УДК 330.46:53

Сенчуков В. Ф.

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕВЕРОЯТНОСТЕЙ

Посвящается Любознательным, Старательным, Настойчивым.

Expansion of range $[0,1]$ of values quantitative description (numerical measure) of random events is examined based on concept "incredibility".

Интуитивный подход к описанию понятия "невероятность"

В жизни *homo sapiens* иногда (а может – и чаще!?) происходят события (явления), относительно которых мы восклицаем: "Это просто невероятно!". "Невероятные события" естественно отнести (при выполнении определенного комплекса условий) к категории случайных событий – событий, которые изучаются в теории вероятностей (ТВ). Возникает вопрос: как оценить (описать) количественно степень невероятности наступления того или иного события.

Вероятность $P(S)$ (случайного) события S в ТВ определяется как числовая функция от события, область значений которой – промежуток $[0,1]\subset R$, то есть $E(P)=[0,1]$. Точкам $0,1$ соответствуют вероятности предельных случаев стохастических событий – невозможного ($S=\varnothing$) и достоверного ($S=\Omega$).

Событие S является элементом алгебры событий A_S (или σ-алгебры – A_σ) как множества событий, состоящего из замкнутой относительно теоретико-множественных операций ($\cup$, $\cap$, $\setminus$) системы подмножеств пространства элементарных событий (исходов) $\Omega=\{\omega\}$ [1]. Впрочем, согласно теореме о продолжении вероятности [2], можно считать, что A_S является борелевской алгеброй, и в дальнейшем рассматривать алгебру A_σ.

Числовую функцию $\bar{P}(S)$, определенную на системе событий A_σ, с областью значений $E(\bar{P})=R\setminus[0,1]$, назовем **невероятностью события** S. При этом будем различать **отрицательную** $\bar{P}^-(S)$ и **положительную** $\bar{P}^+(S)$ **невероятности** со значениями соответственно на бесконечных интервалах $(-\infty,0)$, $(1,+\infty)$, то есть $E(\bar{P}^-)=(-\infty,0)$, $E(\bar{P}^+)=(1,+\infty)$, а $E(\bar{P})=E(\bar{P}^-)\cup E(\bar{P}^+)$:

$$\bar{P}(S)=\bar{P}^{\mp}(S)=\begin{cases}\bar{P}^-(S)\in(-\infty,0)\\ \bar{P}^+(S)\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

Точки $0,1$ – вероятности событий $\varnothing$, Ω – рассматриваются как **предельные значения невероятностей** $\bar{P}^-(S)$, $\bar{P}^+(S)$ соответственно слева от нуля и справа от единицы; предельными значениями невероятностей являются также несобственные числа $-\infty,+\infty$. Области значений функций $\bar{P}^-(S)$, $P(S)$, $\bar{P}^+(S)$ изображены на рис. 1.

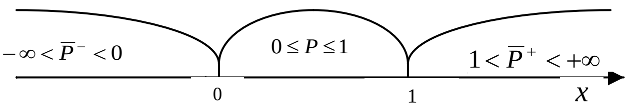

Рис 1. **Области значений вероятности ($P(S)$), отрицательной и положительной невероятностей ($\bar{P}^-(S)$, $\bar{P}^+(S)$)**

Изображенные области (см. рис. 1) разбивают множество действительных чисел на три качественные градации: "быть отрицательным" ($\mathbf{0}$), "принадлежать отрезку $[0,1]$" ($\mathbf{1}$), "быть положительным, большим единицы" ($\mathbf{2}$). Такому разбиению числовой оси отвечает трехзначный предикат

$$\Pi_3(x)=\begin{cases}\mathbf{0}, & \text{если } x\in E(P^-)\\ \mathbf{1}, & \text{если } x\in E(P)\\ \mathbf{2}, & \text{если } x\in E(P^+),\end{cases}$$

который позволяет соответствующие участки числовой оси описать уравнениями:

$$\begin{aligned}(-\infty,0)&:u^-=\left|y-\Pi_3(x)\right|=0,\\ [0,1]&:u=\left|y+1-\Pi_3(x)\right|=0,\\ (1,+\infty)&:u^+=\left|y+2-\Pi_3(x)\right|=0.\end{aligned}$$

Аналогично тому, как математическое понятие "множество" не следует идентифицировать с обыденным представлением о множестве, как о большом количестве, так и математическое понятие "невероятность" – с обыденным представлением о невероятном как очень большом, значительном, чрезвычайном. Согласно приведенным выше определениям (пока не строгим) в предельных случаях (когда $S=\varnothing$ или $S=\Omega$) невероятности $\bar{P}^-$, $\bar{P}^+$ могут принимать, как и вероятности, значения $0,1$.

С учетом этого *достоверное* в теоретико-вероятностном смысле событие естественно истолковать как *невозможное* событие в смысле невероятности. Действительно (рассуждая на уровне житейской логики), если создана система условий, при каждой реализации которой событие неизбежно наступает, то ничего невероятного в происходящем нет.

Невозможное в теоретико-вероятностном смысле событие следует истолковывать как *достоверное* событие в смысле невероятности. Действительно, если событие заведомо не может произойти при выполнении данной системы условий, то его наступление воистину невероятно! В дальнейшем событие $S=\Omega$ будем называть **достоверным по вероятности**, или **невозможным по невероятности**, а событие $S=\varnothing$ – **невозможным по вероятности**, или **достоверным по невероятности**.

Следует различать также семантику предложений:

"Числовая мера (количественная характеристика) степени возможности наступления события S – $P(S)$",

"Количественная характеристика степени возможности не наступления события S – $P(\bar{S})$",

"Числовая мера степени невозможности наступления события S – $\bar{P}(S)$",

"Количественная характеристика степени невозможности не наступления события S – $\bar{P}(\bar{S})$",

где $\bar{S}$ – событие, противоположное событию S.

Аксиоматический подход к созданию теории невероятностей

Учение о невероятностях − своеобразный "антимир" по отношению к ТВ − можно строить, не зависимо от ТВ, выбрав некоторую полную (или не полную), независимую и непротиворечивую систему аксиом. Однако, учитывая уже разработанный аппарат ТВ, мы будем рассматривать невероятность во взаимосвязи с вероятностью, конструируя функции, отображающие $E(P)$ на $E(\overline{P})$: если положить $P(S)=p$, то отрицательная и положительная невероятности представятся как функции от вероятности p:

$$\overline{P}^{-}(S)=\varphi^{-}(p),\ \overline{P}^{+}(S)=\varphi^{+}(p);\ p\in[0,1].$$

Другими словами, $\overline{P}^{-}(S)$, $\overline{P}^{+}(S)$ являются композициями отображений φ^{-} и P, φ^{+} и P:

$$\overline{P}^{-}(S)=\varphi^{-}(P(S)),\ \overline{P}^{+}(S)=\varphi^{+}(P(S))\ \ \forall S\in A_S.$$

Это означает, что в качестве аксиом теории невероятностей (ТН) следует принять аксиомы ТВ [1], [2], [3]; если изучать модели случайных явлений, которые ограничиваются рассмотрением алгебры событий A_S, то их четыре, в противном случае − при переходе к σ-алгебре − пять.

Аналогично тому, как в ТВ постулируются существование вероятностей и их свойства, приведем перечень аксиом, определяющих невероятности случайных событий:

Аксиома 1. Множество случайных событий S является σ-алгеброй.

Аксиома 2. Каждому событию S отвечает число $P(S)=p$, принимающее значение из $[0,1]$ и называемое вероятностью события S.

Аксиома 3. Вероятность пространства элементарных событий Ω равна единице: $P(\Omega)=1$.

Аксиома 4 (аксиома конечной аддитивности). Если события S и T несовместны, то есть множества S и T не пересекаются, то $P(S\cup T)=P(S)+P(T)$.

Аксиома 5 (аксиома непрерывности). Для всякой монотонной последовательности событий $S_n,\ n=1,2,\ldots$, имеет место равенство:

$$P(\lim_{n\to\infty} S_n)=\lim_{n\to\infty} P(S_n).$$

Аксиома 6. $\forall S\notin\{\varnothing,\Omega\}$ каждой вероятности $P(S)=p$ по законам φ^{-} и φ^{+} отвечают два числа: $p^{-}=\varphi^{-}(p)<0$ и $p^{+}=\varphi^{+}(p)>1$, которые удовлетворяют соотношению $p^{-}+p^{+}=1$ и называются соответственно **отрицательной** и **положительной невероятностями**, при этом: $\varphi^{-}(1)=0,\ \varphi^{+}(1)=1,\ \varphi^{\mp}(0)=\mp\infty$.

Значения невероятностей $\varphi^{\mp}(1), \varphi^{\mp}(0)$ постулируются в согласии с аксиомой непрерывности. Пусть

$S_1\subset S_2\subset\ldots\subset S_n\subset S_{n+1}\subset\ldots$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n=\Omega$, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n=\Omega$, $S_1\supset S_2\supset\ldots\supset S_n\supset S_{n+1}\supset\ldots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n=\varnothing$, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n=\varnothing$.

Тогда

$$P^{\mp}(S)=\varphi^{\mp}(P(S))\Rightarrow P^{\mp}(\lim_{n\to\infty} S_n)=\varphi^{\mp}(\lim_{n\to\infty} P(S_n))\Rightarrow\left[\begin{array}{l}P^{\mp}(\Omega)=\varphi^{\mp}(1)\\ P^{\mp}(\varnothing)=\varphi^{\mp}(0)\end{array}\right..$$

Четверку $\{\Omega, A_S, P, \overline{P}\}$, включающую в себя поле вероятностей [3], назовем **объединенным пространством вероятностей** и **невероятностей**, или *полем В-Н*.

Если вместо A_S рассматривается борелевская алгебра (σ-алгебра), то соответствующее пространство называется борелевским.

Система аксиом 1 − 6:

независима, так как независимы аксиомы 1 − 5 , а аксиома 6 не может быть получена как следствие остальных аксиом, поскольку ими не постулируются функции от вероятности;

непротиворечива, так как непротиворечивы аксиомы ТВ, а аксиома 6 внутренне не противоречива: отрицательная и положительная невероятности события однозначно определяются его вероятностью;

полной не является: в разных вопросах ТВ рассматриваются различные пространства вероятностей, которые порождают, в свою очередь, различные поля В-Н.

Невероятности результатов операций над событиями не постулируются. В противном случае система аксиом стала бы противоречивой: при различном выборе функций $\varphi^{-}(p)$ и $\varphi^{+}(p)$ невероятность результата одной и той же операции была бы разной.

Каждое вероятностное пространство (определяемое классической схемой, геометрическими вероятностями, дискретное и абсолютно непрерывное вероятностные пространства) порождает соответствующее поле В-Н.

В случае строгой монотонности функций $\varphi^{-}(p)$ и $\varphi^{+}(p)$ возможно представление вероятности через положительную и отрицательную невероятности: $p=\psi^{-}(p^{-}),\ p=\psi^{+}(p^{+})$, где ψ^{-}, ψ^{+} − идентификаторы функций, обратных по отношению к функциям φ^{-} и φ^{+} соответственно.

Другую теорию получим, если в качестве множества значений невероятностей взять всю числовую ось $R=(-\infty,+\infty)$ и ввести в рассмотрение функции $\overline{P}^{-}(S)$, $\overline{P}^{+}(S)$ с областями значений соответственно $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ и общим предельным значением − точкой 0. В этом случае для некоторых событий положительные невероятности, как и вероятности, будут принадлежать сегменту $[0,1]=E(P)\cap E(\overline{P})$. В аксиоме 6 следует условие $p^{-}+p^{+}=1$ заменить условием $p^{-}+p^{+}=0$.

Некоторые парадигмы невероятностей

Приведенное выше нестрогое определение невероятности $\overline{P}(S)$ события S и аксиома 6 "умалчивают" о том, какой вид имеет (или должна иметь) числовая функция, названная невероятностью события. Это обстоятельство обеспечивает "необъятный простор" для создания разнообразных теорий, отвечающих запросам практики или ожидающих своего применения в будущем.

Как и в изложенном выше, для краткости записей в дальнейшем положим: $\overline{P}^{-}(S)=p^{-}$, $\overline{P}^{+}(S)=p^{+}$, $P(S)=p$, и приведем некоторые парадигмы формализованного представления положительной и отрицательной невероятностей (греч. *paradeigma* – пример, образец):

1^0. **Гиперболические невероятности:**

$$p^{+}=\frac{1}{p},\ p^{-}=\frac{p-1}{p}. \qquad (1)$$

2^0. **Тригонометрические невероятности:**

$$p^{+}=1+k\cdot ctg\frac{\pi}{2}p,\ p^{-}=-k\cdot ctg\frac{\pi}{2}p, \qquad (2)$$

k – параметр $(k>0)$.

3^0. **Логарифмические невероятности:**

$$p^{+}=1-k\cdot\ln p,\quad p^{-}=k\cdot\ln p,\quad k-\text{параметр } (k>0). \qquad (3)$$

4^0. **Экспоненциальные невероятности:**

$$p^{+}=\exp(\frac{1}{p}-1),\quad p^{-}=1-\exp(\frac{1}{p}-1). \qquad (4)$$

5^0. **Линейные релятивистские невероятности:**

$$p^{+}=(1-c_{\infty})p+c_{\infty},\ p^{-}=-(1-c_{\infty})p+(1-c_{\infty}), \qquad (5)$$

где $c_{\infty}-const$ – релятивистская бесконечность, равная наибольшему значению невероятности $(c_{\infty}>0)$;

$[-c_{\infty},+c_{\infty}]$ – релятивистская числовая ось [4]; [5].

Релятивизм (лат. *relativus* – относительный) – направление в теории познания, которое исходит из того факта, что человек на той или иной ступени своего развития не может получить исчерпывающее и абсолютно верное знание как обо всей действительности в целом, так и о конкретном предмете исследования [6].

В частности, перешедшая в арифметику аксиома Архимеда для отрезков, выглядит так: если даны величины a и b, $0<a<b$, то всегда можно найти такое целое число n, что $an>b$. Из этой аксиомы вытекает представление о неограниченности числовой оси. Альтернативной аксиоме Архимеда является релятивистская аксиома о существовании наибольшего числа, которое выше обозначено через c_{∞}. Можно привести примеры различных реальных ситуаций, в которых такое число можно указать:

в социологических исследованиях принять c_{∞}, равным количеству всех жителей планеты;

в банковском деле, в финансовых исследованиях, можно взять c_{∞} равным сумме всех выпущенных денег, выраженной в копейках;

в специальной теории относительности c_{∞} – это скорость света.

Анализируя соотношения (1) – (5), убеждаемся, что для всех парадигм невероятностей величины p^{+}, p^{-} обладают свойством: $p^{-}+p^{+}=1$, то есть удовлетворяют аксиоме 6.

Из соотношений (1) – (5) легко получить выражения вероятности событий через их положительные и отрицательные невероятности. В формулах (3) логарифмы можно брать по любому допустимому основанию.

На рис. 2 изображен схематический чертеж, отражающий характер поведения невероятностей (1^0 – 4^0) событий в зависимости от вероятности их наступления, а на рис. 3 – графики линейных релятивистских невероятностей.

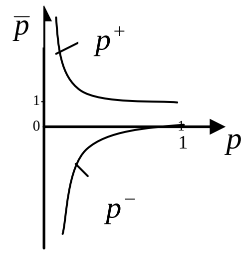

Рис. 2. **Схематический график невероятностей p^{+}, p^{-}**

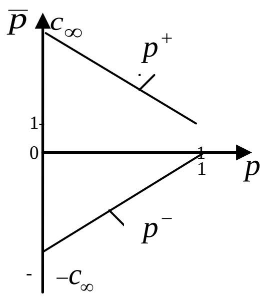

Рис. 3 . **График линейных релятивистских невероятностей**

Естественно возникает вопрос, а зачем еще эти невероятности – отрицательная и положительная – если уже есть вероятность? Тем более что невероятности выражаются через нее: $\overline{P}^{-}(S)=\varphi^{-}(P(S))$, $\overline{P}^{+}(S)=\varphi^{+}(P(S))$. Рассуждая подобным образом относительно множества функций, приходим к следующему: а зачем нужен $ctgx$ и гиперболические функции вообще, если есть tgx и, соответственно, экспонента e^{x}, через которые они выражаются? Для развития теоретической математики введение специальных символов для функций tgx, $ctgx$, thx и многих других вообще не обязательно: их можно опустить, не изменив множества элементарных функций. Однако легко представить, какие трудности возникли бы в прикладной математике, если бы для числовых функций, являющихся важными характеристиками различных явлений и процессов, не были введены соответствующие символы.

Предлагаемое "расширение" числовой меры стохастических событий невероятностями дает возможность учесть (помимо вероятности) две качественные градации ("быть отрицательным" (**0**), "быть положительным, большим единицы" (**2**), см. рис. 1) количественных характеристик реальных процессов. Так, применяя теоретико-вероятностные методы (в статистических исследованиях) к прогнозированию, целесообразно различать изменение изучаемого фактора в сторону его уменьшения или увеличения, привлекая соответственно $\varphi^{-}(p)$ или $\varphi^{+}(p)$; например, изучая изменение курса гривны (пусть – по отношению к доллару) или объема выпускаемой продукции (или прибыли) предприятия.

В качестве примера рассмотрим "внедрение" невероятностей в теорию связи (со статистической мерой информации).

Мера информации и логарифмические невероятности

Как известно [7], основной характеристикой сообщения в теории связи является *количество информации* I, а его доля (часть), приходящаяся на один элемент сообщения, называется *энтропией* H:

$$I = n \cdot \log m, \ \ H = \frac{I}{n} = \log m, \qquad 6)$$

где m – мощность алфавита (число букв алфавита x_i, $i = \overline{1, m}$, каждая из которых может служить элементом сообщения);

n – длина сообщения;

логарифм m чаще всего берется по основанию 2 или e = 2,7… .

Если каждая из букв алфавита появляется в сообщении с различной вероятностью $p_i, i = \overline{1, m}$, то величины I и H подсчитываются по *формулам Шеннона*:

$$I = -n\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i, \ \ H = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{1}{p_i}. \qquad (7)$$

Величину $\log \frac{1}{p_i}$ называют *частной энтропией* $H_i = \log \frac{1}{p_i}$, характеризующей информативность буквы x_i алфавита, тогда H – *среднее значение* частных энтропий. Произведение $p_i H_i = - p_i \log p_i$ отражает вклад буквы x_i в энтропию H.

Выберем в логарифмических невероятностях (см. (3)) параметр k равным длине сообщения n, а основание логарифма – равным двум, тогда соответствующие соотношения примут вид:

$$p_i^{+} = 1 - n \cdot \log p_i, \quad p_i^{-} = n \cdot \log p_i = -n \cdot \log \frac{1}{p_i} \qquad (8)$$
$$\forall i = 1, 2, ..., m.$$

Если для информации в соответствии с отрицательной и положительной невероятностями ввести две качественные градации: "быть переданной" ($\mathbf{0}$), "быть принятой" ($\mathbf{2}$), то, сопоставляя (7) и (8),, получаем:

$I^{-} = nH = -\sum_{i=1}^{m} p_i p_i^{-}$ – количество переданной информации;

$I^{+} = \sum_{i=1}^{m} p_i p_i^{+} - 1$ – количество принятой информации.

Величины I^{-} и I^{+} равны между собой как количества информации, но их аналитическое (символьное) представление отражает соответственно, о какой информации идет речь – переданной или принятой.

Представим вклад буквы x_i в энтропию H через p_i^{-}:

$$p_i H_i = - p_i \log p_i \Rightarrow \mid p_i^{-} = n \cdot \log p_i,$$
$$p_i = e^{\frac{p_i^{-}}{n}} \mid \Rightarrow \ p_i H_i = -\frac{p_i^{-}}{n} e^{\frac{p_i^{-}}{n}}.$$

Анализ показывает, что при $p_i^{-} = 0$ функция $p_i H_i$ равна нулю, затем возрастает до своего максимума и при уменьшении p_i^{-} до $-\infty$ стремится к нулю. Точка максимума $p_i^{-} = -n$, а максимум равен $1/e$. Таким образом, отрицательная невероятность p_i^{-}, численно равная длине сообщения n, взятой со знаком минус, определяет максимальный вклад в энтропию буквы x_i. Это можно истолковать как **информационный смысл отрицательной логарифмической невероятности.**

В дальнейшем предстоит долгая (и наверно нелегкая) работа, связанная с исследованием законов распределения невероятностей, их числовых характеристик, предельных теорем и многого другого.

В независимости от того, найдет ли предложенный подход к количественной характеристике случайных событий дальнейшее развитие (в теоретическом плане и в приложениях) или не найдет, изложенный материал, без сомнения, полезен с познавательной точки зрения, особенно для студентов-любознательных – будущих ученых – у которых еще не успели сформироваться догматические установки.

____

Литература: 1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с. 2. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1978. – 224 с. 3. Королюк В. С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с. 4. Рашевский П. К. О догмате натурального ряда // Усп. мат. наук. – 1973. – Т. XXVIII. Вып. 4 (172). – С. 243 – 246. 5. Рвачев В. Л. Релятивистский взляд на развитие конструктивных средств математики. Препринт № 337, Ин-т проблем машиностроения АН УССР. – Харьков, 1990. – 44 с. 6. Краткий словарь по философии / Под. общ. ред. И. В. Блауберга, И. В. Пантина. – 4-е изд. – М.: Политиздат, 1982. – 432 с. 7. Яглом А. М. Вероятность и информация / А. М. Яглом, И. М. Яглом. – М.: Физматгиз, 1963. – 540 с.

Стаття надійшла до редакції 16.04.2009 р.