МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
за темою "Кратні інтеграли"

для студентів спеціальності
122 "Комп'ютерні науки"
освітньої програми "Комп'ютерні науки"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2023

УДК 517(072.034)
В55

Укладач Т. В. Денисова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 7 від 21.12.2022 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

В55 **Вища** математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Кратні інтеграли" для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" освітньої програми "Комп'ютерні науки" першого (бакалаврського) рівня / Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2023. – 65 с.

Подано теоретичний матеріал щодо кратних (подвійних та потрійних) інтегралів. Уміщено запитання для самоконтролю його засвоєння. Запропоновано варіанти задач самостійної контрольної роботи та зразки їхнього розв'язання.

Рекомендовано для студентів галузі спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" освітньої програми "Комп'ютерні науки" першого (бакалаврського) рівня всіх форм навчання.

УДК 517(072.034)

Вступ

Сучасні умови розвитку економіки України висувають нові специфічні вимоги щодо планування й управління економічними, технічними та соціальними процесами. Вибір оптимальних методів організації, короткострокове та довгострокове прогнозування, вимірювання ступеня ризику неможливі без використання новітніх методів кількісного аналізу та математичного моделювання процесів навколишнього середовища. У цих умовах зростає роль ґрунтовної математичної підготовки студентів, їхнього уміння застосовувати математичний апарат у своїх дослідженнях.

Навчальна дисципліна "Вища математика" для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" містить тему "Кратні інтеграли", яка є узагальненням теми "Визначений інтеграл" на випадок, коли підінтегральна функція є функцією багатьох змінних, а область інтегрування – не прямолінійний відрізок, а замкнена частина (область) площини або просторове тіло. Зазначена обставина, як правило, викликає певні труднощі щодо опанування студентами відповідного теоретичного матеріалу.

Головною метою складання даних методичних рекомендацій є надання студентам допомоги під час опанування теоретичного матеріалу щодо подвійних та потрійних інтегралів, використання здобутих знань та набутих вмінь під час розв'язування конкретних практичних задач фахової спрямованості.

Запропоновані методичні рекомендації містять чотири розділи. У першому розділі, який присвячено подвійному інтегралу, висвітлено: означення подвійного інтеграла, його геометричний та фізичний смисли, основні властивості, способи обчислення в декартових і полярних координатах, геометричні та фізичні застосування. За такою самою схемою побудовано другий розділ, присвячений потрійному інтегралу як узагальненню подвійного інтеграла на випадок функції трьох змінних; окрім традиційної декартової системи координат розглянуто також циліндричну і сферичну системи координат. У третьому розділі подано варіанти задач самостійної контрольної роботи, які охоплюють основні теоретичні положення теорії кратних інтегралів, а в четвертому – наведено зразки розв'язання задач типового варіанта контрольної роботи з детальним коментарем усіх кроків розв'язання. Рекомендована література має допомогти студенту поглибити та поширити власну поінформованість із питань, що його зацікавили.

1. Теоретичні відомості

1.1. Подвійний інтеграл (ПДІ) у декартових координатах

1.1.1. Подвійний інтеграл: означення, теорема існування, геометричний та фізичний смисли, основні властивості

Поняття "подвійний інтеграл" є природним узагальненням поняття "визначений інтеграл" на випадок функції двох змінних. Тому його означення принципово не відрізняється від означення визначеного інтеграла і вводиться аналогічним чином.

Нехай функція $z = f(x, y)$, або $z = f(M)$, де $M = M(x, y)$, визначена і неперервна в замкненій області D площини xOy, тобто на множині точок координатної площини, яка обмежена зімкненою лінією (або лініями) Γ, з урахуванням точок лінії Γ – межі області.

Виконаємо таку (*стандартну*) процедуру:

– *розіб'ємо* область D довільним чином якими-небудь лініями на n часткових областей із площами Δs_i, $i = \overline{1, n}$ (або просто – на n площинок Δs_i) і найбільшу з відстаней між двома точками межі площинки назвемо **діаметром площинки** λ_i, $i = \overline{1, n}$, а максимальний серед них $\lambda = \max\limits_i \{\lambda_i\}$ – **діаметром розбиття** області D (рис. 1.1);

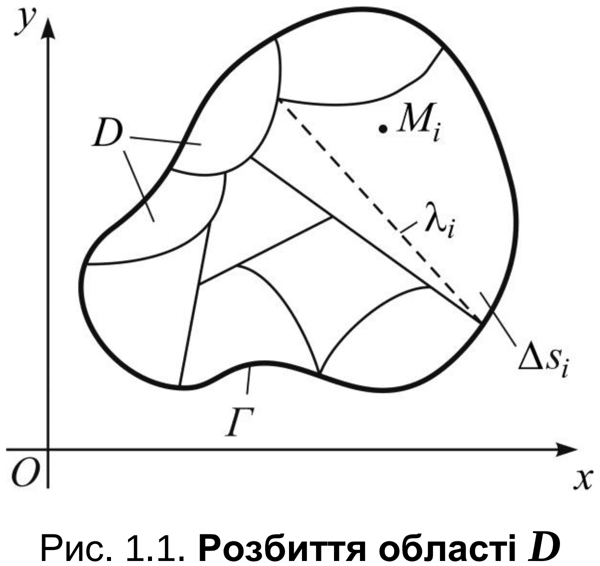


Рис. 1.1. **Розбиття області D**

– *виберемо* на кожній із площинок довільним чином по точці $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$, *обчислимо* $f(M_i)$ і *знайдемо* добутки $f(M_i) \cdot \Delta s_i$;

– *складемо* суму всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta s_i ,$$

яку назвемо **інтегральною сумою** для функції $f(x, y)$ в області D;

– *обчислимо* границю (якщо вона існує) інтегральної суми, коли діаметр розбиття прямує до нуля ($\lambda \to 0$) за умови необмеженого зростання кількості площинок n ($n \to \infty$).

Скінченну границю I інтегральної суми I_n, коли діаметр розбиття прямує до нуля ($\lambda \to 0$), а $n \to \infty$, називають **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ по області D і позначають так:

$$\iint_D f(M)ds, \quad \text{або} \quad \iint_D f(x,y)ds,$$

де $\iint$ – знак (символ) ПДІ;

D – область інтегрування;

$f(M) = f(x, y)$ – підінтегральна функція;

$f(x, y)ds$ – підінтегральний вираз;

x, y – змінні інтегрування;

ds – елемент (диференціал) площі.

Отже, за означенням:

$$I = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} I_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta s_i = \iint_D f(M)ds = \iint_D f(x,y)ds. \qquad (1.1)$$

Теорема існування ПДІ: якщо задана функція $f(x, y)$ неперервна у розглянутій замкненій області D, то існує скінченна границя інтегральної суми I (тобто ПДІ), і вона не залежить ні від способу розбиття області D на площинки, ні від вибору точок у них для складання інтегральної суми.

У світлі цієї теореми розбиття області D у декартовій системі координат xOy здійснюють найпростішим із можливих способом – прямими, паралельними координатним осям. У цьому випадку кожна площинка – це прямокутник зі сторонами Δx, Δy, який утворюється у разі переходу від точки $M(x, y)$ до точки $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$, де $\Delta x>0$, $\Delta y>0$. Тому $\Delta s=\Delta x\cdot\Delta y$, а $ds=\Delta s=dx\cdot dy$, бо для незалежних змінних x і y маємо: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

Отже, можна записати:

$$I = \iint_D f(x,y)\,ds = \left| ds = dx\cdot dy \right| = \iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (1.2)$$

Геометричний смисл ПДІ. Аналізуючи з геометричної точки зору процедуру, яка передувала означенню ПДІ, для невід'ємної в області D функції $(f(x,y)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in D)$, дістанемо висновок: кожний доданок $f(M_i)\cdot\Delta s_i$ інтегральної суми чисельно дорівнює об'єму прямої призми з площею основи Δs_i і висотою $N_iM_i = f(M_i)$ (рис. 1.2), а вся інтегральна сума чисельно дає наближене значення V_n об'єму V тіла, обмеженого поверхнею $z=f(x,y)$, площиною $z=0$ і циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямною слугує межа Γ області D. Надалі таке тіло коротко будемо називати **циліндричним тілом** для функції $f(x,y)$ на області D.

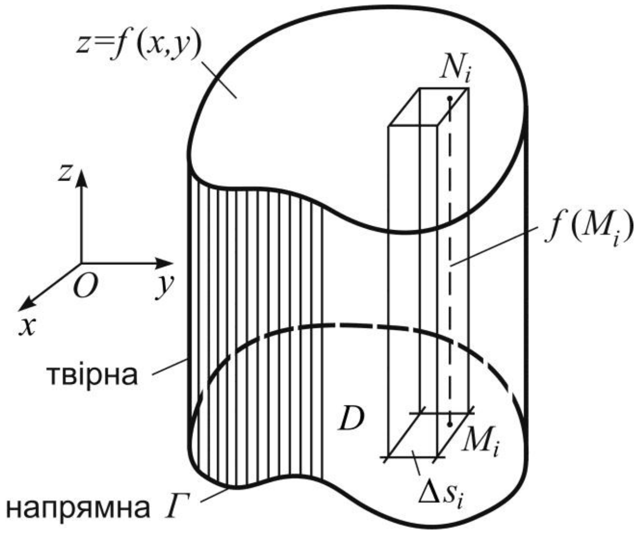


Рис. 1.2. **До тлумачення геометричного смислу ПДІ**

Вказане наближення тим краще, чим менше будуть Δs_i, тому природно покласти, що $V=\lim\limits_{\lambda\to 0} V_n$, і кажуть: *у геометричному смислі* ПДІ від функції $f(x,y)\geq 0$ по області D чисельно дорівнює об'єму циліндричного тіла для функції $f(x,y)$ на області D, тобто:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (1.3)$$

Фізичний смисл ПДІ. Нехай D – плоска тонка пластина зі змінною густиною $\sigma=\sigma(x,y)$, товщина якої настільки мала, що густину за товщиною можна вважати незмінною. Поверхневою густиною в даній точці $\sigma(M_i)$ назвемо границю відношення маси площинки до її площі Δs_i (див. рис. 1.1) за умови, що вона – площа – прямує до нуля.

Добуток $\sigma(M_i)\cdot\Delta s_i$ дає наближену масу однієї площинки, а сума $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma(M_i)\cdot\Delta s_i$ – наближене значення маси m всієї пластини D. Це наближення тим точніше, чим менше кожне Δs_i, тому покладають

$$m = \lim_{\lambda\to 0} I_n = \iint_D \sigma(x, y) ds$$

і кажуть: *у фізичному смислі* ПДІ від поверхневої густини $\sigma = \sigma(x, y)$ плоскої пластини D чисельно дорівнює її масі, тобто:

$$m = \iint_D \sigma(x, y)\, dxdy. \qquad (1.4)$$

Основні властивості ПДІ не відрізняються від властивостей визначеного інтеграла:

1. ПДІ від суми будь-якого скінченного числа функцій дорівнює сумі відповідних інтегралів від доданків:

$$\iint_D \left(f_1 + f_2 + \ldots + f_k\right) ds = \iint_D f_1 ds + \iint_D f_2 ds + \ldots + \iint_D f_k ds.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак (символ) ПДІ:

$$\iint_D c\, f\, ds = c\iint_D f\, ds, \quad c - const.$$

3. Якщо область D розбито на дві підобласті D_1, D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то ПДІ по всій області D дорівнює сумі інтегралів по її підобластях:

$$\iint_D f\, ds = \iint_{D_1} f\, ds + \iint_{D_2} f\, ds, \quad \text{де} \quad D_1 \cup D_2 = D,\ D_1 \cap D_2 = \varnothing.$$

Доведення всіх властивостей ПДІ, як і визначених інтегралів, базується на властивостях границь (у застосуванні до інтегральних сум).

1.1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Нехай функції $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a, b]$ осі Ox, а $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ – на відрізку $[c, d]$ осі Oy.

Область

$$D_y = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

називають **правильною у напрямі осі *Oy*** (рис. 1.3), а область

$$D_x = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\} \ –$$

правильною у напрямі осі $\boldsymbol{Ox}$ (рис. 1.4).

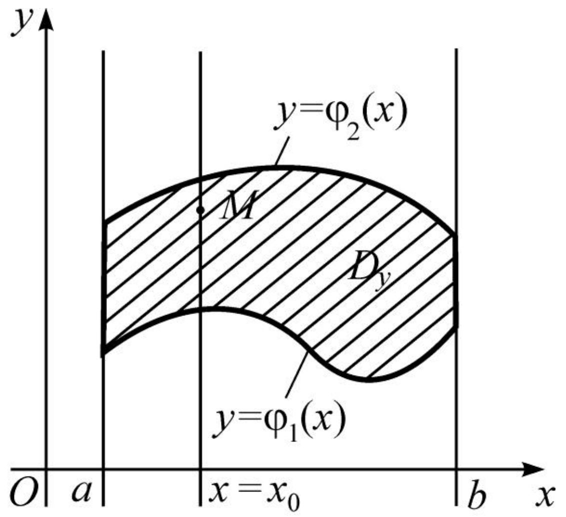


Рис. 1.3. $\boldsymbol{D_y}$ **– правильна область у напрямі осі $\boldsymbol{Oy}$**

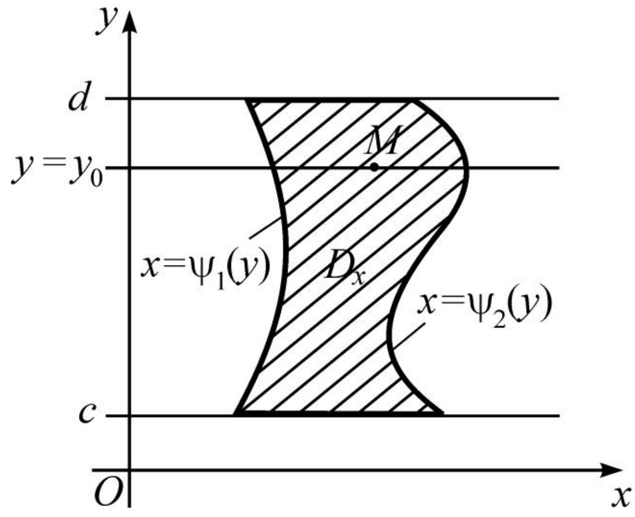


Рис. 1.4. $\boldsymbol{D_x}$ **– правильна область у напрямі осі $\boldsymbol{Ox}$**

Дуги кривих $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ називають **нижньою і верхньою ділянками** межі області, а $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$ – **лівою і правою**.

Межі Γ_y, Γ_x правильних областей D_y, D_x у символах описують так:

$$\Gamma_y = \{(x,y) \mid x = a,\ x = b;\ y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x)\},$$

$$\Gamma_x = \{(x,y) \mid y = c,\ y = d;\ x = \psi_1(y),\ x = \psi_2(y)\}.$$

Область, правильну як у напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy, будемо називати просто **правильною плоскою областю**.

Щоб установити, чи є задана область правильною у напрямі якоїсь з осей координат, слід перевірити наявність у неї так званої *характеристичної властивості:* якщо область є правильною у напрямі осі Oy (Ox), то кожна пряма $x = x_0$ ($y = y_0$), що проходить через внутрішню точку M області ($M \notin \Gamma$), перетинає межу області лише у двох точках і кожна з ділянок межі Γ – нижня, верхня (ліва, права) – є дугою лише однієї кривої. По суті D_y (D_x) як множина точок є *різницею двох криволінійних трапецій із рівними основами на осі* Ox (Oy).

Область D, яка не є правильною, легко подати у вигляді об'єднання областей типу D_x, D_y, здійснивши розбиття її на частини прямими, паралельними координатним осям, відповідно до вимог характеристичної властивості. Як правило, це легко зробити, якщо ділянки межі області є дугами графіків елементарних функцій, заданих у явному вигляді. На підставі адитивності ПДІ (властивість 3) можна зробити висновок, що обчислення ПДІ по будь-якій замкненій області D зводиться до вміння знаходити їх по правильним у напрямі осей Ox, Oy областям.

Теорема (*про обчислення ПДІ зведенням до двократного визначеного інтегрування*): ПДІ області D_y (D_x) можна знайти обчисленням визначеного інтеграла за змінною $x\,(y)$ від визначеного інтеграла за змінною $y\,(x)$ за формулою:

$$I=\iint\limits_{D_y} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx \tag{1.5}$$

$$\left(I=\iint\limits_{D_x} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d\left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy\right). \tag{1.6}$$

У формулах (1.5), (1.6) інтеграли у квадратних дужках (за змінною y, x відповідно) називають **внутрішніми**, а інтеграли від них (за змінною x, y відповідно) – **зовнішніми**. Праві частини цих формул називають **двократними**, або **повторними**, інтегралами від функції $z=f(x,y)$ по області D_y (D_x).

Застосовують й іншу (без квадратних дужок) форму запису двократних інтегралів, указуючи поруч із символом зовнішнього інтеграла диференціал відповідної змінної, а саме:

$$\iint\limits_{D_y} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \tag{1.7}$$

$$\iint\limits_{D_x} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{1.8}$$

Зауваження:

1) зовнішній інтеграл завжди має сталі межі інтегрування і беруть його після обчислення внутрішнього;

2) під час внутрішнього інтегрування за y (x) іншу змінну – x (y) – розглядають як параметр (із ним поводяться як із константою);

3) у разі обчисленні ПДІ по деякій області D (не обов'язково правильній) можна обирати будь-який порядок інтегрування (зовнішні інтеграли брати за змінною x, внутрішні – за y, чи навпаки) і це не вплине, звичайно, на остаточний результат, хоча з технічного боку, як правило, один із підходів виявляється більш прийнятним, ніж інший;

4) загальний випадок, коли ніякі обмеження на знак підінтегральної функції не накладено, можна звести до розглянутого вибором нової системи координат паралельним перенесенням системи $xOyz$.

1.1.3. Загальний порядок обчислення повторних інтегралів

Висвітлимо це питання у вигляді коментарів, розв'язуючи конкретний приклад.

Приклад 1. Обчислити ПДІ від функції $z = f(x,y) = 6(x+y)$ по області D з межею $\Gamma = \{(x,y) \mid y=0,\ y=x,\ x-2y+1=0\}$ (після символу $\mid$ вказано рівняння ліній, що обмежують область D).

1. *Зображуємо* (будуємо) область інтегрування й *аналізуємо* її з метою встановлення того, чи буде вона правильною у напрямі якоїсь із координатних осей. Якщо "так", то застосуємо безпосередньо одну з формул – (1.7) або (1.8); якщо "ні", то попередньо розіб'ємо D на правильні підобласті і скористаємося властивістю адитивності ПДІ.

У цьому прикладі область інтегрування є правильною у напрямі Ox (рис. 1.5а), адже виконуються вимоги характеристичної властивості: ліва і права ланки межі області – відрізки двох прямих: $x = 2y-1,\ x = y$, тому можна записати:

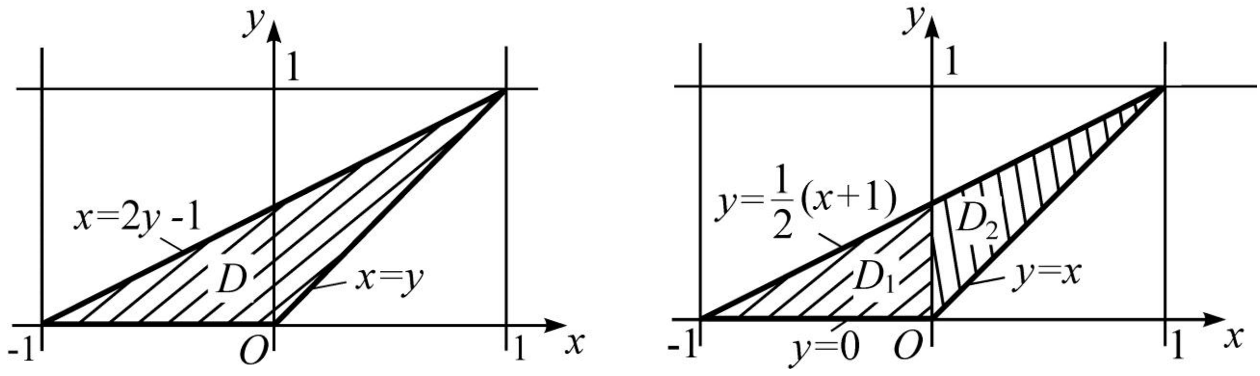
$$D = D_x = \{(x,y) \mid \ c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\} =$$
$$= \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ 2y-1 \le x \le y\}. \qquad (1.9)$$

У напрямі осі Oy область D не є правильною (рис. 1.5б), бо нижня ділянка її межі складається з відрізків двох різних прямих: $y=0,\ y=x$.

Але її можна подати у вигляді об'єднання двох правильних у напрямі Oy областей D_1, D_2, на які D розбивається прямою $x=0$: $D = D_1 \bigcup D_2$, де:

$$D_1 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le \frac{1}{2}(x+1) \right\}. \quad (1.10)$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \frac{1}{2}(x+1) \right\}. \quad (1.11)$$



а) б)

Рис. 1.5. **Зображення області інтегрування ПДІ**

2. *Установлюємо* межі зовнішнього і внутрішнього інтегрування та *виписуємо* повторні інтеграли.

Для цього область чи підобласть типу D_x (D_y) подумки або графічно проєктуємо на вісь Oy (Ox), тоді кінці одержаного відрізка, точніше їхні ординати c, d (абсциси a, b), визначають межі зовнішнього інтегрування. Потім з'ясовуємо, якими функціями описано ліву і праву (нижню і верхню) ділянки межі області чи підобластей, тобто встановлюємо вид функцій $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ $(y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x))$, які і визначають межі внутрішнього інтегрування.

Згідно з рис. 1.5а область D проєктується на відрізок $[c,d]=[0,1]$ осі Oy. Для кожного y із $[0,1]$ абсциса x змінюється від $\psi_1(y)=2y-1$ до $\psi_2(y)=y$. Відповідний перехід від ПДІ до повторних інтегралів має вигляд:

$$I = \iint\limits_D 6(x+y)dxdy = 6\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y-1}^{y} (x+y)dx. \quad (1.12)$$

Для іншого порядку інтегрування, згідно з рис. 1.5б, маємо: підобласть D_1 (D_2) проєктується на відрізок $[-1{,}0]$ $([0{,}1])$ осі Ox, при цьому ордината y у цих межах змінюється від 0 до $\frac{1}{2}(x+1)$ (для D_1) і від x до $\frac{1}{2}(x+1)$ (для D_2). Отже,

$$I=\iint\limits_D 6(x+y)\,dx\,dy=6\left(\iint\limits_{D_1}(x+y)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}(x+y)\,dx\,dy\right)=$$

$$=6\left(\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}(x+1)}(x+y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+1)}(x+y)dy\right). \qquad (1.13)$$

Як бачимо, порівняно з (1.13) перевагу слід віддати двократному інтегралу із (1.12), оскільки його відшукання потребує вдвічі менше обчислювальної роботи. Слід зауважити, що межі інтегрування фактично були одержані ще в пункті 1 під час опису областей D, D_1, D_2 (див. формули (1.9), (1.10), (1.11)).

3. *Обчислюємо* повторні інтеграли від функції $z=f(x,y)$ по області D, починаючи з внутрішнього. Якщо внутрішній інтеграл "громіздкий", то його можна знайти окремо; у протилежному випадку обчислення двократного інтеграла проводять "ланцюжком", що і зробимо в формулі (1.12):

$$I=6\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y-1}^{y}(x+y)dx=6\int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{2y-1}^{y}=$$

$$=6\int\limits_0^1\left[\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)-\left(\frac{(2y-1)^2}{2}+(2y-1)y\right)\right]dy=6\int\limits_0^1\left(-\frac{5}{2}y^2+3y-\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$=6\left(-\frac{5}{6}y^3+\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^1=6\left(-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Під час внутрішнього інтегрування функцію $f(x,y)=x+y$ розглянуто як функцію від x за умови, що y є сталою величиною, тому первісною для неї буде функція $\frac{x^2}{2}+xy$.

1.2. Подвійний інтеграл у полярних координатах

1.2.1. Полярна система координат

Поряд із добре відомою декартовою (прямокутною) системою координат xOy, у якій кожній точці площини відповідає пара чисел (x, y) – проєкцій точки на координатні осі, існує так звана *полярна система координат*. Зафіксуємо на площині деяку точку O – **полюс** і промінь OP – **полярну вісь**, виберемо довільним чином відмінну від полюса точку M (рис. 1.6).

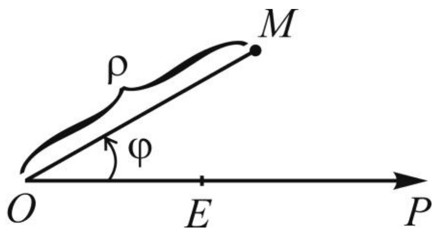


Рис. 1.6. **Полярні координати точки**

Відстань ρ від полюса O до точки M називають **полярним радіусом** точки M: $\rho = OM > 0$. Кут нахилу φ полярного радіуса OM до полярної осі OP називають **полярним кутом** точки M. У точки O полярний кут невизначений.

Числа ρ і φ називають **полярними координатами** точки M і пишуть: (ρ, φ) або $M(\rho, \varphi)$. Полюс O і полярну вісь OP з масштабним відрізком OE називають **полярною системою координат $\rho O\varphi$**. Полярний кут φ визначається неоднозначно, адже для заданого $\rho \neq 0$ точки з координатами $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, де $k \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, співпадають. Зазвичай значення φ беруть з проміжку $[0, 2\pi)$ або $(-\pi, \pi]$ і називають їх **головними значеннями** полярного кута. Для полярного радіуса ρ припускають і від'ємні значення; тоді точці (ρ, φ), де $\rho < 0$, відповідає точка з координатами $(|\rho|, \varphi + \pi)$; тобто для побудови точки з від'ємним полярним радіусом треба провести промінь з полярним кутом φ і на його продовженні (від вершини O) нанести відрізок довжини $|\rho|$. Полярну систему координат $\rho O\varphi$, яка припускає від'ємні значення ρ, називають **узагальненою**; вона дозволяє кожній парі дійсних чисел поставити у відповідність одну певну точку площини.

Наведемо послідовність дій і приклади побудови точок (ρ,φ) у системі $\rho O\varphi$ (рис. 1.7):

1) *проводимо* через полюс O промінь під кутом φ;

2) *відкладаємо*: для $\rho > 0$ на промені відрізок довжини ρ (див. точки E, M_1, M_3); для $\rho < 0$ на продовженні променя (від полюса O) відрізок довжини $|\rho|$ (див. точку M_2).

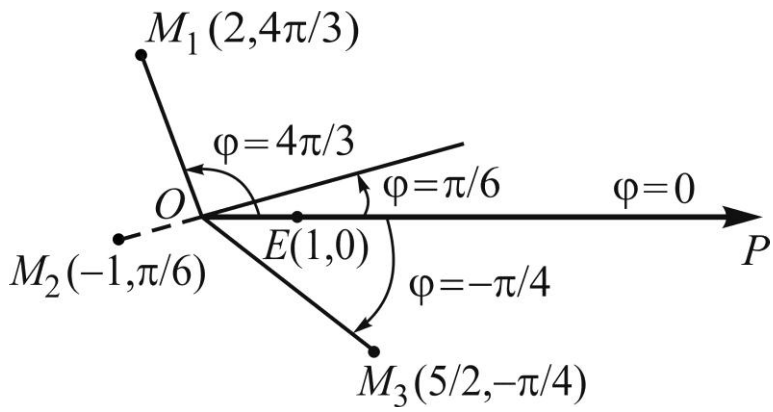


Рис. 1.7. **Точки у системі $\rho O\varphi$**

Рівняння $F(\rho,\varphi)=0$ називають **рівнянням лінії** L у полярних координатах, якщо координати будь-якої точки $M(\rho,\varphi)$ на лінії задовольняють його і навпаки, якщо пара чисел (ρ,φ) задовольняє рівняння, то ρ і φ є координатами точки, яка належить лінії:

$$F(\rho,\varphi)=0 \text{ – рівняння } L \;\rightleftharpoons\; (\rho,\varphi)\in L \;\Leftrightarrow\; F(\rho,\varphi)=0, \qquad (1.14)$$

де F – закон, який відображує властивість точок лінії;

$\rightleftharpoons$ – *символ еквіваленції за означенням* (*рівнозначності*, *рівносильності*), який читають: "те ж саме, що", "так само, як", "якщо і тільки якщо";

$\Leftrightarrow$ – *символ еквіваленції*, який читають: "тоді і тільки тоді", "якщо і тільки якщо".

Змінні ρ і φ, які входять у рівняння лінії, називають **поточними координатами** точок лінії: під ρ,φ мають на увазі координати будь-якої точки лінії. Надалі в системі $\rho O\varphi$ розглядатимемо тільки неперервні криві.

Якщо вдається відшукати (побудувати, знайти, скласти) рівняння лінії, тоді вивчення її властивостей зводиться до дослідження рівняння.

У випадку розв'язності рівняння $F(\rho,\varphi)=0$ відносно ρ або φ лінію можна задати рівнянням у явній формі: $\rho=\rho(\varphi)$ або $\varphi=\varphi(\rho)$.

Наприклад, нехай a – $const$ із множини дійсних чисел $\mathbf{R}$, тоді рівняння $\rho=a$ описує коло радіуса a з центром у полюсі O; $\varphi=a$ є рівнянням променя з вершиною у полюсі, нахиленого під кутом a до полярної осі OP.

Концентричні кола різного радіуса з центром у полюсі і промені різного кута нахилу до полярної осі з вершиною у полюсі називають **координатними лініями** полярної системи координат.

Зв'язок між координатами точки у полярній $\rho O\varphi$ і декартовій xOy системах координат легко встановити, якщо полюс співпадає з початком координат, а полярна вісь лежить на осі абсцис (рис. 1.8), і масштабні одиниці обох систем однакові.

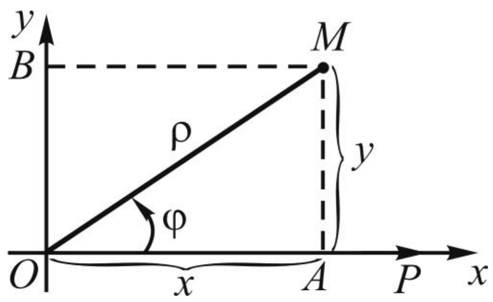


Рис. 1.8. **Зв'язок координат (ρ,φ) з координатами (x,y)**

Із ΔOAM ($\angle A=90^\circ$) маємо:

формули переходу від декартових до полярних координат:

$$\left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{array}\right. \tag{1.15}$$

де $\rho>0$, $\varphi\in(-\pi,\,\pi]$ або $\varphi\in[0,\,2\pi)$;

формули переходу від полярних до декартових координат:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}; \tag{1.16}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y}{x}=tg\varphi, \\ \dfrac{x}{y}=ctg\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi=arctg\,\dfrac{y}{x}, \quad x\neq 0, \\ \varphi=arcctg\,\dfrac{x}{y}, \quad y\neq 0; \end{array}\right. \tag{1.17}$$

$$\left[\begin{array}{l} x/\rho = \cos\varphi, \\ y/\rho = \sin\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = \arccos(x/\rho), \\ \varphi = \arcsin(y/\rho) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \varphi = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{array}\right. \tag{1.18}$$

1.2.2. Означення подвійного інтеграла в полярних координатах та його обчислення

Нехай у замкненій області D, яку віднесено до полярної системи координат $\rho O\varphi$, де ρ – полярний радіус $(\rho > 0)$, φ – полярний кут $(0 \le \varphi < 2\pi)$, O – полюс (початок координат), задана неперервна функція $z = F(\rho, \varphi)$, або $z = F(M)$, де $M = M(\rho, \varphi)$.

Як і в системі xOy (див. п. 1.1.1) здійснимо:

– *розбиття* D на площинки Δs_i $(i = \overline{1, n})$ із діаметром λ;

– *вибір* на кожній із них точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$;

– *складання* інтегральної суми $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} F(M_i) \cdot \Delta s_i$;

– *обчислення* границі I інтегральної суми I_n коли $\lambda \to 0$ разом із $n \to \infty$: $I = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} I_n$.

Число I (за умови його існування) називають **подвійним інтегралом** від функції $z = F(\rho, \varphi)$ по області D у полярній системі координат і пишуть:

$$I = \iint\limits_D F(M)\, ds \quad \text{або} \quad I = \iint\limits_D F(\rho, \varphi)\, ds. \tag{1.19}$$

Це означення достоту повторює означення ПДІ в декартових координатах (1.1), тому і в системі $\rho O\varphi$ достатньою умовою існування I є неперервність функції $F(M)$ $\forall M \in D$.

Оскільки у випадку існування ПДІ границя I не залежить від способу розбиття області D на площинки, то його здійснюють найпростішим способом – координатними лініями полярної системи координат: концентричними колами $(\rho - const)$ і променями $(\varphi - const)$ з початком у полюсі O (рис. 1.9).

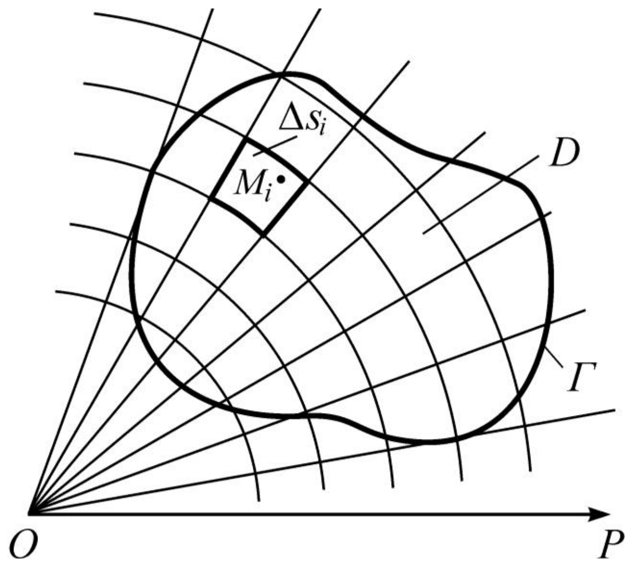


Рис. 1.9. **Область D та її площинка Δs_i у полярних координатах**

Елемент (диференціал) площі ds у полярних координатах через диференціали незалежних змінних $d\rho = \Delta\rho$, $d\varphi = \Delta\varphi$ описується співвідношенням:

$$ds = \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{1.20}$$

Отже, формула (1.19) набуває вигляду:

$$I = \iint\limits_D F(\rho,\varphi)\, ds = \iint\limits_D F(\rho,\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{1.21}$$

Саме таке подання ПДІ в полярних координатах дозволяє звести його обчислення до вираховування повторних інтегралів, за аналогією з обчисленням ПДІ в декартових координатах.

Замкнену область D_ρ у системі $\rho O \varphi$ називають **правильною за ρ**, якщо вона обмежена двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (α, β – $const$) і дугами двох неперервних кривих $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, причому будь-який промінь $\varphi = \varphi_0$, що проходить через внутрішню точку M області ($M \notin \Gamma$), перетинає межу області лише у двох точках (рис. 1.10). За своєю суттю область D_ρ як множина точок є різницею двох криволінійних секторів.

У символах область D_ρ і її межа Γ_ρ описують так:

$$D_\rho = \{(\rho, \varphi) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\},$$
$$\Gamma_\rho = \{(\rho, \varphi) \mid \varphi = \alpha,\ \varphi = \beta;\ \rho = \rho_1(\varphi),\ \rho = \rho_2(\varphi)\}. \tag{1.22}$$

Дуги кривих $\rho_1(\varphi)$ і $\rho_2(\varphi)$ називають відповідно **першою і другою від полюса** O **ділянками** межі області.

Замкнену область D_φ у системі $\rho O \varphi$ називають **правильною за** $\boldsymbol{\varphi}$, якщо вона обмежена дугами двох концентричних кіл $\rho = \gamma$, $\rho = \delta$ (γ, δ – $const$) і дугами двох неперервних кривих $\varphi = \varphi_1(\rho)$, $\varphi = \varphi_2(\rho)$, причому будь-яке коло $\rho = \rho_0$, що проходить через внутрішню точку M області $(M \notin \Gamma)$, перетинає межу області лише у двох точках (рис. 1.11).

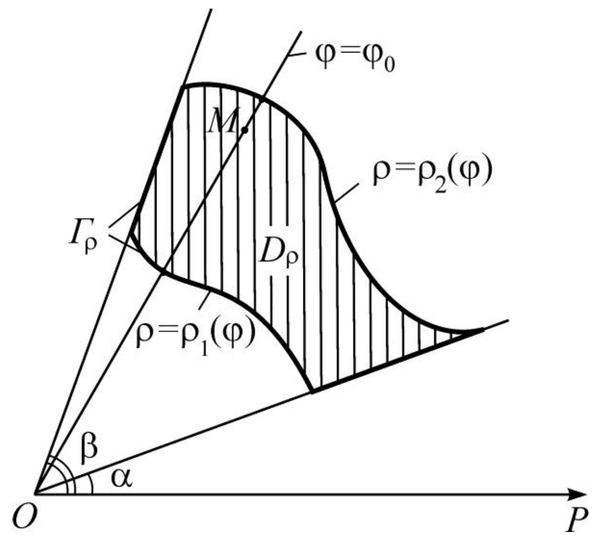


Рис. 1.10. **Область, правильна за ρ**

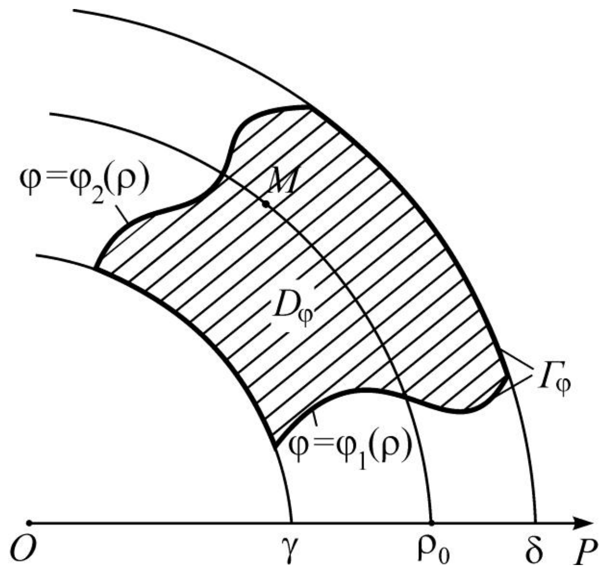


Рис. 1.11. **Область, правильна за φ**

У символах D_φ і її межу Γ_φ описують так:

$$D_\varphi = \{(\rho, \varphi) \mid \gamma \le \rho \le \delta,\ \varphi_1(\rho) \le \varphi \le \varphi_2(\rho)\},$$
$$\Gamma_\varphi = \{(\rho, \varphi) \mid \rho = \gamma,\ \rho = \delta;\ \varphi = \varphi_1(\rho),\ \varphi = \varphi_2(\rho)\}. \tag{1.23}$$

Дуги кривих $\varphi_1(\rho)$ і $\varphi_2(\rho)$ називають відповідно **першою** і **другою від осі** $\boldsymbol{OP}$ **ділянками** межі області.

Довільну замкнену область D у полярних координатах можна подати у вигляді об'єднання правильних областей, які одержують розбиттям D на частини (підобласті) координатними лініями. Завдяки властивості адитивності інтеграл по всій області дорівнюватиме сумі інтегралів по підобластях. Отже, як і в декартових координатах, обчислення ПДІ в полярних координатах зводиться до вміння знаходити його по правильних областях.

Теорема (*про зведення ПДІ до повторного інтеграла*): ПДІ по правильній області D_ρ (D_φ) можна знайти обчисленням визначеного інтеграла за змінною φ (ρ) від визначеного інтеграла за змінною ρ (φ) за формулою:

$$I = \iint\limits_{D_\rho} F(\rho,\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho,\varphi)\rho\, d\rho\right] d\varphi \qquad (1.24)$$

$$\left(I = \iint\limits_{D_\varphi} F(\rho,\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\gamma}^{\delta}\left[\int\limits_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} F(\rho,\varphi)\, d\varphi\right] \rho d\rho \right), \qquad (1.25)$$

або (без квадратних дужок у записах повторних інтегралів):

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho,\varphi)\rho d\rho \qquad \left(I = \int\limits_{\gamma}^{\delta} \rho d\rho \int\limits_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} F(\rho,\varphi) d\varphi \right). \qquad (1.26)$$

На практиці частіше застосовують такий порядок інтегрування, коли внутрішній інтеграл береться за змінною ρ, а зовнішній – за φ; тому, якщо область інтегрування D не є правильною, то її розбиття проводять на правильні за ρ підобласті.

Загальний порядок обчислення ПДІ в полярних координатах принципово такий самий, як і для ПДІ в декартових координатах. Головне утруднення – це розпізнати області типу D_ρ, D_φ і встановити правильно межі інтегрування, окрім, звісна річ, обчислення визначених інтегралів.

У частинних випадках прямолінійні або криволінійні ділянки межі областей D_ρ, D_φ вироджуються в точки. Так, наприклад, область D_ρ стає просто криволінійним сектором, якщо в точку вироджується перша від O ділянка межі області, і тоді $\rho_1(\varphi) \equiv 0$. Якщо полюс O лежить всередині області інтегрування, обмеженої однією зімкненою лінією $\rho=\rho_2(\varphi)$, то її розглядають як правильну за ρ область:

$$D_\rho=\{(\rho,\varphi)\,|\;0\le\varphi\le 2\pi,\;\;0\le\rho\le\rho_2(\varphi)\}.$$

Приклад 2. Обчислити ПДІ від функції $z=3\rho^2\sin 2\varphi$ по області D, обмеженій лініями: $\rho=2\sin\varphi$, $\rho=2\cos\varphi$.

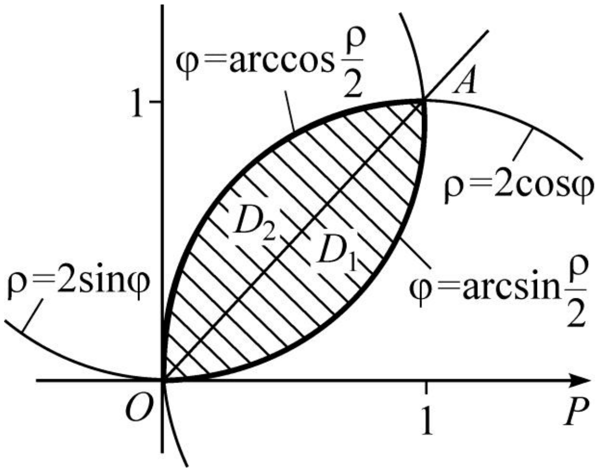


Рис. 1.12. **Область інтегрування**

1. *Зображаємо* область інтегрування D, попередньо проаналізувавши рівняння кривих, що її обмежують.

Рівняння $\rho=2\sin\varphi$ описує коло радіуса 1 із центром у точці $(0,1)$, а рівняння $\rho=2\cos\varphi$ – коло радіуса 1 із центром у точці $(1,0)$; не важко переконатися, що кола перетинаються у точках O і $A(\sqrt{2},\pi/4)$ (рис. 1.12).

2. *Проводимо* візуальний аналіз області D з метою встановлення того, чи буде вона правильною за ρ або φ.

Область D є правильною за φ з елементами виродження O і A, оскільки точці O відповідає вироджене коло $\rho=0$, а точці A – вироджена дуга кола $\rho=\sqrt{2}$; отже, можливі значення полярного радіуса ρ для точок області змінюються від 0 до $\sqrt{2}$. Для відшукання можливих значень полярного кута φ врахуємо, що його відлік від полярної осі OP здійснюється проти ходу годинникової стрілки. Подумки (або фізично) проводимо дугу кола з центром у точці O, яка перетинає першу і другу від OP ділянки межі області, і дивимось, якими функціями вони описуються, тобто установлюємо вид функцій $\varphi=\varphi_1(\rho)$, $\varphi=\varphi_2(\rho)$. У нас: $\varphi_1(\rho)=\arcsin(\rho/2)$, $\varphi_2(\rho)=\arccos(\rho/2)$.

Таким чином:

$$D=D_\varphi=\{(\rho,\varphi)\,|\;0\le\rho\le\sqrt{2},\;\;\arcsin(\rho/2)\le\varphi\le\arccos(\rho/2)\}. \tag{1.27}$$

Область D не є правильною за ρ, але променем OA її можна розбити на дві правильні за ρ підобласті D_1, D_2, правда, теж з елементами виродження:

$$\begin{gathered} D_1 = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \varphi \le \pi/4,\ 0 \le \rho \le 2\sin\varphi\}, \\ D_2 = \{(\rho,\varphi) \mid \pi/4 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi\}. \end{gathered} \tag{1.28}$$

Якщо після зображення область інтегрування описано відповідним чином у символах (див. (1.27), (1.28)), то межі інтегрування визначаються "автоматично". Так на підставі (1.27) маємо:

$$I = \iint_D 3\rho^2 \sin 2\varphi \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = 3\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\, d\rho \int_{\arcsin(\rho/2)}^{\arccos(\rho/2)} \sin 2\varphi\, d\varphi. \tag{1.29}$$

З іншого боку, із (1.28) здобуваємо:

$$I = \iint_D F(\rho,\varphi)\, ds = \iint_{D_1} F(\rho,\varphi)\, \rho d\rho d\varphi + \iint_{D_2} F(\rho,\varphi)\, \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \left| F(\rho,\varphi) = 3\rho^2 \sin 2\varphi \right| = 3\left(\int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho \right). \tag{1.30}$$

3. *Обчислюємо* ПДІ зведенням до повторних інтегралів.

Знайдемо внутрішній інтеграл із (1.29) (між вертикальними рисками вказано довідкову інформацію з тригонометрії):

$$\int_{\arcsin(\rho/2)}^{\arccos(\rho/2)} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\cos 2\varphi \Bigg|_{\arcsin(\rho/2)}^{\arccos(\rho/2)} = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\arccos\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(2\arcsin\frac{\rho}{2}\right) \right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \\ \cos(\arccos\alpha) = \alpha;\ \sin(\arcsin\alpha) = \alpha \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\left[\left(2\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - 1 \right) - \left(1 - 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \right) \right] = 1 - \frac{\rho^2}{2}.$$

Тоді

$$I = 3\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = 3\int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}\right) d\rho = 3\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 1.$$

На перший погляд, реалізація (1.30) потребує більше обчислювальної роботи, бо містить два повторні інтеграли. Але якщо врахувати симетрію області і поверхні $z = 3\rho^2 \sin 2\varphi$ відносно променя OA, то достатньо обчислити лише один повторний інтеграл, наприклад, перший.

Таким чином:

$$I = 6\int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 d\rho = 6\int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\sin\varphi} =$$

$$= 24\int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi \, \sin^4 \varphi \, d\varphi = \left| \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \right| = 48\int_0^{\pi/4} \sin^5 \varphi \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= 48\int_0^{\pi/4} \sin^5 \varphi \; d(\sin\varphi) = 48\,\frac{\sin^6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\pi/4} = 8\sin^6(\pi/4) = 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = 1.$$

Звичайно, у разі обчислення ПДІ не обов'язково розглядати обидва порядки інтегрування (хіба що для контролю правильності розв'язання), а вибирають кращий з точки зору об'єму обчислювальної роботи.

Приклад 3. Обчислити ПДІ від функції $z = arctg(y/x)$ по області D, що обмежена лінією $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

1. *Зображаємо* область інтегрування D, попередньо аналізуючи рівняння кривої, що її обмежує.

Рівняння $x^2 + y^2 - 2y = 0$ описує коло з центром у точці $(0,1)$ і радіусом 1 (рис. 1.13): $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

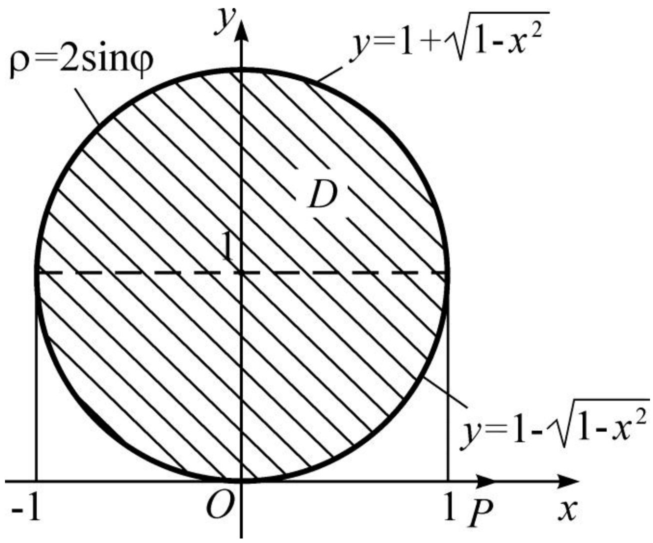


Рис. 1.13. **Область інтегрування**

2. *Проводимо* візуальний аналіз області D з метою встановлення того, чи буде вона правильною у напрямі якоїсь із координатних осей.

Відповідна область – круг – є правильною у напрямі обох осей координат. Розглядаючи її як D_y, знайдемо функції, що описують нижню і верхню ділянки межі області. Для цього розв'яжемо рівняння межі відносно змінної y:

$$y^2 - 2y + x^2 = 0 \;\Rightarrow\; (y-1)^2 + x^2 = 1 \;\Rightarrow\; y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-x^2}\,.$$

Функція $y = \varphi_1(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ $\left(y = \varphi_2(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}\right)$ описує півколо, яке лежить нижче (вище) прямої $y = 1$.

Отже,

$$D = D_y = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

$$I = \iint_D z\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} arctg\,\frac{y}{x}\,dy\,.$$

Видно, що підінтегральна функція зовнішнього інтеграла (по x) міститиме (після взяття внутрішнього інтеграла) ірраціональність $\sqrt{1-x^2}$, уникнути якої можна було б зразу за допомогою переходу до полярних координат; що і буде зроблено.

3. *Здійснюємо* перехід до полярних координат, помічаючи, що D є областю типу D_ρ, яка обмежена променями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ (вони дають розгорнутий кут); перша від O ділянка межі вироджена в точку O, а друга – описується рівнянням $\rho = 2\sin\varphi$. Воно одержується із рівняння межі заміною x, y на ρ, φ за формулами переходу до полярних координат:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \rho^2 - 2\rho\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |\rho \neq 0| \;\Rightarrow\; \rho = 2\sin\varphi.$$

Таким чином, у полярних координатах маємо:

$$D_\rho = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le 2\sin\varphi\}; \quad z = F(\rho,\varphi) = \varphi\,.$$

4. *Обчислюємо* подвійний інтеграл у полярній системі координат, здійснюючи перехід до повторних інтегралів:

$$I = \iint\limits_{D_\rho} F(\rho,\varphi)\,\rho d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \varphi\,\rho d\rho = \int\limits_0^{\pi} \varphi d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\pi} \varphi d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\sin\varphi} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} 2\sin^2\varphi \cdot \varphi d\varphi = \int\limits_0^{\pi} (1-\cos 2\varphi)\cdot \varphi d\varphi = \int\limits_0^{\pi} (\varphi - \varphi\cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \varphi d\varphi - \int\limits_0^{\pi} \varphi \cos 2\varphi d\varphi = \frac{\pi^2}{2} - \int\limits_0^{\pi} \varphi\cos 2\varphi d\varphi = \left| \begin{array}{ll} u=\varphi & \Rightarrow \quad du = d\varphi \\ dv = \cos 2\varphi d\varphi & \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{1}{2}\varphi\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{1}{2}\varphi\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{1}{2}\pi\sin 2\pi + \frac{1}{4}\cos 2\pi - \frac{1}{4}\cos 0\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

1.3. Застосування подвійного інтеграла

1.3.1. Обчислення площ плоских фігур та об'ємів просторових тіл

Відшукання зазначених числових характеристик геометричних об'єктів базується на геометричному смислі подвійного інтеграла (див. п. 1.1.1.) як об'ємі V тіла, обмеженого зверху поверхнею, заданою рівнянням $z = f(x,y)$, де $f(x,y)$ – невід'ємна і неперервна в області D функція, збоків – циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною Γ; знизу – областю D (основою тіла) площини xOy:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (1.31)$$

У випадку, коли $f(x,y) \equiv 1 \quad \forall (x,y) \in D$, одержуємо **формулу площі S_D плоскої фігури D**:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy. \qquad (1.32)$$

Під час розв'язання задач слід мати на увазі таке:

1) якщо D не є правильною областю у напрямі однієї з осей координат, то її, зазвичай, розбивають на правильні підобласті;

2) поверхня може бути задана рівнянням $y=\psi(x,z)$ або $x=\varphi(y,z)$, тоді область D розташована на площині xOz або yOz і відповідно:

$$V=\iint\limits_D \psi(x,z)\,dx\,dz\,,\qquad V=\iint\limits_D \varphi(y,z)\,dy\,dz\,; \tag{1.33}$$

3) для кращого розуміння того, яке саме циліндричне тіло чи плоска фігура розглядаються, бажано давати схематичне зображення тіла або хоча б області D, щоб правильно визначити межі інтегрування.

Приклад 4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+z^2=1$, $x+y-4=0$, $y=0$.

1. *Установлюємо* підінтегральну функцію і область інтегрування, аналізуючи рівняння поверхонь.

Рівняння $x^2+z^2=1$ описує циліндричну поверхню, напрямною якої є коло на площині xOz з центром у точці O і з радіусом 1, а твірна паралельна осі Oy; $x+y-4=0$ – рівняння площини, паралельної осі Oz; $y=0$ – рівняння площини xOz (рис. 1.14).

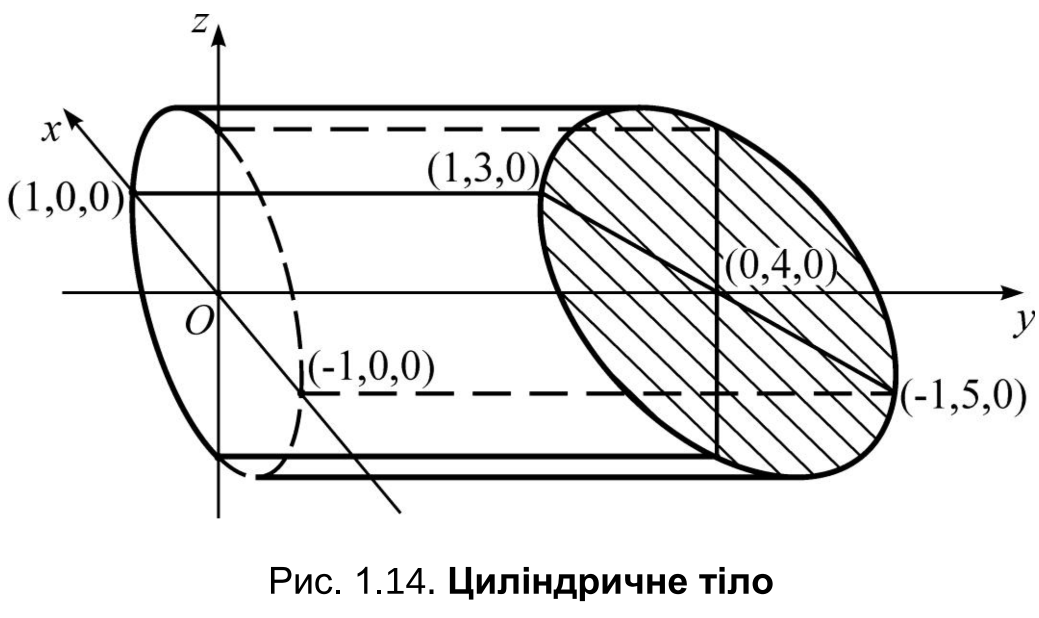


Рис. 1.14. **Циліндричне тіло**

Отже, область інтегрування $D=\{(x,z)\,\big|\,x^2+z^2\le 1\}$ розташована на площині xOz, тобто циліндричне тіло зліва обмежене кругом, а справа – плоскою фігурою, обмеженою еліпсом; підінтегральна функція:

$y=\psi(x,z)=4-x$. Оскільки область D – круг, а підінтегральна функція проста (вона лінійна відносно змінної x), то доцільно ввести полярні координати.

2. *Переходимо* до полярних координат і *обчислюємо* відповідний подвійний інтеграл:

$$\left[\begin{array}{l} y=\psi(x,z)=4-x, \\ D=\{(x,z)\,|\,x^2+z^2\le 1\} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi \\ z=\rho\sin\varphi \\ x^2+z^2=\rho^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\Psi(\rho,\varphi)=4-\rho\cos\varphi, \\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 1\}. \end{array}\right.$$

$$V=\iint\limits_D \Psi(\rho,\varphi)\,\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 (4-\rho\cos\varphi)\,\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(2\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3\cos\varphi\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(2-\frac{1}{3}\cos\varphi\right)d\varphi=\left(2\varphi-\frac{1}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=4\pi \text{ (куб. од.)}.$$

1.3.2. Обчислення площі куска поверхні, обмеженого зімкненою лінією

За допомогою ПДІ можна обчислювати не тільки площі фігур, розташованих на плоскій поверхні (площині), а й таких, які становлять частину кривої (криволінійної) поверхні, обмежену зімкненою лінією.

Розглянемо поверхню, задану рівнянням $z=f(x,y)$, де функція $f(x,y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні на деякій області площини xOy. Нехай S – площа частини поверхні, обмеженої зімкненою лінією L; через Γ позначимо проєкцію цієї лінії на xOy, а через D – область на xOy, обмежену лінією Γ.

За цих умов справедлива **формула площі куска поверхні**:

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy. \qquad (1.34)$$

Задачу відшукання площі S куска поверхні $z=f(x,y)$ розв'язують у такому порядку:

1. *Установлюють* лінію L (якщо вона явно не задана за умовою задачі), проєктують її на xOy і визначають лінію Γ, а за нею – і область інтегрування D.

2. *Знаходять* частинні похідні функції $z = f(x, y)$ і підінтегральну функцію в формулі (1.34).

3. *Обчислюють* відповідний ПДІ за формулою (1.34).

Приклад 5. Знайти площу поверхні тієї частини параболоїда обертання $x^2 + z^2 + y = 4$, яку вирізає круговий циліндр $x^2 + z^2 = 1$.

1. Оскільки лінія перетину заданих поверхонь – коло – проєктується на xOz у коло $x^2 + z^2 = 1$, то $D = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 \le 1\}$ (як і на рис. 1.14).

2. Рівняння поверхні $x^2 + z^2 + y = 4$ визначає функцію $y = \psi(x, z) = = 4 - x^2 - z^2$, для якої $y'_x = -2x$, $y'_z = -2z$. Таким чином,

$$S = \iint_D \Psi(x, z)\, dx\, dz = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}\, dxdz.$$

3. Обчислюємо ПДІ переходом до полярних координат:

$$\left[\begin{array}{l} \Psi(x,z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}, \\ D = \{(x,z) \mid x^2 + z^2 \le 1\} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ x^2 + z^2 = \rho^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} F(\rho,\varphi) = \sqrt{1 + 4\rho^2}, \\ D = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 1\}. \end{array}\right.$$

$$S = \iint_D F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho d\rho = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4\rho^2)^{1/2} d(1 + 4\rho^2) =$$

$$= \frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}2\pi\,(5^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 5{,}5 \text{ (кв. од.)}$$

1.3.3. Відшукання маси, моментів (статичних та інерції) і координат центра тяжіння плоскої пластини

Якщо поверхнева густина $\sigma = \sigma(x, y)$ плоскої пластини D є неперервною функцією, то її масу m (згідно з фізичним смислом ПДІ (див. п. 1.1.1) обчислюють за формулою:

$$m = \iint_D \sigma(x, y)\, dxdy. \qquad (1.35)$$

Статичним моментом матеріальної точки з масою m відносно осі (прямої) l називають добуток маси m на відстань d від точки до осі:

$M_l = m \cdot d$. У системі координат xOy, як правило, розглядають статичні моменти M_x і M_y відносно координатних осей Ox і Oy відповідно: $M_x = m \cdot y$, $M_y = m \cdot x$, де x, y – координати точки, які і вказують на її відстань від осей координат (зі знаком $+$ чи –).

Розглядаючи пластину D як множину матеріальних точок, приходимо до **формул статичних моментів**:

$$M_x = \iint\limits_D \sigma(x,y)\, y dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D \sigma(x,y)\, x dxdy. \tag{1.36}$$

Якщо зосередити всю масу в центрі тяжіння $C(x_c, y_c)$, тоді $M_x = m \cdot y_c$, $M_y = m \cdot x_c$, звідси дістанемо **формули координат центра тяжіння** пластини D:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D \sigma(x,y)\, x\, dxdy}{\iint\limits_D \sigma(x,y)\, dxdy}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D \sigma(x,y)\, y\, dxdy}{\iint\limits_D \sigma(x,y)\, dxdy}. \tag{1.37}$$

Формули (1.37) значно спрощуються у випадку, коли $\forall (x,y) \in D$ $\sigma = \sigma(x,y) - const$. Зокрема, якщо $\sigma \equiv 1$, то маса пластини чисельно дорівнює її площі S:

$$x_c = \frac{1}{S} \iint\limits_D x\, dxdy, \quad y_c = \frac{1}{S} \iint\limits_D y\, dxdy. \tag{1.38}$$

Моментом інерції матеріальної точки з масою m відносно осі l називають добуток маси m на квадрат відстані d від точки до осі: $J = m \cdot d^2$. У системі координат xOy розглядають моменти інерції $J_x = m \cdot y^2$ і $J_y = m \cdot x^2$ відносно координатних осей Ox і Oy відповідно, а також центральний (полярний) момент відносно точки O: $J_0 = J_x + J_y$.

Розглядаючи пластину як систему матеріальних точок, приходимо до **формул моментів інерції**:

$$\begin{gathered} J_x = \iint\limits_D \sigma(x,y) y^2 dxdy, \quad J_y = \iint\limits_D \sigma(x,y) x^2 dxdy, \\ J_0 = J_x + J_y = \iint\limits_D \sigma(x,y)\,(x^2 + y^2)\, dxdy. \end{gathered} \tag{1.39}$$

Приклад 6. Знайти масу, статичні моменти, координати центра тяжіння, моменти інерції плоскої фігури, обмеженої аркою синусоїди $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ і віссю Ox, якщо її поверхнева густина $\sigma(x, y) = 1$.

1. *Зображаємо* плоску фігуру D, яка обмежена графіком функції $y = \sin x$ і відрізком $[0, \pi]$ осі Ox (рис. 1.15).

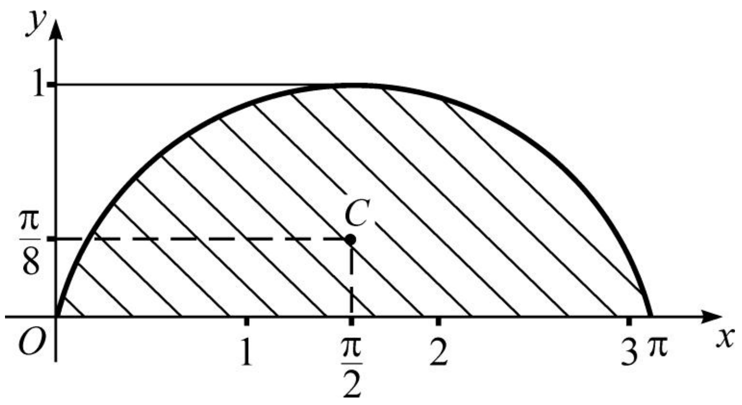


Рис. 1.15. **Область інтегрування**

Візуальний аналіз області D показує, що вона є правильною у напрямі осі Oy:

$$D = D_y = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}.$$

2. *Покладаємо* $\sigma(x, y) \equiv 1$ і обчислюємо всі необхідні величини: m, M_x, M_y, x_c, y_c, I_x, I_y, I_0 за відповідними формулами.

За формулою (1.35) обчислюємо масу фігури D:

$$m = S = \iint_D dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^{\pi} \sin x\, dx =$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2$$

За формулами (1.36) знаходимо статичні моменти:

$$M_x = \iint_D y\, dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} ydy = \int_0^{\pi} dx \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sin x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) = \frac{1}{4}\pi;$$

$$M_y=\iint\limits_D x\,dxdy=\int\limits_0^{\pi}x dx\int\limits_0^{\sin x}dy=\int\limits_0^{\pi}x dx\cdot y\Big|_0^{\sin x}=\int\limits_0^{\pi}x\sin x dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\sin x\,dx & \Rightarrow & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

Для координат центра тяжіння за формулами (1.37) дістанемо:

$$x_c=\frac{M_y}{S}=\frac{\pi}{2},\quad y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{\pi}{8}$$

(абсцису x_c в силу симетрії D відносно прямої $x=\pi/2$ можна було б вказати без обчислень).

За формулами (1.39) обчислюємо моменти інерції:

$$J_x=\iint\limits_D y^2dxdy=\int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\sin x}y^2dy=\int\limits_0^{\pi}dx\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sin x}=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin^3 x\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix}\sin^2 x=1-\cos^2 x \\ \sin x\,dx=-d(\cos x)\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\,d(\cos x)=-\frac{1}{3}\left(\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\cos\pi-\frac{\cos^3\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{4}{9};$$

$$J_y=\iint\limits_D x^2dxdy=\int\limits_0^{\pi}x^2dx\int\limits_0^{\sin x}dy=\int\limits_0^{\pi}x^2dx\cdot y\Big|_0^{\sin x}=\int\limits_0^{\pi}x^2\sin x\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & \Rightarrow & du=2xdx \\ dv=\sin x dx & \Rightarrow & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\int\limits_0^{\pi}x\cos x\,dx=$$

$$=\pi^2+2\int\limits_0^{\pi}x\cos x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\cos x dx & \Rightarrow & v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=\pi^2+2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx\right)=\pi^2+2(x\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi}=\pi^2+2(-1-1)=\pi^2-4.$$

$$J_0=J_x+J_y=\frac{4}{9}+\pi^2-4\approx 6{,}314.$$

1.4. Потрійний інтеграл (ПТІ) у декартових координатах

1.4.1. Означення, теорема існування, геометричний та фізичний смисли, основні властивості

Поняття "потрійний інтеграл" є природним узагальненням поняття "подвійний інтеграл" на випадок функції трьох змінних. Тому його означення принципово не відрізняється від означення подвійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$, або $u = f(M)$, де $M = M(x, y, z)$, визначена і неперервна в замкненій області V тривимірного простору $xOyz$, тобто – на множині точок, яка обмежена замкненою поверхнею S, з урахуванням точок цієї поверхні як межі області V.

Виконаємо таку (*стандартну*) процедуру:

– *розіб'ємо* область (тіло) V довільним чином за допомогою сітки поверхонь на скінченне число n часткових областей із об'ємами Δv_i, $i = \overline{1, n}$ (рис. 1.16)) і найбільшу з відстаней між двома точками межі часткової області назвемо її **діаметром** λ_i $(i = \overline{1, n})$, а максимальний серед них $\lambda = \max\limits_i \{\lambda_i\}$ – **діаметром розбиття** області V;

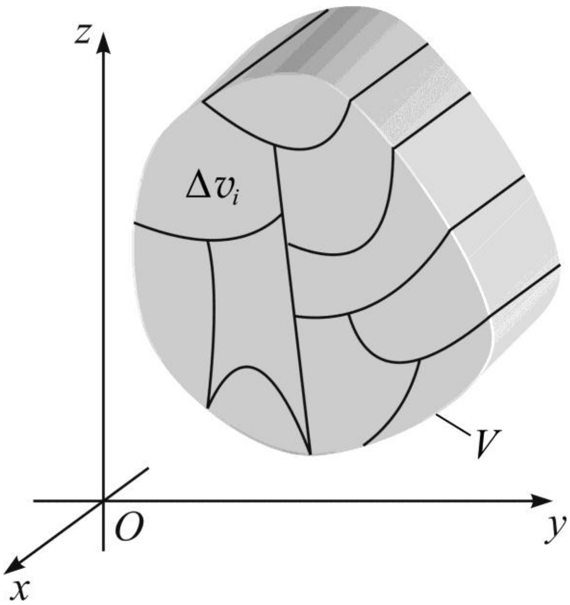


Рис. 1.16. **Розбиття тіла *V* на часткові області**

– *виберемо* у кожній із часткових областей довільним чином по точці $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$, *обчислимо* $f(M_i)$ і *знайдемо* добутки $f(M_i)\Delta v_i$;

– *складемо* суму всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \cdot \Delta v_i \,, \qquad (1.40)$$

яку назвемо **інтегральною сумою** для функції $f(x, y, z)$ в області V;

– *обчислимо* границю (якщо вона існує) інтегральної суми I_n, коли діаметр розбиття λ прямує до нуля за умови необмеженого зростання кількості часткових областей n.

Скінченна границя I інтегральної суми I_n, коли діаметр розбиття прямує до нуля ($\lambda \to 0$), а $n \to \infty$, називають **потрійним інтегралом** від функції $f(x, y, z)$ по області V і позначають:

$$\iiint\limits_V f(M)\,dv, \quad \text{або} \quad \iiint\limits_V f(x, y, z)dv,$$

де $\iiint$ – знак (символ) ПТІ;

V – область інтегрування;

$f(M) = f(x, y, z)$ – підінтегральна функція;

$f(x, y, z)\,dv$ – підінтегральний вираз;

x, y, z – змінні інтегрування;

dv – елемент (диференціал) об'єму.

Отже, за означенням:

$$I = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} I_n = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i = \iiint\limits_V f(M)dv = \iiint\limits_V f(x, y, z)dv. \quad (1.41)$$

Теорема існування ПТІ: якщо задана функція $f(x, y, z)$ неперервна в розглянутій замкненій області V, то існує скінченна границя інтегральної суми (тобто ПТІ), і вона не залежить ні від способу розбиття тіла на часткові області, ні від вибору точок у них для складання інтегральної суми.

У світлі цієї теореми розбиття області V у декартовій системі координат $xOyz$ здійснюють найпростішим із можливих способом – площинами, паралельними координатним площинам. У цьому випадку кожна часткова область – прямокутний паралелепіпед з вимірами Δx, Δy, Δz, тому

$$dv = \Delta v = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = dx \cdot dy \cdot dz,$$

бо для незалежних змінних x, y, z маємо: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$.

Отже, можна записати:

$$I = \iiint\limits_V dv = \left| dv = dx \cdot dy \cdot dz \right| = \iiint\limits_V f\big(x, y, z\big)dx\,dy\,dz. \quad (1.42)$$

Геометричний смисл ПТІ: ПТІ від функції $f(x,y,z)\equiv 1$ по області V чисельно дорівнює об'єму тіла, яке є областю інтегрування:

$$V=\iiint\limits_V dv=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \qquad (1.43)$$

Фізичний смисл ПТІ: якщо тіло V заповнене матеріальними точками і відома функція $\mu=\mu(x,y,z)$ – густина розподілу мас, то ПТІ від густини тіла $\mu=\mu(x,y,z)$ чисельно дорівнює його масі, тобто

$$m=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (1.44)$$

Основні властивості ПТІ не відрізняються від властивостей визначеного інтеграла і ПДІ:

1. ПТІ від суми будь якого скінченного числа функцій дорівнює сумі відповідних інтегралів від доданків:

$$\iiint\limits_V (f_1+f_2+...+f_k)dv=\iiint\limits_V f_1dv+\iiint\limits_V f_2dv+\ldots+\iiint\limits_V f_kdv.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак (символ) ПТІ:

$$\iiint\limits_V cf\,dv=c\iiint\limits_V f\,dv, \quad c-const.$$

3. Якщо область V розбито на дві підобласті V_1, V_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то ПТІ по всій області дорівнює сумі інтегралів по підобластях:

$$\iiint\limits_V f\,dv=\iiint\limits_{V_1} f\,dv+\iiint\limits_{V_2} f\,dv.$$

Властивість *адитивності* 3^0 можна узагальнити на довільне скінченне число підобластей.

1.4.2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Обчислення ПТІ $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ здійснюють шляхом послідовного обчислення інтегралів меншої кратності, тобто зведенням до визначеного інтеграла (ВІ) за змінною інтегрування z і змінними межами інтегрування (залежними від x і y) від подвійного інтеграла (ПДІ) по області, яка є проєкцією V_{xy} тіла V на площину xOy.

Нехай область V є тілом, обмеженим знизу поверхнею $z = h(x, y)$, зверху – поверхнею $z = H(x, y)$, де $h(x, y)$, $H(x, y)$ – неперервні в замкненій області $D \in xOy$ функції; D – проєкція V_{xy} тіла V на площину xOy, тобто $D = V_{xy}$.

Тоді, в декартових координатах має місце **формула обчислення ПТІ зведенням його до обчислення ПДІ від ВІ**:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dx\,dy. \tag{1.45}$$

Якщо область D є правильною у напрямі осі Oy (див. рис. 1.3), тобто $D = D_y = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, то

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{1.46}$$

Якщо область D є правильною у напрямі осі Ox (див. рис. 1.4), тобто $D = D_x = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$, то

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{1.47}$$

Співвідношення (1.46), (1.47) є **формулами зведення обчислення ПТІ до послідовного обчислення трьох ВІ**, або – **до трикратного інтегрування**. ВІ зі сталими межами інтегрування називаються **зовнішніми**, інші – **внутрішніми** інтегралами.

Оскільки визначені і подвійні інтеграли вже опановано, то обчислення ПТІ не має викликати утруднення.

Стосовно тривимірної області V, як і двовимірної D, вводять поняття "правильна область". Область V називають **правильною у напрямі**

осі Oz, якщо кожна пряма, проведена через внутрішню точку області V паралельно Oz, перетинає межу S області лише у двох точках і кожна з ділянок межі S – нижня і верхня – є куском поверхні, яку описано єдиним аналітичним виразом. Якщо область V є правильною у напрямі осі Oz і проєктується на площину xOy у правильну двовимірну область $D = V_{xy}$, то її називають **правильною тривимірною областю**:

$$V = \{(x, y, z) \mid \underbrace{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)}_{D_y}, h(x, y) \le z \le H(x, y)\} \tag{1.48}$$

або

$$V = \{(x, y, z) \mid \underbrace{c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)}_{D_x}, h(x, y) \le z \le H(x, y)\}. \tag{1.49}$$

Якщо розглянута область не є правильною, то, спираючись на властивість адитивності ПТІ, її розбивають площинами, паралельними координатним площинам, на правильні тривимірні області.

Зауваження: якщо межу S правильної області V описано рівняннями виду $x = h(y, z)$, $x = H(y, z)$ або $y = h(x, z)$, $y = H(x, z)$, то для переходу від ПТІ до трикратного інтегралу слід проєктувати тіло V відповідно на площини yOz або xOz і тоді області інтегрування опишуться у символах так:

$$V = \{(x, y, z) \mid V_{yz},\ h(y, z) \le x \le H(y, z)\}, \tag{1.50}$$

$$V = \{ (x, y, z) \mid V_{xz}, h(x, z) \le y \le H(x, z)\}, \tag{1.51}$$

де V_{yz}, V_{xz} – правильні у напрямі хоча б однієї з осей координат плоскі області.

Для побудови більш наочного зображення областей (1.50), (1.51) іноді буває зручним змінити традиційне розташування осей координат у просторі: наприклад, вісь Ox чи Oy розташувати вертикально або змінити напрям осей на протилежний та ін.

Розглянемо приклад обчислення ПТІ і, разом із тим, загальний порядок їх обчислення.

Приклад 7. Обчислити ПТІ $I=\iiint\limits_V x(y-z)dxdydz$ по області V, що обмежена поверхнями: $x=2-y^2-z^2$, $x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$, $y^2+z^2=1$.

1. *Аналізуємо* задані рівняння з метою встановлення того, які поверхні вони описують, і *зображуємо* (будуємо) область інтегрування або принаймні її проєкцію на одну з координатних площин.

У цьому прикладі: $x=2-y^2-z^2$ – рівняння кругового параболоїда з віссю симетрії Ox і вершиною в точці $A(2{,}0{,}0)$, порожнина якого містить початок координат $O(0{,}0{,}0)$; $x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$ – рівняння півсфери радіуса 1 з центром у точці O, яка розташована нижче площини xOy (рівняння $x^2+y^2+z^2=1$ описує всю сферу); $y^2+z^2=1$ – рівняння кругового циліндра з твірною, паралельною осі Ox, і напрямною – колом $y^2+z^2=1$ радіуса 1 з центром у початку координат, розташованим на площині yOz. На рис. 1.17 схематично зображено поверхні, що обмежують тіло V: обвідні лінії параболоїда, сфери і циліндра та кола з центрами в точках O, O_1 – лінії перетину сфери і параболоїда з циліндром.

2. *Установлюємо* межі інтегрування (зовнішнього і внутрішнього) та *виписуємо* трикратний інтеграл.

Для цього подумки (або графічно) проєктуємо тіло V на одну з координатних площин (бажано, щоб відповідна плоска область була правильною у напрямі хоча б однієї з осей координат). У цьому випадку область інтегрування краще проєктувати на yOz:

$$V=\{(x,y,z)\,|\,V_{yz},\ h(y,z)\le x\le H(y,z)\}.$$

До того ж, область інтегрування V є правильною тривимірною областю, бо поверхні $h(y,z)=-\sqrt{1-y^2-z^2}$, $H(y,z)=2-y^2-z^2$ і плоска область $V_{yz}=D=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1\}$ – круг, межею якого є напрямна циліндра (рис. 1.18а), задовольняють умови означення правильної тривимірної області. Область D є правильною двовимірною областю у напрямі обох осей: і Oy, і Oz. На рис. 1.18б зображено проєкцію V на площину yOx; вона є правильною тільки у напрямі осі Ox.

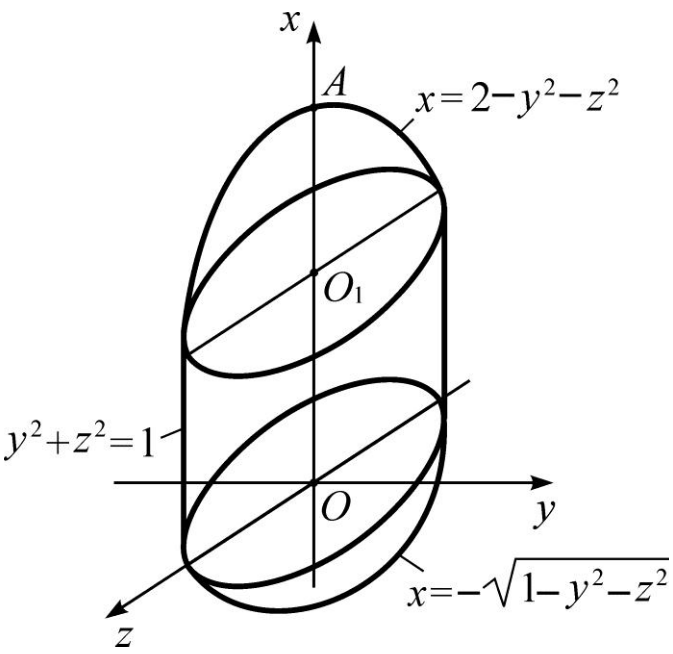


Рис. 1.17. **Каркаси поверхонь, що обмежують область інтегрування V**

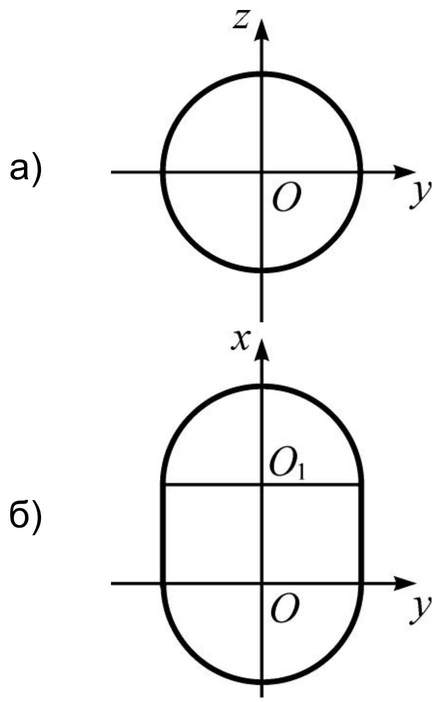


Рис. 1.18. **Проєкції області V на площини: а) yOz; б) yOx**

Обираємо найпростішу область – круг – і здійснюємо, вже знайомий перехід до полярних координат у площині yOz:

$$\left|\begin{array}{l} y=\rho\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow D_\rho=\{\,(\rho,\varphi)\mid 0\le\varphi\le 2\pi,\, 0\le\rho\le 1\}.$$

Оскільки $y^2+z^2=\rho^2$, то область інтегрування опишеться так:

$$V=\{\,(x,\rho,\varphi)\mid 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ -\sqrt{1-\rho^2}\le x\le 2-\rho^2\},$$

де подвійні нерівності у фігурних дужках дають межі інтегрування за відповідними змінними.

Для підінтегральної функції $f(x,y,z)=x(y-z)$ маємо:

$$f(x,y,z)=x(y-z)\Rightarrow F(x,\rho,\varphi)=x(\rho\sin\varphi-\rho\cos\varphi)=x\rho(\sin\varphi-\cos\varphi).$$

Записуємо заданий потрійний інтеграл з урахуванням того, що $dydz=\rho d\rho d\varphi$:

$$I=\iiint\limits_V x(y-z)\,dxdydz=\iiint\limits_V x\rho^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\,dxd\rho d\varphi.$$

3. *Обчислюємо* ПТІ зведенням його до трикратного інтеграла.

$$I=\iiint\limits_V x\rho^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\,dxd\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int\limits_0^1\rho^2 d\rho\int\limits_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}xdx.$$

У свою чергу, трикратний інтеграл обчислюємо, починаючи з другого внутрішнього ВІ за змінною x:

$$I_x=\int\limits_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}xdx=\frac{1}{2}x^2\Bigg|_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}=\frac{1}{2}\Big[\big(2-\rho^2\big)^2-\big(1-\rho^2\big)\Big]=\frac{1}{2}\big(3-3\rho^2+\rho^4\big).$$

Наступним обчислюємо ВІ за змінною ρ:

$$I_\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\big(3-3\rho^2+\rho^4\big)\rho^2 d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\big(3\rho^2-3\rho^4+\rho^6\big)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\rho^3-\frac{3}{5}\rho^5+\frac{1}{7}\rho^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{19}{70}.$$

Останнім вираховуємо зовнішній інтеграл за змінною φ:

$$I_\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\frac{19}{70}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi=\frac{19}{70}\big(-\cos\varphi-\sin\varphi\big)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{19}{70}\big(\cos 2\pi+\sin 2\pi-\cos 0-\sin 0\big)=0.$$

Якщо внутрішні інтеграли "громіздкі", то їх знаходять окремо, як це й було зроблено; у протилежному випадку обчислення трикратного інтеграла проводять "ланцюжком".

Якщо якийсь із ВІ (внутрішній чи зовнішній) має сталі межі інтегрування і його підінтегральна функція залежить від змінної, яка не фігурує в інших складових трикратного інтеграла, то його можна обчислити незалежно від інших ВІ – автономно. Якщо зважити на цю обставину з самого спочатку, то можна відразу отримати відповідь.

У разі, коли просторове тіло обмежене кусками циліндричних або/і сферичних поверхонь, то використовують спеціальні координати.

1.4.3. Потрійний інтеграл у циліндричних і сферичних координатах

Якщо в декартовій системі координат $xOyz$ в одній із координатних площин здійснити перехід до полярних координат, то кожній точці простору відповідатиме трійка чисел, два з яких є координатами ρ, φ, а третя залишається декартовою: (ρ, φ, z), (ρ, y, φ), (x, ρ, φ). Зазначені трійки чисел називають **циліндричними координатами** точки, а система координат – відповідно **циліндричною**. На рис. 1.19 зображено циліндричні координати ρ, φ, z; вони пов'язані з її декартовими координатами співвідношеннями:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{1.52}$$

де $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Елемент об'єму в координатах ρ, φ, z зображено на рис. 1.20.

Формула переходу в ПТІ від декартових до циліндричних координат, з урахуванням того, що $dv = dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$, має вигляд:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_c} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz, \tag{1.53}$$

де V_c – область простору $\rho O\varphi\theta$, яка відповідає області V в $xOyz$.

Під час обчислення ПТІ із прикладу 7 вже, власне, було використано циліндричні координати x, ρ, φ.

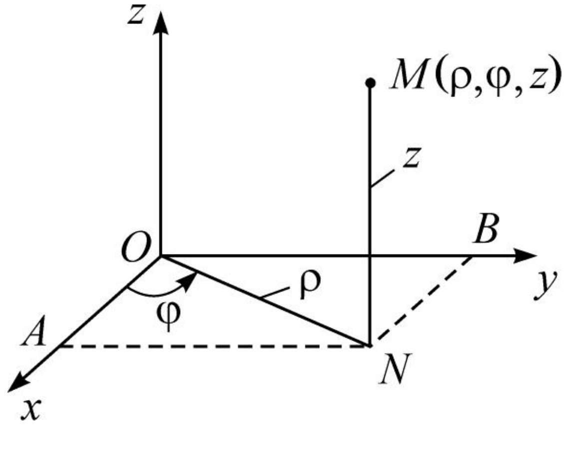


Рис. 1.19. **Циліндричні координати ρ, φ, *z***

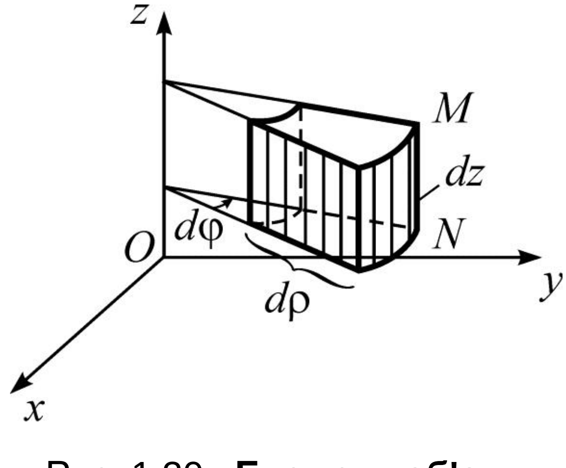


Рис. 1.20. **Елемент об'єму в циліндричних координатах**

Сферичним координатами точки $M(x, y, z)$ простору $xOyz$ називають числа ρ, φ, θ, де ρ – довжина радіус-вектора $\overline{OM}$ точки M; φ – кут нахилу до осі Ox проекції $\overline{OM}$ на площину xOy; θ – кут відхилення радіус-вектора точки M від площини xOy (рис. 1.21).

Сферичні координати ρ, φ, θ точки M пов'язані з її декартовими координатами x, y, z формулами:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ z = \rho\sin\theta, \qquad (1.54)$$

де $0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ (див. рис. 1.21).

Неважко переконатися у справедливості рівності $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Наявність у рівняннях поверхонь, що описують тіло, виразу $x^2 + y^2 + z^2$ "підказує" необхідність переходу до сферичних координат.

Формула переходу в ПТІ від декартових до сферичних координат, з урахуванням того, що елемент об'єму $dv = dxdydz = \rho^2\cos\theta d\rho d\theta$ (рис. 1.22), має вигляд:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_s} F(\rho, \varphi, \theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta, \qquad (1.55)$$

де V_s – область простору $\rho O\varphi\theta$, яка відповідає області V в $xOyz$, а

$$F(\rho, \varphi, \theta) = f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

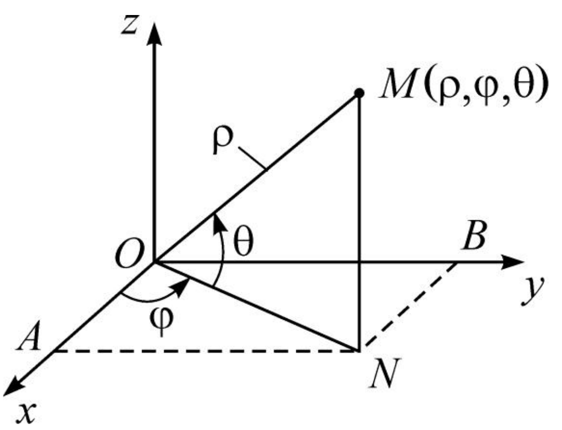


Рис. 1.21. **Сферичні координати ρ, φ, θ**

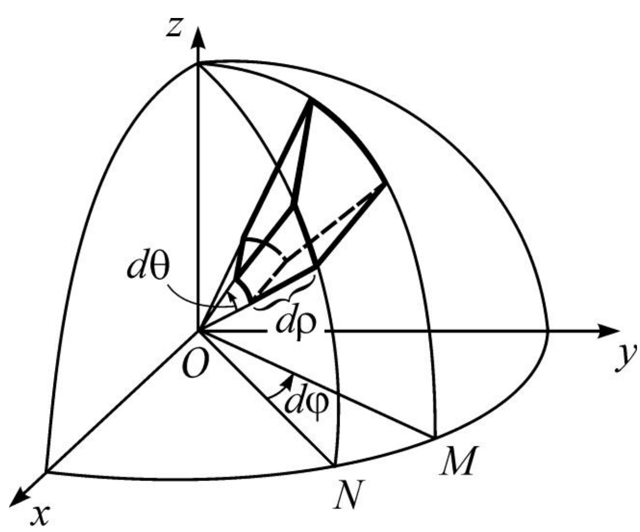


Рис. 1.22. **Елемент об'єму у сферичних координатах**

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла V, обмеженого поверхнею, що описується рівнянням $(x^2+y^2+z^2)^2=16z$.

1. *Аналізуємо* рівняння заданої поверхні та *зображуємо* її.

Оскільки x і y входять у рівняння тільки у квадратах, то відповідне тіло симетричне відносно площин xOz та yOz; оскільки ліва частина завжди додатна, то і $z \geq 0$, тобто все тіло розташоване вище площини xOy. Це дозволяє обмежитись обчисленням об'єму чверті заданого тіла, яка лежить у першому октанті.

Рівняння межі області інтегрування можна подати у вигляді:

$$x^2+y^2+z^2=4\sqrt{z} \quad \text{або} \quad x^2+y^2=4\sqrt{z}-z^2,$$

а це означає, що лініями рівня поверхні (при $z=c-const$) є кола з центрами на осі Oz і радіусами $R=\sqrt{4\sqrt{c}-c^2}$. Саме ця обставина дозволяє встановити проекцію V_{xy} тіла на площину xOy – нею буде круг радіуса $\sqrt{3}$ з центром у точці O – проєкція перерізу тіла площиною $z=1$ (узагалі "незнайому" поверхню досліджують методом перерізів).

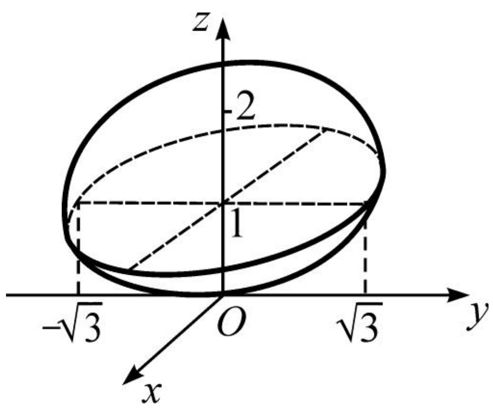


Рис. 1.23. **Тіло V**

Накопичена інформація дає можливість зобразити схематично тіло V, яке нагадує "морську гальку" (рис. 1.23).

2. *Установлюємо* межі внутрішнього і зовнішнього інтегрування та *виписуємо* трикратний інтеграл.

Наявність у рівнянні поверхні виразу $x^2+y^2+z^2$ дає підстави для переходу до сферичних координат (див. формули (1.54)).

Подаємо рівняння поверхні в сферичних координатах:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=16z \Rightarrow \left| \begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=\rho^2 \\ z=\rho\sin\theta,\ 0\leq\theta\leq\pi/2 \end{array} \right| \Rightarrow (\rho^2)^2=16\rho\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^3=16\sin\theta \Rightarrow \rho=\sqrt[3]{16\sin\theta}, \tag{1.56}$$

і разом із тим отримуємо межі внутрішнього інтегрування за змінною ρ: $0\leq\rho\leq\sqrt[3]{16\sin\theta}$.

Опис у символах чверті області V (з урахуванням симетрії тіла) як правильної тривимірної області визначає межі інтегрування:

$$V_{1/4} = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ \ 0 \le \rho \le \sqrt[3]{16\sin\theta}\}.$$

3. *Обчислюємо* ПТІ зведенням до трикратного інтеграла, який знайдемо "ланцюжком", починаючи з внутрішнього ВІ за змінною θ:

$$V = 4\iiint\limits_{V_{1/4}} dv = 4\iiint\limits_{V_S} \rho^2 \cos\theta\, d\rho d\varphi d\theta = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int\limits_0^{\sqrt[3]{16\sin\theta}} \rho^2\, d\rho =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[3]{16\sin\theta}} = \frac{64}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{32}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta =$$

$$= \frac{32}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{32}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{32}{3}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}\pi \text{ (куб. од.)}.$$

1.4.4. Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об'ємів просторових тіл базується на геометричному смислі ПТІ, а саме: якщо тіло V є правильною просторовою областю, то його об'єм обчислюють за формулою (1.43):

$$V = \iiint\limits_V dv = \iiint\limits_V dxdydz.$$

У разі неправильної області, тіло розбивають на частини, які задовольняють умови правильної тривимірної області, і залучають властивість адитивності ПТІ.

Обчислення маси тіла. Якщо густина розподілу мас $\mu = \mu(x, y, z)$ просторового тіла V є неперервною функцією, то його масу (згідно з фізичним смислом ПТІ) визначають за формулою (1.44):

$$m = \iiint\limits_V \mu(x, y, z)\, dxdydz.$$

Інші фізичні характеристики тіла V визначають через масу, тому цей інтеграл або його підінтегральна функція входять як складові частини до формул, за якими ці характеристики обчислюють.

Статичні моменти тіла відносно координатних площин:

$$M_{xy}=\iiint\limits_V z\cdot\mu(x,y,z)\,dv,\quad M_{yz}=\iiint\limits_V x\cdot\mu(x,y,z)\,dv,$$
$$M_{xz}=\iiint\limits_V y\cdot\mu(x,y,z)\,dv. \tag{1.57}$$

Координати центра тяжіння тіла:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{m},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}. \tag{1.58}$$

Формули (1.58) легко подати у розгорнутому вигляді через інтеграли, скориставшись формулами (1.44) і (1.57).

Серед моментів інерції розрізняють:

1) **моменти інерції відносно координатних осей:**

$$J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\cdot\mu(x,y,z)\,dv,\ J_y=\iiint\limits_V (x^2+z^2)\cdot\mu(x,y,z)\,dv,$$
$$J_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\cdot\mu(x,y,z)\,dv; \tag{1.59}$$

2) **моменти інерції відносно координатних площин:**

$$J_{xy}=\iiint\limits_V z^2\cdot\mu(x,y,z)\,dv,\ J_{yz}=\iiint\limits_V x^2\cdot\mu(x,y,z)\,dv,$$
$$J_{zx}=\iiint\limits_V y^2\cdot\mu(x,y,z)\,dv; \tag{1.60}$$

3) **полярний момент інерції:**

$$J_0=J_{xy}+J_{yz}+J_{xz}=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\cdot\mu(x,y,z)\,dv. \tag{1.61}$$

Формули (1.57) – (1.61) значно спрощуються, якщо густина розподілу мас $\mu=\mu(x,y,z)=const\ \ \forall(x,y,z)\in V$; за умови $\mu\equiv 1$ маса тіла чисельно дорівнює його об'єму і тоді про статичні моменти та моменти інерції говорять як про характеристики не фізичного тіла, а просторової геометричної фігури.

Приклад 9. Знайти об'єм, статичні моменти і координати центра тяжіння геометричної фігури, обмеженої поверхнями: $x^2+z^2=1$, $x+y-4=0$, $y=0$ (див. приклад 4 з рис. 1.14), якщо $\mu(x,y,z)=1$.

Спроєктуємо циліндричне тіло не на площину xOz, а на площину xOy (рис. 1.24) й обчислимо відповідні ПТІ не в циліндричних, а в декартових координатах.

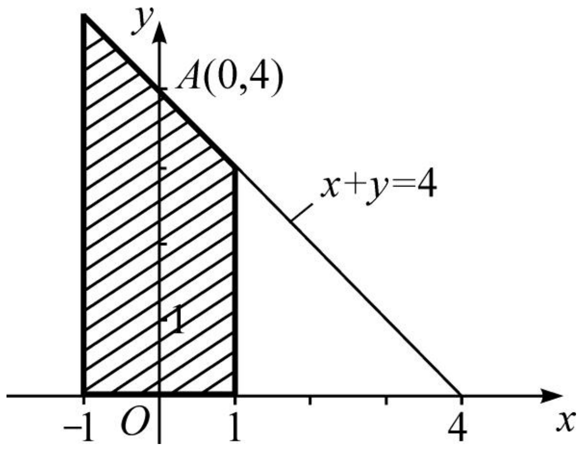


Рис. 1.24. **Проєкція циліндричного тіла на площину *xOy***

1. *Подаємо* в символах область інтегрування V згідно з рис. 1.24 і вихідними даними:

$$V=\{(x,y,z)\,|\,-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 4-x, -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2}\}.$$

2. *Обчислюємо* об'єм тіла V за формулою (1.43):

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{4-x}dy\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{4-x}dy\cdot z\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int_0^{4-x}dy=$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\cdot y\Big|_0^{4-x}=2\int_{-1}^{1}(4-x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}x=\sin t\ \Rightarrow\ t=\arcsin x\\ dx=\cos t\,dt,\ t\in[-\pi/2,\pi/2]\end{array}\right|=$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4-\sin t)\cos^2 t\,dt=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4\cos^2 t-\sin t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[2(1+\cos 2t)dt+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,d(\cos t)\right]=2\left[(2t+\sin 2t)+\frac{\cos^3 t}{3}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\pi$$

(результат співпадає з раніше знайденим $V=4\pi$ (куб. од.)).

3. *Покладаємо* $\mu(x,y,z)=1$ і з*находимо* статичні моменти M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} тіла за формулами (1.57):

$$M_{xy}=\iiint\limits_V zdxdydz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{4-x}dy\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}zdz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{4-x}dy\left.\frac{z^2}{2}\right|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Аналогічним чином отримуємо:

$$M_{yz}=\iiint\limits_V x\,dxdydz=-\frac{\pi}{4},\quad M_{xz}=\iiint\limits_V y\,dxdydz=\frac{65}{8}\pi.$$

Координати центра тяжіння здобудемо за формулою (1.58), врахувавши, що для $\mu(x,y,z)=1$ маса тіла дорівнює його об'єму $(m=V)$:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{V}=-\frac{1}{16},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{V}=\frac{65}{32},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{V}=0.$$

2. Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

1. Які кроки (дії) передують означенню подвійного інтеграла від функції $f(x,y)$ по області D?

2. Що називають подвійним інтегралом у декартових координатах?

3. Як формулюють теорему існування подвійного інтеграла?

4. Якими основними властивості володіє подвійний інтеграл? Сформулюйте їх та запишіть у символах.

5. Яке тіло називають циліндричним і якою чисельною характеристикою такого тіла є подвійний інтеграл?

6. У чому полягає геометричний смисл подвійного інтеграла?

7. Що називають тонкою пластиною і якою числовою характеристикою такої пластини є подвійний інтеграл?

8. У чому полягає фізичний смисл подвійного інтеграла?

9. Які області називають правильними у напрямі осі Ox або Oy? Наведіть відповідні геометричні зображення і символьні записи.

10. За якими формулами обчислюють подвійні інтеграли, якщо область інтегрування є правильною?

11. Який загальний порядок вирахування повторних інтегралів?

12. Якими співвідношеннями пов'язані декартови та полярні координати?

13. Чим принципово відрізняються означення подвійного інтеграла в декартових і полярних координатах?

14. У яких випадках доцільно здійснювати перехід у подвійному інтегралі до полярних координат?

15. Чому дорівнює елемент площі у полярних координатах?

16. Як здійснюють перехід у подвійному інтегралі від декартових координат до полярних?

17. Які області називають правильними за ρ або φ у полярних координатах? Наведіть відповідні геометричні зображення і символьні записи.

18. Які геометричні та фізичні застосування подвійного інтеграла ви знаєте?

19. Які дії передують означенню потрійного інтеграла?

20. Що називають потрійним інтегралом у декартових координатах?

21. Як формулюють теорему існування потрійного інтеграла?

22. У чому полягає геометричний смисл потрійного інтеграла?

23. У чому полягає фізичний смисл потрійного інтеграла?

24. Якими основними властивостями володіє потрійний інтеграл? Сформулюйте їх та запишіть у символах.

25. Які просторові області називають правильними у напрямі осей координат: Ox, Oy, Oz? Наведіть відповідні геометричні зображення і символьні записи.

26. За якими формулами обчислюють потрійні інтеграли з правильною областю інтегрування?

27. Яку просторову систему координат називають циліндричною, сферичною?

28. За якими формулами здійснюють перехід у потрійному інтегралі від декартових координат до циліндричних (сферичних)?

29. Які геометричні та фізичні застосування потрійного інтеграла ви знаєте?

30. За якої умови потрійний інтеграл чисельно виражає об'єм тіла?

31. За якої умови потрійний інтеграл чисельно виражає масу просторового тіла?

3. Варіанти задач самостійної контрольної роботи

Задача 1. Змініть порядок інтегрування у двократному інтегралі.

1.1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

1.2. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

1.3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^{-y}}^{e^{y}} f(x,y)dx$.

1.4. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$

1.5. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{3x}^{8-x} f(x,y)dy$.

1.6. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$.

1.7. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

1.8. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

1.9. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

1.10. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$.

1.11. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy$.

1.12. $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{8x-x^2}} f(x,y)dy$.

1.13. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)dy$.

1.14. $\int\limits_{e}^{e^2} dx \int\limits_{1}^{\ln x} f(x,y)dy$.

1.15. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$.

1.16. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

1.17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

1.18. $\int\limits_{1}^{6} dx \int\limits_{6/x}^{7-x} f(x,y)dy$.

1.19. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

1.20. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{1/y}^{y} f(x,y)dx$.

1.21. $\int\limits_{0}^{2/3} dx \int\limits_{2x}^{2-x} f(x,y)dy$.

1.22. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y^3}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

1.23. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2y}^{6-y} f(x,y)dx$.

1.24. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)dx$.

1.25. $\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2-4}^{y-2} f(x,y)dx$.

1.26. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$.

1.27. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

1.28. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$.

Задача 2. Обчисліть $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ двома способами – зведенням до двократних інтегралів з різним порядком інтегрування, якщо область D обмежена заданими лініями.

2.1. $\iint\limits_{D} \frac{x}{y^2} dxdy$, D: $x=4$, $y=2$, $y=2x$.

2.2. $\iint\limits_{D} \sin(x+y)\,dxdy$, D: $y=0$, $y=x$, $x+y=\pi$.

2.3. $\iint\limits_{D} xy\,dxdy$, D: $x+y=2$, $x^2=4y+4$.

2.4. $\iint\limits_{D} xy^3 dxdy$, D: $y=x^2-2$, $y=x$.

2.5. $\iint\limits_{D} (x^2-1)\,dxdy$, D: $x=2$, $y=x$, $y=3x$.

2.6. $\iint\limits_{D} (2x+1)\,dxdy$, D: $y^2=x+1$, $x=0$.

2.7. $\iint\limits_{D} (12x^2y^2+16x^3y^3)\,dxdy$, D: $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$.

2.8. $\iint\limits_{D} (x+2y)\,dxdy$, D: $y^2=x+4$, $y=x+2$.

2.9. $\iint\limits_{D} (3x+y)^2 dxdy$, D: $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

2.10. $\iint\limits_{D} e^y dxdy$, D: $x=0$, $y=\ln x$, $y=1$, $y=2$.

2.11. $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy,\quad D:\ y^2 = x+2,\ y = x.$

2.12. $\iint\limits_D (y+x^2)\,dxdy,\quad D:\ x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=3x.$

2.13. $\iint\limits_D xy^2 dxdy,\quad D:\ x=0,\ x=-\sqrt{2y-y^2}\,.$

2.14. $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy,\quad D:\ y+x^2 = 2,\ y+1=2x.$

2.15. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2}\,dxdy,\quad D:\ xy=1,\ y=x,\ x=3.$

2.16. $\iint\limits_D x^3 y\,dxdy,\quad D:\ x=0,\ y=1,\ y^2 = x.$

2.17. $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,dxdy,\quad D:\ y=x^2,\ y+3x^2-1=0,\ x=0\quad (x\ge 0).$

2.18. $\iint\limits_D (y^2+x)\,dxdy,\quad D:\ y=x^2,\ x=y^2.$

2.19. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\quad D:\ y=\sqrt{2x-x^2},\ y=0.$

2.20. $\iint\limits_D xy^2 dxdy,\quad D:\ x=y^2,\ x+y=2.$

2.21. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,\quad D:\ y=x,\ x=2,\ xy=1.$

2.22. $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy,\quad D:\ y=x,\ y=2-x^2.$

2.23. $\iint\limits_D 2x\,dxdy,\quad D:\ y=0,\ y=x,\ x^2+y=2\quad (x\ge 0,\ y\ge 0).$

2.24. $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy,\quad D:\ x^2+y^2=4.$

2.25. $\iint\limits_D (y+x)\,dxdy,\quad D:\ xy=6,\ x+y=7.$

2.26. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\quad D:\ y^2=2x,\ x=2.$

2.27. $\iint\limits_D x^3 y\,dxdy,\quad D:\ x=0,\ x=\sqrt{4y-y^2}.$

2.28. $\iint\limits_D (x+6y)\,dxdy$, $\quad D:\ y=5x,\ y=x,\ x=1$.

2.29. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$, $\quad D:\ x=\pi,\ y=2x,\ y=x$.

2.30. $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)\,dxdy$, $\quad D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

Задача 3. Обчисліть $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, здійснивши перехід до полярних координат.

3.1. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $\quad D: x^2+y^2\le 2,\ y\ge x,\ x\ge 0$.

3.2. $\iint\limits_D (y+1)\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\le 2x,\ y\ge 0$.

3.3. $\iint\limits_D \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+3y^2}}\,dxdy$, $\quad D:\ 1\le x^2+y^2\le 9$.

3.4. $\iint\limits_D (y+4)\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\le 4x$.

3.5. $\iint\limits_D (3-x)\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\le 2y$.

3.6. $\iint\limits_D \dfrac{x^2+y^2}{y}\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\le 2y$.

3.7. $\iint\limits_D (2-3x)\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\le 2,\ y\ge\sqrt{3}x,\ y\ge -x$.

3.8. $\iint\limits_D (1+x)\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2+6y\le 0,\ x\le 0$.

3.9. $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\ge 2x,\ x^2+y^2\le 4x$.

3.10. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-4}\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\ge 4,\ x^2+y^2\le 9$.

3.11. $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2\le 9$.

3.12. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $\quad D:\ x^2+y^2-2y\le 0,\ y\ge x,\ y\ge -x$.

3.13. $\iint\limits_D y\,dxdy$, $D:\ x^2+y^2\ge 2y,\ x^2+y^2\le 4y$.

3.14. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D:\ (x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)\quad (x\ge 0)$.

3.15 $\iint\limits_D (y+2x)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0,\ y\le\sqrt{3}x$.

3.16. $\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D:\ (x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)\quad (x\ge 0)$.

3.17. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 2y$.

3.18. $\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy$, $D:\ y\le\sqrt{4-x^2},\ y\ge 0$.

3.19. $\iint\limits_D (x+3y)\,dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge -x,\ y\ge\sqrt{3}x$.

3.20. $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D:\ 4\le x^2+y^2\le 9$.

3.21. $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$, $D:\ e^2\le x^2+y^2\le e^4$.

3.22. $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$, $D:\ (x^2+y^2)^2=x^2-y^2\quad (x\ge 0)$.

3.23. $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 1,\ x\le 0,\ y\ge 0$.

3.24. $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, $D:\ 1\le x^2+y^2\le 4$.

3.25. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 4x$.

3.26. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

3.27. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 25$.

3.28. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, $D:\ x^2+y^2+4y\le 0,\ x\le 0$.

3.29. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$, $\quad D\colon\ x^2+y^2\le 4x, \quad y\ge 0$.

3.30. $\iint\limits_D \sqrt{2+x^2+y^2}\,dxdy, \quad D\colon\ x^2+y^2\le 2, \quad y\ge 0$.

Задача 4. Знайдіть об'єм тіла V, обмеженого заданими поверхнями.

4.1. $2(x^2+y^2)=9z, \quad x^2+y^2+z^2=9 \quad (9z\ge 2(x^2+y^2))$.

4.2. $z=8-x^2-y^2, \quad z=4$.

4.3. $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=6-x^2-y^2$.

4.4. $12z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2=64 \quad (12z\ge x^2+y^2)$.

4.5. $4z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=4x, \quad z=0$.

4.6. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}, \quad z=1, \quad x^2+y^2=16 \quad (x^2+y^2\le 16)$.

4.7. $x^2+y^2=2y, \quad z=2y, \quad z=4y$.

4.8. $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+z^2=4z, \quad \left(z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

4.9. $z=\sqrt{(x^2+y^2)/8}, \quad x^2+y^2+z^2=9 \quad \left(z\ge\sqrt{(x^2+y^2)/8}\right)$.

4.10. $2z=x^2+y^2, \quad z=1/2, \quad z=2$.

4.11. $z=28-x^2-y^2, \quad z=12\sqrt{x^2+y^2}$.

4.12. $z=1, \quad z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2=27 \quad (x^2+y^2\le 27)$.

4.13. $z=x^2+y^2, \quad z=\sqrt{4/9-x^2-y^2}$.

4.14. $2z=x^2+y^2, \quad z^2=x^2+y^2$.

4.15. $x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2=1 \quad (x^2+y^2\le 1)$.

4.16. $x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2=2x \quad (x^2+y^2\le 2x)$.

4.17. $z=x^2+y^2, \quad z=8, \quad z=2(x^2+y^2)$.

4.18. $z=\sqrt{144-x^2-y^2}, \quad 18z=x^2+y^2$.

4.19. $z=x^2, \quad z=0, \quad y=0, \quad x+y=7$.

4.20. $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $x + y + z = 6$.

4.21. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4 - x^2$.

4.22. $6z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ $(x^2 + y^2 \le 6z)$.

4.23. $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 16 - x^2 - y^2$.

4.24. $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.25. $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 2x$.

4.26. $z = x^2 + y^2$, $z = 8 - x^2 - y^2$.

4.27. $x^2 + y^2 = 4$, $z = y$, $z = -2$.

4.28. $z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 3$.

4.29. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4.30. $2z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Задача 5. Визначить координати центра тяжіння плоскої пластини, обмеженої заданими лініями, якщо відома її поверхнева густина $\sigma = \sigma(x, y)$.

5.1. $x = \sqrt{6y - y^2}$, $x = 0$; $\sigma(x, y) = \sigma = const$.

5.2. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = -x$ $(y \ge 0)$; $\sigma(x, y) = y$.

5.3. $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$; $\sigma(x, y) = x$.

5.4. $y^2 = x + 4$, $y = x + 2$; $\sigma(x, y) = \sigma = const$.

5.5. $y = \sqrt{2x - x^2}$, $x - y = 0$, $y = 0$; $\sigma(x, y) = \sigma = const$.

5.6. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $x = 0$ $(y \ge 0)$; $\sigma(x, y) = xy$.

5.7. $y = \sqrt{6x}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x = 4$; $\sigma(x, y) = \sigma = const$.

5.8. $y = x^2$, $y = x^3$; $\sigma(x, y) = y$.

5.9. $y^2 = 4x + 4$, $x + y = 2$; $\sigma(x, y) = \sigma = const$.

5.10. $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $y = x$, $x = 0$; $\sigma(x, y) = \sigma = const$.

5.11. $x^2+y^2=2x$, $x-y=0$, $x+y=0$ $(0\le x\le 2)$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.12. $x=\sqrt{3}y$, $x=\sqrt{3-y^2}$, $y=0$; $\sigma(x,y)=x$.

5.13. $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$; $\sigma(x,y)=2x$.

5.14. $x=-\sqrt{1-y^2}$, $x+y=1$, $y=0$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.15. $y=-\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.16. $x^2+y^2=6x$, $y=0$ $(y\ge 0)$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.17. $y=\sin x$, $y=0$ $(0\le x\le \pi)$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.18. $y=0{,}3x^2$, $y=1{,}2x$; $\sigma(x,y)=xy$.

5.19. $x^2+y^2=6y$, $x=0$, $y=x$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.20. $x^2+y^2=4x$, $y=0$, $x=y$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.21. $2y=(1-x)^2$, $x+y=1$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.22. $x^2+y^2=4$, $y=0$, $y=\sqrt{3}x$ $(x\ge 0)$; $\sigma(x,y)=x$.

5.23. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.24. $y=x$, $x^2+y=2$; $\sigma(x,y)=2y$.

5.25. $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=\sqrt{3}x$ $(y\ge 0)$; $\sigma(x,y)=2y$.

5.26. $y^2=x+1$, $y^2=-x+1$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.27. $y=\sin x$, $y=0$, $x=\pi/2$ $(0\le x\le \pi/2)$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

5.28. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=0$ $(y\ge 0)$; $\sigma(x,y)=y$.

5.29. $y=2x^3$, $y^2=4x$; $\sigma(x,y)=xy$.

5.30. $x^2+y^2=13$, $xy=6$ $(x>0)$; $\sigma(x,y)=\sigma=const$.

Під час розв'язання кожної задачі слід давати зображення області інтегрування: плоскої фігури (області) чи просторового тіла або, принаймні, його проєкцію на відповідну координатну площину.

4. Зразки розв'язання задач самостійної контрольної роботи

Задача 1. Змініть порядок інтегрування у двократному інтегралі:

$$I = \int_1^3 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy .$$

Розв'язання.

1. *Установлюємо* рівняння ліній, що обмежують область інтегрування D і зображуємо її.

Змінну інтегрування x зовнішнього інтеграла прирівнюємо його межам, а змінну y – відповідно межам інтегрування внутрішнього інтеграла, в результаті чого дістанемо рівняння, ліній, що обмежують область D: $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2x$.

Зображуємо область інтегрування D (рис. 4.1) і робимо висновок, що вона є правильною у напрямі осі Oy:

$$D = D_y = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2x\}.$$

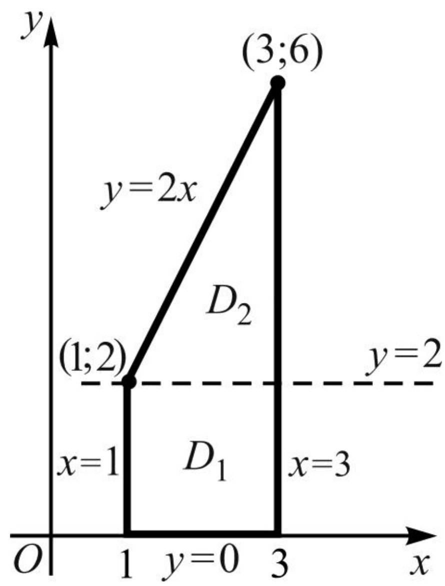


Рис. 4.1. **Область інтегрування**

2. *Змінюємо* порядок інтегрування у заданому двократному інтегралі, для чого запишемо його так, щоб зовнішнє інтегрування відбувалося за змінною y, а внутрішнє – за змінною x.

Область D не є правильною у напрямі осі Ox, оскільки ліва ділянка її межі складається з відрізків двох різних прямих: $x=1$ $(0 \le y \le 2)$ і $x = y/2$ $(2 \le y \le 6)$. Але прямою $y=2$ її можна подати у вигляді об'єднання двох правильних у напрямі Ox підобластей D_1 і D_2:

$$D = D_1 \cup D_2 ,$$

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 2, 1 \le x \le 3\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 2 \le y \le 6,\ y/2 \le x \le 3\}.$$

Отже, остаточно маємо:

$$I=\int_1^3 dx\int_0^{2x} f(x,y)dy=\int_0^2 dy\int_1^3 f(x,y)dx+\int_2^6 dy\int_{y/2}^3 f(x,y)dx.$$

Відповідь: $I=\int_0^2 dy\int_1^3 f(x,y)dx+\int_2^6 dy\int_{y/2}^3 f(x,y)dx$.

Задача 2. Обчисліть $I=\iint\limits_D \sqrt{x}y\,dxdy$ двома способами – зведенням до двократних інтегралів з різним порядком інтегрування, якщо область D обмежена заданими лініями: $x=0$, $y=x^2$, $y=2-x^2$ $(xy\geq 0)$.

Розв'язання.

1. *Зображуємо* область інтегрування D (рис. 4.2), яка розташована в першій чверті xOy $(xy\geq 0)$ і обмежена віссю Oy $(x=0)$ та параболами $y=x^2$, $y=2-x^2$.

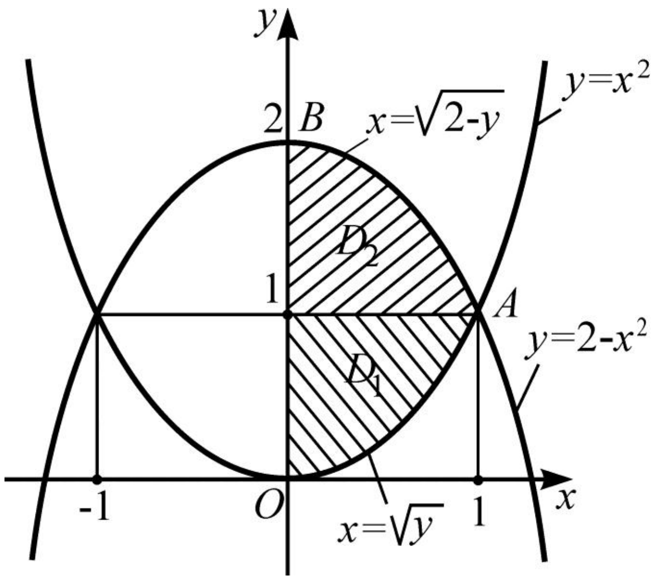


Рис. 4.2. **Область інтегрування**

Координати точки A встановлюємо як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow A(1,1).$$

2. *Проводимо* візуальний аналіз області D (з метою встановлення того, чи буде вона правильною у напрямі якоїсь із осей координат) і виявляємо, що D – правильна область у напрямі осі Oy:

$$D=D_y=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 2-x^2\},$$

але не є правильною у напрямі осі Ox, бо права ділянка межі – OAB – описується різними рівняннями. Тому інтеграл по області D слід подати як суму інтегралів по правильних у напрямі Ox областях D_1, D_2, $D=D_1\bigcup D_2$, де:

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \sqrt{2-y}\}.$$

3. *Здійснюємо* перехід до двократних інтегралів (враховуючи, що опис D_y, D_1, D_2 у символах визначає водночас межі зовнішнього і внутрішнього інтегрування).

Перший спосіб:

$$I = \iint\limits_{D_y} \sqrt{x} y\, dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} \sqrt{x} y\, dy = \int_0^1 \sqrt{x}\, \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}((2-x^2)^2 - x^4)\, dx =$$

$$= 2\int_0^1 (x^{1/2} - x^{5/2}) dx = 2\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{7} x^{7/2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{21}.$$

Другий спосіб:

$$I = \iint\limits_{D} = I_1 + I_2 = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2};$$

$$I_1 = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x} y\, dx = \int_0^1 y dy \frac{2}{3} x^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{y}} = \frac{2}{3}\int_0^1 y^{7/4} dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{11} y^{11/4}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{33};$$

$$I_2 = \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} \sqrt{x} y\, dx = \int_1^2 y dy \frac{2}{3} x^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{2-y}} = \frac{2}{3}\int_1^2 y(2-y)^{3/4} dy =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} t = 2 - y, & y = 1 \Rightarrow t = 1 \\ y = 2 - t, & y = 2 \Rightarrow t = 0 \\ dy = -dt, & \end{array} \right| = -\frac{2}{3}\int_1^0 (2-t) \cdot t^{3/4} dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(2t^{3/4} - t^{7/4}\right) dt = \frac{2}{3}\left(\frac{8}{7} t^{7/4} - \frac{4}{11} t^{11/4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{40}{77};$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{8}{33} + \frac{40}{77} = \frac{16}{21}.$$

Відповідь: $I = \dfrac{16}{21}$.

Задача 3. Обчисліть $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ по області $D{:}\,2x\le x^2+y^2\le 4$, здійснивши перехід до полярних координат.

Розв'язання.

1. *Зображаємо* D – перетин двох областей, що визначаються нерівностями: $x^2+y^2\le 4$, $x^2+y^2\ge 2x$; перша з яких описує круг, обмежений колом $x^2+y^2=4$, друга – зовнішність круга, межею якого є коло $(x-1)^2+y^2=1$ (рис. 4.3).

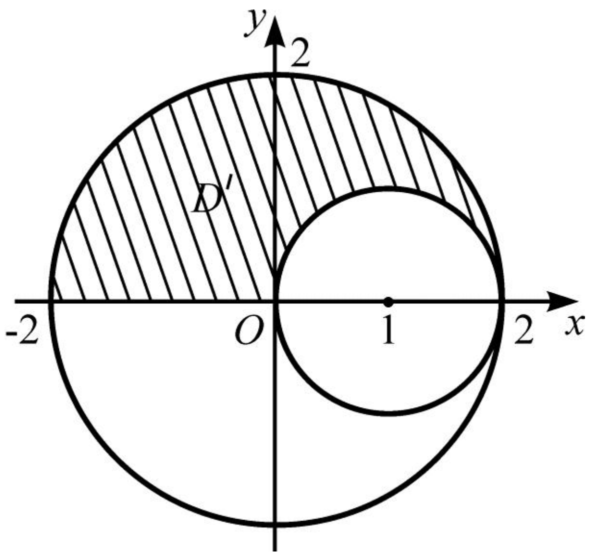


Рис. 4.3. **Область інтегрування**

У силу симетрії області відносно осі Ox і парності підінтегральної функції відносно змінної y:

$$f(x,y)=f(x,-y),$$

інтегрувати можна, з урахуванням адитивності, по половині області D' (виберемо для визначеності ту, що належить верхній півплощині).

2. *Здійснюємо* перехід до полярних координат:

$$f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right|\Rightarrow F(\rho,\varphi)=\rho^2\cos\varphi;$$

$$D{:}\;2x\le x^2+y^2\le 4\Rightarrow 2\rho\cos\varphi\le\rho^2\le 4\Rightarrow\left|\rho\ne 0\right|\Rightarrow 2\cos\varphi\le\rho\le 2.$$

Область D' – це різниця напівкругів D_2 і D_1, які в полярних координатах є правильними за ρ областями – криволінійними секторами:

$$D_1=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\varphi\le\pi/2,\;0\le\rho\le 2\cos\varphi\},$$

$$D_2=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\varphi\le\pi,\;0\le\rho\le 2\}.$$

За властивістю адитивності ПДІ маємо:

$$I=\iint\limits_D=2\iint\limits_{D'}=2\left(\iint\limits_{D_2}-\iint\limits_{D_1}\right)=2(I_2-I_1).$$

3. *Обчислюємо* повторні інтеграли в координатах (ρ, φ):

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} F(\rho, \varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^3 \cos\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int\limits_0^{2} \rho^3 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 = 4\int\limits_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 4\sin\varphi\Big|_0^{\pi} = 4(\sin\pi - \sin 0) = 4 \cdot 0 = 0$$

(цього слід було чекати, адже $\cos\varphi$ у першому і другому квадрантах набуває однакові за модулем, але різні за знаком, значення).

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} \rho^3 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\cos\varphi} =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5\varphi\, d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)^2 \cos\varphi\, d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi)\, d\sin\varphi =$$

$$= 4\left(\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{1}{5}\sin^5\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15},$$

$$I = 2(I_2 - I_1) = -\frac{16}{15}.$$

Відповідь: $I = -\frac{16}{15}$.

Задача 4. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = ay$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Розв'язання.

1. *Зображаємо* просторове тіло, попередньо аналізуючи рівняння поверхонь, що його обмежують:

$x^2 + y^2 = ay \Rightarrow x^2 + (y - a/2)^2 = a^2/4$ – рівняння прямого кругового циліндра твірна, якого паралельна осі Oz, а напрямною слугує коло з центром у точці $(0, a/2)$ і радіусом $a/2$; $z = 0$ – рівняння площини xOy, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ описує сферу з центром у точці $O(0,0,0)$ і радіусом a.

Отже, розглядуване тіло вирізане з верхньої півкулі прямим круговим циліндром (куля зображена слідами відповідної сфери на чвертьплощинах першого октанта) (рис. 4.4).

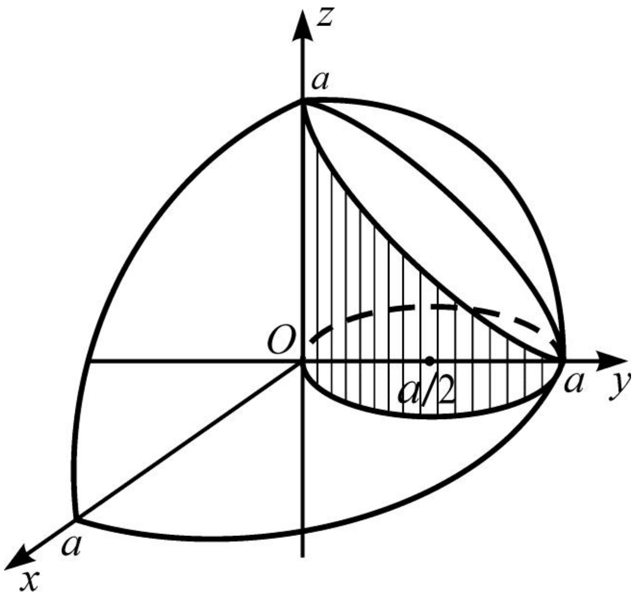


Рис. 4.4. **Зображення тіла й області інтегрування**

2. *Застосовуємо* формулу обчислення об'єму тіла за допомогою подвійного інтеграла:

$$V = \iint_D z\,dxdy.$$

У цій задачі: $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, область D – основа тіла: $x^2 + y^2 \le ay$ (див. рис. 4.4). Зважаючи на симетрію області інтегрування і поверхні $z = f(x, y)$ відносно площини yOz, можна записати:

$$V = 2\iint_{D'} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy, \quad D':\ x^2 + y^2 \le ay \quad (x \ge 0).$$

Для спрощення інтеграла перейдемо до полярних координат:

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \Rightarrow F(\rho, \varphi) = \sqrt{a^2 - \rho^2};$$

$$D':\ x^2 + y^2 \le ay \Rightarrow \rho^2 \le a\rho\sin\varphi \Rightarrow |\rho \ne 0| \Rightarrow \rho \le a\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D' = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le a\sin\varphi\}.$$

$$V=2\iint\limits_{D'}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho d\varphi=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho=$$

$$=-\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}(a^2-\rho^2)^{1/2}\,d(a^2-\rho^2)=-\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\cdot\frac{2}{3}(a^2-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sin\varphi}=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left[(a^2-a^2\sin^2\varphi)^{3/2}-a^3\right]d\varphi=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(a^3-a^3\cos^3\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}a^3\left[\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi-\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi\right]=\frac{2}{3}a^3\left[\frac{\pi}{2}-\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}a^3\left[\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\text{ (куб. од.).}$$

Відповідь: $V=\dfrac{a^3}{9}(3\pi-4)$ (куб. од.).

Задача 5. Визначить координати центра тяжіння однорідної пластини, обмеженої лініями: $ay=x^2$, $x+y=2a$ $(a>0)$.

Розв'язання.

1. *Зображуємо* платівку з урахуванням, що рівняння $ay=x^2$ описує параболу, симетричну відносно осі Oy, з вершиною в початку координат, а $x+y=2a$ – рівняння прямої, що відтинає на кожній координатній осі відрізок величиною $2a$ (рис. 4.5).

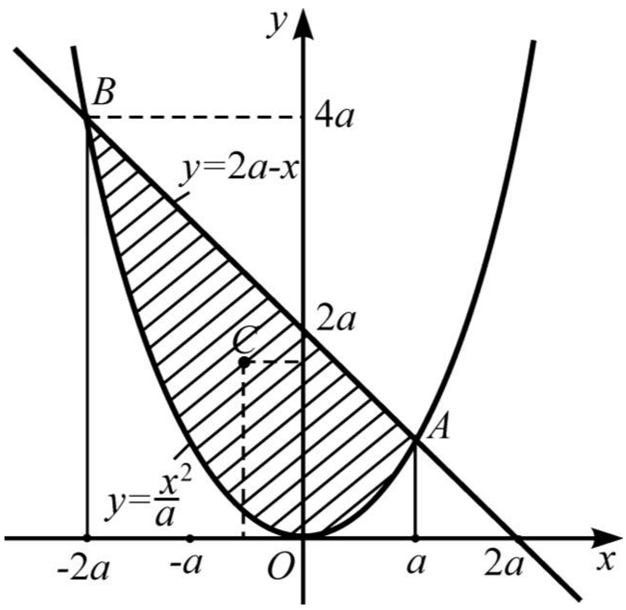


Рис. 4.5. **Зображення пластини**

Координати точок A і B установлюємо як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases}ay=x^2\\x+y=2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+ax-2a^2=0\\y=2a-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-2a\\x_2=a\end{array}\right.\\y=2a-x\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(a\,;a)\\B(-2a\,;4a).\end{array}\right.$$

Як можна бачити, пластина є правильною у напрямі осі Oy областю:

$$D_y = \{(x,y) \mid -2a \le x \le a,\ x^2/a \le y \le 2a - x\}.$$

2. *Обчислюємо* координати центра тяжіння пластини з урахуванням того, що її поверхнева густина $\sigma = \sigma(x,y) = const$ за формулами (1.37):

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D x\,dxdy, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_D y\,dxdy,$$

де $S = \iint_D dxdy$ – площа пластини.

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^{a} dx \cdot y\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} = \int_{-2a}^{a}\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right)dx =$$

$$= \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \left(2a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}\right) - \left(-4a^2 - 2a^2 + \frac{8}{3}a^2\right) = \frac{9}{2}a^2;$$

$$\iint_D x\,dxdy = \int_{-2a}^{a} x\,dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^{a} x\,dx \cdot y\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} = \int_{-2a}^{a}\left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a}\right)dx =$$

$$= \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = a^3\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{8}{3}\right) = -\frac{9}{4}a^3;$$

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y\,dy = \int_{-2a}^{a} dx \cdot \frac{1}{2}y^2\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} = \frac{1}{2}\int_{-2a}^{a}\left((2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{(2a-x)^3}{3} + \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = -\frac{a^3}{2}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{36}{5}a^3.$$

Отже,

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D x\,dxdy = \frac{-\frac{9}{4}a^3}{\frac{9}{2}a^2} = -\frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_D y\,dxdy = \frac{\frac{36}{5}a^3}{\frac{9}{2}a^2} = \frac{8a}{5}.$$

Відповідь: $C(x_c; y_c) = C\left(-\frac{a}{2}; \frac{8a}{5}\right).$

Рекомендована література

Основна

1. Вища математика : базовий підручник для вузів / під ред. В. С. Пономаренка. – Харків : Фоліо, 2014. – 669 с.

2. Вища математика : робоча програма навчальної дисципліни для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" освітньої програми "Комп'ютерні науки" першого (бакалаврського) рівня / уклад. Т. В. Денисова, А. П. Рибалко. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2021. – 20 с.

3. Сенчуков В. Ф. Вища математика. Загальні розділи : навчальний посібник. Ч. 3 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 356 с.

Додаткова

4. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Ч. 2 / за ред. проф. І. П. Васильченка. – Київ : Либідь, 1994. – 280 с.

5. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків : навч. посіб. Ч. 2. / за ред. Л. В. Курпи. – Харків : ХДПУ, 1999. – 280 с.

6. Кратні і криволінійні інтеграли. Теорія поля. Ряди. Теорія функцій комплексного змінного і елементи операційного числення. Ч. 4. : робочий зошит / уклад. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. – Харків : ХАІ, 2000. – 286 с.

Інформаційні ресурси

7. Вища математика: математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія : підручник / [авт. кол. : В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва та ін. ; за ред. В. С. Пономаренка]. – Мультимедійне інтерактивне електрон. вид. комбінованого використ. (412 Мб). – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – Режим доступу : http://library.hneu.edu.ua/jornal_aut1.php.

8. Кратні інтеграли. Практикум з вищої математики для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / уклад. І. В. Веригіна, Є. В. Массалітіна. – Київ : НТУУ "КПІ", 2016. – 72 с. – Режим доступу : https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/31901/1/Kratni-intehraly_Praktykum.pdf.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
за темою "Кратні інтеграли"
для студентів спеціальності
122 "Комп'ютерні науки"
освітньої програми "Комп'ютерні науки"
першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладач **Денисова** Тетяна Володимирівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *В. О. Дмитрієва*

Коректор *В. Ю. Труш*

План 2023 р. Поз. № 80 ЕВ. Обсяг 65 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.