*Все, что познается, имеет число,
ибо невозможно ни понять ничего,
ни познать без него.
Пифагор*

Економіко-математичні методи та моделі

УДК 330.46:53

Малярець Л. М.

Добровольський А. П.

УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДУ ФОГЕЛЯ У ЗАДАЧАХ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Анотація. Запропоновано удосконалення методу Фогеля побудови опорного плану задачі про призначення шляхом зменшення числа операцій.

Аннотация. Предложено усовершенствование метода Фогеля для отыскания опорного плана задачи о назначениях путем уменьшения числа операций.

Annotation. Improvement of Vogel's method for search of the basic plan of a problem about designation by reduction of operations number is offered.

Ключові слова: задача, модель, опорний план, оптимальний план, правильна конфігурація, зсунення нулів, виправлення матриці, структурна схема.

Важливим аспектом практичної реалізації математичних моделей соціально-економічних задач є алгоритмічні засоби, вони складають фактичну основу всієї методології сучасного математичного моделювання і обчислювального експерименту [1]. Від алгоритму досягнення мети залежить об'єм обчислювальної роботи і, разом з тим, час, який витрачається на розв'язання задачі. Незважаючи на швидкодію сучасних комп'ютерів, пакети прикладних програм мають певні обмеження на технічні характеристики; зокрема, на число параметрів-комірок, які підлягають одночасному змінюванню. У запропонованій роботі розглядається один із підходів, спрямований на зменшення числа операцій-кроків, необхідних для розв'язання деяких екстремальних задач. Покроково задача про призначення розв'язується так.

1. Правильні конфігурації (ПК) у квадратних матрицях

Нехай $C=(c_{ij})_{n\times n}$ − довільна квадратна матриця n-го порядку, а $P(c_{ij})$ − задана властивість, якою повинні володіти окремі елементи або сукупності елементів матриці. Природно елементи матриці розрізнювати не тільки за вартістю, а й за місцем їх у матриці, тобто зважати на те, на перетині яких рядка і стовпця розташований елемент.

Розглянемо r-підмножину $\{c_{ij}\}_1^r$, $1\le r\le n^2$, множини елементів матриці C. Будемо говорити, що r-множина, складена з елементів матриці C, **утворює конфігурацію** (або **є конфігурацією**) відносно властивості $P(c_{ij})$, якщо вона володіє цією властивістю. Приклади властивостей: "бути простим числом", "давати у сумі задане число", "бути нулем" тощо. Число r називається **рангом** конфігурації.

Конфігурація $\{c_{i\,j_i}\}_1^n$ рангу n називається **правильною** (ПК), якщо її елементи розташовані у різних рядках і різних стовпцях матриці [2]:

$$\{c_{i\,j_i}\}_1^n - \text{ПК} \rightleftharpoons \{c_{i\,j_i}\}_1^n=\{c_{1j_1},c_{2j_2},\ldots,c_{n\,j_n}\}\,\Big|\,P(c_{ij}),\quad (1)$$

де другі індекси $j_1, j_2, \ldots j_n$ утворюють деяке переставлення з елементів множини $I=\{1,2,3,\ldots,n\}$ − множини індексів.

Таким чином, за означенням елементи ПК повинні задовольняти задану властивість $P(c_{ij})$ і займати місця в різних рядках і в різних стовпцях матриці C. Наприклад, n елементів квадратної матриці n-го порядку, добуток яких є членом її детермінанта, утворюють ПК.

На практиці часто буває таке, що матриця не містить ПК відносно обраної властивості, тобто елементи, взяті по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця, не володіють заданою властивістю або цією властивістю володіють елементи, що не належать різним рядкам і різним стовпцям. Тоді, щоб одержати ПК, матрицю можна **"виправити"** − замінити одні елементи матриці іншими, такими, що розташовані на найменшій відстані (в обраному сенсі) від елементів, які заміняються.

З метою універсалізації підходу до розв'язання задачі відшукання або утворення ПК, які містять одні і ті ж елементи, незалежно від елементів матриці, розглянемо ПК, складені з нулів, тобто множини $\{c_{i\,j_i}\}_1^n$ з властивістю

$P_0(c_{ij})$ = "елемент c_{ij} є нулем". Такі ПК називаються **нульними** (ПК-0) і позначаються символом $\{0_{ij}\}_1^n$.

Рядки (стовпці) матриці, які не містять нулів, називаються **безнульними** рядками (стовпцями). Перенесення нуля з деякого рядка (стовпця) в безнульний рядок (стовпець) матриці назвемо **зсуненням нуля**, а **величиною зсунення нуля** − вартість елемента безнульного рядка (стовпця), на місце якого зсовується нуль. Якщо нуль залишається на місці (не зсовується), то величина зсунення дорівнює нулю. За певних умов зсунення нулів дає змогу отримати у матриці ПК-0.

Нехай матриця містить n нулів, тобто існує конфігурація відносно властивості $P_0(c_{ij})$ = "елемент c_{ij} є нулем", але вона не є правильною.

Під **процедурою виправлення матриці,** яка не включає ПК-0, будемо розуміти утворення ПК-0 за допомогою зсунення нулів із рядків (стовпців), де їх декілька, у безнульні рядки (стовпці) так, щоб сумарна величина зсунень, тобто сума величин усіх зсунень нулів, була найменшою. Матриця, яка є результатом процедури виправлення, називається **виправленою матрицею.** Наприклад, у наведеній нижче матриці

$$C=\begin{bmatrix}0 & 5 & 2\\ 4 & \langle 1\rangle & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

немає ПК-0, але її можна виправити зсуненням елемента $c_{32}=0$ на місце елемента $c_{22}=1$: одержимо ПК-0 $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}\}$ − головну діагональ матриці; величина зсунення нуля дорівнює одиниці, її взято у ламані дужки.

У пропонованій роботі основний зміст складає саме процедура виправлення матриці за допомогою зсунення нулів. Відповідний спосіб отримання ПК-0 назвемо **способом "зсунення нулів".**

2. Постановка задачі та її формалізації

Задача про призначення формулюється так: є в наявності кілька фахівців, які можуть виконувати різні види робіт-операцій, і відома корисність (ступінь кваліфікації, ефективність) виконання кожним виконувачем кожного виду роботи. Треба так призначити виконувачів робіт, щоб домогтися максимальної корисності за умови, що кожний виконавець може бути призначений тільки на одну роботу і за кожною роботою повинен бути закріплений тільки один виконавець.

Узвичаєна **математична модель** задачі виглядає так [3; 4]:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \max; \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n};\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$x_{ij}\ge 0,\ x_{ij}\in\{0,1\},$$

де n − число фахівців і одночасно кількість видів робіт, тобто йдеться про закриту модель задачі;

$C=(c_{ij})_{n\times n}$ − **матриця корисності** ($c_{ij}>0$), кожний елемент якої c_{ij} − корисність виконання i -м виконувачем j -ї роботи ($i,\ j=\overline{1,n}$);

x_{ij} – булеві змінні (**керовані змінні** − КЗ): x_{ij}=1, якщо i-й виконавець призначається на j -ту роботу, і $x_{ij}=0$ в інших випадках;

Z – **цільова функція** (сума добутків корисності c_{ij} з відповідною (за індексами) КЗ x_{ij}).

Аналізуючи модель (2) − (3) з точки зору введених понять, приходимо до нетрадиційної **формалізації задачі** про призначення − формалізації "мовою ПК": у заданій матриці корисності $C=(c_{ij})_{n\times n}$ знайти ПК відносно властивості $P(c_{ij})$ = "сума елементів c_{ij} максимізує сумарну ефективність призначень":

дано матрицю корисності (ефективності) $C=(c_{ij})_{n\times n}$;

знайти ПК $\{c_{i\,j_i}\}_1^n=\{c_{1j_1}, c_{2j_2},\dots, c_{n\,j_n}\}\,\Big|\,P(c_{ij})$. (4)

3. Зіставлення методу Фогеля зі способом "зсунення нулів"

За матрицею ефективності $C=(c_{ij})_{n\times n}$ в задачі (2) − (3), або, що те ж саме, у задачі (4), утворимо одну з двох матриць $\overline{C}$: у першої (другої) з них усі елементи кожного рядка (стовпця) − це найбільший елемент відповідного, за номером, рядка (стовпця) вихідної матриці C:

$$\overline{C}=(\overline{c}_{ij})_{n\times n}, \qquad (5)$$

де $\forall i=\overline{1,n}$: $\overline{c}_{ij}=\max\limits_{\forall j\in I}\{c_{ij}\}$ ($\forall j=\overline{1,n}$: $\overline{c}_{ij}=\max\limits_{\forall i\in I}\{c_{ij}\}$).

Складемо, наприклад, за наведеною нижче матрицею корисності C матрицю $\overline{C}$ за максимальними елементами стовпців і знайдемо різницю $\overline{R}=\overline{C}-C$:

$$C=\begin{bmatrix}11 & 10 & 11 & 7\\ 4 & 4 & 12 & 7\\ 9 & 9 & 14 & 13\\ 7 & 6 & 15 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow \overline{C}=\begin{bmatrix}\underline{11} & 10 & 15 & 13\\ 11 & \underline{10} & 15 & 13\\ 11 & 10 & 15 & \underline{13}\\ 11 & 10 & \underline{15} & 13\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{R}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4 & 6\\ 7 & 6 & 3 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 4 & 4 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Метод Фогеля. Розглянемо реалізацію методу Фогеля відшукання опорного плану призначень на прикладі наведеної матриці ефективності C. Як правило, він дозволяє отримати або план, близький до оптимального, або найбільш оптимальний план [5].

Метод Фогеля наближення до оптимального плану призначення полягає у такому (таблиця):

Таблиця

Метод Фогеля

i \ j	1	2	3	4	$\Delta^1_{i\bullet}$	$\Delta^2_{i\bullet}$	$\Delta^3_{i\bullet}$
1	$\underline{0}$	0	4	6	0	0	0
2	7	$\underline{6}$	3	6	3	3	1
3	2	1	1	0	1	–	–
4	4	4	$\underline{0}$	5	4	$\underline{4}$	–
$\Delta^1_{\bullet j}$	2	1	1	$\underline{5}$	r_{34}	–	–
$\Delta^2_{\bullet j}$	4	4	3	–	–	r_{43}	–
$\Delta^3_{\bullet j}$	$\underline{7}$	6	–	–	–	–	r_{11}

1) *відшукують* у кожному ряді матриці $\overline{R}$ мінімальний та найближчий (за значенням) до нього елемент і модуль їхньої різниці *записують* у кінці відповідного ряду: справа для рядків ($\Delta^k_{i\bullet}$) і знизу для стовпців ($\Delta^k_{\bullet j}$), де k – номер кроку, а крапка ($\bullet$) означає, що елементи рядків *i* (стовпців *j*) перебираються за всіма стовпцями (рядками);

2) *знаходять* серед цих різниць максимальну за модулем (у таблиці це число 5 підкреслене), а у ряді матриці $\overline{R}$, який відповідає максимальній різниці, *відшукують* найменший елемент і *фіксують* його значення (у розглядуваному прикладі – це $r_{34} = 0$);

3) *вилучають* (що показано пунктирними лініями) з матриці рядок і стовпець, які відповідають цьому елементові, і з отриманою підматрицею проробляють те ж саме, що і з матрицею $\overline{R}$, поки не отримають одноелементну матрицю (це підкреслений елемент $r_{22} = 6$);

4) *записують* план призначень (його визначають елементи матриці C, відповідні елементам $r_{11}, r_{22}, r_{34}, r_{43}$ матриці $\overline{R}$) і значення функції цілі:

(1 – 1), (2 – 2), (3 – 4), (4 – 3);

$Z_{\max} = c_{11} + c_{22} + c_{34} + c_{43} = 43$.

Якщо відшукання мінімального елемента рядка (стовпця) матриці $\overline{R}$ (та її підматриць) і найближчого до нього елемента вважати однією операцією, як і обчислення різниць між ними, то число операцій за $k = n - 1$ кроків дорівнюватиме

$$N_Ф = 4(2+3+...+n) = 2(n^2+n-2) = 2(n-1)(n+2). \quad (6)$$

Спосіб "зсунення нулів". Проаналізуємо матрицю $\overline{R}$ з точки зору постановки задачі (4) – "мовою ПК". Кожний стовпець матриці $\overline{R}$ міститиме принаймні один нуль, а рядки цієї матриці можуть бути і безнульними. Якщо ж нулі утворюватимуть **ПК-0**, то відповідна конфігурація **визначає оптимальний план.** У задачі, що розглядається, матриця $\overline{R}$ у першому рядку містить два нулі:

$$\overline{R} = \overline{C} - C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 7 & \langle 6 \rangle & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Зсунення другого нуля ($r_{12} = 0$) з першого рядка у другий, на місце елемента $r_{22} = 6$, відразу дає оптимальний план призначень.

Значення $Z_{\max}$ менше суми максимальних елементів стовпців матриці C на величину зсунення нуля – шістку: $Z_{\max} = (11+10+15+13) - 6 = 43$.

Таким чином, оптимальний план (ОП) отримано усього за один крок, а за методом Фогеля $N_Ф\big|_{n=4} = 36$. Якщо нулі "скупчуються" в одному рядку чи стовпці, то число операцій "зсунення нуля" дорівнюватиме $N_0 = n - 1$. Порівнюючи (див. (6)) $N_Ф = 2(n-1)(n+2)$ з N_0, приходимо до висновку: установлення оптимального плану способом "зсунення нулів" потребує операцій в $2(n+2)$ разів менше. Число зсунень нулів може бути меншим, якщо рядок (чи стовпець) містить кілька максимальних елементів; число нулів тоді більше, ніж n.

До такої ситуації приходимо, якщо матрицю $\overline{C}$ (у задачі, що розв'язувалася) утворювати за максимальними елементами рядків:

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 11 & 7 \\ 4 & 4 & 12 & 7 \\ 9 & 9 & 14 & 13 \\ 7 & 6 & 15 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{C} = \begin{bmatrix} \underline{11} & 11 & 11 & 11 \\ 12 & \underline{12} & 12 & 12 \\ 14 & 14 & 14 & \underline{14} \\ 15 & 15 & \underline{15} & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & \langle 8 \rangle & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \langle 1 \rangle \\ 8 & 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$Z_{\max} = (11+12+14+15) - (8+1) = 43.$$

Структурна схема (рисунок) розв'язання задачі способом "зсунення нулів" виглядає так:

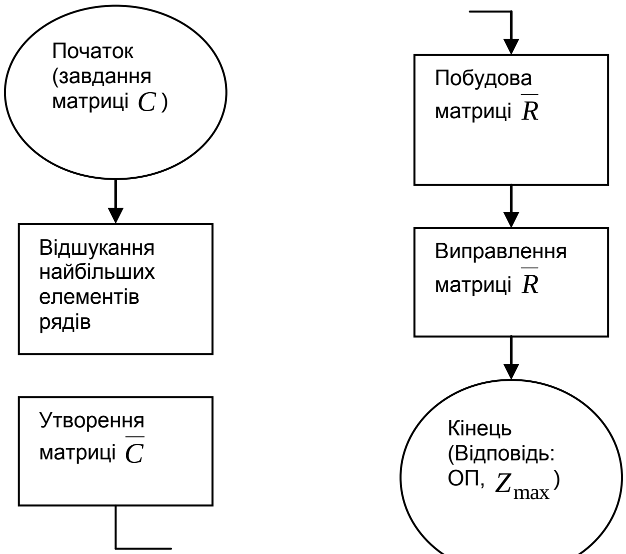

Рис. **Структурна схема розв'язання задачі**

Якщо розв'язується задача на мінімум ($Z \to \min$), то утворюють одну з матриць $\underline{C} = (\underline{c}_{ij})_{n\times n}$ за мінімальними елементами рядків (стовпців):

$$\underline{C} = (\underline{c}_{ij})_{n\times n},$$

де $\forall i=\overline{1,n}: \underline{c}_{ij} = \min\limits_{\forall j\in I}\{c_{ij}\}$ (7)

та $\forall j=\overline{1,n}: \underline{c}_{ij} = \min\limits_{\forall i\in I}\{c_{ij}\}$.

Потім будують матрицю $\underline{R} = C - \underline{C}$ і виправляють її для отримання правильної конфігурації нулів.

Отже, маємо такі висновки. Перевагою розв'язання задачі про призначення способом "зсунення нулів" − перевагою над методом Фогеля − є суттєво менше число операцій, необхідних для установлення оптимального плану. Ця обставина дає можливість відповідно зменшити кількість комірок, що змінюються, при використанні пакетів прикладних програм (наприклад, у надбудові "Поиск решения" в MS Excel).

Запропонований спосіб припускає його використання в інших задачах дискретної оптимізації (транспортна задача, задача комівояжера).

Розглянутий підхід до розв'язання задачі про призначення (чи задачі про закріплення транспортних засобів за маршрутами, якщо відома матриця прибутків), можна впровадити у навчальний процес при вивченні дисциплін "Економіко-математичні методи і моделі" та "Вища і прикладна математика" у разі відносно невеликих розмірів матриці корисності (прибутків) і розв'язання відповідних задач уручну.

Література: 1. Пономаренко В. С. Багатовимірний аналіз соціально-економічних систем : навчальний посібник / В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 384 с. 2. Сенчуков В. Ф. К вопросу о составлении оптимальных маршрутов доставки грузов / В. Ф. Сенчуков // Економіка розвитку. – 2009. – № 1(49). – С. 88–91. 3. Кузнецов А. В. Высшая математика: Мат. программир. : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн. : Высш. шк., 1994. –286 с. 4. Карпелевич Ф. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский. – М. : Физматгиз, 1963. – 276 с. 5. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебн. пособ. для студ. эконом. спец. вузов. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.

Стаття надійшла до редакції 05.11.2010 р.

УДК 338.27

Тижненко О. Г.

Тижненко Л. О.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ ПАРНОЇ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

Анотація. Розглянуто економіко-математичні умови коректного застосування звичайного методу найменших квадратів у задачах прогнозування методом парної лінійної регресії.

Аннотация. Рассмотрены экономико-математические условия корректного применения обычного метода наименьших квадратов в задачах прогнозирования методом парной линейной регрессии.

Annotation. Correct implementation of ordinary least square method in forecast problems is considered from economic-mathematics' point of view.

Ключові слова: лінійна регресія, стохастичне моделювання.

Лінійна регресія з невипадковим регресором історично є першою моделлю оцінки статистичної залежності економічної випадкової величини (ВВ) від часу. У тому випадку, коли математичні оцінки параметрів моделі знаходяться звичайним методом найменших квадратів (ЗМНК), проблема інференції вирішується на основі теореми Гаусса − Маркова (ГМ) [1], яка стверджує, що якщо помилки в лінійної моделі мають нульове математичне сподівання, некорельовані та мають однакові дисперсії, то ЗМНК дає ефективну та незміщену оцінку параметрів моделі (Best Linear Unbiased Estimator − BLUE). При цьому помилки не повинні бути незалежними та однаково розподіленими (independent and identically distributed − i.i.d.). Помилки повинні бути тільки некорельованими та гомоскедастичними [2], оскільки 4-та умова теореми ГМ [1, с. 81], яка стосується некорельованості помилки та регресорів, виконується автоматично для