

*Все, що познається, має число,
ібо неможливо ні понять нічого,
ні познати без него.
Пифагор*

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

УДК 330.46:53

Сенчуков В. Ф.

ЗАСТОСУВАННЯ АДИТИВНИХ МАТРИЦЬ У ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

The elements of theory of additive matrices and their application to the solving of tasks of discrete optimization are examined.

Елементи теорії адитивних матриць

Підлягає дослідженню оригінальний різновид (клас) матриць, які названо "адитивними матрицями". Висвітлюються питання щодо основних понять, пов'язаних із ними, та їхніх основних властивостей. У термінах адитивних матриць та мовою правильних конфігурацій здійснюються постановки оптимізаційних задач математичного програмування [1; 2]: про призначення (проблема вибору, задача про наречених), транспортної; наводяться, з відповідним підходом, алгоритми їх розв'язання.

Основні поняття та одномісні операції над q -матрицями.

Розглянемо числову квадратну матрицю n -го порядку $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Із n елементів цієї матриці, розташованих у різних рядках і різних стовпцях, утворимо всілякі суми виду:

$$a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{nj_n} = \sum_{i=1}^n a_{ij_i}, \quad (1)$$

де перші індекси елементів – номери рядків – розташовані в порядку зростання, а другі індекси – номери стовпців – утворюють деяке переставлення з чисел $1, 2, \dots, n$. (Кількість таких сум дорівнює числу переставлень із n символів, тобто $n!$).

Якщо всі суми виду (1) рівні одному й тому ж числу q , то це число називають **адитивом матриці A** (від лат. *additivus* – той, що додається), а сама матриця називається **q -адитивною** (або **матрицею з адитивом q** , або коротко – **q -матрицею**):

$$A - q\text{-матриця} \iff \sum_{i=1}^n a_{ij_i} = q - \text{const}, \quad (2)$$

де $j_k \neq j_l \forall k \neq l; k \in I = \{1, 2, \dots, n\}, l \in I; I$ – множина індексів.

Домовимося q -адитивну матрицю A позначати через A^q , її адитив – через adA та писати $adA = q$. Якщо число q не вказується, то будемо говорити: A – адитивна матриця, а множині всіх адитивних матриць присвоїмо символ A^\oplus .

Будь-яку одноелементну матрицю, тобто просто число, будемо тлумачити як q -матрицю з адитивом, рівним цьому числу. Зрозуміло, що адитивною є матриця довільного порядку n , усі елементи якої рівні між собою. Такі матриці представляються добутком константи c на матрицю I_n , складену з одиниць.

У подальшому підсумовування елементів j -го стовпця, i -го рядка, всіх рядків (або стовпців) матриці будемо, для простоти

запису, представляти символами $\sum_i a_{ij}, \sum_j a_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}$ замість

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}, \sum_{j=1}^n a_{ij}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

відповідно

позначати через S_j^1, S_i^1, S , де $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}, j \in I$,

або більш лаконічно: $a_{\bullet j}, a_{i \bullet}, a_{\bullet \bullet}$.

Виберемо деякий елемент a_{kl} матриці $A \in A^\oplus$.

Підматриця $B_{k \setminus l}$ матриці A , яка одержується викреслюванням (вилученням) рядка та стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{kl} , називається **підматрицею A без рядка \setminus стовпця $k \setminus l$** :

$$B_{k \setminus l} - \text{підматриця } A \text{ без рядка \setminus стовпця } k \setminus l \iff \\ \iff B_{k \setminus l} = (a_{ij}) \forall i \in I \setminus \{k\}, \forall j \in I \setminus \{l\}. \quad (3)$$

З одномісних операцій розглянемо **транспонування** адитивної матриці та **обмін місцями** будь-яких двох її рядків або стовпців. Із означення адитивної матриці випливає:

1) матриця A^T , транспонована по відношенню до q -адитивної матриці A , також q -адитивна:

$$A \in A^{\oplus} \wedge adA = q \Rightarrow A^T \in A^{\oplus} \wedge adA^T = q; \quad (4)$$

2) матриця \bar{A} , одержана з q -матриці A обміном місцями довільних двох рядків (стовпців), q -адитивна:

$$A \in A^{\oplus} \wedge adA = q \Rightarrow \bar{A} \in A^{\oplus} \wedge ad\bar{A} = q. \quad (5)$$

Основні властивості q -матриць та їхніх адитивів.

Лінійність

Теорема 1 (про лінійну комбінацію q -матриць).

Лінійна комбінація q_k -матриць A_k ($k=1,2,\dots,m$) є q -матрицею A з адитивом, рівним лінійній комбінації адитивів вихідних матриць:

$$A_k \in A^{\oplus}, k=1,2,\dots,m \Rightarrow \sum_k c_k A_k = A \in A^{\oplus} \wedge adA = q = \sum_k c_k q_k, \quad (6)$$

де c_k – const, $k=1,2,\dots,m$, – коефіцієнти лінійної комбінації.

Д о в е д е н н я. Справедливість теореми впливає з властивості однорідності, яка має місце для всіх матриць, і означень суми матриць $A_k \in A^{\oplus}, k=1,2,\dots,m$, та адитива матриці.

Зв'язок адитива q -матриці з сумою всіх її елементів.

Теорема 2. Адитив q -матриці A складає n -ну частку суми всіх її елементів S :

$$A \in A^{\oplus} \wedge adA = q \Rightarrow q = \frac{1}{n} \sum_{i,j} a_{ij} = \frac{S}{n}. \quad (7)$$

Д о в е д е н н я. Випишемо всі рівності, які визначають адитив q -матриці, тобто рівності виду (див. (1))

$$a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{nj_n} = \sum_{i=1}^n a_{ij_i} = q, \quad (8)$$

у кількості $n!$ і складемо їх. Підсумовування правих частин цих рівностей дає $n!q$, а в сумі лівих частин кожний елемент кожного рядка зустрінеться як доданок $(n-1)!$ разів (згідно з числом доданків, які визначають адитив підматриці $(n-1)$ -го порядку без рядка\стовпця, на перетині яких стоїть елемент, що розглядається). Якщо згрупувати елементи кожного рядка і винести спільний множник $(n-1)!$ за дужки, то одержимо:

$$(n-1)!S_1 + (n-1)!S_2 + \dots + (n-1)!S_n = n!q, \quad (9)$$

де S_i – сума елементів i -го рядка, $i=1,2,\dots,n$.

Оскільки сума елементів усіх рядків дорівнює сумі всіх елементів матриці S , тому й приходимо до рівності

$$S = nq, \text{ або } q = \frac{S}{n}.$$

Той самий результат отримаємо, якщо підсумовуючи ліві частини всіх рівностей виду (8), згрупувати елементи стовпців. У такому разі суму S одержимо, як результат додавання сум елементів стовпців матриці A :

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = S. \quad (10)$$

Наслідок 1. Адитив q -матриці A дорівнює сумі середніх арифметичних елементів рядків (стовпців) матриці:

$$q = \sum_i \frac{1}{i} \cdot S_i \cdot \frac{1}{n} \quad (q = \sum_j \frac{1}{j} \cdot S_j).$$

Введемо в розгляд відношення адитива q до порядку

матриці n , тобто величину $\frac{q}{n}$, і назовемо її **відносним адитивом** q -матриці.

Наслідок 2. Відносний адитив q -матриці дорівнює середньому арифметичному елементів матриці:

$$\frac{q}{n} = \frac{1}{n^2} S = \frac{1}{n^2} \sum_{ij} a_{ij}. \quad (12)$$

Наслідок 3. Сума $S_{B_{k \setminus l}}$ елементів підматриці $B_{k \setminus l}$

матриці $A \in A^{\oplus}$ без рядка\стовпця $k \setminus l$ та адитив $adA = q$ пов'язані співвідношенням:

$$S_{B_{k \setminus l}} = (n-1)(q - a_{kl}); k \in I, l \in I, \quad (13)$$

де в перших дужках правої частини – порядок підматриці $B_{k \setminus l}$, а в других – її адитив.

Критерій адитивності матриць "мовою сум". Для підрахунку адитива матриці A^q за означенням необхідно і достатньо знайти суму n елементів, узятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця, а згідно з теоремою 2 – знайти n -у частку суми всіх членів матриці. Наступна теорема дозволяє знайти адитив q -матриці за елементами довільного рядка і довільного стовпця i , разом з тим, устанавлює необхідні і достатні умови адитивності матриці.

Теорема 3. Матриця A – q -адитивна матриця тоді і тільки тоді, коли сума середніх арифметичних елементів будь-

яких рядка і стовпця без елемента, який розташований на їх перетині, є константою c , при цьому $c = q/n$:

$$A \in A^{\oplus} \wedge adA = q \Leftrightarrow \frac{1}{n}S_k^- + \frac{1}{n}S_l^| - a_{kl} = c - const \quad \forall k \in I, \forall l \in I, \quad (14)$$

де $c = q/n$ – відносний адитив.

Д о в е д е н н я ґрунтується на розглянутій вище теоремі 2.

Необхідність (\Rightarrow). Суму всіх елементів A^q можна представити так:

$$(S_k^- + S_l^| - a_{kl}) + S_{B_{k \setminus l}} = S = \sum_{i,j} a_{ij}, \quad (15)$$

де $S_k^-, S_l^|, S_{B_{k \setminus l}}$ – сума елементів k -го рядка, l -го стовпця, елементів підматриці $B_{k \setminus l}$ матриці $A \in A^{\oplus}$ без рядка\стовпця $k \setminus l$, усіх елементів матриці A відповідно.

На підставі теореми 2 і наслідка 3 з неї, тобто з урахуванням рівностей:

$$S = nq, \quad S_{B_{k \setminus l}} = (n-1)(q - a_{kl}); \quad k \in I, l \in I, \quad \text{формула (15) набуде вигляду:}$$

$$(S_k^- + S_l^| - a_{kl}) + (n-1)(q - a_{kl}) = nq, \quad \text{або}$$

$$S_k^- + S_l^| - na_{kl} = q.$$

Звідки, при $c = q/n$, випливає (14).

Достатність (\Leftarrow). Для довільного фіксованого рядка $i \in I$ і $j = 1, 2, \dots, n$ згідно з правою частиною (14) одержимо рівності:

$$S_i^- + S_1^| - na_{i1} = cn, \quad S_i^- + S_2^| - na_{i2} = cn, \quad \dots,$$

$$S_i^- + S_n^| - na_{in} = cn.$$

Якщо ці рівності скласти, то в лівій частині результату приходимо до суми елементів по всіх стовпцях, тобто до суми всіх елементів матриці, а в правій – до добутку cn^2 :

$$\sum_j S_j^| = \sum_{i,j} a_{ij} = S = cn^2. \quad (16)$$

Далі здійснимо вибір рядків і стовпців так, щоб із кожного рядка і кожного стовпця було взято по одному й тільки по одному елементу:

$$S_1^- + S_{j_1}^| - na_{1j_1} = cn,$$

$$S_2^- + S_{j_2}^| - na_{2j_2} = cn, \quad \dots, \quad S_n^- + S_{j_n}^| - na_{nj_n} = cn$$

Сума цих рівностей, з урахуванням (16), дає:

$$2cn^2 - n \sum_i a_{i j_i} = cn^2, \quad \text{або} \quad \sum_i a_{i j_i} = cn \quad \forall (i, j_i) \in I^2. \quad (17)$$

Таким чином, усі суми n елементів матриці, вибраних із різних рядків і різних стовпців, рівні між собою. Це і означає, що матриця A , яка розглядається є адитивною (див. (2)) і $adA = q$, оскільки за умовою $c = q/n$.

Зауваження 3. Формула правої частини співвідношення (14), після символу \Leftrightarrow , в еквівалентних формах запишеться так:

$$S_k^- + S_l^| - na_{kl} = q \Leftrightarrow \sum_{j \neq l} a_{kj} + \sum_{i \neq k} a_{il} - (n-2)a_{kl} = q. \quad (18)$$

Нехай A – довільна квадратна матриця n -го порядку. Якщо для неї не всі суми елементів виду (1) рівні між собою або взагалі рівних між собою сум немає, то A не є q -матрицею (див. (1)). Тоді величину q , що визначається рівністю (18), можна розглядати як функцію від дискретних змінних i, j , тобто, $q = q(i, j)$, і позначати її через q_{ij} .

Величина

$$q_{ij} = \sum_{l \neq j} a_{il} + \sum_{k \neq i} a_{kj} - (n-2)a_{ij} \quad (19)$$

називається **адитивом елемента** a_{ij} матриці A : $q_{ij} = ad a_{ij}$.

Матриця Q_A , складена з адитивів елементів матриці A ,

називається **адитиваційною матрицею** (по відношенню до A).

Множину всіх адитиваційних матриць позначимо через Q^{\oplus} :

$$Q_A \in Q^{\oplus} \Leftrightarrow Q_A = (q_{ij})_{n \times n} = (ad a_{ij})_{n \times n}. \quad (20)$$

Критерій адитивності матриць "мовою різниць".

Відмітимо зразу, що критерій "мовою різниць" є, по суті, наслідком критерію "мовою сум", проте, з огляду на його важливість, подається окремою теоремою.

Елементи двох рядків (стовпців) матриці, які належать одному й тому ж стовпцю (одному й тому ж рядку), в подальшому будемо називати **відповідними**.

Теорема 4. Матриця A є q -адитивною матрицею тоді і тільки тоді, коли різниці відповідних елементів двох довільно вибраних рядків або стовпців рівні між собою:

$$A \in A^{\oplus} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} - a_{kj} = r_a(i, k) - const, \quad \forall j \in I \quad \forall (i, k) \in I^2 \\ a_{ij} - a_{il} = d_a(j, l) - const, \quad \forall i \in I \quad \forall (j, l) \in I^2. \end{cases} \quad (21)$$

Д о в е д е н н я базується на першому співвідношенні з (14):

$$S_k^- + S_l^| - na_{kl} = q \quad \forall (k, l) \in I^2,$$

яке з метою компактності записів подамо в еквівалентній формі через індекси-"крапки":

$$na_{kl} + q = a_{k\bullet} + a_{\bullet l}. \quad (22)$$

Необхідність (\Rightarrow). Виберемо в матриці A два довільні рядки i, k та два довільні стовпці j, l і випишемо для них співвідношення виду (22):

$$\begin{cases} na_{ij} + q = a_{i\bullet} + a_{\bullet j} \\ na_{kj} + q = a_{k\bullet} + a_{\bullet j} \end{cases}, \begin{cases} na_{ij} + q = a_{i\bullet} + a_{\bullet j} \\ na_{il} + q = a_{i\bullet} + a_{\bullet l} \end{cases}. \quad (23)$$

$(j = 1, 2, \dots, n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$

Віднімаючи від першої рівності другу в кожній парі, позначений квадратною дужкою, одержуємо необхідну умову адитивності – праву частину (21):

$$a_{ij} - a_{kj} = \frac{1}{n}(a_{i\bullet} - a_{k\bullet}), \quad a_{ij} - a_{il} = \frac{1}{n}(a_{\bullet j} - a_{\bullet l}), \quad (24)$$

де $\frac{1}{n}(a_{i\bullet} - a_{k\bullet}) = r_a(i, k)$ – const – різниця середніх арифметичних елементів вибраних рядків i, k ;

$$\frac{1}{n}(a_{\bullet j} - a_{\bullet l}) = d_a(j, l) - \text{const} - \text{різниця середніх}$$

арифметичних елементів вибраних стовпців j, l .

Достатність (\Leftarrow) доводиться шляхом тотожних перетворень співвідношень (23), з чого й випливає адитивність матриці A . Покажемо це, виходячи з необхідної умови стосовно рядків:

$$a_{ij} - a_{kj} = \frac{1}{n}(a_{i\bullet} - a_{k\bullet}) \Rightarrow n(a_{ij} - a_{kj}) = a_{i\bullet} - a_{k\bullet} \Rightarrow$$

$$a_{i\bullet} - na_{ij} = a_{k\bullet} - na_{kj} \Rightarrow a_{i\bullet} + a_{\bullet j} - na_{ij} = a_{k\bullet} + a_{\bullet j} - na_{kj} = adA$$

на підставі достатньої умови (14) адитивності матриці.

Аналогічний ланцюжок рівностей отримуємо, виходячи з необхідної умови стосовно стовпців.

Наслідок 1. Будь-яка квадратна підматриця $B_{m \times m}$ порядку m ($2 \leq m \leq n-1$) адитивної матриці $A \in q$ -матрицею (див. (23)):

$$A \in A^{\oplus} \Rightarrow B_{m \times m} \in A^{\oplus}. \quad (25)$$

Наслідок 2. Сума адитивів квадратних матриць-клітин, вибраних по одній і тільки по одній із кожного рядка і кожного стовпця клітинної q -матриці, дорівнює q . (Справедливість наслідка витікає з твердження (25) про адитивність підматриці).

Наслідок 3. Нехай $B = (b_1 b_2 \dots b_n)^T$ і $C = (c_1 c_2 \dots c_n)$ – довільні матриця-стовпець і матриця-рядок ($\forall b_i \in \mathbf{R}, \forall c_j \in \mathbf{R}$), які назвемо відповідно **опорним стовпцем** і **опорним рядком**. Тоді матриця A з елементами $a_{ij} = b_i - c_j$ є адитивною:

$$\forall b_i \in \mathbf{R}, i \in I; \forall c_j \in \mathbf{R}, j \in I \Rightarrow (a_{ij})_{n \times n} = (b_i - c_j)_{n \times n} = A \in A^{\oplus}, \quad (26)$$

$$adA = \sum_i b_i - \sum_j c_j$$

при цьому

Д о в е д е н н я зводиться до перевірки виконання умов критерію адитивності "мовою різниць".

Цей наслідок дозволяє будувати адитивні матриці за заданими опорними стовпцем та рядком і встановлювати

опорні стовпці і рядки заданої q -матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, причому нескінченним числом способів.

Зауваження 4. Перевірка деякої матриці на адитивність за допомогою: критерію "мовою різниць" економічніше в $(n-1)!$ разів, ніж перевірка адитивності за означенням, і – в $(2n+1)$ разів, ніж за критерієм "мовою сум".

Виродженність. Теорема 5. Будь-яка q -матриця порядку вище другого ($n > 2$) вироджена:

$$A \in A^{\oplus} \wedge n > 2 \Rightarrow \det A = 0. \quad (27)$$

Д о в е д е н н я ґрунтується на двох властивостях визначників (інваріантності та рівності нулю при наявності двох рядків або стовпців із пропорціональними відповідними елементами) і критерії "мовою різниць".

Наслідок 1. Ранг адитивної матриці A будь-якого порядку ($\forall n \in \mathbf{N}$) не більше двох:

$$A \in A^{\oplus} \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N} : mgA \leq 2, \quad (28)$$

оскільки всі рядки, крім одного, можна перетворити в рядки з пропорційними відповідними елементами.

Наслідок 2. Система n ($n > 2$) лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $n \times n$), у якій основна матриця A адитивна, сумісна тоді і тільки тоді, коли її розширена матриця \bar{A} також адитивна:

$$A \in A^{\oplus} \wedge \text{СЛАР } n \times n - \text{сумісна} \Leftrightarrow \bar{A} \in A^{\oplus}, \quad (29)$$

оскільки ліва і права частини (29), відносно символу \Leftrightarrow , рівносильні рівності $mgA = mg\bar{A}$.

Критерій адитивності добутку матриць із q -матрицею.

Відомо, що добуток квадратних матриць існує завжди, але не є комутативним. Стосовно добутку адитивних матриць без теоретичних досліджень – на конкретних прикладах – легко переконалися в неадитивності матриці-результату. Проте існує різновид квадратних матриць, які у добутку з q -матрицею дають адитивну матрицею.

Нехай $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ – квадратні матриці порядку n ; $b_{i\bullet}, b_{\bullet j}$ – відповідно сума елементів рядка i ($\forall i \in I$), стовпця j ($\forall j \in I$) матриці B .

Теорема 6. Матриця C – результат множення q -матриці A зліва (справа) на матрицю B – є адитивною тоді і тільки тоді, коли суми елементів рядків (стовпців) матриці B рівні між собою:

$$A \in A^{\oplus} \wedge C = BA \in A^{\oplus} \Leftrightarrow b_{i\bullet} = b^- - const \quad \forall i \in I \quad (30)$$

$$A \in A^{\oplus} \wedge C = AB \in A^{\oplus} \Leftrightarrow b_{\bullet j} = b^l - const \quad \forall j \in I. \quad (31)$$

Д о в е д е н н я базується на означенні добутку матриць і критерії адитивності "мовою різниць". Покажемо справедливість (30).

Необхідність (\Rightarrow). Випишемо елементи матриці C для двох довільних стовпців j, l :

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + b_{i3}a_{3j} + \dots + b_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj},$$

$$c_{il} = b_{i1}a_{1l} + b_{i2}a_{2l} + b_{i3}a_{3l} + \dots + b_{in}a_{nl} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kl}, \quad (32)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

і знайдемо різниці їхніх відповідних елементів:

$$c_{ij} - c_{il} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} - \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kl} = \sum_{k=1}^n b_{ik}(a_{kj} - a_{kl}). \quad (33)$$

Оскільки матриці A і C адитивні, то згідно з (21) повинні виконуватись умови:

$$c_{ij} - c_{il} = d_c(j, l) - const, \quad \forall i \in I \quad \forall (j, l) \in I^2.$$

$$a_{kj} - a_{kl} = d_a(j, l) - const, \quad \forall k \in I \quad \forall (j, l) \in I^2. \quad (34)$$

З урахуванням (34) із співвідношення (33) отримуємо необхідну умову:

$$d_c(j, l) = d_a(j, l) \sum_{k=1}^n b_{ik} \Rightarrow \sum_{k=1}^n b_{ik} = b_{i\bullet} = b^- - const \quad \forall i \in I. \quad (35)$$

Достатність (\Leftarrow). Відштовхуючись від правої частини твердження (32), а саме: $b_{i\bullet} = b^- - const \quad \forall i \in I$, і, враховуючи другу з умов (34), різниця $(c_{ij} - c_{il}) \quad \forall (j, l) \in I^2$ набуде вигляду:

$$c_{ij} - c_{il} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} - \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kl} = (a_{kj} - a_{kl}) \sum_{k=1}^n b_{ik} = d_a(j, l) b^- - const,$$

з чого і випливає адитивність матриці C .

Наслідок 1. Якщо матриця B – напівмагічний квадрат з константою b , то адитиви добутоків q -матриці A з матрицею B – BA і AB – рівні добутку адитива q на константу b напівмагічного квадрата:

$$B = (b_{ij}): b_{i\bullet} = b_{\bullet j} = b \quad \forall (i, j) \in I \Rightarrow ad(BA) = ad(AB) = qb. \quad (36)$$

Д о в е д е н н я. Якщо B – напівмагічний квадрат, то в (34), (35) $b_{\bullet k} = b_{k\bullet} = b - const \quad \forall k \in I$, а суми

$\sum_k a_{\bullet k}, \sum_k a_{k\bullet}$ дають суму елементів матриці A . Із цього й випливає (36).

Варто зазначити, що рівність адитивів матриць BA і AB не тягне за собою рівність самих матриць.

На закінчення зауважимо, що авторів не відомі наукові роботи, в яких би вивчалися чи застосовувались при розв'язанні прикладних задач матриці розглянутого типу.

Друга частина статті, присвячена застосуванню адитивних матриць у задачах дискретної оптимізації, буде опублікована в наступному номері.

Література: 1. Кузнецов А. В. Высшая математика: Мат. программ. : [Учебник] / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн. : Высшая школа, 1994. – 286 с. 2. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. И. Виноградов. – У 5 т. – М. : Советская Энциклопедия. – Т. 1. – 11521 с.; Т. 2. – 1104 с.; Т. 3. – 1184 с.; Т. 4. – 1216 с.; Т. 5. – 1248 с.

Стаття надійшла до редакції
23.06.2009 р.