

Чем более точна наука, тем больше можно из нее извлечь точных предсказаний.

А. Франс

ЕКОНОМІКА ПІДПРИЄМСТВА ТА УПРАВЛІННЯ ВИРОБНИЦТВОМ

УДК 330:43

Егоршин А. А.
Малярец Л. М.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ В ЗАДАЧАХ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

In the article the method of critical way calculation in Excel on the basis of reduction of the critical way search task to the common transport task (particularly to the task of longer way searching) is studied.

В календарном (сетевом) планировании производства основной проблемой является определение "критического пути" – последовательности операций, не имеющих резерва (запаса) времени. Операция считается критической, если задержка ее начала приводит к увеличению срока окончания всей программы. Рассмотрим пример сетевого графика (рис. 1), приведенный в работе Хемди А. Таха [1].

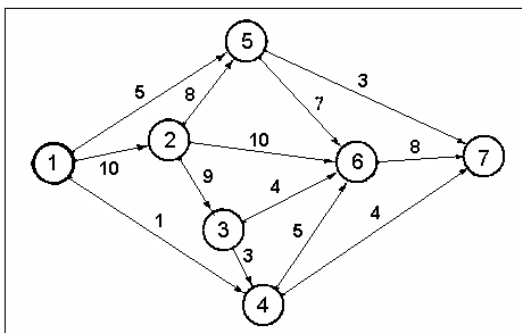


Рис. 1. Сетевой график

Известно, что стрелки (ориентированные дуги) сетевого графика представляют собой определенные операции, цифра возле каждой стрелки означает длительность этой операции. Начальная и конечная точки любой операции означают некоторые события (начальное и конечное). Операции, выходящие из некоторого события, не могут начаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие. "Критический путь" на сетевом графике представляет собой непрерывную цепочку операций, соединяющую начальное событие сети

с завершающим. Это дает возможность свести задачу поиска критического пути к обычной транспортной задаче (конкретно, к задаче о поиске наиболее длинного пути). По аналогии с транспортной задачей будем называть узлы сетевого графика (кроме начального и конечного) транзитными пунктами, причем для критического пути в каждый транзитный пункт можно прийти только из одного предшествующего пункта и отправиться только в один последующий пункт. В авторской работе [2] рассмотрена задача о нахождении кратчайшего пути с помощью надстройки "Поиск решения" электронной таблицы Excel. Оказывается, предложенный прием почти без изменений может быть применен и для расчета критического пути.

Не исключена возможность, что идея использования методов линейного программирования для определения критического пути высказывалась кем-то ранее, но идея и удачная ее реализация – два разных действия. Практические сетевые модели могут быть много сложнее простого графика, изображенного на рис. 1, и надо организовать вычисления так, чтобы эта работа не была непосильной для пользователя. Как и в большинстве завершенных разработок, многие секреты – в мелочах ("Дьявол в мелочах" – гласит немецкая поговорка). Пусть в реальной сетевой модели имеется несколько десятков событий (пунктов). Нам придется заполнять таблицы большого размера (несколько десятков)×(несколько десятков). Как сократить эту работу до необходимого минимума? Как в такой огромной таблице увидеть оптимальное решение? Будем это иметь в виду при рассмотрении простого примера рис. 1.

Заполним в Excel по сетевому графику (рис. 1) квадратную таблицу длительностей работ t_{ij} между каждой парой пунктов $T_i - T_j$ (рис. 2).

	H	I	J	K	L	M	N	O
3								
4		Длительности работ между каждой парой пунктов						
5		t_{ij}	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
6		T_1	10	-100	1	5	-100	-100
7		T_2	0	9	-100	8	10	-100
8		T_3	-100	0	3	-100	4	-100
9		T_4	-100	-100	0	-100	5	4
10		T_5	-100	-100	-100	0	7	3
11		T_6	-100	-100	-100	-100	0	8

Рис. 2. Фрагмент рабочего листа Excel с таблицей t_{ij}

Все пункты, кроме последнего пункта T_7 , считаем пунктами отправления (их имена перечислены в левом столбце таблицы t_{ij}). Все пункты, кроме начального пункта T_1 , считаем пунктами назначения (их имена перечислены в верхней строке таблицы t_{ij}). Транзитные пункты $T_2 - T_6$ считаются как пунктами

отправления, так и пунктами назначения. Длительности работ между одинаковыми транзитными пунктами $T_k - T_k$ равны нулю. Между некоторыми пунктами нет связей, поэтому задаем соответствующие им фиктивные длительности работ равными очень большому отрицательному числу ($t_{ij} = -100$), чтобы при поиске критического (наиболее длинного пути) эти (запрещенные) переходы автоматически отбрасывались. Чтобы фиктивные длительности на запрещенных переходах не отвлекали внимания, следует с помощью условного форматирования изобразить эти числа серым цветом на сером фоне. Делается это так. Копируем в буфер обмена число -100 (длительность для запрещенных переходов). Выделяем таблицу t_{ij} (без заголовков) и вставляем число из буфера обмена сразу во все ячейки таблицы. Далее (не снимая выделения) в меню *Формат* находим пункт *Условное форматирование*. На панели условного форматирования заполняем поле *Условие 1*: *Значение меньше -99*. Нажимаем кнопку *Формат* и на панели *Формат ячеек* вкладки *Шрифт* задаем цвет цифр, а на вкладке *Вид* – цвет фона. Только после этого вводим тарифы для существующих маршрутов. Нулевые тарифы между парами одинаковых транзитных пунктов можно (и рекомендуется) также ввести одной операцией, для чего следует скопировать 0 в буфер обмена, далее при нажатой клавише **Ctrl** выделить мышкой ячейки на диагонали $T_k - T_k$ и вставить 0 из буфера обмена сразу во все выделенные ячейки. Таким образом, работа по вводу данных сведена до необходимого минимума.

В следующей таблице x_{ij} такого же размера будем определять переходы между узлами (рис. 3). Если между узлами (пунктами) $T_i - T_j$ нет перехода, то принимаем $x_{ij} = 0$, а если есть, то $x_{ij} = 1$. Сначала заполняем все ячейки таблицы x_{ij} единицами (все $x_{ij} = 1$). Естественно, единицы записываем во все ячейки таблицы одной операцией (копированием их буфера обмена сразу во все выделенные ячейки).

	Н	І	Ј	К	Л	М	Н	О	Р
12									
13			Переходы между пунктами						
14		x_{ij}	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	Суммы1
15		T_1	1	1	1	1	1	1	6
16		T_2	1	1	1	1	1	1	6
17		T_3	1	1	1	1	1	1	6
18		T_4	1	1	1	1	1	1	6
19		T_5	1	1	1	1	1	1	6
20		T_6	1	1	1	1	1	1	6
21		Суммы2	6	6	6	6	6	6	36

Рис. 3. Фрагмент рабочего листа Excel с таблицей x_{ij}

Это явно нереальный вариант, так как критический путь проходит через транзитные пункты только один раз. В каждой строке и в каждом столбце таблицы x_{ij} для критического пути должна быть только одна единица (как в задаче о назначениях). Поэтому в таблице x_{ij} добавлены итоговые столбец справа и строка снизу, в которые записываются формулы суммирования (с помощью функций СУММ). Записываются именно формулы, а не числа! Рекомендуем сделать это так: выделить таблицу x_{ij} без заголовков, но с дополнительными столбцом справа и строкой снизу, и нажать на панели инструментов кнопку *автосуммирования*. Тогда во все ячейки дополнительного столбца и дополнительной строки автоматически будут записаны формулы суммирования. Для критического пути все эти суммы должны равняться единице.

На свободном месте электронной таблицы Excel для вычисления длительности критического пути записываем формулу СУММПРОИЗВ (Диапазон t_{ij} ; Диапазон x_{ij}). Сейчас эта длительность равна -1723 (рис. 4):

	К	Л	М
22	Длительность критического пути		
23		Max	
24	Функция цели		-1723

Рис. 4. Целевая ячейка L24

Все подготовлено для поиска критического пути. Устанавливаем табличный курсор на целевую ячейку и через меню *Сервис* вызываем надстройку *"Поиск решения"* (рис. 5).

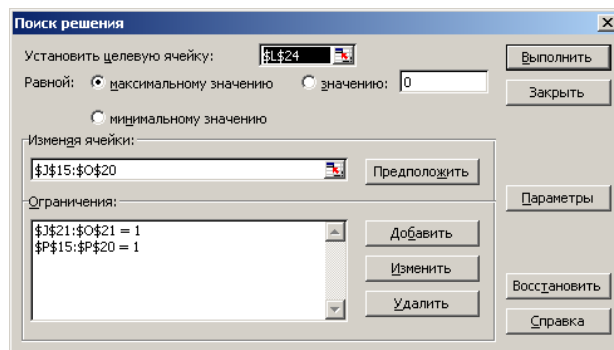


Рис. 5. Панель надстройки "Поиск решения"

На панели надстройки задаем *целевую ячейку* равной *максимальному значению*. В поле *Изменяя ячейки* указываем диапазон x_{ij} . Задаем два ограничения – *Суммы1* по строкам таблицы и *Суммы2* по столбцам таблицы должны равняться единице. Нажимаем на кнопку *Параметры* и ставим флажки *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. Нажимаем на кнопку *Выполнить* и получаем оптимальное решение.

В преобразованной таблице переходов (рис. 6) теперь в каждой строке и в каждом столбце есть только одна единица, остальные числа – нули.

	Н	І	Ј	К	Л	М	Н	О	Р
12									
13			Переходы между пунктами						
14		x_{ij}	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	Суммы1
15		T_1	1	0	0	0	0	0	1
16		T_2	0	1	0	0	0	0	1
17		T_3	0	0	1	0	0	0	1
18		T_4	0	0	0	0	1	0	1
19		T_5	0	0	0	1	0	0	1
20		T_6	0	0	0	0	0	1	1
21		Суммы2	1	1	1	1	1	1	6

Рис. 6. Критический путь в таблице x_{ij}

Но эти нули в большой таблице мешают увидеть критический путь. С помощью условного форматирования можно выводить нули (числа, меньше 0,01) серым цветом на сером фоне. Кроме того, числа на диагонали $T_k - T_k$ не несут никакой информации, поэтому можно задать серый фон этих ячеек, для чего следует при нажатой клавише **Ctrl** щелкнуть мышкой по диагональным ячейкам и задать сразу для всех них серый фон.

Теперь на рис. 6 виден только критический путь. Из начального пункта T_1 есть переход в пункт T_2 . Из пункта T_2 есть переход до T_3 . Далее из пункта T_3 есть переход до T_4 , а из пун-

кта T_4 есть переход до T_6 . Наконец, из пункта T_6 следует переход сразу до конечного пункта T_7 . Критический путь не проходит через пункт T_5 , поэтому в оптимальном решении указан фиктивный переход из T_5 в T_5 .

На рис. 7 изображен найденный критический путь $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_4 \rightarrow T_6 \rightarrow T_7$.

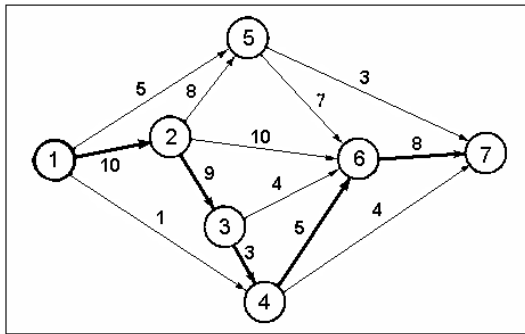


Рис. 7. Критический путь

Длительность критического пути равна $10 + 9 + 3 + 5 + 8 = 35$. Как видно из рис. 3, имеется резерв времени в 21 единицу для выполнения работы 1 – 4; 4 единицы для работы 3 – 6; 7 единиц для 2 – 5; в сумме 2 единицы для работ 2 – 5 и 5 – 6; в сумме 27 единиц для работ 1 – 5 и 5 – 7.

Рассмотрим еще один пример расчета критического пути для сетевого графика, изображенного на рис. 8.

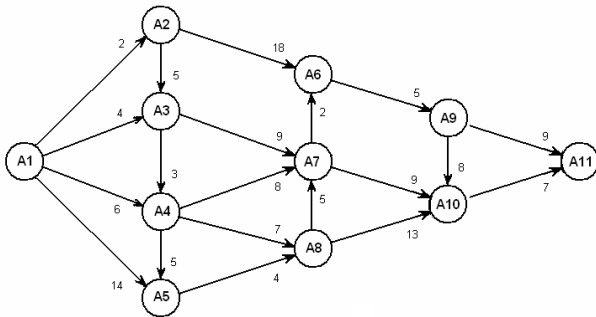


Рис. 8. Сетевой график 2

Заполненная таблица длительностей работ приведена в табл. 1.

Таблица 1

Длительности работ между каждой парой пунктов

t_{ij}	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
A_1	2	4	6	14	-100	-100	-100	-100	-100	-100
A_2	0	5	-100	-100	18	-100	-100	-100	-100	-100
A_3	-100	0	3	-100	-100	9	-100	-100	-100	-100
A_4	-100	-100	0	5	-100	8	7	-100	-100	-100
A_5	-100	-100	-100	0	-100	-100	4	-100	-100	-100
A_6	-100	-100	-100	-100	0	-100	-100	5	-100	-100
A_7	-100	-100	-100	-100	2	0	-100	-100	9	-100
A_8	-100	-100	-100	-100	-100	5	0	-100	13	-100
A_9	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	0	8	9
A_{10}	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	0	7

Новая задача всего в полтора раза больше предыдущей, но уже видно, что реальные данные, которые надо было набирать вручную, составляют малую часть всей таблицы (для

этого примера – 20%). Оптимальное решение получено в виде табл. 2, в которой благодаря условному форматированию виден только критический путь. Выписываем его по строкам табл. 2: $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_6 \rightarrow A_9 \rightarrow A_7 \rightarrow A_8 \rightarrow A_9 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_{11}$. Общая длительность работ по критическому пути оказалась равной $2 + 5 + 3 + 5 + 4 + 5 + 2 + 5 + 8 + 7 = 46$ единиц.

Таблица 2

Критический путь (переходы между пунктами)

x_{ij}	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	Сум- мы!1
A_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
A_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
A_5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
A_6	0	0	0	0	0	-100	-100	1	0	0	1
A_7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
A_8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
A_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
A_{10}	0	0	0	0	0	0	0	-100	0	1	1
Сум- мы!2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10

На рис. 9 изображен найденный критический путь на сетевом графике. Цифры в скобках возле стрелок показывают резервы времени для выполнения не критических операций.

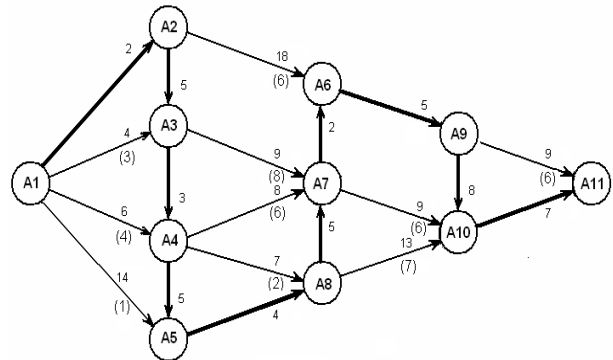


Рис. 9. Критический путь для сети 2

Отметим, что предложенный способ расчета критического пути требует минимальных трудозатрат от пользователя, независимо от размеров задачи.

Литература: 1. Таха Х. Введение в исследование операций / Таха Х. ; пер. с англ. – 7-е изд. – М. : ИД "Вильямс", 2005. – 912 с. 2. Сгоршин О. О. Математичне програмування [Підручник] / О. О. Сгоршин, Л. М. Малярць. – Харків : ВД "ИНЖЕК", 2006. – 394 с.

Стаття надійшла до редакції 14.07.2009 р.