

THEORETICAL FOUNDATIONS IN RESEARCH IN ENGINEERING

Collective monograph

ISBN 979-8-88722-619-4

DOI 10.46299/ISG.2022.MONO.TECH.3

BOSTON(USA)-2022

ISBN – 979-8-88722-619-4

DOI – 10.46299/ISG.2022.MONO.TECH.3

*Theoretical foundations in
research in Engineering*

Collective monograph

Boston 2022

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

ISBN – 979-8-88722-619-4

DOI – 10.46299/ISG.2022.MONO.TECH.3

Authors – Торба А., Кімейчук І., Хрик В., Левандовська С., Третяк А., Кучерявенко О., Василенко О., Чвирова О., Танірвердієв А., Andrushchak I., Fialko N., Dinzhos R., Meranova N., Sherenkovskii J., Polozenko N., Shubenko O., Goloshcharov V., Kotulska O., Paramonova T., Senetska D., Pylypchuk O., Slobodyanyuk N., Голубничий Д.Ю., Коломійцев О.В., Третяк В.Ф., Пустоваров В.В., Рибальченко А.О., Козачок Л., Мовмига Н.Є., Демідова Ю.Є., Максименко О.А., Котенко К.

REVIEWER

Ivan Katerynychuk – Doctor of Technical Sciences, Professor, Honoured Worker of Education of Ukraine, Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, Professor of the Department of Telecommunication and Information Systems of Bohdan Khmelnytskyi National Academy of the State Border Guard Service of Ukraine.

Kostiantyn Dolia – Doctor of Engineering, Department of automobile and transport infrastructure, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”.

Published by Primedia eLaunch

<https://primediaelaunch.com/>

Text Copyright © 2022 by the International Science Group(isg-konf.com) and authors.

Illustrations © 2022 by the International Science Group and authors.

Cover design: International Science Group(isg-konf.com). ©

Cover art: International Science Group(isg-konf.com). ©

All rights reserved. Printed in the United States of America. No part of this publication may be reproduced, distributed, or transmitted, in any form or by any means, or stored in a data base or retrieval system, without the prior written permission of the publisher. The content and reliability of the articles are the responsibility of the authors. When using and borrowing materials reference to the publication is required.

Collection of scientific articles published is the scientific and practical publication, which contains scientific articles of students, graduate students, Candidates and Doctors of Sciences, research workers and practitioners from Europe and Ukraine. The articles contain the study, reflecting the processes and changes in the structure of modern science.

The recommended citation for this publication is:

Theoretical foundations in research in Engineering: collective monograph / Andrushchak I. – etc. – International Science Group. – Boston : Primedia eLaunch, 2022. 181 p. Available at : DOI – 10.46299/ISG.2022.MONO.TECH.3

TABLE OF CONTENTS

1.	AEROSPACE ENGINEERING AND TECHNOLOGIES	
1.1	<p>Торба А.¹</p> <p>СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОБТЕКАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДОЙ</p> <p>¹ Кафедра ЭВМ, Харьковский национальный университет радиоэлектроники</p>	6
2.	AGRICULTURE AND FORESTRY	
2.1	<p>Кімейчук І.¹, Хрик В.¹, Левандовська С.¹, Третяк А.², Кучерявенко О.²</p> <p>ЛІСОРозВЕДЕННЯ – ОСНОВНИЙ МЕТОД ЕКОАДАПТАЦІЙНОГО ВІДТВОРЕННЯ ЛІСІВ ТА ЗБІЛЬШЕННЯ ЛІСИСТОСТІ УКРАЇНИ</p> <p>¹ Білоцерківський національний аграрний університет (Україна)</p> <p>² Відокремлений структурний підрозділ «Бобровицький фаховий коледж імені О. Майнової Національного університету біоресурсів і природокористування України» (Україна)</p>	20
3.	ARCHITECTURE AND CONSTRUCTION	
3.1	<p>Василенко О.¹, Чвирова О.¹, Танірвердієв А.¹</p> <p>ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ «СВІТЛОВОЇ СКЛАДОВОЇ» АРХІТЕКТУРНИХ МІСЬКИХ СИСТЕМ</p> <p>¹ Кафедра дизайну архітектурного середовища, Одеська державна академія будівництва та архітектури</p>	42
4.	COMPUTER SCIENCE	
4.1	<p>Andrushchak I.¹</p> <p>IMPLEMENTATION OF INFORMATION AND MATHEMATICAL MODELS AND ALGORITHMS IN THE SOFTWARE ENVIRONMENT</p> <p>¹ Lutsk National Technical University</p>	52
5.	ENERGY AND ENERGY ENGINEERING AND TECHNOLOGIES	
5.1	<p>Fialko N.¹, Dinzhos R.², Meranova N.¹, Sherenkovskii J.¹, Polozenko N.¹</p> <p>THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF POLYMER MICRO- AND NANOCOMPOSITES WHEN THEY ARE OBTAINED BY DIFFERENT METHODS</p> <p>¹ Institute of Engineering Thermophysics of National Academy of Sciences of Ukraine</p> <p>² Nikolaev National University named after V.A. Sukhomlinskiy</p>	61

5.2	Shubenko O. ¹ , Goloshchapov V. ¹ , Kotulska O. ¹ , Paramonova T. ¹ , Senetska D. ¹ OPERATION OF THE LAST STAGE OF THE COGENERATION TURBINE IN THE MODE OF HEAT DISSIPATION ¹ A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine	70
6. FOOD TECHNOLOGY		
6.1	Pylypchuk O. ¹ , Slobodyanyuk N. ¹ , CHARACTERISTICS OF PLANT RAW MATERIALS AS A FUNCTIONAL AND TECHNOLOGICAL INGREDIENT FOR DAIRY PRODUCTS ¹ Department of technology of meat, fish and seafood, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine	79
6.1.1	Characteristics of plant raw materials as a functional and technological ingredient for dairy products	79
6.1.2	Development of fillers with extracts of inulin-containing raw materials for the dairy industry	84
6.1.3	Technological features of obtaining functional milk drinks with biologically active substances from vegetable raw materials	85
6.1.4	The use of burdock roots and scorzonera in the technology of dairy desserts	89
7. INFORMATION TECHNOLOGIES		
7.1	Голубничий Д.Ю. ¹ , Коломійцев О.В. ² , Третяк В.Ф. ³ , Пустоваров В.В. ⁴ , Рибальченко А.О. ² ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ВІДСІКАННЯ НЕПЕРСПЕКТИВНИХ ВАРІАНТІВ В АЛГОРИТМАХ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ НА ОСНОВІ РАНГОВОГО ПІДХОДУ ¹ Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця ² Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» ³ Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба ⁴ Харківське представництво генерального замовника – Державного космічного агентства України	96
7.2	Козачок Л. ¹ ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕСІВ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ¹ Кафедра інформатики та прикладної математики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет	134

SECTION 7. INFORMATION TECHNOLOGIES

10.46299/ISG.2022.MONO.TECH.3.7.1

7.1 Інформаційна технологія відсікання неперспективних варіантів в алгоритмах рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними на основі рангового підходу

Розглянемо сутність рангового підходу до рішення задач цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) з булевими змінними (БЗ) на прикладі задачі про рюкзак. Загальна постановка цієї задачі формулюється таким чином. Необхідно знайти вектор \vec{x} , що доставляє максимум функції:

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \times x_j, \quad (1)$$

при виконанні умов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times x_j \leq b_i, \quad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad i = (\overline{1, m}); \quad j = (\overline{1, n}). \quad (3)$$

Для спрощення викладу математичної моделі розглянемо одномірну задачу, тобто максимізуємо функціонал

$$f(\vec{x}) = c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \dots + c_n \times x_n, \quad (4)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} \times x_j \leq b, \quad (5)$$

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n; \quad a_{ij} > 0; \quad c_j > 0 \quad j = (\overline{1, n}). \quad (6)$$

Поставимо у відповідність задачі (4–6) граф G (рис. 1), що зображує бінарне дерево усіх рішень, число яких дорівнює 2^n [105-111].

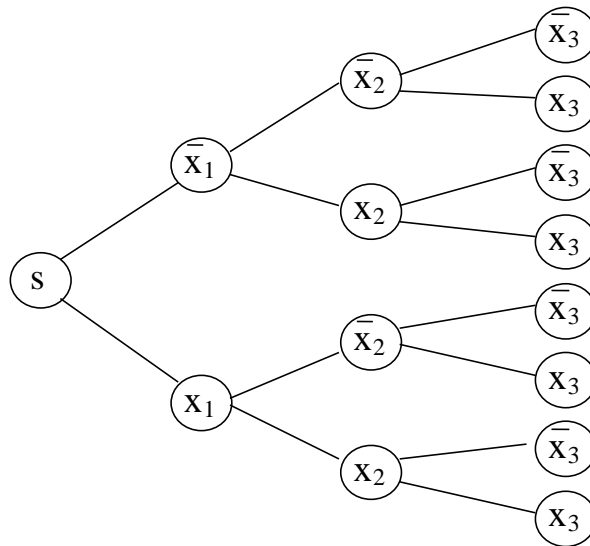


Рисунок 1. Граф G

Множина $X = \{x_j\}$ усіх векторів розмірності n , усі компоненти яких $x_j \in \{0, 1\}$ становлять множину можливих значень.

Деяка його підмножина V , усі вектори якої задовольняють обмеженням (5 – 6), утворюють множину припустимих рішень.

Множина $H \subset V$ є множиною оптимальних рішень вихідної задачі, якщо для будь-яких векторів $x \in H$ функціонал (4) досягає свого екстремального значення.

Усю множину можливих рішень можна розбити на групи векторів, що містять: один компонент $x_j = 1$, $j = (\overline{1, n})$ і всі інші рівні 0; два компоненти $x_j = 1$ і всі можливі їхні сполучення по 2, а інші, рівні 0; три компоненти $x_j = 1$ і всі можливі їхні сполучення й т. д. n – компонент $x_j = 1$. Якщо позначити підмножини векторів цих груп через m^r $r = (\overline{1, n})$, тоді множину усіх можливих рішень можна записати як об'єднання підмножин m^r :

$$X = \bigcup_{j=1}^n m^r. \quad (7)$$

Як показано в роботі [106], згідно з графом G можна побудувати граф G' (рис. 2), у якому множина шляхів рангу r (ранг шляху – число ребер, що утворюють шлях) відповідає групам підмножин, які описуються співвідношенням (7).

Для цього вершину s з'єднаємо спрямованими ребрами з вершинами $1, 2, \dots, n$ і т. д.; вершину i з'єднаємо з вершинами $i+1, \dots, n$. В останню вершину n

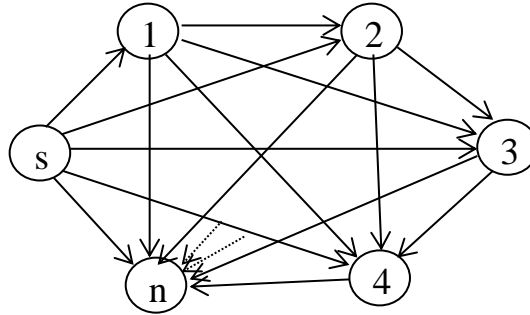


Рисунок 2. Граф G'

входять ребра, спрямовані із усіх вершин, і жодне ребро із цієї вершини не виходить.

Дерево шляхів $D\Delta$ графа G' з вершини s будується таким чином [105-109]: на нульовому ярусі ($r = 0$) розташуємо вершину s . На першому ярусі розмістимо всі вершини графа G' , що мають зв'язок з вершиною s і з'єднаємо їх з s (при цьому утворилася підмножина шляхів рангу $r = 1$). У другому ярусі розмістяться всі вершини, що мають зв'язок з вершинами першого ярусу, без вершини з номером 1 і з'єднаємо їх з вершинами першого ярусу (утворені всі шляхи рангу $r = 2$) і так далі доти, поки в останньому не залишиться одна вершина n . На рис. 3 наведено приклад, коли $n = 4$.

Геометрично вершина k графа $D\Delta$ рангу r – це множина векторів \vec{x} $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$, у яких $x_k = 1$, а на позиціях від 1 до k перебуває r одиниць (рис. 4). Ребра, що входять у вершину k графа $D\Delta$, відповідає одиничний вектор \vec{e}_k $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ n -мірного одиничного куба B^n з одиницею в k -тій позиції. Тоді, шляху μ_{sj}^r рангу r у графі $D\Delta$ відповідає вектор \vec{x} , який дорівнює сумі одиничних векторів ребер, через які він досяг вершину j рангу r , починаючи з вершини s .

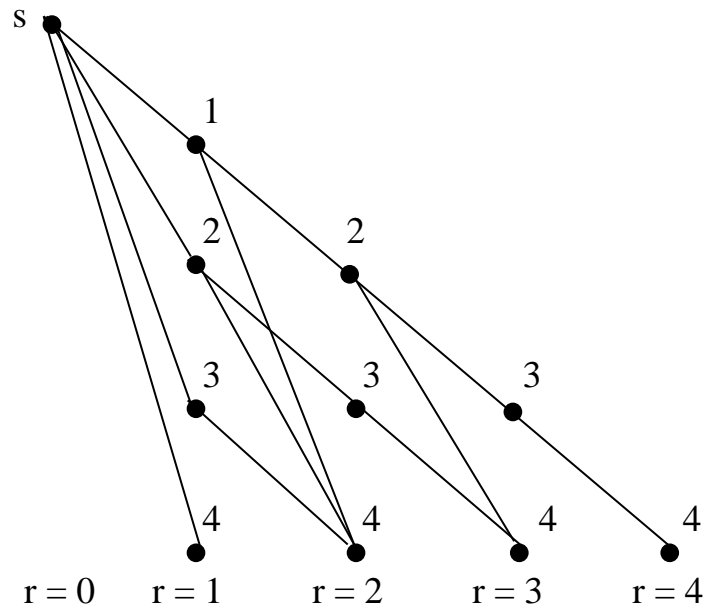


Рисунок 3. Граф $D \Delta$

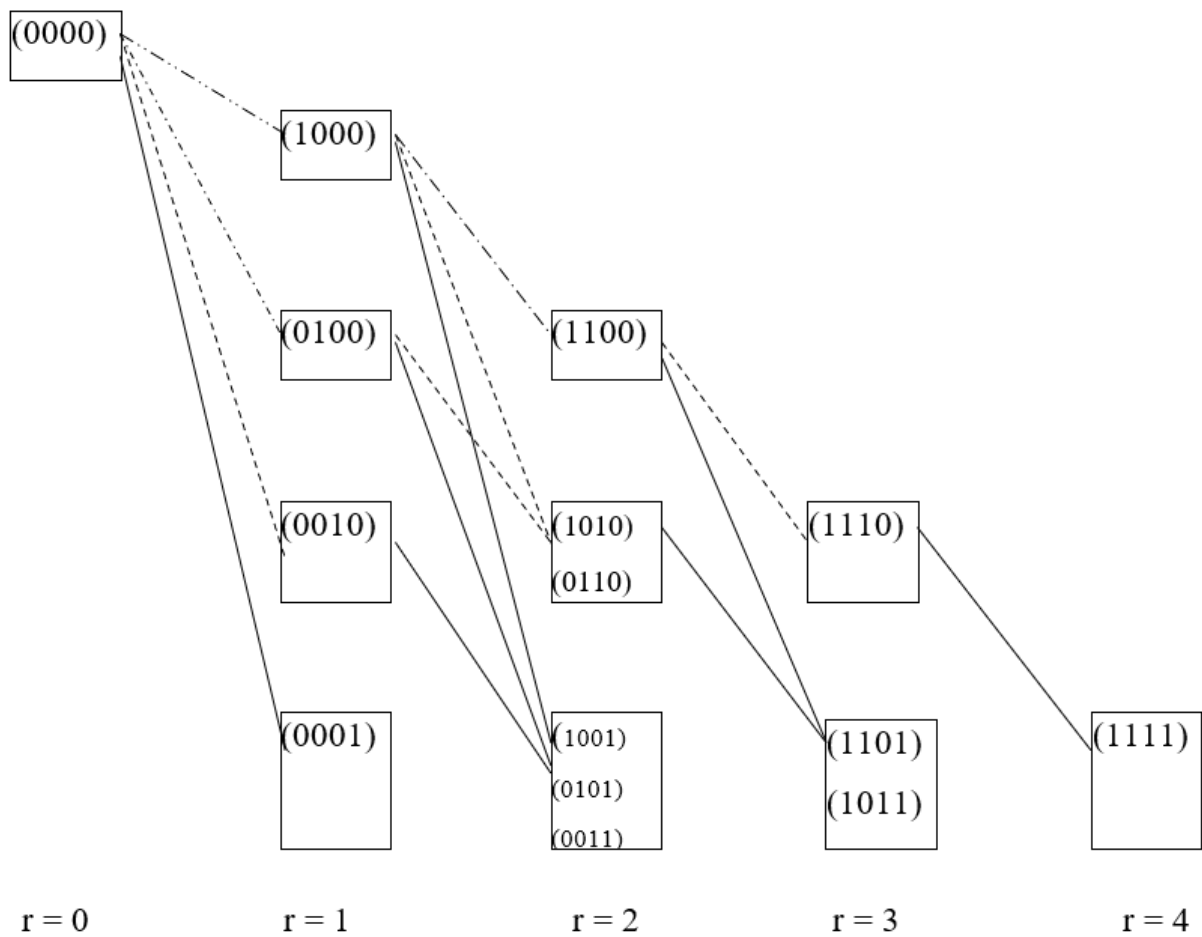


Рисунок 4. Геометрична інтерпретація графа $D\Delta$

Наприклад, шляху $\mu_{s24}^{r=2}$ відповідає вектор $\overrightarrow{x_{s24}}$, що утвориться сумою нульового вектора $\vec{0} \{0000\}$ і одиничних векторів $\vec{e}_2 = \{0100\}$, $\vec{e}_4 = \{0001\}$, тобто:

$$\overrightarrow{x_{s24}} = \vec{0} \{0000\} + \vec{e}_2 \{0100\} + \vec{e}_4 \{0001\} = \{0101\}$$

Нехай у графі $D\Delta$ кожному ребру, що входить у вершину j , $j = (\overline{1, n})$ відповідає дві ваги: вага c_j , якій дорівнює коефіцієнт при x_j у функціоналі (2.4), і вага a_{1j} , якій дорівнює коефіцієнту при x_j в обмеженні (5). Тоді, шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$ з вершини s у вершину j характеризується двома довжинами: $d_c(\mu_{sj}^r)$ - довжиною за вагою функціонала й $d_a(\mu_{sj}^r)$ - довжиною за вагою обмежень.

Множину шляхів $m_s^r(j)$ у графі $D\Delta$ до вершин j , розташовану на ярусах $r = (\overline{1, n})$ від вершини s , можна зобразити у вигляді

$$m_s^r(j) = m_{sj}^{r=1} \cup m_{sj}^{r=2} \cup \dots \cup m_{sj}^{r=n}, \quad j = (\overline{1, n}), \quad (8)$$

де m_{sj}^r - множина шляхів у графі $D\Delta$ від вершини s до вершин j , розташованим на r -х ярусах графа $D\Delta$ (ранг шляху $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ визначається числом ребер, що утворюють цей шлях). Варто мати на увазі, що множині шляхів $m_{sj}^{r=k}$ у графі $D\Delta$ відповідає множина векторів $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_v\}$, що містять k одиниць. Отже, $|m_{sj}^r| = C_n^{r=k}$, тобто кожному шляху в множині $m_{sj}^{r=k}$ відповідає деякий вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) . З множини (2.8) слідує, що:

$$|m_s^r(j)| = C_n^{r=1} + C_n^{r=2} + \dots + C_n^{r=n} = 2^n - 1. \quad (9)$$

Таким чином, граф $D\Delta$ являє собою впорядкований за рангами еквівалент n -мірного одиничного куба V^n , у якому шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ відповідають вершинам V^n . Довжина кожного шляху за вагою функціонала визначає значення функціонала (4) у вершинах одиничного куба V^n . Довжина за вагою обмежень визначає, чи відповідає дана вершина V^n обмеженням (5), тобто належить вершина n -мірного одиничного куба V^n гіперплощині (5). Якщо $d_a(\mu_{sj}^r) \leq b$, то вершина належить гіперплощині (5), і будемо говорити, що шлях μ_{sj}^r

задовольняє властивості v . Якщо $d_a(\mu_{sj}^r) > b$, то вершина n -мірного куба, що відповідає шляхам μ_{sj}^r , не належить гіперплощині (5), а шлях μ_{sj}^r вважаємо таким, який не задовольняє властивості v .

Оптимальному рішенню задачі (4 – 6) в ДД відповідає самий довгий шлях за вагою функціонала, що задовольняє властивості v .

У випадку m -мірної задачі (1 - 3) ребрам, що входять до вершин графа ДД, крім ваги c_j функціонала, відповідає m ваг a_{ij} обмежень, а шлях μ_{sj}^r характеризується довжинами: $d_c(\mu_{sj}^r)$ – довжиною за вагою функціонала й $d_a(\mu_{sj}^r)_i$, $i = \overline{(1, m)}$ – довжинами за вагою m обмежень.

На основі математичної моделі рангового підходу для побудови алгоритмів рішення завдань ЦЛП із БЗ покладений принцип оптимізації у напрямку в дискретному просторі станів, заданому графом ДД [105-111]. Подання n -мірного одиничного куба у вигляді графа ДД дозволяє розбити множину усіх шляхів графа ДД з нульової вершини s на Ω локальних областей, де $|\Omega|$ не перевищує величину $\frac{n^2}{2}$, оскільки число вершин у графі ДД визначається сумою чисел натурального ряду

$$\Omega = n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}, \quad (10)$$

причому Ω -області в графі ДД упорядковані за рангами і шляхи наступного рангу можуть бути отримані на основі шляхів попереднього рангу за рахунок приєднання до них ребра (j,p) у графі ДД: $m_{sp}^{r=r+1} = \{(\forall(\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r)) \cup (j, p)\}$.

Нехай задані деякі правила відсікання $\{L_w\}$ шляхів μ_{sj}^r у множинах m_{sj}^r . Тоді, якщо в множинах утримуються шляхи, що задовольняють властивості v і правилам $\{L_w\}$, то під оптимізацією за напрямком у графі ДД до вершини p будемо розуміти формування множин $m_{sp}^{r=r+1}$ наступного рангу, які виходять за рахунок виділення в m_{sj}^r шляхів, приєднання до яких ребрам (j, p) дозволить у

множині $m_{sp}^{r=r+1}$ одержати шляхи, що задовольняють правилам $\{L_w\}$ на основі наступного рекурентного співвідношення

$$\forall (\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r) [\mu_{sp}^{r=r+1} = L_w \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}] \quad p = (\overline{r+1}, n); \quad j = (\overline{r}, n), \quad (11)$$

де $\mu_{sj}^r \cup (j, p)$ – шлях з вершини s графа $D\Delta$ у вершину p , що проходить через проміжну вершину j і який задовольняє правилам $\{L_w\}$, тобто який одержуємо за рахунок приєднання до шляху μ_{sj}^r ребра (j, p) , якщо таке з'єднання не суперечить правилам $\{L_w\}$. Надалі для спрощення викладу, якщо шлях $\mu_{sp}^{r=r+1} = \mu_{sj}^r \cup (j, p)$ задовольняє правилам $\{L_w\}$, то будемо говорити, що він задовольняє й властивості v .

Таким чином, для рішення задачі (1 – 2), використовуючи правила $\{L_w\}$ і оптимізацію за напрямком (11), побудуємо деяку узагальнену процедуру A_0 , що дозволяє формувати множини локальних екстремумів Ω і виділяти серед них глобальний.

Уведемо узагальнену процедуру A_0 , що дозволяє на основі обраного правила відсікання $\{L_w\}$ вирішувати завдання (1 – 3).

Узагальнена процедура A_0

КРОК 1. З вершини s будуються множини шляхів $m_{sj}^{r=1}$, $j = (\overline{1}, n)$, що задовольняють властивості v . Виділяються шляхи $\mu_{sj}^{* r=1}$, що визначають локальні екстремуми областей Ω_j .

КРОК 2. Формуються множини шляхів $m_{sp}^{r=r+1}$ $p = (\overline{r+1}, n)$ наступного рангу, що задовольняють властивості v , на базі множини шляхів m_{sj}^r попереднього рангу відповідно до рекурентного співвідношення (11). В утворених множинах $m_{sp}^{r=r+1}$ здійснюється відсікання шляхів відповідно до обраного правила відсікання $\{L_w\}$ і виділяються шляхи $\mu_{sp}^{* r=r+1}$, що визначають локальні екстремуми областей Ω_p .

КРОК 3. Перевіряємо, чи всі множини $m_{sp}^{r=r+1}$ наступного рангу порожні. Якщо це так, то переходимо до кроку 4, якщо ні, то перевіряємо $r = (n - 1)$. У

випадку виконання рівності переходимо до кроку 4, інакше збільшуємо r на 1 і виконуємо крок 2.

КРОК 4. Виділяємо серед множин локальних екстремумів Ω_j $j = \overline{1, n^2/2}$ глобальний і процедура A_0 закінчує роботу.

Узагальнена процедура A_0 дозволяє визначити локальні екстремуми в Ω -областях графа ДД щораз на кроці 2 і потім на кроці 4 виділити глобальний екстремум з $n^2/2$ локальних, які отримуються на основі принципу оптимізації за напрямком (11) з використанням правил відсікання, що вводять, $\{L_w\}$ шляхів у m_{sj}^r множинах.

Таким чином, із представленої математичної моделі n -мірного одиничного куба V^n у вигляді графа ДД і сформульованого принципу оптимізації за напрямком на основі рангового підходу впливають наступні завдання:

1. Визначення стратегій відсікання $\{L_w\}$ безперспективних шляхів у множинах m_{sj}^r , що приводять до наближених і точних рішень задачі ЦЛП із БЗ (1–3).

2. Побудови наближених і точних алгоритмів на основі обраних правил відсікань $\{L_w\}$ для рішення одномірних і багатомірних задач ЦЛП із БЗ.

3. Створення паралельних обчислювальних структур як спеціалізованих пристроїв для рішення даного класу задач дискретної оптимізації.

В основу методу відсікання безперспективних варіантів для задачі (0,1) рюкзак покладемо множину стратегій $\{L_w\}$, застосування яких до узагальненої процедури A_0 приведе до побудови алгоритмів рішення цієї задачі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) з булевими змінними (БЗ).

Найбільш простою стратегією відсікання L_1 при формуванні $r=r+1$ шляхів наступного рангу в множинах $m_{sp}^{r=r+1}$, на основі процедури A_0 , є виділення в m_{sj}^r шляхів максимальної довжини за вагою функціонала c_j , довжини яких за вагою обмежень не перевищують величини b_i , тобто $d_a(\mu_{sj}^r)_i \leq b_i$. У цьому випадку шляхами, що задовольняють властивості v , будемо називати шляхи μ_{sj}^r , довжини

яких за вагою обмежень не перевищують величину b_i . Тоді, рекурентне співвідношення (11), що відповідає стратегії L_1 , приймає вигляд:

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \max_{c_j} \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}, \quad p = (\overline{r+1, n}); \quad j = (\overline{r, n}), \quad (12)$$

Розглянемо приклад рішення задачі.

Приклад 1. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 20x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 4x_6 + 1x_7$$

при обмеженні

$$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 1x_6 + 4x_7 \leq 12,$$

у відповідності зі стратегією L_1 .

Рішення. Побудуємо граф ДΔ (вершину s , що відповідає тривіальному рішенню задачі, показувати не будемо). Шлях μ_{sj}^r , $j = (\overline{r, n})$ задається ідентифікатором, що визначає, через які вершини попередніх рангів він проходить (рис. 5). Наприклад, ідентифікатор $s146$ указує на шлях $\mu_{s146}^{r=3}$, що проходить через вершини $s \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ у графі ДΔ.

У дужках на першому місці стоїть довжина шляху за вагою функціонала, а далі m ваг по першому, другому, і т. д. m -му обмеженням. Так, запис " $s146(39,10)$ " відповідає шляху $\mu_{s146}^{r=3}$, що має $d_c(\mu_{s146}^{r=3}) = 39$, а $d_a(\mu_{sj}^r)_1 = 10$. Шлях μ_{sj}^r , що належить оптимальному рішенню, позначений "*".

s1(20,7) 1							
s2(18,2)* 2	s12(38,9) 2						
s3(18,5) 3	s13(38,12) s23(36,7)* 3						
s4(15,2) 4	s14(35,9) s24(33,4) s34(33,7) 4	s124(53,11) s234(51,9)* 4					
s5(10,3) 5	s15(30,10) s25(28,5) s35(28,8) s45(25,5) 5	s125(48,12) s235(46,10) s145(45,12) 5	s2345(61,12)* 5				
s6(4,1) 6	s16(24,8) s26(22,3) s36(22,6) s46(19,3) s56(14,4) 6	s126(42,10) s236(40,8) s146(39,10) s156(34,11) 6	s1246(57,12) s2356(50,11) 6				
s7(1,4) 7	s17(21,11) s27(19,6) s37(19,9) s47(16,6) s57(11,7) s67(5,5) 7	s237(37,11) s247(34,8) s257(29,9) s167(25,12) 7	s2367(41,12) 7				
r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	

* r=4
 $\mu_{s_{2345}} \rightarrow \bar{x}^{\text{опт}} = (0111100)$.
 $f(\bar{x}^{\text{опт}}) = 61$.

Рисунок 5. Ілюстрація роботи стратегії L_1

Ітерація 1. Будуємо шляхи рангу $r = 1$, що задовольняють обмеженням задачі. Таких шляхів у графі ДД – сім: $\mu_{s_1}^{r=1} - \mu_{s_7}^{r=1}$. Серед них вибираємо шлях з найбільшою довжиною за вагою функціонала: $\mu_{s_1}^{r=1}$. Позначимо його $\mu_{s_1}^{* r=1}$.

Ітерація 2. Будуємо шляхи рангу $r = 2$ відповідно до принципу оптимізації за напрямком (11) і стратегією L_1 (12). Наприклад, сформуємо шлях $\mu_{s_{13}}^{r=2}$ на основі шляху $\mu_{s_1}^{r=1}$, додаючи ребро (1,3). При цьому довжина шляху буде: за

вагою функціонала $d_c(\mu_{s_{13}}^{r=2}) = 38$, а за вагою обмеження $d_a(\mu_{s_{13}}^{r=2})_1 = 12$, тобто шлях $\mu_{s_{13}}^{r=2}$ задовольняє обмеженню завдання й властивості v .

Аналогічно будуються інші шляхи рангу $r = 2$. Потім серед усіх шляхів рангу 2 вибираємо шлях з найбільшою довжиною $d_c(\mu_{s_j}^{r=2})$. Це шляхи $\mu_{s_{12}}^{r=2}$ і $\mu_{s_{13}}^{r=2}$.

Ітерація 3. Будуємо шляхи рангу $r = 3$ на основі шляхів рангу $r = 2$ і оптимізацією за напрямком. При додаванні до шляху $\mu_{s_{12}}^{r=2}$ ребра (2,3) утвориться шлях $\mu_{s_{123}}^{r=3}$, довжина якого за вагою обмежень $d_a(\mu_{s_{123}}^{r=3})_1 = 14$, що не задовольняє умові завдання. Тому такий шлях не показаний. Якщо в множині $m_{s_j}^{r=2}$ кілька шляхів, більший з яких при приєднанні якого-небудь ребра не задовольняє властивості v , то згідно з правила (11) вибираємо наступний шлях, що належить цій множині, але менший за вагою функціонала. На $r = 2$ рис. 5 це можна спостерігати при побудові шляху з множини $m_{s_3}^{r=2}$ в $m_{s_3}^{r=3}$. Серед усіх шляхів рангу 3 вибираємо шлях з найбільшою довжиною $d_c(\mu_{s_j}^{r=3})$. Це шлях: $\mu_{s_{124}}^{r=3}$.

Ітерація 4. Будуємо шляхи рангу $r = 4$, аналогічно описаним в ітерації 3. Серед усіх шляхів рангу 4 також вибираємо шлях з найбільшою довжиною $d_c(\mu_{s_j}^{r=4})$. Це шлях $\mu_{s_{2345}}^{r=4}$.

Ітерація 5. Будуємо шляхи рангу $r = 5$. Як видно з рис. 2.5, шляхів, що задовольняють умові завдання рангу $r = 5$ немає. Тоді із усіх шляхів $\mu_{s_j}^{r=5}$, $r = (\overline{1,4})$, $j = (\overline{r, n})$ – вибираємо найбільший: $\mu_{s_{2345}}^{r=5}$, а вектор $\vec{x}^{opt} = (0111100)$, йому відповідний, є оптимальним рішенням задачі.

Використання стратегії L_1 не завжди дає оптимальне рішення задачі. Виникнення ситуації відсівання шляхів за співвідношенням (12), що відповідають оптимальному рішенням задачі обумовлене тим, що шляхи з більшим значенням щодо функціонала можуть набирати й більшу довжину за вагою обмежень. Отже, на деякому ранзі виникає ситуація, коли через обмеження шляхи наступних рангів у графі ДА побудувати неможливо, а шляхи

з меншим значенням довжини за вагою функціонала, що мають і меншу довжину за вагою обмежень, відкинуті по стратегії L_1 . На їхній основі могли б бути отримані шляхи більшого рангу, а за рахунок цього – й більшої величини за вагою функціонала.

Позначимо через $\mu_{sj=\gamma}^{**r=q}$ шлях рангу $r = q$ з найбільшою довжиною $d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$ серед шляхів $\left\{\mu_{sj}^{*r<q}\right\}$ рангу $r < q$, що відповідають локальним екстремумам, обумовленим процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 . Тоді сформулюємо правило відсівання L_2 для одномірної задачі, на основі наступної теореми.

Теорема 1. У графі $D\Delta$ не існує шляху, що задовольняє властивості v , рангу $r < q$, для якого виконується нерівність

$$d_c\left(\mu_{sj}^{*r<q}\right) < d_c\left(\mu_{sj=\gamma}^{**r=q}\right).$$

Доказ. На кожному етапі формування множини шляхів $m_{sp}^{r=r+1}$ $p = (\overline{r}, n)$ процедурою A_0 , що використовує правило L_1 , у цих множинах будуються шляхи $\mu_{sp}^{r=r+1}$, задовольняючі властивості v , відповідно до співвідношення (12).

Припустимо, що в $D\Delta$ існує шлях $\mu_{sj=k}^{-r<q}$, довжина якого $d_c\left(\mu_{sj=k}^{-r<q}\right) < d_c\left(\mu_{sj=\gamma}^{**r=q}\right)$, й він задовольняє властивості v . Існування такого шляху можливо, якщо існують

шляхи $\left\{\mu_{sj}^{-r<q}\right\}$, що задовольняють властивості v , довжини яких $d_c\left(\mu_{sj}^{-r<q}\right)$

перевищують довжини шляхів $d_c\left(\mu_{sj}^{*r<q}\right)$, відповідних локальним екстремумам,

виділеним процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 . Покажемо, що дане припущення невірне. Для цього доведемо наступне твердження.

Твердження 1. Процедура A_0 з використанням стратегії L_1 дозволяє визначити в графі $D\Delta$ шляхи рангу $r < q$ максимальної довжини за вагою функціонала, що задовольняють властивості v , від вершини s до усіх інших вершин графа $D\Delta$.

Якщо вірно твердження 1, то значить не існує шляхів $\mu_{sj}^{-r < q}$, що задовольняють нерівності $d_c \left(\mu_{sj}^{-r < q} \right) > d_c \left(\mu_{sj}^{* r < q} \right)$, й, отже, припущення про існування шляху $\mu_{sj=k}^{r < q}$, для якого виконується нерівність $d_c \left(\mu_{sj=k}^{r < q} \right) > d_c \left(\mu_{sj}^{** r=q} \right)$, теж невірна й тоді теорема доведена.

Правомірність твердження 1 для множин $m_{sj}^{r=1}$, $m_{sj}^{r=2}$ очевидна, оскільки множини $m_{sj}^{r=1}$ містять по одному шляху рангу $r = 1$, а в множинах $m_{sj}^{r=2}$ утримуються всі шляхи $\mu_{sj}^{r=2}$ рангу $r = 2$ графа ДД. Нехай на основі множин $m_{sj}^{r=2}$ і $j = \overline{(r, n)}$ процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 сформовані множини

$$* r=3$$

$m_{sj}^{r=3}$. Виділимо в $m_{sj}^{r=3}$ шляхи μ_{sj} максимальної довжини за вагою функціонала.

$$** r=3$$

Припустимо, що в графі ДД існує шлях μ_{sj} , який задовольняє властивості v ,

$$* r=3$$

але більш довгий, ніж μ_{sj} . Відповідно до рекурентного співвідношення (12)

останнє можливо, якщо в множинах $m_{sj}^{r=2}$ є шляхи $\mu_{sj}^{* r=2}$ більш довгі, ніж шляхи

$$* r=2$$

$\mu_{sj}^{* r=2}$. Але це суперечить раніше встановленому факту, що шляхи μ_{sj} самі довгі

$$** r=3$$

шляхи рангу $r = 2$ у графі ДД. Отже, припущення про існування шляху μ_{sj} невірно, а значить твердження 1 справедливо й для множин $m_{sj}^{r=3}$.

Припустимо, що воно виконується й для $m_{sj}^{r=k < q}$, і доведемо, що воно вірно й для множин $m_{sj}^{r=k+1}$. Нехай на базі множини шляхів $m_{sj}^{r=k}$ процедура A_0 , яка використовує стратегію L_1 , побудувала множини шляхів $m_{sj}^{r=k+1}$. Виділимо в

$$* r=k+1$$

множинах $m_{sj}^{r=k+1}$ шляхи максимальної довжини μ_{sj} й, припустимо, що в графі

$$** r=k+1$$

ДД існує шлях μ_{sj} , який задовольняє властивості v , але довший $\mu_{sj}^{* r=k+1}$. Останнє

$$* r=k+1$$

можливо, якщо існує шлях $\mu_{sj}^{** r=k}$ більш довгий, ніж $\mu_{sj}^{* r=k}$, але який задовольняє

$$** r=k$$

$$* r=k$$

властивості v . Однак це суперечить первісному припущенню про те, що шляхи

* $r=k$
 μ_{sj} самі довгі шляхи рангу $r = k$ у графі $D\Delta$, і, отже, допущення про існування шляху μ_{sj} в $D\Delta$ $r = k + 1$ невірне, тобто твердження 1 справедливо й для множин $m_{sj}^{r=k+1}$.

Отже, ми показали, що твердження 1 вірно для множин $m_{sj}^{r=1}$, $m_{sj}^{r=2}$ і довели, що воно виконується для $m_{sj}^{r=3}$. Далі було припущено, що воно поширюється й на множину $m_{sj}^{r=k}$ й доведено, що у випадку правильності припущення, твердження 1 справедливо й для множин рангу $r = k + 1$.

Таким чином, на основі принципу повної математичної індукції твердження 1 справедливо й для довільних множин $m_{sj}^{r<q}$, тому що при $r > q$ множина шляхів $m_{sj}^{r<q}$ порожня й, виходить, теорема 1 вірна.

З доведеної теореми 1 слідує стратегія відсікання L_2 , що дозволяє значення функціонала шляху μ_{sj} використовувати як верхню оцінку для відсікання шляхів у множинах $m_{sj}^{r<q}$ графа $D\Delta$. Стратегія L_2 використовується при побудові багатоетапних алгоритмів, тому приклад, що пояснює роботу стратегії L_2 , буде розглянутий пізніше.

Не порушуючи стратегій L_1 і L_2 , можна ввести додаткове відсікання в множинах шляхів m_{sj}^r , що зображує стратегію L_3 , яка заснована на властивості графа $D\Delta$ і полягає в наступному. Зі структури графа $D\Delta$ видно, що для кожної його вершини j , яка відповідає області Ω_j , вага γ_j дорівнює сумі коефіцієнтів c_j у функціоналі (2.4), обумовлена за правилом:

$$\gamma_j = c_{j+1} + c_{j+2} + \dots + c_n, \quad \gamma_n = 0; \quad j = \overline{(1, n-1)}, \quad (13)$$

представляє верхню оцінку збільшення величини значення локального екстремума в області Ω_j на усіх наступних рангах. Скорочення числа

формованих шляхів μ_{sj}^r у множинах m_{sj}^r може бути досягнуто, якщо виконуються умови, обумовлені наступним досить очевидним твердженням 2.

Твердження 2. Якщо сума довжини шляху $d_c(\mu_{sj}^r)$ з підмножини r m_{sj}^r у вершину w і вага γ_w цієї вершини менша за вже отриману максимальну довжину $d_c(\mu_{sj=p}^r)$, то шляхи наступного рангу, побудовані на основі μ_{sj}^r , не можуть визначати оптимальне рішення задачі.

Справедливість твердження 2 слідує з того, що процедура A_0 зі стратегією L_1 вибирає глобальний екстремум із усіх локальних, а найбільша довжина за рахунок продовження шляху μ_{sj}^r вже менша одного з локальних екстремумів.

Таким чином, перевірка умови:

$$d_c(\mu_{sp}^r) + \gamma_p < \max_{\{c_j\}} \left\{ d_c \left(\mu_{sp}^{*r} \right) \right\}, \quad (14)$$

де $d_c(\mu_{sp}^r)$ – довжина шляху μ_{sp}^r до вершини p рангу r за вагою c_j ; дозволяє виключити цей шлях з подальшого аналізу, як безперспективний, якщо умова виконана. На цій перевірці заснована стратегія L_3 .

Приклад 2. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 20x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 4x_6 + 1x_7$$

при обмеженні

$$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 1x_6 + 4x_7 \leq 12$$

у відповідності зі стратегією L_1 і L_3 .

Рішення. Ілюстрація рішення приводиться на рис. 6. Тут і далі підкреслення шляху означає те, що тільки на основі цього шляху відбувається побудова множин наступного рангу, інакше шлях виключається з подальшого аналізу. Ліворуч у вигляді стовпця проставлене значення γ_j , $j = (\overline{1,7})$ (13), обумовлене для кожної вершини графа ДД. Так, наприклад $\gamma_3 = c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 15 + 10 + 4 + 1 = 30$.

γ_j							
66	<u>s1(20,7)</u> 1						
48	<u>s2(18,2)*</u> 2	<u>s12(38,9)</u> 2					
30	<u>s3(18,5)</u> 3	<u>s13(38,12)</u> <u>s23(36,7)*</u> 3					
15	<u>S4(15,2)</u> 4	<u>s14(35,9)</u> <u>s24(33,4)</u> <u>s34(33,7)</u> 4	<u>s124(53,11)</u> <u>s234(51,9)*</u> 4				
5			<u>s125(48,12)</u> 5	<u>s2345(61,12)*</u> 5			
1							
0							
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	r = 7

* $r=4$
 $\mu_{s_{2345}} \rightarrow \bar{x}^{onm} = (0111100).$
 $f(\bar{x}^{onm}) = 61$

Рисунок 6. Ілюстрація роботи стратегії L_1 і L_3

Відмінною рисою від прикладу 2 є наявність порожніх множин $m_{s_j}^r$. Це обумовлено застосуванням відсікання за умови (14). Наприклад, побудуємо шлях $\mu_{s_{15}}^{r=2}$. До цього часу $\max \left\{ d_c \left(\mu_{s_{12}}^{* r=2} \right) \right\} = 38$, а $d_c(\mu_{s_{12}}^{r=2}) = 30$. Тоді $d_c(\mu_{s_{15}}^{r=2}) + \gamma_5 = 35$. Отже, на основі шляху $\mu_{s_{15}}^{r=2}$, згідно з твердженням 2, неможливо побудувати шляхи, що перевищують за вагою функціонала значення вже існуючого локального екстремуму: шляхи $\mu_{s_{12}}^{* r=2}$. В іншому порядок рішення не змінився в порівнянні із прикладом 1.

Як видно із прикладу 2, спільне застосування стратегій L_1 і L_3 дозволяє в 3 рази зменшити число векторів, що будуються в множинах $m_{s_j}^r$, у порівнянні із застосуванням однієї стратегії L_1 .

У результаті роботи процедури A_0 зі стратегіями L_1, L_3 залишаються множини m_{sj}^r , для яких $r > q$ (у прикладах 1 і 2 вони є порожніми), а для ефективної фільтрації безперспективних шляхів необхідно мати оцінки значення функціонала в областях Ω_j , $j = (\overline{1, n^2/2})$ при $r > q$. Для цього введемо стратегію вибору шляхів з множини L_4 , що ґрунтується на процедурі, яка дозволяє одержати шляхи максимально можливого рангу r у графі ДД. Її можна реалізувати, якщо в ДД визначити найкоротші шляхи за вагою обмежень на основі процедури A_0 між вершиною s і всіма іншими вершинами графа ДД, при цьому рекурентне співвідношення (11) для одомірної задачі (4 – 6) прийме наступний вигляд.

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \min_{a_{ij}} \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}; \quad p = (\overline{r+1, n}); \quad j = (\overline{r, n}), \quad i=1. \quad (15)$$

Неважко побачити, що при цій стратегії формування шляхів у множинах m_{sj}^r залишається справедливим твердження 2 і для відсівання шляхів у множинах m_{sj}^r можна використовувати умову (14).

Приклад 3. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30,$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_4 (рис. 7).

Рішення. З кожної множини m_{sj}^r для подальшого аналізу вибираються шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$, що мають мінімальне значення за вагою $d_a(\mu_{sj}^r)$. Такі шляхи на рис. 2.7 підкреслені. Інші – виключаються з подальшого аналізу за умовою (15).

На ранзі $r = 4$ у множині $m_{s6}^{r=4}$ шлях $\mu_{s1246}^{r=4}$, що лежить в основі оптимального, губиться через те, що існує шлях $\mu_{s2456}^{r=4}$ менший за вагою функціонала й менший за вагою обмеження. Слід зазначити також, що для даного прикладу

застосування стратегій L_3 і L_4 не дає оптимального рішення задачі. Так,

$$*r=6$$

отриманий шлях $\mu_{s_{245678}}$ не є оптимальним, тому що останній був відкинтий

на ранзі $r = 4$ у множині $m_{s_6}^{r=4}$ із зазначеної вище причини.

γ_j							
197	<u>s1(47,10)*</u>						
	1						
152	<u>s2(45,4)</u>	<u>s12(92,14)*</u>					
	2	2					
114	<u>s3(38,10)</u>	<u>s13(85,20)</u>	<u>s123(130,24)</u>				
		<u>s23(83,14)</u>					
	3	3	3				
82	<u>s4(32,8)</u>	<u>s14(79,18)</u>	<u>s124(124,22)*</u>				
		<u>s24(77,12)</u>	<u>s234(115,22)</u>				
		<u>s34(70,18)</u>					
	4	4	4	4			
60	<u>s5(22,9)</u>	<u>s15(69,19)</u>	<u>s125(114,23)</u>				
		<u>s25(67,12)</u>	<u>s235(105,23)</u>				
		<u>s35(60,19)</u>	<u>s245(99,21)</u>				
		<u>s45(54,17)</u>					
	5	5	5	5	5		
38	<u>s6(22,5)</u>	<u>s16(69,15)</u>	<u>s126(114,19)</u>	<u>s1236(152,29)</u>			
		<u>s26(67,9)</u>	<u>s236(105,19)</u>	<u>s1246(146,27)*</u>			
		<u>s36(60,15)</u>	<u>s246(99,17)</u>	<u>s2456(121,26)</u>			
		<u>s46(54,13)</u>					
	6	6	6	6	6	6	6
18			<u>s127(112,15)</u>		<u>s24567(141,27)</u>		
	7	7	7	7	7	7	7
0						<u>s245678(159,28)</u>	
	8	8	8	8	8	8	8
	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$	

$$*r=6$$

$$\mu_{s_{124678}} \rightarrow \bar{x}^{\text{опт}} = (11010111).$$

$$f(\bar{x}^{\text{опт}}) = 184, \quad k = 3.$$

Рисунок 7. Ілюстрація роботи стратегій L_3 і L_4

Реалізація процедури A_0 з урахуванням стратегій L_3 , L_4 дозволяє сформулювати додаткову стратегію L_5 відсікання безперспективних шляхів у множинах $m_{s_j}^r$, обумовлену наступною теоремою 2.

Теорема 2. Якщо з множини $m_{sj}^r, j = (\overline{r_{\max}, n})$, максимального рангу r_{\max} , побудованого процедурою A_0 зі стратегіями L_3, L_4 , вибрати шлях μ_{sw}^r с найбільшим значенням за вагою функціонала c_j , то у випадку повторного рішення вихідного завдання досить формувати шляхи першого рангу $r = 1$ у множині $m_{sp}^r, p = (\overline{1, k})$, де:

$$k = w - r_{\max} + 1, \quad (16)$$

а w -номер множини m_{sw}^r зі шляхом максимальної довжини за вагою функціонала, обумовлений при першому рішенні завдання.

Доказ. Припустимо, що існує шлях μ_{sp}^{*r} ($p > k$), який досягає значення максимального рангу r_{\max} . Оскільки $p > k$, то шлях μ_{sp}^{*r} у графі ДД буде проходити по нижніх вершинах (рис. 3). Але ваги c_j , згідно з обмеженням (6), відсортовані в порядку убутання й, вершинам, що перебувають на більш низьких горизонтальних лінійках, в ДД відповідають і менші ваги за функціоналом.

Тому на кожному ранзі шлях μ_{sp}^{*r} зможе набрати не більш, ніж шлях μ_{sw}^r , а, отже, він і в сумі набере за вагою $\{c_j\}$ довжину не більшу, ніж μ_{sw}^r . Що було потрібно довести.

Відповідно до стратегії відсікання L_5 , у випадку повторного рішення задачі (приклад 3) яким-небудь алгоритмом, будувати вектори множин з $m_{s4}^{r=1}$ по $m_{s8}^{r=1}$ не потрібно, тому що кінцевою вершиною шляху максимального рангу $\mu_{s256788}^{r=6}$ є вершина $w = 8$. Ранг цього шляху дорівнює $r_{\max} = 6$, згідно за формулою (16) $k = 3$, а виходить, що будувати шляхи першого рангу необхідно тільки в $m_{s1}^{r=1}, m_{s2}^{r=1}, m_{s3}^{r=1}$.

Найбільш важливою стратегією L_6 є стратегія, заснована на понятті виділення коридору в множинах m_{sj}^r , що дозволить будувати точні алгоритми рішення завдання (4 – 6). Оскільки нумерація змінних і вершин у графі ДД відповідає порядку убутання коефіцієнтів c_j у функціоналі, а процедура A_0 на

кожному етапі формує множини m_{sj}^r , починаючи з індексів $j = (\overline{r, n})$, то шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ виявляться завжди відсортованими в порядку убуття довжин за вагою функціонала.

У вигляді теореми 3 сформулюємо правило, що дозволяє в множині m_{sj}^r виділити шлях $\bar{\mu}_{sj}^r$ з довжиною $d_c(\bar{\mu}_{sj}^r)$, стосовно якої всі шляхи з меншим значенням довжини за вагою функціонала можуть бути виключені з аналізу як неперспективні.

Теорема 3. Якщо відсортувати в множині $m_{sj}^r, j = (\overline{r, n})$ рангу r вектора в порядку убуття за вагою функціонала c_j , то шляхи, в яких довжина $d_c(\mu_{sj}^r)$ менше довжини $d_c\left(\begin{matrix} \min \mu_{sj}^r \\ a_{ij} \end{matrix}\right)$, не можуть визначати оптимальне рішення задачі.

Доказ. Припустимо, що на основі шляху μ_{sj}^{*r} з множини m_{sj}^r , в якого довжина $d_c\left(\begin{matrix} *r \\ \mu_{sj} \end{matrix}\right)$ менше, ніж довжина $d_c\left(\begin{matrix} \min \mu_{sj}^r \\ a_{ij} \end{matrix}\right)$, вдалося побудувати оптимальне рішення завдання (8 – 11). Тоді в множині $m_{sp}^{r=r+1}, p = (\overline{r, n})$ наступного рангу повинен потрапити шлях і мінімальний за вагою обмежень, адже він тим більше буде задовольняти властивості v . Однак, довжина за вагою функціонала в такого шляху буде більша, ніж в μ_{sj}^{*r} і, отже, припущення про існування μ_{sj}^{*r} невірне, а цей шлях виключити з подальшого аналізу, що й було потрібно довести.

Приклад 4. Потрібно максимізувати функціонал

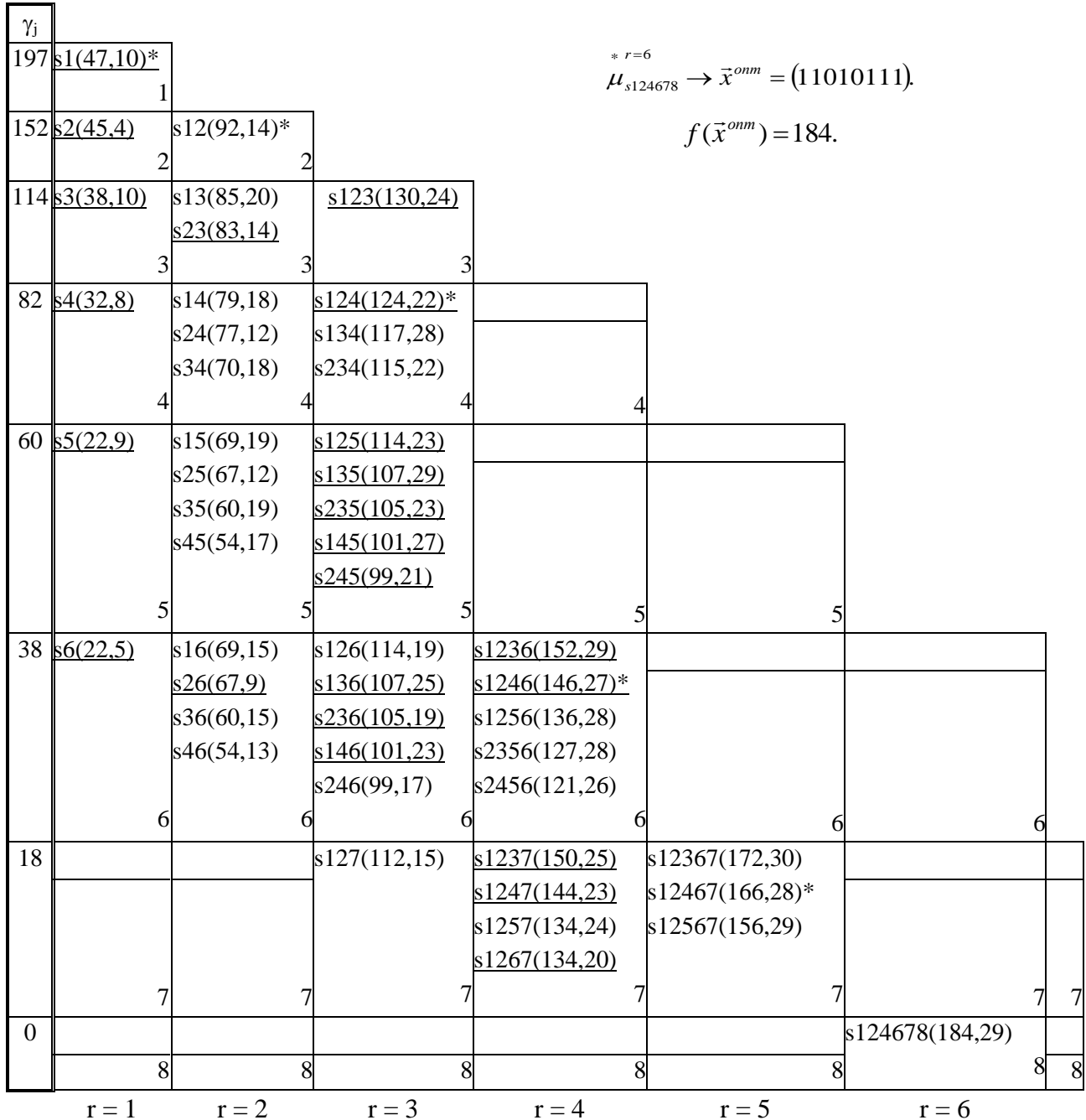
$$f(\vec{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_6 .

Рішення. Побудова шляхів наступного рангу буде здійснюватися на основі шляхів попереднього рангу. Усі шляхи, на основі яких і відбувається така побудова, виділені підкресленням (рис. 8).



* $r=6$
 $\mu_{s124678} \rightarrow \bar{x}^{onm} = (11010111).$
 $f(\bar{x}^{onm}) = 184.$

Рисунок 8. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_6

Так, наприклад, у множині $m_{s5}^{r=2}$ шляху $\mu_{s35}^{r=2}$, $\mu_{s45}^{r=2}$ виключаються з подальшого розгляду, тому що згідно з теоремою 3 існує шлях $\mu_{s25}^{r=2}$ у вершину 5 більший за вагою функціонала й менший за вагою обмежень.

На відміну від прикладу 3, застосування стратегій L_3 і L_6 дозволяє точно рішити дану (і будь-яку іншу) задачу.

Теорема 3 визначає поняття коридору.

Визначення. Під *одномірним коридором* з множини m_{sj}^r в множину $m_{sp}^{r=r+1}$ будемо розуміти сукупність шляхів μ_{sj}^r , які перебувають між верхньою границею множини m_{sj}^r і його нижньою границею, що задовольняють властивості v у множині $m_{sp}^{r=r+1}$. Верхня границя визначається шляхом з максимальною $d_c(\mu_{sj}^r)$, а нижня – теоремою 3.

Виходячи з поняття коридору, можна запропонувати наступну стратегію L_7 , яка являє собою ще одну стратегію вибору шляхів, що r полягає в тому, щоб з множини m_{sj}^r рангу r у множині $m_{sp}^{r=r+1}$, $p = (\overline{r, n})$, наступного рангу вибирати шляхи, що задовольняють властивості v і є максимальними за вагою функціонала c_j і мінімальним за вагою обмежень a_{lj} , що відповідає рекурентним співвідношенням (12), (15).

Приклад 5. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 50x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 41x_4 + 37x_5 + 36x_6 + 31x_7 + 27x_8$$

при обмеженні

$$9x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 1x_8 \leq 27$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_7 (рис. 9).

Рішення. Даний приклад розкриває поняття одномірного коридору, тобто під коридором у множині $m_{s5}^{r=3}$ мається на увазі підмножина векторів, що складається зі шляхів $\mu_{s125}^{r=3}$, $\mu_{s135}^{r=3}$, $\mu_{s235}^{r=3}$, а відповідно до стратегії L_7 для подальшого аналізу беруться тільки два шляхи $\mu_{s125}^{r=3}$ та $\mu_{s235}^{r=3}$, які підкреслені. Інші виключаються з множини $m_{s5}^{r=3}$. Аналогічно будуються множини шляхів усіх рангів.

Розглянемо тепер правила фільтрації безперспективних шляхів усередині виділеного коридору, починаючи зі стратегії L_8 , заснованої на твердженні 3.

γ_j								
267	<u>s1(50,9)</u>							
	1							
217	<u>s2(50,7)*</u>	<u>s12(100,16)</u>						
	2	2						
172	<u>s3(45,6)</u>	<u>s13(95,15)</u>	<u>s123(145,22)</u>					
	3	<u>s23(95,13)*3</u>		3				
131	<u>s4(41,9)</u>	<u>s14(91,18)</u>	<u>s124(141,25)</u>					
		<u>s24(91,16)</u>	<u>s134(136,24)</u>					
	4	<u>s34(86,15)</u>	<u>s234(136,22)</u>	4				
94	<u>s5(37,6)</u>	<u>s15(87,15)</u>	<u>s125(137,22)</u>					
		<u>s25(87,13)</u>	<u>s135(132,21)</u>					
		<u>s35(82,12)</u>	<u>s235(132,19)*</u>					
	5	<u>s45(78,15)</u>	<u>s145(128,24)</u>					
			<u>s345(123,21)</u>	5				
58	<u>s6(36,6)</u>	<u>s16(86,15)</u>	<u>s126(136,22)</u>	<u>s2356(168,25)*</u>				
		<u>s26(86,13)</u>	<u>s136(131,21)</u>					
		<u>s36(81,12)</u>	<u>s236(131,19)</u>					
		<u>s46(77,15)</u>	<u>s146(127,24)</u>					
		<u>s56(73,12)</u>	<u>s156(123,21)</u>					
			<u>s346(122,21)</u>					
			<u>s356(118,18)</u>					
	6	6	6	6	6	6	6	6
27	<u>s7(31,5)</u>	<u>s17(81,14)</u>	<u>s127(131,21)</u>	<u>s1237(176,27)</u>				
		<u>s27(81,12)</u>	<u>s137(126,20)</u>	<u>s1257(168,27)</u>				
		<u>s37(76,11)</u>	<u>s237(126,18)</u>	<u>s2347(167,27)</u>				
			<u>s147(122,23)</u>	<u>s1267(167,27)</u>				
			<u>s157(118,20)</u>	<u>s2357(163,24)</u>				
				<u>s3567(149,23)</u>				
	7	7	7	7	7	7	7	7
0					<u>s23568(195,26)*</u>			
	8	8	8	8	8	8	8	8
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5			

$$* r=5 \quad \mu_{s23568} \rightarrow \bar{x}^{onm} = (01101101).$$

$$f(\bar{x}^{onm}) = 195.$$

Рисунок 9. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_7

Твердження 3. Якщо в коридорі існують два шляхи – $\mu_{s_j} \in m_{s_j}^r$ й $\mu_{s_j} \in m_{s_j}^{**r}$

– для яких $d_c\left(\mu_{s_j}^{*r}\right) > d_c\left(\mu_{s_j}^{**r}\right)$ т $d_a\left(\mu_{s_j}^{*r}\right)_1 \leq d_a\left(\mu_{s_j}^{**r}\right)_1$, то вектор \bar{x} , що відповідає

шляху μ_{sj}^{*r} не може належати оптимальному рішенню задачі (4 – 6). Покажемо справедливість твердження 3. Для цього припустимо, що на основі шляху μ_{sj}^{**r} можна побудувати оптимальне рішення. Останнє означає, що на наступних рангах шлях μ_{sj}^{**r} набере більше значення за вагою функціонала, ніж шлях μ_{sj}^{*r} , тобто $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) < d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. Але шлях μ_{sj}^{*r} може бути побудований у ту ж множину m_{sj}^r , що й шлях μ_{sj}^{**r} , який задовольняє властивості v , але має довжину $d_a\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \leq d_a\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. При цьому за вагою функціонала до цього моменту шлях μ_{sj}^{*r} має довжину більшу, ніж шлях μ_{sj}^{**r} . Отже, кожний з них набере ту саму величину за вагою c_j , але на початку $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) > d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. Виходить, що припущення про те, що на основі шляху μ_{sj}^{**r} можна побудувати оптимальне рішення – не вірно, а твердження 3 – справедливо.

Приклад 6. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_8 (рис. 10).

Рішення. Розглянемо застосування стратегії L_8 до однієї з множин графа $D\Delta$ – множини $m_{s5}^{r=3}$. У результаті в ньому залишаються лише два шляхи – $\mu_{s125}^{r=3}$, $\mu_{s245}^{r=3}$ – що відповідають двом векторам: (11001000) і (01011000), а без цього правила їх було 5 (див. приклад 4). Аналогічний виграш і для інших множин.

γ_j							
197	s1(47,10)*						
	1						
152	s2(45,4)	s12(92,14)*					
	2	2					
114	s3(38,10)	s13(85,20)	s123(130,24)				
		s23(83,14)					
	3	3	3				
82	s4(32,8)	s14(79,18)	s124(124,22)*				
		s24(77,12)	s134(117,28)				
		s34(70,18)	s234(115,22)				
	4	4	4	4			
60	s5(22,9)	s15(69,19)	s125(114,23)				
		s25(67,12)	s135(107,29)				
		s35(60,19)	s235(105,23)				
		s45(54,17)	s145(101,27)				
			s245(99,21)				
	5	5	5	5	5		
38	s6(22,5)	s16(69,15)	s126(114,19)	s1236(152,29)			
		s26(67,9)	s136(107,25)	s1246(146,27)*			
		s36(60,15)	s236(105,19)	s1256(136,28)			
		s46(54,13)	s146(101,23)	s2456(121,26)			
			s246(99,17)				
	6	6	6	6	6	6	6
18			s127(112,15)	s1237(150,25)	s12367(172,30)		
				s1247(144,23)	s12467(166,28)*		
				s1257(134,24)			
				s1267(134,20)			
	7	7	7	7	7	7	77
0						s124678(184,29)	
	8	8	8	8	8	8	88
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	

* $r=6$
 $\mu_{s124678} \rightarrow \vec{x}^{onm} = (11010111).$
 $f(\vec{x}^{onm}) = 184.$

Рисунок 10. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_8

Далі розглянемо стратегію L_9 фільтрації рішень у коридорі на основі *каліброваних векторів*. Для цього введемо поняття каліброваного вектора $\bar{y}_j, j = (\bar{1}, \bar{n})$ для кожної вершини j графа $D\Delta$.

Множина $\{\bar{y}_j\}$ утворить калібровану шкалу, яка дає верхню оцінку r_s , для будь-якого вектора \bar{x} , котрий відповідає шляху μ_{sj}^r , і що дозволяє визначити, на скільки рангів можна ще продовжити шлях μ_{sj}^r , що задовольняє властивості v .

Побудова каліброваних векторів \vec{y}_j почнемо з першої вершини графа ДД, спочатку відсортувавши коефіцієнти $\{a_{1j}\}$ у порядку зростання. Утвориться вектор \vec{a}'_{1q} , $q = (\overline{1, n})$, в якого $a'_{11} \leq a'_{12} \leq \dots \leq a'_{1n}$. У цьому векторі \vec{a}'_{1q} викреслюємо $a'_{1q} = a_{11}$, після чого формуємо компоненти каліброваного вектора \vec{y}_1 за правилом:

$$y_{1k} = a_{1k} + y_{1(k-1)}; \quad k = (\overline{1, n-1}); \quad y_{10} = 0. \quad (17)$$

Далі у \vec{a}'_{1q} викреслюємо $a'_{1q} = a_{12}$, після чого аналогічно правилу (17) продовжуємо формувати компоненти вектора \vec{y}_2 , \vec{y}_3 і т. д. На j -му кроці викреслюємо в \vec{a}'_{1q} елемент $a'_{1q} = a_{1j}$, тоді:

$$y_{jk} = a_{jk} + y_{j(k-1)}; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad y_{j0} = 0; \quad y_{n0} = b_1; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (18)$$

Приклад 7. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 \quad (19)$$

при обмеженні

$$10x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 10. \quad (20)$$

Для задачі (19–20) є вектор $\vec{a}'_{1q} = \{2,3,4,7,10\}$. З нього видаляємо $a'_{15} = a_{11} = 10$, тоді $\vec{a}'_{1q} = \{2,3,4,7\}$, а $\vec{y}_1 = \{0,2,5,9,16\}$. Далі викреслюємо $a'_{1q} = a_{12} = 3$. Вектор $\vec{a}'_{1q} = \{2,4,7\}$, а калібрований вектор $\vec{y}_2 = \{0,2,6,13\}$. Аналогічним чином за допомогою (18) будуються калібровані вектори для вершин 3, 4, 5: $\vec{y}_3 = \{0,2,6\}$; $\vec{y}_4 = \{0,2\}$; $\vec{y}_5 = \{0\}$. Сформулюємо правила, за яких за допомогою каліброваного вектора \vec{y}_j для вершин $j = (\overline{1, n})$ можна визначити шляхи μ_{sj}^r в графі ДД та верхню оцінку \hat{r}_s максимального значення рангу, що

продовжує r шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$ (тобто яке число одиниць може додатися у вектор \vec{x}).

Правило K_1

а) обчислюємо для шляху μ_{sj}^r величину $\Delta d = b_1 - d_a(\mu_{sj}^r)$;

б) у каліброваному векторі \vec{y}_j для вершини j знаходимо номер k , $k = \overline{(0, n-j)}$ елемента y_{jk} , починаючи з якого $y_{jk} > \Delta d$ (якщо $\forall y_{jk} < \Delta d$, то $k = n - j + 1$);

в) визначаємо значення r_B для шляху μ_{sj}^r в графі $D\Delta$: $r_B = k - 1$.

У прикладі (19–20) шлях $\mu_{s2}^{r=1}$ має $d_a(\mu_{s2}^{r=1}) = 3$. Шляху $\mu_{s2}^{r=1}$ відповідає вектор $\vec{x} = (01000)$. Визначимо $r_B(\mu_{s2}^{r=1})$ за правилом K_1 .

а) $\Delta d = b_1 - d_a(\mu_{s2}^{r=1}) = 10 - 3 = 7$;

б) в \vec{y}_2 елемент $y_{23} > \Delta d$ ($13 > 7$), значить $k = 3$;

в) значення $\hat{r}_6(\mu_{s2}^{r=1}) = k - 1 = 3 - 1 = 2$.

Отже, шлях в $\mu_{s2}^{r=1}$ у графі $D\Delta$ можна продовжити, задовольняючи обмеженням, не більш, ніж на два ранги. Справедливість застосування правила K_1 для визначення r_B підтверджується теоремою 4.

Теорема 4. *Якщо шлях μ_{sj}^r у вершину j рангу r у графі $D\Delta$ має довжину за вагою обмежень $d_a(\mu_{sj}^r) = d$, то верхня оцінка \hat{r}_6 , побудована за правилом K_1 , визначає максимальне число рангів r , на яке може бути продовжений шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$.*

Доказ. Припустимо, що для шляху μ_{sj}^r з вершини j нашлося таке його продовження $\mu_{sj}^{r'}$, ранг якого $r' > r_B + 1$. Але, відповідно до пункту а) правила K_1 $\Delta d'$ для $\mu_{sj}^{r'}$ буде більше Δd для шляху $\mu_{sj}^{r+\hat{r}_6}$, що не можливо, тому що b_1 фіксовано й обидва шляхи є продовженням шляху μ_{sj}^r з довжиною $d_a(\mu_{sj}^r) = d$.

Отже, $d' = \Delta d$ і припущення про існування $\mu_{sj}^{r'}$ не вірно. Теорема доведена.

До цього ми не враховували величину коефіцієнтів c_j при функціоналі, а прогноз здійснювали тільки на основі коефіцієнтів a_{ij} . Поставимо у відповідність кожному вектору \bar{y}_j вектор \bar{z}_j , елементи якого є верхніми оцінками \hat{z}_e довжини шляху μ_{ij}^r за вагою функціонала c_j . Компоненти вектора \bar{z}_j для вершини j формуються відповідно до правила K_2 .

Правило K_2 .

Нехай перший компонент вектора \bar{z}_j вершини j дорівнює $\hat{z}_{j1}^e = c_{j+1}$, другий – $\hat{z}_{j2}^e = c_{j+2} + \hat{z}_{j1}^e$; третій $\hat{z}_{j3}^e = c_{j+3} + \hat{z}_{j2}^e$; й т. д. k -й компонент –

$$\hat{z}_{jk}^B = c_{j+k} + \hat{z}_{j(k-1)}^B; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad \hat{z}_{j0}^B = 0; \quad \hat{z}_{n0}^B = 0; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (21)$$

Тоді, за співвідношенням (21) побудуємо \bar{z}_j для задачі (19–20). У вершині $j=1$ елементи вектора \bar{z}_1 відповідно до правила K_2 будуть:

$$\hat{z}_{10}^e = 0;$$

$$\hat{z}_{11}^e = c_{j+1} = c_2 = 15;$$

$$\hat{z}_{12}^e = c_3 + \hat{z}_{11}^e = 12 + 15 = 27;$$

$$\hat{z}_{13}^e = c_4 + \hat{z}_{12}^e = 8 + 27 = 35;$$

$$\hat{z}_{14}^e = c_5 + \hat{z}_{13}^e = 2 + 35 = 37.$$

Для вершини $j = 2$ згідно співвідношенням (21) маємо:

$$\hat{z}_{20}^e = 0;$$

$$\bar{z}_1 = \{0, 17, 33, 46, 56, 65, 74, 83\}$$

$$\hat{z}_{22}^e = c_4 + \hat{z}_{21}^e = 8 + 12 = 20;$$

$$\hat{z}_{23}^e = c_5 + \hat{z}_{22}^e = 2 + 20 = 22.$$

Аналогічно будуються вектори для інших вершин графа ДД. Таким чином, для приклада (19–20) калібровані оцінні вектори для вершин $j = (\overline{1, n})$ мають вигляд:

$$j = 1; \quad \bar{y}_1 = \{0, 2, 5, 9, 16\}; \quad \bar{z}_1 = \{0, 15, 27, 35, 37\}; \quad \gamma_1 = 37;$$

$$j = 2; \quad \bar{y}_2 = \{0, 2, 6, 13\}; \quad \bar{z}_2 = \{0, 12, 20, 22\}; \quad \gamma_2 = 22;$$

$$\begin{array}{llll}
 j = 3; & \bar{y}_3 = \{0,2,6\}; & \bar{z}_3 = \{0,8,10\}; & \gamma_3 = 10; \\
 j = 4; & \bar{y}_4 = \{0,2\}; & \bar{z}_4 = \{0,2\}; & \gamma_4 = 2; \\
 j = 5; & \bar{y}_5 = \{0\}; & \bar{z}_5 = \{0\}; & \gamma_5 = 0.
 \end{array}$$

Неважно бачити, що у векторах \bar{z}_j останні елементи збігаються з γ_j -вагою (13), що може набрати шлях μ_{sj}^r з вершини j на усіх наступних рангах при задоволенні їм властивості v . Як треба з (14), на основі рангового підходу можна більш точно визначати верхню оцінку $\hat{z}_e = f(\hat{r}_e)$ за рахунок того, що шлях μ_{sj}^r не завжди може бути продовжений на всі ранги, що не задовольняє властивості v . Інакше кажучи, на підставі рівності

$$\gamma_j = \hat{z}_{j\bar{r}_e}^e(\mu_{sj}^r) \quad (22)$$

можна збільшити ефективність фільтрації безперспективних шляхів, замінюючи в умові (14) γ_p на γ_j згідно з формулою (2.22), що дає стратегія L_9 на основі наступної нерівності:

$$d_c(\mu_{sp}^r) + \hat{z}_{p\bar{r}_e}^e(\mu_{sp}^r) < \max_{c_j} \left\{ d_c \left(\mu_{sp}^{*r} \right) \right\}. \quad (23)$$

Перевірка нерівності (23) дозволить відсікати шлях μ_{sp}^r з подальшого аналізу як не перспективний, тому що ми заздалегідь знаємо, що більш ніж на r_B рангів шлях μ_{sp}^r не може бути продовжений.

Приклад 8. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30$$

у відповідності зі стратегіями L_3, L_8, L_9 (рис. 11).

$\bar{y}_1 = \{0,1,2,6,11,19,28\}$ $\bar{z}_1 = \{0,45,83,115,137,159,179\}$	S1(47,10)5*					
	1					
$\bar{y}_2 = \{0,1,2,7,15,24,34\}$ $\bar{z}_2 = \{0,38,70,92,114,134,152\}$	S2(45,4)5	s12(92,14)4*				
	2	2				
$\bar{y}_3 = \{0,1,2,7,15,24\}$ $\bar{z}_3 = \{0,32,54,76,96,114\}$	s3(38,10)4	s13(85,20)3	s123(130,24)2			
	3	s23(83,14)4				
$\bar{y}_4 = \{0,1,2,7,16\}$ $\bar{z}_4 = \{0,22,44,64,82\}$	s4(32,8)4	s14(79,18)3	s124(124,22)3*			
	4	s24(77,12)4	s134(117,28)2			
		s34(70,18)3	s234(115,22)3			
$\bar{y}_5 = \{0,1,2,7\}$ $\bar{z}_5 = \{0,22,42,60\}$	s5(22,9)3	s15(69,19)3	s125(114,23)3			
	5	s25(67,12)3	s235(105,23)3			
		s35(60,19)3	s145(101,27)2			
		s45(54,17)3	s245(99,21)3			
	5	5	5	5	5	5

* r=6
 $\mu_{s124678} \rightarrow \bar{x}^{opt} = (11010111)$
 $f(\bar{x}^{opt}) = 184.$

Рисунок 11. Ілюстрація роботи стратегії L₃, L₈ та L₉

$\bar{y}_6 = \{0,1,2\}$ $\bar{z}_6 = \{0,20,38\}$	s6(22,5)2	s16(69,15)2	s126(114,19)2	s1236(152,29)1		
		s26(67,9)2	s136(107,25)2	s1246(146,27)2*		
		s36(60,15)2	s236(105,19)2	s1256(136,28)2		
		s46(54,13)2	s146(101,23)2	s2456(121,26)2		
	6	6s246(99,17)2				6
$\bar{y}_7 = \{0,1\}$ $\bar{z}_7 = \{0,18\}$			s127(112,15)1	s1237(150,25)1	s12367(172,30)0	
				s1247(144,23)1	s12467(166,28)1*	
	7	7	7	7	7	7
$\bar{y}_8 = \{30\}$ $\bar{z}_8 = \{0\}$						s124678(184,29)0*
	8	8	8	8	8	8
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6

Рисунок 11. Закінчення

Рішення. На початку кожної вершини j графа ДЛ зазначені калібровані вектори \bar{y}_j й $\bar{z}_j, j = (\overline{1, n})$. За дужками кожного шляху μ_{sj}^r показана величина r_B . Так, для шляху $\mu_{s14}^{r=2}$ оцінка дорівнює $\hat{r}_6 = 3$.

Додаткове використання правила K_2 сприяло ефективному відсіванню безперспективних варіантів рішення.

Дотепер була розглянута множина $\{L_w\}$ стратегій відсікання для одновірної задачі ЦЛП із БЗ. Сформулюємо стратегії відсікання для m -вірних задач.

У випадку рішення m -вірних задач найбільш простою стратегією вибору є стратегія L_{10} , заснована на рекурентному співвідношенні (12). Принцип

формування шляхів у множинах ідентичний стратегії L_1 , за винятком необхідності виконувати m раз перевірку (2).

Приклад 9. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 16x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 5x_6 + 2x_7$$

при обмеженні

$$4x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 1x_7 \leq 9,$$

$$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 3x_6 + 1x_7 \leq 9$$

у відповідності зі стратегіями L_3 і L_{10} (рис. 12).

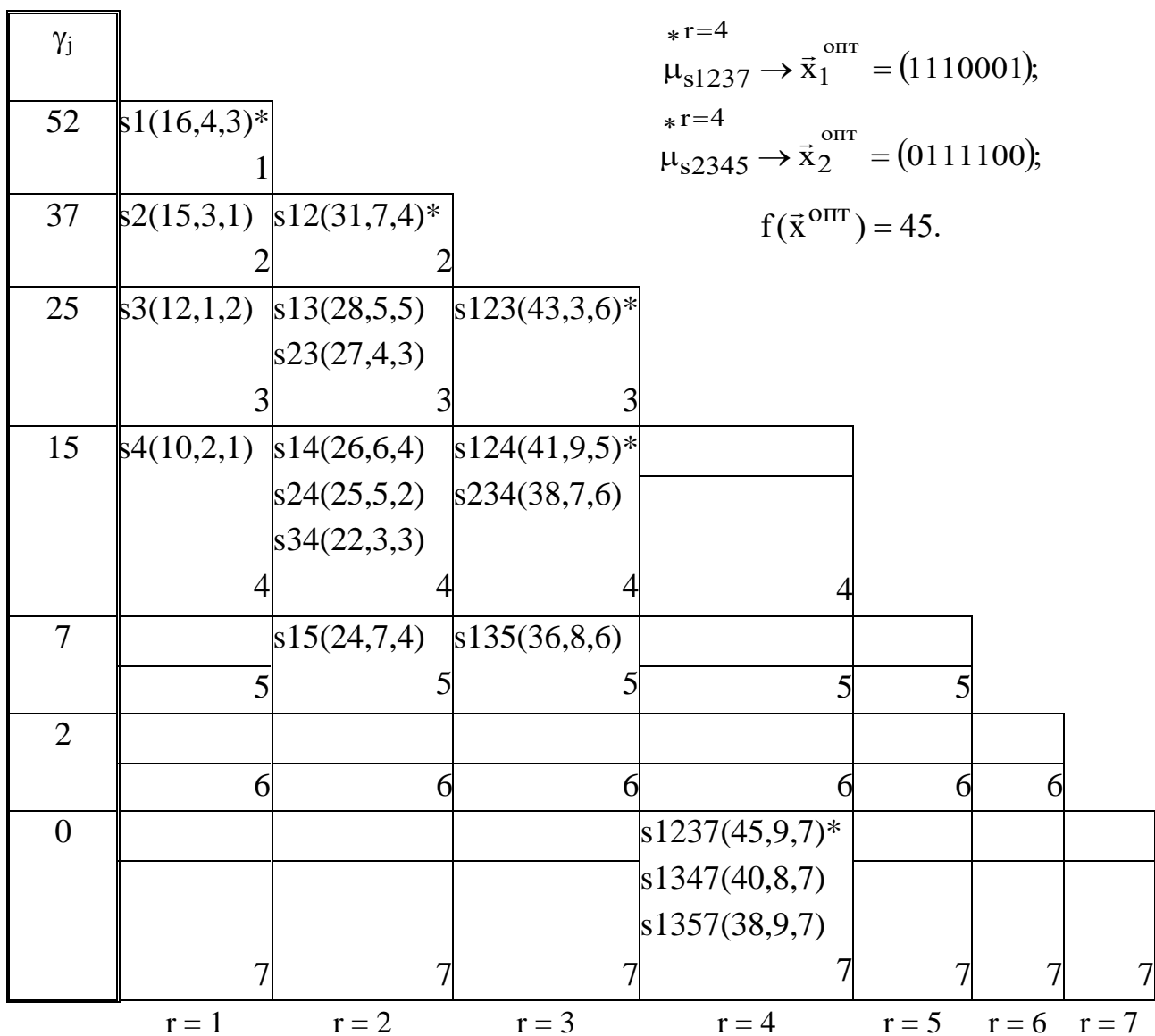


Рисунок 12. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_{10}

Рішення. Побудова множини m_{sj}^r здійснюється точно так, як і в одновірному завданні. У цьому прикладі два оптимальних рішення: шляхи $\mu_{s1237}^{r=4}$ й $\mu_{s2345}^{r=4}$.

Однак, другий губиться через наявність у множині $m_{s3}^{r=2}$ шляху $\mu_{s13}^{r=2}$, що домінує над $\mu_{s23}^{r=2}$.

Сполучення стратегії L_7 зі стратегією L_3 для випадку m -вірної задачі утворять правило вибору L_{11} , яке полягає в тому, щоб з множини m_{sj}^r в множину $m_{sp}^{r=r+1}$, $p = (\overline{r, n})$, наступного рангу вибрати шляхи, які задовольняють властивості $v_i \in \text{максимальними за вагою функціонала } c_j \text{ і мінімальні за кожною } i\text{-ою вагою обмежень } a_{ij}, i = (\overline{1, m})$.

Перше відповідає рекурентному співвідношенню (12), а друге описується наступним співвідношенням, заснованому на співвідношенні (15).

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \min_{a_{ij}} \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}; \quad j = (\overline{r, n}); \quad p = (\overline{j+1, n}); \quad i = (\overline{1, m}). \quad (24)$$

Приклад 10. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 29x_1 + 28x_2 + 26x_3 + 25x_4 + 20x_5 + 17x_6 + 15x_7 + 10x_8$$

при обмеженні

$$1x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 1x_6 + 2x_7 + 2x_8 \leq 9,$$

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 1x_7 + 4x_8 \leq 9$$

у відповідності зі стратегіями L_3 і L_{11} (рис. 13).

Рішення. Побудова множини шляхів здійснюється відповідно до принципу оптимізації за напрямком (11). У множинах m_{sj}^r виділені підкресленням шляху μ_{sj}^r , що є мінімальними за кожним з обмежень (при рівності i -го обмеження вибирається шлях з найбільшою вагою за функціоналом) і максимальним за вагою функціонала.

Збільшення числа обмежень приводить до невизначеності в оцінці верхньої границі за вагою функціонала $\hat{z}_{j_0}^g$, яку може набрати шлях μ_{sj}^r і верхній

оцінці кількості рангів \hat{r}_6 , на яку може бути продовжений цей шлях. Щоб уникнути такої невизначеності для кожної вершини $j = (\overline{1, n})$ будемо будувати не один, а m каліброваних векторів $\vec{y}_j^i, i = (\overline{1, m})$ за правилом:

$$y_{jk}^i = a_{jk}^i + y_{j(k-1)}^i; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad y_{j0}^i = 0; \quad y_{n0}^i = b_i; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (25)$$

У зв'язку із цим, правило K_1 визначення \hat{r}_6 для шляху μ_{sj}^r в багатомірній задачі змінюється на правило K_3 .

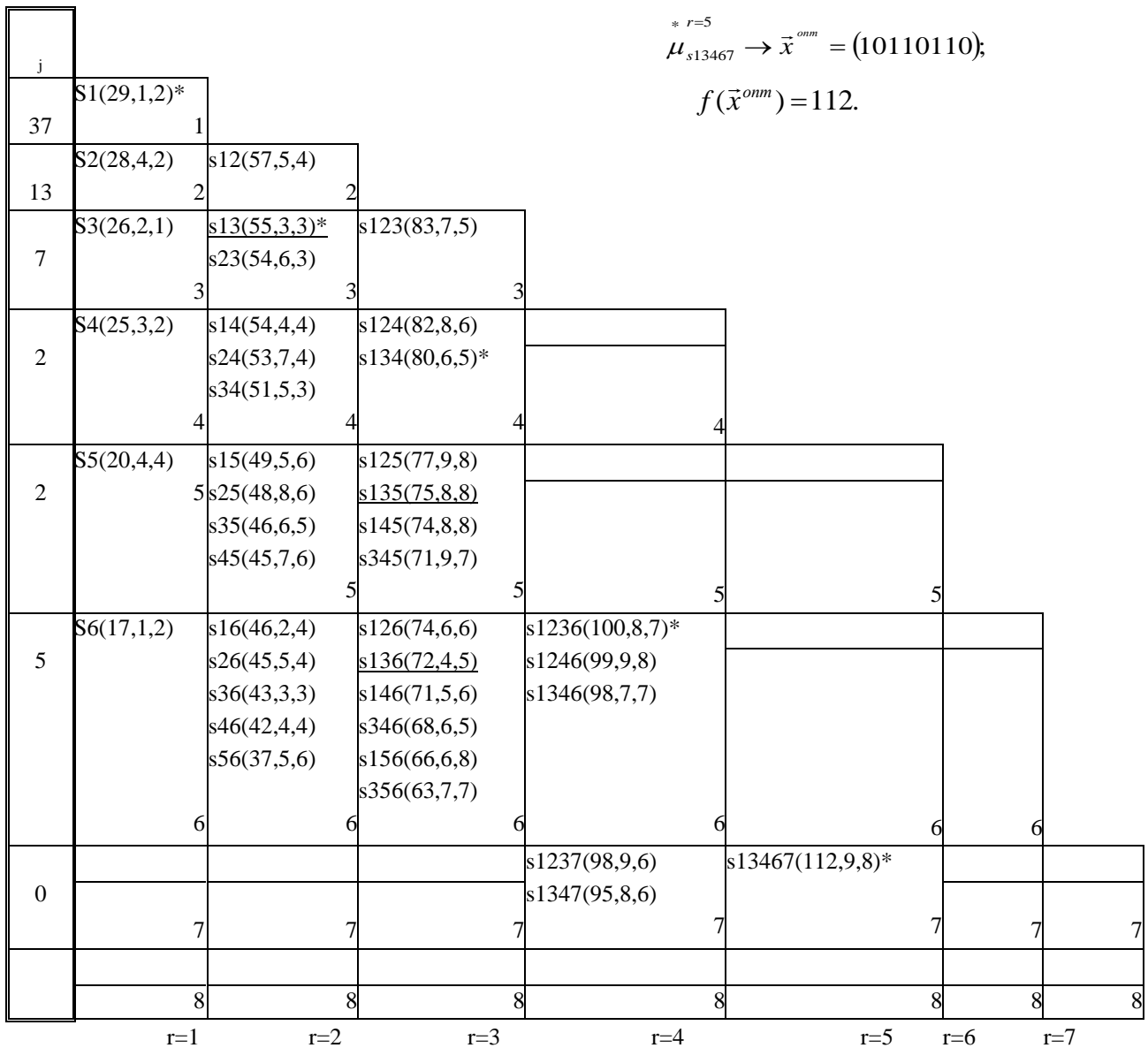


Рисунок 13. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_{11}

Правило K_3 .

а) нехай $i = 1$;

б) при поточному значенні і обчислюємо для шляху μ_{sj}^r величину $\Delta d = b_i - d_a(\mu_{sj}^r)_i$;

в) у каліброваному векторі \bar{y}_j^i вершини j знаходимо номер k -го $k = (\overline{0, n-j})$ елемента y_{jk}^i вектора \bar{y}_j^i , починаючи з якого $y_{jk}^i > \Delta d$ (якщо $\forall y_{jk}^i < \Delta d$, то $k = n - j + 1$);

г) для шляху μ_{sj}^r по i -му обмеженню в графі $D\Delta$: $\hat{r}_e^i = k - 1$;

д) збільшуємо значення i на 1 і переходимо до пункту б) цього правила у випадку $i \leq m$ або до наступного пункту у випадку $i > m$;

е) серед усіх \hat{r}_e^i , $j = (\overline{1, m})$ вибираємо найменший.

Таким чином, відповідно до правила K_3 верхня оцінка r_B для шляху μ_{sj}^r в j -й вершині графа $D\Delta$ при m обмеженнях буде:

$$\hat{r}_e = \min_i \{ \hat{r}_e^i \}, \quad i = (\overline{1, m}). \quad (26)$$

Неважко показати, що при реалізації правила K_3 справедливість теореми 4 не порушується. Так, якщо по одному з обмежень ми зможемо пройти на r_1 рангів, а по іншому – на r_2 ранги й при цьому $r_1 > r_2$, то на ранг більший, ніж r_2 неможливо побудувати шлях, який задовольняє властивості v , оскільки r_2 – верхня оцінка по даному обмеженню.

Правило K_2 для визначення верхньої оцінки за вагою функціонала в m -мірних завданнях не змінюється.

Уведемо за аналогією з поняттям одномірного коридору поняття m -мірного коридору в множині $c \quad g(n) \leq f(n) \leq c' \times g(n)$.

Позначимо підмножину векторів, що повинна залишитися в множині m_{sp}^r після фільтрації через m_{sp}^{rk} . Нагадаємо, що формування множини шляхів у m_{sp}^r здійснюється завжди таким чином, що довжина за вагою функціонала

першого з них більше довжини за вагою функціонала другого й т. д., тобто $d_c(\mu_k) \geq d_c(\mu_k) \geq \dots \geq d_c(\mu_k)$.

Визначення. Під виділенням m -мірного коридору будемо розуміти процес відсівання k -го шляху μ_k у множині m_{sp}^r , якому відповідає m -мірний вектор $(d_a(\mu_k)_1, d_a(\mu_k)_2, \dots, d_a(\mu_k)_m)$ за правилом K_4 .

Правило K_4 .

Якщо $(\forall i \in (\overline{1, m})) d_a(\mu_v)_i \leq d_a(\mu_k)_i$ при цьому $v = (\overline{1, k-1})$, то вектор $(d_a(\mu_k)_1, d_a(\mu_k)_2, \dots, d_a(\mu_k)_m)$ і відповідний йому шлях μ_k можна видалити з подальшого аналізу, інакше $\mu_k \in m_{sp}^{r=r+1}$.

Справедливість відсівання за правилом K_4 слідує з наступного досить очевидного твердження 4.

Твердження 4. Шляхи $\mu_{sp}^r \in m_{sp}^r$, що не потрапили в m_{sp}^{rk} не можуть визначати оптимальне рішення задачі (1 – 3).

Доказ. Нехай деякий шлях $\mu_{sp}^{*r} \notin m_{sp}^r$, є оптимальним рішенням задачі. Тоді відповідно до правила K_4 в m_{sp}^{rk} існує шлях μ_{sp}^{**r} більший за вагою функціонала й менший за всіма вагами обмежень. Отже, шлях μ_{sp}^{**r} набере на наступних рангах і більше значення за вагою функціонала, при задоволенні властивості v , тобто $d_c(\mu_k^{**r}) > d_c(\mu_k^{*r})$. Ми прийшли до протиріччя, а значить наше припущення не вірно, і твердження 4 справедливо.

Позначимо потужність множини $|m_{sj}^r|$ через Ξ . До початку відсівання $|m_{sj}^{rk}| = \emptyset$. Тоді процедуру формування m -мірного коридору можна зобразити у вигляді послідовної перевірки векторів $(1, \Xi)$ з множини m_{sj}^r на можливість відсівання за правилом K_4 . Вектори, які залишились, утворять підмножину m_{sj}^{rk} . Цю процедуру будемо називати стратегією L_{12} , що полягає у виділенні m -мірного коридору усередині кожної множини m_{sj}^r рангу r , коли в нього побудовані всі шляхи з вищестоящих вершин графа ДД.

Приклад 11. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 17x_1 + 15x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 7x_5 + 4x_6 + 4x_7$$

при обмеженні

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 9x_5 + 2x_6 + 1x_7 \leq 23,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 1x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 6x_7 \leq 33$$

у відповідності зі стратегіями L_9 і L_{12} (рис. 14).

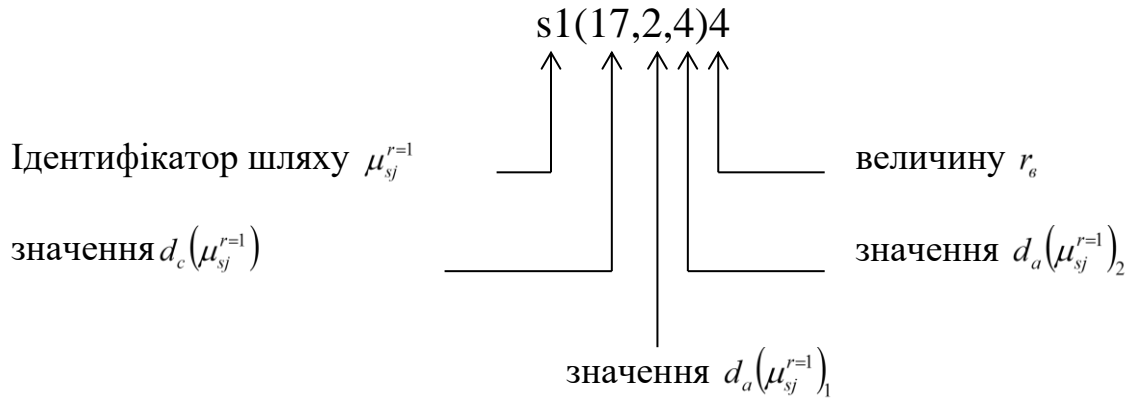
$\bar{y}_1^1 = \{0,1,3,7,13,22,31\}$ $\bar{y}_1^2 = \{0,1,7,13,21,30,40\}$ $\bar{z}_1 = \{0,15,28,36,43,47,51\}$	s1(17,2,4)4*				$\bar{x}_1^{opt} = (1111010)$ $\bar{x}_2^{opt} = (1111001)$ $f(\bar{x}^{opt}) = 57.$	
	1					
$\bar{y}_2^1 = \{0,1,3,9,18,27\}$ $\bar{y}_2^2 = \{0,1,7,15,24,34\}$ $\bar{z}_2 = \{0,13,21,28,32,36\}$	s2(15,4,6)4		s12(32,6,10)3*			
	2		2			
$\bar{y}_3^1 = \{0,1,3,12,21\}$ $\bar{y}_3^2 = \{0,1,7,15,25\}$ $\bar{z}_3 = \{0,8,15,19,23\}$	s3(13,6,9)3		s13(30,8,13)3		s123(45,12,19)2*	
	3		3		3	
$\bar{y}_4^1 = \{0,1,3,12\}$ $\bar{y}_4^2 = \{0,6,14,24\}$ $\bar{z}_4 = \{0,7,11,15\}$	s4(8,9,1)3		s14(25,11,5)3		s124(40,15,11)2	s1234(53,21,20)1*
	4		4		4	4

Рисунок 14. Ілюстрація роботи стратегії L_9 і L_{12}

$\bar{y}_5^1 = \{0,1,3\}$ $\bar{y}_5^2 = \{0,6,16\}$ $\bar{z}_5 = \{0,4,8\}$	s15(24,11,12)2		s1235(52,21,27)1			
	5		5		5	
$\bar{y}_6^1 = \{0,1\}$ $\bar{y}_6^2 = \{0,6\}$ $\bar{z}_6 = \{0,4\}$			s1236(49,14,29)0		s12346(57,23,30)0*	
	6		6		6	6
				s12367(57,22,23)0*		
7		7		7	7	
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6

Рисунок 14. Закінчення

Рішення. Побудову шляхів здійснюємо на основі принципу оптимізації за напрямком й за узагальненою процедурою A_0 . Кожний шлях μ_{sj}^r записується вираженням, що містить:



Пояснимо порядок роботи правил K_1 і K_3 на прикладі шляху $\mu_{s1}^{r=1}$. Визначимо r_6 . Для цього:

1. Припускаємо $i = 1$.
2. При поточному значенні i обчислюємо Δd для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$:

$$\Delta d = b_i - d_a(\mu_{s1}^{r=1})_1 = 23 - 2 = 21.$$

3. У каліброваному векторі \vec{y}_1^1 вершини 1 знаходимо номер k -го елемента y_{1k}^1 вектора \vec{y}_j^i , починаючи з якого $y_{1k}^1 > \Delta d \rightarrow k = 5$.

4. Для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$ щодо 1-го обмеження: $r_6^i = k - 1 = 5 - 1 = 4$.
5. Збільшуємо i на 1, тобто $i = 2$.
6. При поточному значенні i обчислюємо величину для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$:

$$\Delta d = b_i - d_a(\mu_{s1}^{r=1})_2 = 33 - 4 = 29.$$

7. У каліброваному векторі \vec{y}_1^2 вершини 1 знаходимо номер k -го елемента y_{1k}^2 вектора \vec{y}_j^i , починаючи з якого $y_{1k}^2 > \Delta d \rightarrow k = 5$.

8. Для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$ щодо 2-го обмеження: $\hat{r}_6^i = k - 1 = 5 - 1 = 4$.
9. Серед усіх $\hat{r}_6^i, j = (\overline{1,2})$ вибираємо найменший, тобто $\hat{r}_6 = 4$.

Маючи значення \hat{r}_6 відносно співвідношення (23), перевіряємо на можливість відсікання за стратегією L_9 .

Після формування множин усього рангу здійснюється виділення m -мірного коридору. Наприклад, на ранзі $r = 2$ у множині $m_{s3}^{r=2}$ шлях $\mu_{s23}^{r=2}$ не попадає в коридор, тому що шлях $\mu_{s13}^{r=2} \in m_{s3}^{r=2}$ має більшу довжину за вагою функціонала й меншу довжину за вагами усіх обмежень.

Однак, більш ефективною є стратегія відсікання L_{13} , при якій виділення m -мірного коридору здійснюється на всьому ярусі r , після того, як на ньому сформується всі шляхи, які задовольняють у кожній вершині властивості v . Тоді здійснюється перевірка: чи є для довільного шляху $\mu_{sp}^r \in m_{sp}^r$ рангу r шлях μ_{sj}^r , що належить одному з вищестоящих множин графа $D\Delta$ над m_{sp}^r , який має більшу довжину за вагою функціонала й не меншу довжину за вагою усіх m обмежень. Якщо такий шлях μ_{sj}^r є, то відповідно до твердження 4, шлях μ_{sp}^r можна видалити з розгляду як безперспективний.

Таким чином, процедуру A_0 зі стратегіями $\{L_w\}$ і правилами K_w можна покласти в основу побудови наближених і точних алгоритмів рішення задачі про рюкзак, тобто одержати різні модифікації процедури A_0 залежно від комбінацій використовуваних правил відсікання $\{L_w\}$ безперспективних шляхів у множинах μ_{sj}^r на основі застосування принципу оптимізації за напрямком.