1$ ), тоді має місце оцінка

$$\|W_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C,$$

де стала  $C$  не залежить від параметру  $\varepsilon$ .



## Висновки

Досліджено спектральну задачу для сингулярно збуреного оператора конвекції-дифузії в гладкій обмеженій області  $\Omega$

$$\varepsilon a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + c(x) u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u$$

в гладкій обмеженій області  $\Omega \subset R^N$  з умовою Неймана на границі

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

де  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – похідна за напрямом зовнішньої нормалі.

Вивчено асимптотичну поведінку першого (з максимальною дійсною частиною) власного значення та відповідної власної функції, що визначають основний стан розглянутого оператора. Отримано явні формули, що описують граничні власні функції та визначають граничне власне значення.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 160 с.
2. Андришин В.П. Фактори ефективності експортної діяльності підприємства // Науковий вісник Херсонського державного університету. Випуск 5. Частина 2. 2014. – с. 11 – 14.
3. Бараннік І. О. Обґрунтування базису понять сучасної змістовної суті експортно-імпортного потенціалу підприємства / І. О. Бараннік // Бізнес Інформ. – 2015. – № 11 (454). – С. 33–38.
4. Бараннік І. О. Моніторинг факторів зовнішнього середовища промислового підприємства / І. О. Бараннік, О. В. Мінєнкова // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми управління підприємствами: теорія та практика» (Харків, 24 – 25 березня 2016 р.). – Харків : Вид-во «НТМТ», 2016. – С. 337–338.
5. Бараннік І. О. Система показників як основний інструмент моніторингу експортно-імпортного потенціалу підприємства / І. О. Бараннік // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Економічні підсумки 2016 року: досягнення, тенденції та перспективи» (Одеса, 18 – 19 листопада 2016 р.). – Одеса: ОНУ імені І. І. Мечникова, 2016. – С. 59–62.
6. Вентцель А. Д. Об асимптотике первого собственного значения дифференциального оператора второго порядка с малым параметром при старших производных // Теория вероятностей и её применение. – 1975. –Т. 20. – № 3. – С. 610–613.
7. Гринько П.О. Сутність ефективності експортно-імпортної діяльності підприємства в сучасних умовах. Всеукраїнська науково-практична конференція «Проблеми та перспективи розвитку економіки України» (м. Київ, 2017 р.) –: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Київ : Національний авіаційний університет, 2017. – 136 с. (63 – 66 с.);
8. Дунська А. Експортно-імпортна діяльність України // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. № 3. 2016. – с. 36 – 46.
9. Ліпич Л. Г., Фатенок-Ткачук А.О. Фактори впливу на розвиток зовнішньоекономічної діяльності машинобудівних підприємств // Економіка та держава. № 5. – 2008. – с. 29 – 32.

10. Стратегия посткризисного развития внешнеэкономического сектора Украины: монография / А. А. Мазараки, Т. М. Мельник, В. В. Юхименко и др. ; за общ. ред. А. А. Мазараки. – К. : Киев. нац. торг.-экон. ун-т, 2014. – 660 с.
11. Піддубна Л.І. Експортний потенціал підприємства: сутність і системні імперативи формування і розвитку / Л.І. Піддубна, О.А. Шестакова // Вісник економіки транспорту і промисловості. – 2012. – № 37. – С. 223-229.
12. Пономаренко В. С. Аналіз даних у дослідженнях соціально-економічних систем : моногр. / В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2009. – 432 с.
13. Пономаренко В. С. Проблеми та виклики трансформації механізмів міжнародної конкуренції та конкурентоспроможності / В. С. Пономаренко, Л. І. Піддубна // Конкурентоспроможність: проблеми науки та практики: монографія. – Х. : ФОП Павленко О. Г.; ВД «ІНЖЕК», 2011. – С. 54 – 70.
14. Прогноз розвитку епідемії COVID-19 в Україні. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://files.nas.gov.ua/PublicMessages/Documents/0/2020/11/201116144517440-6564.pdf>
15. Тенденції розвитку зовнішньої торгівлі України. Електронні документи Міністерства економічного розвитку і торгівлі України. <http://www.me.gov.ua/Documents/List?lang=uk-UA&id=354d699d-4648-4112-a81a-919a80555fb7&tag=TendentsiiRozvitkuZovnishnoiTorgivliUkraini>
16. Чалапко (Калник) Л.Д. Експортний потенціал України: проблеми і перспективи реалізації / Л.Д. Чалапко (Калник) , Л.А. Перетятко , С.І. Козак // Науковий вісник НЛТУ України. – 2016. – Вип 26.6. – С. 247 – 253.
17. Шкурупій О. В. Зовнішньоекономічна діяльність підприємства : навч. посібн. / О. В. Шкурупій, В. В. Гончаренко, І. А. Артеменко та ін. – К. : Центр учбової літератури, 2012. – 248 с.
18. Якушев О. О. Зовнішні та внутрішні загрози зовнішньоекономічної діяльності України / О. О. Якушев // Культура народів Причорномор'я. — 2012. — № 233. — С. 86-89. <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/46504/25-Yakushev.pdf?sequence=1>
19. Devinatz A. The asymptotic behavior of the first real eigenvalue of second order elliptic operators with a small parameter in the highest derivatives / A. Devinatz, R. Ellis, A. Friedman // П. Indiana Univ. Math. J. – 1973–1974. – V. 23. – P. 991–1011.

20. Evans L. C. A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equation with small noise intensities / L. C Evans, H. Ishii // *Ann. L'Inst. H. Poincaré*. – 1985. – V. 2. – P. 1 – 20.
21. Freidlin M. I. Random perturbations of dynamic systems / M. I. Freidlin, A. D. Wentzell. – New York: Springer-Verlag, 1984. – 260 p.
22. Friedman A. The asymptotic behavior of the first real eigenvalue of a second order elliptic operator with a small parameter in the highest derivatives // *Indiana Univ. Math. J.* – 1972/73. – V. 22. – P. 1005–1015.
23. Hethcote H. The Mathematics of Infectious Diseases // *SIAM Review*. – 2000. – 42 (4). – P. 599–653.
24. Kermack W. Contributions to the mathematical theory of epidemics / W. Kermack, A. McKendrick // *I. Bulletin of Mathematical Biology*. – 1991. – 53 (1–2). – P. 33–55.
25. Kermack W. Contributions to the mathematical theory of epidemics – II / W. Kermack, A. McKendrick // *I. Bulletin of Mathematical Biology*. – 1991. – 53 (1–2). – P. 57–87.
26. Kermack W. Contributions to the mathematical theory of epidemics – III. Further studies of the problem of endemicity. / W. Kermack, A. McKendrick // *I. Bulletin of Mathematical Biology*. – 1991. – 53 (1–2). – P.89–118.
27. Malyarets L., Barannik I., Grynko P. Mathematical modelling of efficiency evaluation of enterprises's export-import activity in Ukraine. Proceedings of the International Congress on Business and Marketing, 2019 Maltepe University, Istanbul, 13.06.2019-15.06.2019. Pp. 211 – 213.
28. Malyarets L., Otenko I. Modeling of export-import potential. *MODERN MANAGEMENT REVIEW*, vol. XXIV, 26 (3/2019), p. 51-61.
29. Perthame B. Perturbed dynamical systems with an attracting singularity and weak viscosity limits in Hamilton–Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1990. – V. 317. – P. 723–748.
30. Piatnitski A. Ground states of singularly perturbed convection-diffusion equation with oscillating coefficients / A. Piatnitski, A. Rybalko, V. Rybalko // *V.ESAIM: COCV*. – 2014. – V. 20. – P. 1059–1077.
31. Piatnitski A. On the first eigenpair of singularly perturbed operators with oscillating coefficients / A. Piatnitski, V. Rybalko // *Comm. Part. Diff. Equ.* – 2016. – V. 41. – No. 1. – P. 1–31.