МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,

МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Малярець Л.М., Афанасьєва Л.М., Ігначкова А.В.

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Вища математика для економістів

Частина 1

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск Малярець Л.М.

Харків. Вид. ХНЕУ,2011

УДК 51: 33
ББК 22.1Я7
М21

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Державної академії статистики, обліку та аудіту Держкомстату України *Моцній В.Ф.*; докт. екон. наук, професор, завідувач кафедри математики і математичних методів економіки Донецького національного університету *Християновській В.В.*; докт. техн. наук, професор кафедри вищої математики Харківського державного університету харчування та торгівлі *Полевіч В.В.*

Затверджено на засіданні вченої ради Харківського національного економічного університету
Протокол № від 2010 р.

Малярець Л.М.,
М21 Математика для економістів. Частина 1. Вища математика для економістів: навчальний посібник/ Л.М.Малярець, Л.М.Афанасьєва, А.В.Ігначкова – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011.– 392с.(Укр.мов)

Подано теоретичний матеріал, який вивчається в дисципліні "Математика для економістів" розділі "Вища математика для економістів". Наведено велику кількість проаналізованих типових задач з вищої математики та її застосуванні в економіці.

Рекомендовано для студентів при неперервній математичній підготовці, для самостійній роботі студентів, викладачам для проведення занять та оганізації індивідуальної роботи студентів.

ISBN **УДК 330.42(075.8)ББК**
ББК 65ВЯ73

ЗМІСТ

ВСТУП

Фундаментальну основу в математичній підготовці економістів та менеджерів складає навчальна дисципліна "Математика для економістів", яка є нормативною дисципліною природничо-наукового циклу та складовою структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів з усіх економічних спеціальностей. Сучасною тенденцією у вищій освіті є переорієнтація студентів з процесу навчання на результат, на формування певних професійних компетенцій, які необхідні економісту в будь-яких сферах його діяльності.

Основними завданнями вивчення даної навчальної дисципліни є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної спрямованості, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін математичного циклу. У процесі опанування навчальної дисципліни "Математика для економістів" студент отримує аналітично-дослідницькі компетенції, а саме: вміти проводити основні математичні обчислення, самостійно застосовувати отримані знання для розв’язання відповідних задач та ситуаційних вправ; вміти аналізувати, обробляти отримані результати із урахуванням отриманих даних і робити висновки на достатньо високому професійному рівні; вміти відстежувати основні тенденції та напрямки розвитку математичної науки, самостійно працювати з науково-методичною літературою; вміти використовувати отримані знання для подальшого створення відповідних економіко-математичних моделей і їх розв’язання (визначення балансових відношень, обчислення коефіцієнтів витрат, визначення залежності попиту та пропозиції, порівняння ефективності фінансових операцій та ін.).

Начальний посібник створений авторами на основі багаторічного досвіду викладання математики студентам економічних спеціальностей. Під час написання даної роботи автори керувалися дидактичним принципом у висвітленні матеріалу з кожної теми і побудові самої структури навчального посібника за темами, яка в цілому відповідає вимогам програми з математики для економістів, затвердженої Міністерством освіти і науки України, молоді та спорту.

Слід відзначити, що сучасні навчальні плани вивчення вищої математики пропонують кількість годин, більше половини яких відведено на самостійне засвоювання дисципліни. З метою допомоги студентам самостійно оволодіти теоретичними основами дисципліни та методами розв'язання задач автори посібника пропонують повний навчально-методичний комплекс першої її частини.

У посібнику поєднується теоретичний матеріал з великою кількістю прикладів, які його застосовують. Пропонуються методичні рекомендації розв'язання багатьох типових задач та вправи для самостійної роботи .

Навчальний посібник включає частину дисципліни, яка складається з таких розділів вищої математики: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної, основні поняття функцій багатьох змінних.

Найбільш повно представлено курс лінійної алгебри, який є теоретичною та практичною базами для вивчення прикладних математичних навчальних дисциплін.

Теоретичний і практичний матеріал з математичного аналізу як найбільший та достатньо складний розділ вищої математики займає значну частину посібника і дається в повному обсязі, необхідному для засвоювання дисципліни.

Завдяки теоретичному матеріалу та великій кількості розібраних і проаналізованих задач даний навчальний посібник може бути довідником для спеціалістів у різник галузях економіки при вирішенні реальних задач, де потрібно застосувати інструменти вищої математики.

Автори сподіваються, що навчальний посібник стане корисним студентам, які прагнуть отримати знання з вищої математики, та викладачам для проведення занять і організації індивідуальної роботи студентів.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Апарат лінійної алгебри та аналітичної геометрії широко використовується у прикладних задачах економіки. Параметрами технологічного процесу є n-вимірний вектор. Система m, n початкових даних – це матриця.

Розв'язок задачі оптимізації можна звести до розв'язку систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Отже, звідси виникає необхідність вивчення лінійної алгебри. У свою чергу аналітична геометрія дає можливість геометричного тлумачення розв'язку задач економіки на площині та у просторі.

Глава 1
Визначники, методи обчислювання

1.1. Задача про використання сировини. Математична модель

Задача. Підприємство виробляє продукцію n зразків, для виробництва якої використовуються m видів сировини. Дані про витрати сировини на одиницю продукції та кількість сировини кожного виду задаються в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Задача про використання сировини

Вид сировини	Продукція				Кількість сировини
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{21}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m1}		a_{mn}	b_m…

Яку кількість продукції кожного зразка треба виробити, щоб повністю використати сировину, яку має підприємство? Складемо математичну модель задачі. Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кількість продукції, що її виробляє підприємство. Тоді відповідно таблиці математичну модель задачі запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1.1)$$

де $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ – матриця системи;

$X = (x_j)$ $(j = \overline{1,n})$; $B = (b_i)$ $i = (\overline{1,m})$ –

відповідно стовпці невідомих та вільних членів. Набір чисел x_j – розв'язок системи, якщо при підстановці його у систему будемо одержувати тотожності.

Система рівнянь, що має розв’язок, називається сумісною, у протилежному випадку система несумісна. Якщо система має тільки один розв’язок, вона – означена, а якщо система має безліч розв’язків, то неозначена. Дослідити систему – це розв’язати питання про її сумісність та означеність. Таким чином, розв’язок задачі про використання сировини зведено до розв’язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими.

1.2. Визначники другого порядку

Розглянемо найпростішу систему рівнянь, що складається з двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Розв’яжемо цю систему методом послідовного виключення невідомих. З цією метою виключимо спочатку невідоме x_1. Для цього знайдемо добуток першого рівняння на a_{22}, а другого – на ($-a_{12}$). Після додавання першого та другого рівнянь маємо

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Виключивши аналогічно змінну x_1, будемо мати

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

якщо $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Число

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix} \quad –$$

це визначник другого порядку таблиці (матриці) чисел $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix}$.

Введемо ще такі визначники

$$\Delta_{x_1} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_2} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – елементи визначника Δ. Таким чином, розв’язок систем двох лінійних рівнянь можна записати так:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Визначник Δ називається визначником системи. Визначники Δ_{x_1} та Δ_{x_2} утворені із визначника системи заміною першого та другого стовпців на стовпець вільних членів відповідно. Останні формули це формули Крамера, або правило Крамера для розв’язання системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Приклад 1.1. Розв’язати систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 310 \\ 3x_1 + 2x_2 = 190 \end{cases}.$$

Розв'язання.

За правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 310 & 3 \\ 190 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{310 \cdot 2 - 190 \cdot 3}{5 \cdot 2 - 3 \cdot 3} = 50; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 310 \\ 3 & 190 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 190 - 3 \cdot 310}{5 \cdot 2 - 3 \cdot 3} = 20.$$

1.3. Визначники n-го порядку

Визначником n-го порядку для квадратичної матриці A є число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

або

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

де a_{ij} – елементи визначника; A_{ij} – алгебраїчні доповнення відповідних елементів, які визначаються так: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, де M_{ij} – це мінор a_{ij}-го елемента визначника, який є визначником ($n-1$) порядку, здобутий з даного визначника викреслюванням його *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 19.$$

Приклад 1.3. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -5 - 100 + 40 = -65.$$

Визначник n-го порядку можна розвинути за будь-яким рядком або будь-яким стовпцем. Обчислювання визначників за цим способом пов’язано з великим обсягом арифметичних дій. Обчислення буде значно легшим, якщо застосувати методи, пов’язані з властивостями визначників.

1.4. Властивості визначників та методи їх обчислювання

1. Властивості рівноправності строк та стовпців. Якщо замінити рядки визначника відповідними стовпцями, величина визначника не зміниться, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Справедливість цієї властивості легко перевірити, обчислюючи обидва визначники за правилом трикутника.

2. Властивість антисиметрії при перестановці двох строк (двох стовпців).

При перестановці двох рядків (стовпців) визначник зберігає свою абсолютну величину, але змінює знак на протилежний, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Цю властивість можна перевірити безпосереднім обчислюванням. Отже, визначник з двома однаковими стовпцями (строками) дорівнює нулю. Дійсно, з одного боку, при перестановці однакових стовпців визначник не змінюється, а за другою властивістю він змінює знак, тобто $\Delta = \Delta, \Delta = -\Delta$, звідки $\Delta = 0$.

Для встановлення інших властивостей визначників введемо поняття мінора a_{ij} елемента визначника.

Мінор M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку є визначник другого порядку, який одержано із даного викреслюванням *i*-го рядка та *j*-го стовпця. Алгебричним доповненням A_{ij}-елемента a_{ij} визначника є: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Розвиваючи визначник третього порядку за елементами першого рядка, будемо мати:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (1.3)$$

Аналогічна формула має місце по відношенню до будь-якого рядка (стовпця). Таким чином, визначник можна подати у вигляді

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3};\ i = 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

або

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j};\ j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Зазначимо, якщо у визначнику замінити елементи першого рядка на відповідні елементи другого рядки, то при цьому A_{11}, A_{12}, A_{13} не зміняться, тому що вони не містять елементів першої рядка. Отже, якщо у визначнику замість першого рядка поставити другий, то буде $a_{1j} = a_{2j}$, тобто перший та другий рядки визначника однакові. Цей визначник дорівнює нулю. Таким чином,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0;$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+a_{3j}A_{3k}=0; \quad (1.6)$$
$$i,\ j,k=1,2,3;\ i\neq j;\ \ j\neq k.$$

На основі зазначених формул можна довести наступні властивості визначника:

3. Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення цих елементів дорівнює величині визначника, а сума добутків елементів будь-якого рядка на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного ряду дорівнює нулю.

4. Якщо елементи будь-якого ряду мають загальний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Визначник дорівнює нулю, якщо він має рядок з усіма рівними нулю елементами.

Четверта та п'ята властивості виходять з третьої.

6. Якщо елементи будь-якого ряду є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких елементи даного ряду дорівнюють відповідним доданкам.

Цю властивість легко довести, якщо використати третю властивість. Нехай

$$a_{11}=c_1+b_1;\ a_{12}=c_2+b_2;\ a_{13}=c_3+b_3,$$

тоді

$$\begin{aligned}\Delta&=(c_1+b_1)\cdot A_{11}+(c_2+b_2)\cdot A_{12}+(c_3+b_3)\cdot A_{13}=\\&=\left(c_1\cdot A_{11}+c_2\cdot A_{12}+c_3\cdot A_{13}\right)+\left(b_1\cdot A_{11}+b_2\cdot A_{12}+b_3\cdot A_{13}\right)=\\&=\Delta_1+\Delta_2.\end{aligned}$$

7. Визначник за своєю величиною не зміниться, якщо до елементів будь-якого ряду додати елементи паралельного ряду, які помножені на одне і теж саме число λ. Замінимо, наприклад, елементи першого рядка елементами $a_{11}+\lambda a_{21}, a_{12}+\lambda a_{22}, a_{13}+\lambda a_{23}$. Тоді відповідно до шостої властивості одержаний визначник дорівнює сумі двох визначників, перший з них – початковий, а у другого – перший рядок буде $\lambda a_{21},\lambda a_{22},\lambda a_{23}$. Якщо винести λ за знак визначника, одержимо визначник з однаковими рядками, який дорівнює нулю (друга властивість).

Зауважимо, що усі властивості визначників, які наведені для визначника третього порядку, залишаються правильними для визначників будь-якого порядку.

За допомогою сьомої властивості визначник легко обчислюється, якщо в будь-якому ряді елементарними перетворюваннями зробити всі елементи рівними нулю, крім одного.

Приклад 1.4. Обчислити визначник. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -1.$$

При перетворенні третій рядок визначника помножено на (–3) та додано до другого рядка, далі третій рядок помножено на (–4) та додано до першого рядка.

Приклад 1.5. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Для обчислення використаємо третю та сьому властивості. Перший рядок залишимо без зміни, а до другого треба додати перший, помножений на (–2). До четвертого рядка додамо перший, помножений на (–4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 & 5 \\ -14 & 0 & -5 & -7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -18 & 0 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Розвинемо визначник за другим стовпцем і одержимо:

$$\Delta = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -14 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Аналогічно знижуємо порядок здобутого визначника. Другий рядок залишимо без зміни; а перший додамо до другого, помноженого на (-7); третій додамо до другого, помноженого на 19. Будемо мати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -14 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 58 & 33 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -14 & -9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = -60.$$

За допомогою аналогічних перетворень визначник n-го порядку можна привести до трикутного вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У здобутому визначникові усі елементи, що стоять під головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а його величина дорівнює добутку елементів, що стоять на головній діагоналі.

Таким чином, для обчислення визначника використовуються такі способи: розвинення визначника за елементами будь-якого ряду (за визначенням) за допомогою елементарних перетворень з наступним зниженням порядку або зведення визначника до трикутного вигляду.

1.5. Системи лінійних рівнянь. Правило Крамера

Поняття визначника n-го порядку виникає при розв’язанні системи n лінійних рівнянь з m невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} \quad + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1.7}$$

Знайдемо розв’язок цієї системи. При цьому припускається, що її визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Домножимо кожне рівняння системи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$$

на A_{ij} – алгебраїчні доповнення *j*-го стовпця та знайдемо суму цих рівнянь. Тоді

$$x_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{ij} + x_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{ij} + \ldots + x_n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} .$$

Відповідно з третьою властивістю усі коефіцієнти при x_j, крім одного, дорівнюють нулю, тобто

$$x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} ,$$

$$x_j \cdot \Delta = \Delta_j ,$$

де Δ – визначник системи; Δ_j – визначник, який здобули з визначника системи заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів b_i. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв’язок

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Це є правило Крамера знаходження невідомих x_j.

Приклад 1.6. Розв’яжемо систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}.$$

Розв'язання. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 33 & 3 & 2 \\ 23 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 3 & 23 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 23 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -2.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 5; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 2.$$

Запитання для самодіагностики

1. Дайте означення визначника другого і третього порядку.
2. Чим визначається порядок визначника?
3. Що називається мінором деякого елемента визначника?
4. Що називається алгебраїчним доповненням деякого елемента визначника?
5. Які перетворення не змінюють величину визначника?
6. Які перетворення змінюють лише знак визначника?
7. За яких умов визначник дорівнює нулю?
8. Які способи обчислення визначника:
   а) третього порядку;
   б) *n*-го порядку?
9. Як розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера.

Приклади і вправи

Приклади:

1.7. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7\cdot 2 - 5\cdot(-3) = 29;$

б) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix} = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) - \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) = (4-3)-(1-2) = 2.$

1.8. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання.

Дістанемо:

$(x+2)x - 3\cdot 1 = 0$ або $x^2 + 2x - 3 = 0,$ звідки маємо $x_1 = -3,\ x_2 = 1.$

1.9. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислити визначник за правилами трикутника.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 5\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 8 = 0.$$

1.10. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання.

Обчислення даного визначника за правилом трикутника призведе до громіздких обчислень. Але, застосовуючи властивості визначників, даний визначник можна перетворити до простішого вигляду.

Отже, спочатку третій стовпець помножимо на (-1) і додамо до другого, а подальші перетворення покажемо стрілочками:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} (-1) & (-1) \\ + & \\ + & \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 768 & 0 & 116 \\ -588 & 0 & 294 \end{vmatrix} = -100 \cdot \begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -588 & 294 \end{vmatrix} = -100 \cdot 294 \cdot \begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -29400 \cdot (768 + 232) = -29400000.$$

1.11. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання.

Як і в попередньому прикладі, перетворимо даний визначник до такого вигляду, де будуть значно спрощені обчислення. Помножимо перший стовпець на (-1) і додамо до другого:

$$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13547 & 100 \\ 28423 & 100 \end{vmatrix} = 100\left(13547 - 28423\right) = -1487600.$$

1.12. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

розклавши його за елементами другого рядка.

Розв'язання. За правилом розкладання визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця маємо:

$$\Delta = 3 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} + 5 \cdot A_{24}.$$

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(-8+6-12-8-9-8) -$$

$$-(6+2+16-12+2+8)+5(12+6-32-36+4-16) = -215.$$

1.13. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Оскільки у другому стовпці тільки один елемент відмінний від нуля, то доцільно даний визначник розкласти саме за елементами другого стовпця:

$$\Delta = 4 \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -4(60-5+4-6+8-25) = -144.$$

З цього прикладу видно, що обчислення значно спрощуються, якщо будь-який рядок або стовпець має багато нулів. Тому при обчисленні визначника корисно перетворити його, одержати нулі в рядку (або в стовпці) і розкласти його потім за елементами цього рядка (або стовпця).

1.14. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

За допомогою властивостей визначників легко одержати в першому стовпці третього і четвертого рядках нулі.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -5 & -7 & -14 \\ -1 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -12 & -24 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = -(120 - 120) = 0.$$

1.15. Обчислити визначник Δ шляхом зведення його до трикутного вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Перетворимо визначник до такого вигляду, щоб усі елементи під головною діагоналлю дорівнювали нулю.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&1&-4&3\\3&-4&-1&2\\4&3&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&5&2&11\\0&-10&-10&-10\\0&-5&-14&-17\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&5&2&11\\0&0&-6&12\\0&0&-12&-6\end{vmatrix}\cdot(-2)=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&5&2&11\\0&0&-6&12\\0&0&0&-30\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot5\cdot(-6)\cdot(-30)=900.$$

1.16. Розв'язати за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases}13x-15y=7\\11x+12y=19\end{cases}.$$

Розв'язання.

Для заданої системи формули Крамера мають вигляд:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ y=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix}13&-15\\11&12\end{vmatrix}=13\cdot12+11\cdot15=321,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7&-15\\19&12\end{vmatrix}=369,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}13&7\\11&19\end{vmatrix}=170.$$

Отже, $x=\dfrac{369}{321}=\dfrac{123}{107},\ \ y=\dfrac{170}{321}.$

1.17. Розв'язати за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-4x_3=8\\2x_1+4x_2-5x_3=11\\4x_1-3x_2+2x_3=1\end{cases}.$$

Розв'язання.

Обчислюємо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 2 & 4 & -5\\ 4 & -3 & 2\end{vmatrix}=19,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix}8 & 2 & -4\\ 11 & 4 & -5\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=38;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 8 & -4\\ 2 & 11 & -5\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=57,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & 8\\ 2 & 4 & 11\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=19.$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, система має єдиний розв'язок. Знаходимо його за формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{38}{19}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{57}{19}=3,\ \ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{19}{19}=1.$$

1.18. Розв’язати за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=3\\ x_1+3x_2-2x_3=-1\\ 2x_1-5x_2+3x_3=5\end{cases}.$$

Розв’язання. Визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & -5 & 3\end{vmatrix}=27-5+8-6+6-30=0.$$

Обчислимо Δ_1:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 5 & -5 & 3\end{vmatrix}=27+5+20-15-6-30=1.$$

Через те що $\Delta=0$, а $\Delta_1\neq 0$, система не має розв’язку.

Вправи:

Обчислити визначники:

1.19. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix}$.
1.20. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

1.21. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b^a \\ \log_a^b & 1 \end{vmatrix}$.
1.22. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$

1.23. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.
1.24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

1.25. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.
1.26. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.27. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.
1.28. $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$.

Розв’язати рівняння:

1.29. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & x+5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$
1.30. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

1.31. $\begin{vmatrix} 2x^2-1 & 1 & 3 \\ 4 & x+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Обчислити визначники:

1.32. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.
1.33. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

1.34. $\begin{vmatrix} a & b & b & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **1.35.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$.

1.36. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 6 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ **1.37.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язати за формулами Крамера системи рівнянь:

1.38. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **1.39.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.40. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **1.41.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язати за формулами Крамера і системи рівнянь:

1.42. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 11 \end{cases}$. **1.43.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$.

1.44. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$. **1.45.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$.

1.46. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$.

Глава 2
Матриці, дії над ними, обернена матриця

2.1. Матриці, основні означення

Прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців, називається **матрицею**, а самі числа – її елементами. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту A, B, C ... , а їх елементи – a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ... , де і – номер рядка матриці $(i=\overline{i,m})$, j – номер стовпця матриці $(j=\overline{i,n})$. Наприклад, $A=\left(a_{ij}\right)$, $\underset{[m\times n]}{A}=[a_{ij}]$, $\underset{[m\times n]}{A}=\left\|a_{ij}\right\|$,

$$\underset{[m\times n]}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Якщо в матриці число стовпців і число рядків однакове і дорівнює *n*, матриця називається **квадратною матрицею** *n*-го порядку. Матрицю, яка має один рядок (стовпець), називають матрицею-рядком (матрицею стовпцем). Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають **нульовою**: $A+0=A$.

Множина елементів квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається головною **діагоналлю матриці**, а множина елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{(n-1)2}, a_{n1}$ **– побічною діагоналлю**.

Квадратна матриця називається **діагональною матрицею**, якщо всі її елементи, які знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю:

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця – це діагональна матриця з елементами, які дорівнюють одиниці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю $\underset{[m\times n]}{A} = (a_{ij})$. Якщо в цій матриці переставити місцями відповідні рядки і стовпці, то отримаємо транспоновану матрицю A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.2. Дії над матрицями

Матриця $A=(a_{ij})$ називається **нульовою**, якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Дві матриці *A* і *B* називаються **рівними**, якщо вони обидві одного розміру $m\times n$ та $a_{ij}=b_{ij}$ відповідно. Визначені такі дії над матрицями:

1. Сума матриць однакового розміру $A+B=C$, де елементи матриці $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

2. Добуток матриці на скалярний множник $k\cdot A=B$, де $B=\left[ka_{ij}\right]$.

3. Добуток матриць $AB=C$ згідно з правилом «Рядок на стовпець», тобто

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}.$$

При цьому необхідно, щоб число стовпців першої матриці дорівнювало числу рядків другої.

Операції з матрицями мають такі ж властивості, як і операції над числами

1) $A+B=B+A$	5) $(A+B)C=AC+BC$
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$	6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$	7) $(AB)C=A(BC)$
4) $A(B+C)=AB+AC$	8) $AE=EA=A$

Слід зазначити, що операція добутку матриць має свої властивості. Так, у загальному випадку $AB\neq BA$ (з означення добутку). Якщо така рівність виконується, то матриці називають комутативними.

Приклад 2.1. У звіті (табл. 2.1) наведені дані про виробництво трьох видів продукції чотирма підприємствами за два роки.

Таблиця 2.1

Звіт роботи за два роки

Продукція	2008 р.				2009 р.			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	35	20	27	15	40	35	38	27
2	100	112	135	148	150	170	145	160
3	125	180	110	95	135	175	115	105

Знайти сумарне виробництво за два роки кожного виду продукції по кожному підприємству.

Розв’язання.

Наведену таблицю запишемо як матриці розміру 3×4:

$$A=\begin{pmatrix}35 & 20 & 27 & 15\\ 100 & 112 & 135 & 148\\ 125 & 180 & 110 & 95\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}40 & 35 & 38 & 27\\ 150 & 170 & 145 & 160\\ 135 & 175 & 115 & 105\end{pmatrix}.$$

Дані матриці – це матриці одного розміру. Їх можна додати

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 75 & 55 & 65 & 42 \\ 250 & 282 & 280 & 380 \\ 260 & 355 & 225 & 200 \end{pmatrix}.$$

Матриця C характеризує сумарне виробництво за два роки кожного виду продукції за кожним підприємством. За даними задачі визначити зміну обсягу виробництва продукції за кожним підприємством за рік. Для цього треба знайти різницю матриць

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 11 & 12 \\ 50 & 58 & 10 & 12 \\ 10 & -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Виробництво продукції порівняно з попереднім роком в основному збільшилось.

Приклад 2.2. Знайти добуток двох матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 14 & 6 \end{pmatrix},$$

де

$$8 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3;$$
$$5 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1;$$
$$4 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0.$$

Добуток матриць $B \cdot A$ не існує (число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A).

2.3. Обернена матриця та її знаходження

Аналогом операції частки чисел вводиться операція знаходження матриці, обернена до даної.

Означення. Матрицю A^{-1} називають оберненою до матриці A, якщо добуток цієї матриці як ліворуч, так і праворуч на матрицю A дорівнює одиничній матриці, тобто $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$. Як видно з останніх рівностей, обернену матрицю може мати тільки квадратна матриця, але ця умова недостатня.

Достатньою умовою наявності оберненої матриці A є умова $\Delta_A \neq 0$, де Δ_A – визначник даної матриці. Доведемо достатність цієї умови. Задана матриця A, при цьому $\Delta_A \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведення.

1. Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень елементів даної матриці

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Транспонуємо цю матрицю

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

2. Поділимо елементи матриці A^{*} на величину визначника

$$A^{-1}=\frac{A^*}{\Delta}. \qquad (2.4)$$

3. Треба довести, що

$$\frac{A^*}{\Delta}\cdot A = A\cdot\frac{A^*}{\Delta}=E,$$

тобто

$$\frac{A^*}{\Delta}=A^{-1}.$$

Доведення.

Розглянемо добуток матриць:

$$A\times\frac{A^*}{\Delta}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\times\frac{1}{\Delta}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Дійсно, згідно з правилом добутку матриць (рядок на стовпець) та властивістю визначника, добуток i-го рядка на j-й стовпець дорівнює значенню визначника при $i=j$, а при $i\neq j$ цей добуток дорівнює нулю. Таким чином, одержуємо одиничну матрицю.

Приклад 2.3. Знайти матрицю, обернену до матриці A:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} -1 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=17.$$

Знаходимо всі алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

Таким чином:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність одержаного результату:

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Розв’язання системи рівняньза допомогою оберненої матриці

У загальному випадку систему n лінійних рівнянь з n невідомими записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (2.5)$$

Розв’язком системи лінійних рівнянь називається сукупність чисел $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \ldots, \tilde{o}_n$, яка є розв’язком кожного з рівнянь системи. Наведена форма запису називається **канонічною**. Крім того, існує **матрична** форма запису:

$$AX = B,$$

де $A = \left(a_{ij}\right)$ – матриця системи рівнянь вимірності $n \times n$;

$X = \left(x_j\right)$ – матриця-стовпець вимірності $n \times 1$;

$B = \left(b_i\right)$ – матриця-стовпець вимірності $n \times 1$.

Якщо помножити обидві частини рівності праворуч на A^{-1}, одержимо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

За визначенням оберненої матриці $A^{-1}A = E$, а $EX = X$, тобто $X = A^{-1}B$.

Приклад 2.4. Розв’язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Знайдемо матрицю, обернену до матриці A.

1. Складемо матрицю з алгебричних доповнень

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Транспонуємо матрицю

$$A^{*} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Поділимо матрицю A на величину визначника

$$A^{-1} = A^{*} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Перевіримо правильність обчислень

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обернена матриця знайдена правильно.

5. Визначаємо розв'язок системи

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 2.$$

2.5. Ранг матриці

Розглянемо матрицю $\underset{[m\times n]}{A}=\left(a_{ij}\right)$. Мінором k-го порядку матриці A називають визначник матриці, усі елементи якого знаходяться на перетині вибраних k рядків і k стовпців матриці A, і позначається M_k. Порядок мінору матриці не може бути більшим, ніж найменше з чисел *m, n,* тобто $k\le\min(m,n)$.

Ранг матриці A – це число r, яке дорівнює найвищому порядку відмінного від нуля її мінора: $0\le r\le\min(m,n)$.

Приклад 2.5. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо мінор 3-го порядку

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 12 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Але маємо мінор другого порядку, який відмінний від нуля:

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=8.$$

Таким чином, ранг матриці дорівнює 2.

Матриці, що мають рівні ранги, називаються **еквівалентними** і з'єднуються знаком "~".

При обчисленні рангу матриці важливе значення мають елементерні перетворювання матриць:

а) множення всіх елементів рядка (стовпця) на одне і те ж число, відмінне від нуля;

б) додавання до елементів рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж саме число;

в) переміщення місцями рядків (стовпців) у матриці;

г) викреслення рядків (стовпців) матриці, всі елементи яких дорівнюють нулю.

Теорема 1. При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Теорема 2. Якщо деякий мінор r-го порядку матриці A не дорівнює нулю, а усі мінори $(r+1)$-го порядку, що заключають його як мінор, дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює r.

Теорема 3. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

Теореми наводимо без доведення. Розглянемо на прикладі обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.

Приклад 2.6. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Помножимо перший рядок матриці на (–2) і додамо до другого. Далі помножимо перший рядок на (–5) і додамо до третього, отже:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 22 & -18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

Другий і третій рядки – пропорційні і один з них можна відкинути, одержимо:

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}=22\neq 0,$$

тобто ранг матриці дорівнює 2.

Запитання для самодіагностики

1. Що називають матрицею?
2. Чим визначається розмір матриці?
3. Які види матриць вам відомі?
4. Яка матриця називається:
а) особливою; б) неособливою?
5. Яка матриця називається транспонованою?
6. Які матриці називаються рівними?
7. Які матриці можна додавати?
8. Як помножити матрицю на число?
9. Які матриці можна перемножувати? За яким правилом перемножують матриці?
10. Яка матриця називається оберненою до даної матриці? Чи для будь-якої вона існує?
11. Які перетворення матриці називаються елементарними?
12. Як знайти обернену матрицю?
13. Що називається рангом матриці?
14. Що розуміють під елементарними перетвореннями?
15. Які методи знаходження рангу вам відомі?

Приклади і вправи

Приклади:

2.7. Виконати дії

$$2\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$2\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -7 \\ -7 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

2.8. Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.9. Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1+1\cdot 2-4\cdot 3 \\ 4\cdot 1+0\cdot 2-2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2.10. Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 0 & 3\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0 & 2\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.11. Знайти $2(A+B)(2B-A)$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Позначимо $C=2(A+B)(2B-A)$. Послідовно знайдемо матриці.

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2B-A=2\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)\cdot(2B-A)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -4-3-15 & -3+6+12 & -3+12+3 \\ -4-1+25 & -3+2-20 & -3+4-5 \\ -4+2+20 & -3-4-16 & -3-8-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -22 & 15 & 12 \\ 20 & -21 & -4 \\ 18 & -23 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$C=2\cdot\begin{pmatrix} -22 & 15 & 12 \\ 20 & -21 & -4 \\ 18 & -23 & -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -44 & 30 & 24 \\ 40 & -42 & -8 \\ 36 & -46 & -30 \end{pmatrix}.$$

2.12. Знайти обернену матрицю:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Знайдемо визначник $\Delta = |A|$ і алгебричні доповнення елементів даної матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 10 = 31, \quad A_{11} = 7, \; A_{12} = -5, \; A_{21} = 2, \; A_{22} = 3.$$

A^{-1} знайдемо за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Отже, $A^{-1} = \dfrac{1}{31}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{31} & \dfrac{2}{31} \\ \dfrac{-5}{31} & \dfrac{3}{31} \end{pmatrix}$.

Перевіримо, що $A^{-1} \cdot A = E$.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{7}{31} & \dfrac{2}{31} \\ \dfrac{-5}{31} & \dfrac{3}{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{21}{31} + \dfrac{10}{31} & \dfrac{-14}{31} + \dfrac{14}{31} \\ \dfrac{-15}{21} + \dfrac{15}{31} & \dfrac{10}{31} + \dfrac{21}{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.13. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Визначник матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 4 - 3 - 40 = -24 \neq 0.$$

Алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5.$$

За формулою визначення оберненої матриці:

$$A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 15 & -18 & -3 \\ -10 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.14. Розв’язати матричне рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.
Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тоді задане рівняння набуває вигляду $X \cdot A = B.$ Помножимо справа обидві частини рівності на A^{-1}:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \text{ або } X = BA^{-1}.$$

Знаходимо

$$\Delta = |A|,\ A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-10 & -2+6 \\ 12+20 & -6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 32 & -18 \end{pmatrix}.$$

2.15. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тоді задане рівняння запишеться так:

$$A \cdot X = B.$$

Помножимо зліва обидві частини цього рівняння на A^{-1}, звідки $X = A^{-1} \cdot B.$ Для матриці A обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -4 & -7 & 5 \\ -5 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи правило множення матриць, одержуємо шукану матрицю X:

$$X=\begin{pmatrix}-2&-4&3\\-4&-7&5\\-5&-8&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&1&2\\0&3&4\\-1&2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&-8&1\\-25&-15&-1\\-31&-17&0\end{pmatrix}.$$

2.16. Розв’язати методом оберненої матриці систему рівнянь

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1,\\x_1-\ \ x_2+\ 2x_3=-5,\\4x_1+\ x_2+\ 4x_3=-2.\end{cases}$$

Розв'язання.

Матриця системи рівнянь є

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\4&1&4\end{pmatrix}.$$

Знайдемо її визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\4&1&4\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Знаходимо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&-3&3\\4&0&-1\\5&3&-2\end{pmatrix}.$$

Нарешті, за формулою $X=A^{-1}B$ знаходимо:

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & -3 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -5\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6 & +15 & -6\\ 4 & +0 & +2\\ 5 & -15 & +4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ 6\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

2.17. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання.

Шляхом послідовних елементарних перетворень заданої матриці приведемо її до одного з спеціальних виглядів

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 7 & -5 & -1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

У цих перетвореннях: перший рядок помножимо на (-2) і додамо до другого, також перший рядок помножимо на (-1) і додамо до третього, одержимо еквівалентну матрицю. Другий її рядок додамо до третього і одержимо матрицю, у якій є два ненульові рядки. Отже, ранг матриці дорівнює $r=2$.

2.18. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}14 & 12 & 6 & 8 & 2\\ 7 & 104 & 21 & 9 & 17\\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1\\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5\end{pmatrix}$$

шляхом її елементарних перетворень.

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix}14 & 12 & 6 & 8 & 2\\ 7 & 104 & 21 & 9 & 17\\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1\\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}:2\\ \\ \\ :5\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7 & 6 & 3 & 1\\ 7 & 104 & 21 & 17\\ 7 & 6 & 3 & 1\\ 7 & 6 & 3 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7 & 6 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 98 & 18 & 5 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, ранг $r=2$.

2.19. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32\\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Перші три рядки запишемо без зміни. До четвертого додамо перший, помножений на (-1), до п'ятого рядка додамо перший, помножений на (-4).

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32\\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6\\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28\\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&3&9&18\\0&0&6&18&36\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці A $r=3$.

Вправи:

Знайти добуток матриць:

2.20. $\begin{pmatrix}2&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\3&4\end{pmatrix}$.

2.21. $\begin{pmatrix}5&4\\2&5\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\3&4\end{pmatrix}$.

2.22. $\begin{pmatrix}0&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$.

2.23. $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$.

2.24. $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$.

2.25. $\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

2.26. $\begin{pmatrix}1&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&-1&3\\2&6&0\end{pmatrix}$.

2.27. $\begin{pmatrix}a&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$.

2.28. $\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-1&1\\1&2&2\end{pmatrix}$.

2.29. $\begin{pmatrix}a&-a&a\\1&1&1\\-a&a&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a&1&a\\a&1&-a\\-a&1&a\end{pmatrix}$.

2.30. Знайти матрицю $C=AB-BA$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

2.31. Знайти матрицю $C = AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.32. Знайти матрицю $C = A^2 - (A+B)(A-3B)$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю до матриці A:

2.33. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.34. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.35. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.36. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.37. $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти обернену матрицю до матриці A елементарними перетвореннями:

2.38. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.39. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричні рівняння:

2.40. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.41. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язати методом оберненої матриці системи рівнянь:

2.42. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$.

2.43. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$.

2.44. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$.

2.45. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$.

Знайти за допомогою елементарних перетворень ранги матриць:

2.46. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

2.47. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.48. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.49. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

2.50. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.51. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.52. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

2.53. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Глава 3
Дослідження та розв'язок систем m лінійних рівнянь з n невідомими

3.1. Дослідження систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера – Капеллі

У главах 1, 2 було розглянуто системи рівнянь, у яких число рівнянь системи співпадало з числом невідомих цієї системи. При цьому системи рівнянь мали єдиний розв'язок. Нагадаємо, що основною умовою для існування розв'язку систем за правилом Крамера та за допомогою оберненої матриці була умова нерівності нулю визначника системи. Отже, ранг матриці таких систем дорівнював числу невідомих системи. У той же час на практиці приходиться досліджувати системи рівнянь більш загального вигляду, у яких число рівнянь системи не співпадає з числом невідомих, а розглянуті вище системи є тільки окремим випадком цих систем.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{3.1}$$

де

$$A = \left(a_{ij}\right) \qquad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right) \text{ – матриця системи,}$$

$$X = \left(x_j\right) \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \quad B = \left(b_i\right) \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \text{ –}$$

матриці-стовпці невідомих та вільних членів відповідно. Матрицю A, доповнену вільним стовбцем B, будемо називати розширеною матрицею системи. Набір чисел x_j є розв’язок системи, якщо при підстановці його у систему будемо одержувати тотожності.

Система рівнянь, що має розв’язок, називається сумісною, у протилежному випадку система несумісна. Якщо система має тільки один розв’язок, вона – означена, а якщо система має безліч розв’язків, то неозначена. Дослідити систему – це розв'язати питання про її сумісність та означеність.

Для дослідження системи використовується теорема Кронекера – Капеллі.

Теорема. Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, якщо ранг матриці системи r_A дорівнює рангу розширеної матриці системи $r_{A\vdots B}$.

При цьому, якщо

$r_A = r_{A\vdots B} = n -$ система має тільки один розв'язок;

$r_A = r_{A\vdots B} < n -$ система має безліч розв'язків;

$r_A \neq r_{A\vdots B} -$ система несумісна.

Отже, для відповіді на запитання відносно сумісності системи необхідно обчислити ранги матриць:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \; A\vdots B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & . & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & . & b_m \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

3.2. Загальний та частинні розв'язки системи. Базисні та опорні розв'язки

Особливо важливим випадком при дослідженні системи є випадок, коли $r = r_A = r_{A\vdots B} < n$, тобто система має безліч розв'язків.

Нехай коефіцієнти матриці при перших *r* невідомих утворюють відмінний від нуля визначник, тобто ранг матриці системи дорівнює $r_A = r$ Для розв'язання системи невідомі $x_j \left(j = \overline{1, r} \right)$ залишаємо ліворуч, а невідомі $x_j \left(j = \overline{r+1, n} \right)$ перенесемо праворуч.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots\cdots\cdots \; \cdots = \cdots\cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots\cdots\cdots \; \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - a_{rr+2}x_{r+2} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}. \qquad (3.3)$$

Невідомі $x_j\left(j=\overline{1,r}\right)$ будемо називати **базисними**, інші невідомі – **вільними**. Базисні невідомі будь-яким відомим методом знайдемо через вільні. Тоді

$$\begin{cases} x_1 = & f_1\left(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\right) \\ x_2 = & f_2\left(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = & f_r\left(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\right) \end{cases}. \tag{3.4}$$

Треба відзначити, якщо ранг матриці системи $r_A = r = n$, то $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ у формулі (3.4) – це єдиний розв'язок системи.

У випадку, якщо $r_A = r < n$, одержані формули називають **загальним розв’язком** системи. Із загального розв'язку системи можна знайти частинні розв'язки, надаючи вільним невідомим довільні значення.

Частинні розв’язки при нульових значеннях вільних невідомих – це **базисні** розв’язки. Якщо в базисних розв’язках усі змінні набувають невід’ємних значень, то такі частинні розв’язки називають **опорними.**

3.3. Дослідження та розв'язання системи лінійних рівнянь методами Гаусса та Жордана – Гаусса

Серед відомих методів розв’язання систем лінійних рівнянь слід відзначити метод виключення Гаусса та його модифікацію, зокрема метод Жордана – Гаусса повного виключення невідомих.

Суть методу Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворювань (перестановка рівнянь, множення рівняння на число, що $\neq 0$, додавання рівнянь системи) від початкової системи переходимо до системи з трикутною або трапецієподібною матрицею.

Запишемо розширену матрицю системи:

$$A \vdots B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & . & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & . & b_m \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Нехай у системі рівнянь $a_{11} \neq 0$. Поділимо перший рядок матриці на a_{11}. Далі домножимо перший рядок послідовно на $-a_{i1}\left(i=\overline{2,n}\right)$ та додамо до усіх відповідних рядків. Одержимо матрицю, еквівалентну початковій:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)}a_{1n}{}' & . \; b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)}a_{22}{}' & \cdots & a_{2n}^{(1)}a_{2n}{}' & \cdot \; b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)}a_{m2}{}' & \cdots & a_{mn}^{(1)}a_{mn}{}' & \cdot \; b_m^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь при цьому буде мати вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots +. \; a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases}. \tag{3.6}$$

За допомогою аналогічних операцій зведемо матрицю системи до трикутного (ранг матриці $r_A = r_{A\vdots B} = n$):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + a_{13}^{(n)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(n)}x_n = b_1^{(n)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(n)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(n)}x_n = b_2^{(n)} \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{3.7}$$

або трапецієподібного вигляду (ранг матриці $r_A = r_{A\vdots B} < n$):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)}x_2 + a_{13}^{(r)}x_3 + \cdots + a_{1r}^{(r)}x_r + a_{1r+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}^{(r)}x_n = b_1^{(r)} \\ \qquad x_2 + a_{21}^{(r)}x_3 + \cdots + a_{2r}^{(r)}x_r + a_{2r+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}^{(r)}x_n = b_2^{(r)}. \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad x_r + a_{rr+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)} \end{cases} \tag{3.8}$$

Операція зведення матриці системи до трикутного, або трапецієподібного вигляду, називається прямим ходом метода Гаусса. Знаходження невідомих з одержаної системи (3.8) називають оберненим ходом методу Гаусса. Розглянемо детальніше метод Гаусса на прикладі.

Приклад 3.1. Провести дослідження та знайти розв’язок у випадку сумісності системи рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Запишемо розширену матрицю системи та приведемо її до трикутного або трапецієподібного вигляду:

$$A\vdots B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & | & 7 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & | & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -4 & | & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $r_A = r_{A\vdots B} = 2$. Система рівнянь сумісна та має безліч розв’язків. У цьому випадку розв’язати систему – це знайти її **загальний розв’язок.** Унаслідок перетворень одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + x_3 + 0.5x_4 = 5 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

Нехай базисними невідомими будуть x_1, x_2. Невідомі x_3, x_4 – вільні. Знайдемо x_2 з другого рівняння:

$$x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4.$$

Підставляючи x_2 у перше рівняння системи, визначимо

$$x_1 = 5 - x_3 - 0.5x_4 - 0.5\left(3 - 3x_3 - 2x_4\right) = 3.5 + 0.5x_3 + 0.5x_4 .$$

Таким чином, загальний розв'язок системи буде

$$\begin{cases} x_1 = 3.5 + 0.5x_3 + 0.5x_4 \\ x_2 = \;\;3 \;- 3x_3 \;\;- 2x_4 \end{cases}.$$

Якщо вільні невідомі припустити рівними нулю $\left(x_3 = x_4 = 0\right)$, знайдемо $x_1 = 3.5; x_2 = 3$, тобто $X = \left(3.5; 3; 0; 0\right) -$ базисний розв'язок. Цей базисний розв'язок буде опорним, тому що всі змінні в ньому невід'ємні.

Необхідно зауважити, що елементарні перетворення системи зручно проводити у таблиці (схема Гаусса) з контролюванням обчислень. Введемо у перетворення ще один стовпець з контрольними сумами. Елементами стовпця є суми елементів відповідних рядків. Над контрольними сумами в кожному рядку виконуються ті самі операції, що над усіма іншими елементами цього рядка. При відсутності помилок при обчислюванні елементи стовпця (Σ)дорівнюють сумам елементів відповідних перетворених рядків табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Схема Гаусса

№ п/п	x_1 x_2 x_3	Вільні члени	$\sum$	Примітки
I II III	4 3 2 3 2 1 1 1 2	33 23 12	42 29 16	
IV V VI	1 1 2 0 –1 –5 0 –1 –6	12 –13 –15	16 –19 –22	III IV $\cdot\left(-3\right)+II$ IV $\cdot\left(-4\right)+I$
VII VIII IX	1 1 2 0 1 5 0 0 –1	12 13 –2	16 19 –3	IV V$\cdot\left(-1\right)+VI$
X XI XII	1 1 2 0 1 5 0 0 1	12 13 2	16 19 3	VII VII IX$\cdot\left(-1\right)$

Приклад 3.2. Розв’язати систему рівнянь методом Гуасса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

Розв'язання.

Приводимо матрицю системи до трикутного вигляду. Обчислення будемо виконувати в табл. 3.1.

Таким чином, унаслідок перетворень одержали трикутну матрицю системи. Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ \quad x_2 + 5x_3 = 13. \\ \qquad x_3 = 2 \end{cases}$$

Виконуємо обернений хід методу Гаусса. З останнього рівняння визначимо $x_3 = 2$, з другого – $x_2 = 13 - 5x_3 = 3$, з першого – $x_1 = 12 - x_{21} - 2x_3 = 5$.

Відповідь $x_1 = 5; x_2 = 3; x_3 = 2$.

Якщо внаслідок перетворень система рівнянь має трикутну матрицю, то вона має єдиний розв’язок. У випадку трапецієподібної матриці – система сумісна, але неозначена (рівняння виду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ відкинемо). Якщо при виключенні невідомих одержано суперечне рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n \neq 0$, система несумісна. Слід відзначити, що дослідження системи проводиться паралельно з виключенням невідомих.

Як було відзначено вище, при розв’язанні системи рівняння методом Гаусса необхідно виконати обернений хід. Виконання «оберненого ходу» фактично еквівалентно зведенню матриці системи до одиничної. У цьому полягає суть методу повного виключення, або методу **Жордана – Гаусса.**

Елементарними перетворюваннями зведемо матрицю системи (3.2) до одиничної n-го порядку (ранг матриці $r_A = r_{A:B} = n$):

$$\begin{cases} x_1 & & & = b_1^{(n)} \\ & x_2 & & = b_2^{(n)} \\ & & \dots & \\ & & x_n & = b_n^{(n)} \end{cases} \qquad (3.9)$$

або в матриці системи одержимо одиничну матрицю r-го порядку (ранг матриці $r_A = r_{A \vdots B} = r < n$)

$$\begin{cases} x_1 & & & + & a_{1r+1}^{(r)} x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{1n}^{(r)} x_n & = & b_1^{(r)} \\ & x_2 & & + & a_{2r+1}^{(r)} x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{2n}^{(r)} x_n & = & b_2^{(r)} \\ & \dots \dots \dots & & & \dots & & \dots \dots \dots & & \dots & & \dots \ \dots \\ & & x_r & + & a_{rr+1}^{(r)} x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{rn}^{(r)} x_n & = & b_r^{(r)} \end{cases}. \qquad (3.10)$$

Такий вигляд систем дає можливість без додаткових обчислень отримати значення невідомих. В системі (3.9) шукані невідомі дорівнюють вільним членам перетвореної системи. Із системи (3.10) легко знайти загальний розв'язок системи.

Розглянемо систему рівнянь, наведену в прикладі 3.1. Методом Гаусса матрицю системи зведено до трапецієподібного вигляду :

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + x_3 + 0.5x_4 = 5 \\ \qquad x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

Продовжуючи перетворення матриці системи, одержимо у цій матриці одиничну:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 & -0.5 & \vdots & 3.5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \vdots & 3 \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь приведена до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - 0.5x_3 - 0.5x_4 = 3.5 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

Нехай $x_1, x_2 -$ базисні змінні, $x_3, x_4 -$вільні. Тоді загальним розв'язком системи рівнянь є:

$$\begin{cases} x_1 = 3.5 + 0.5x_3 + 0.5x_4 \\ x_2 = \ \ 3 \ - 0.5x_3 - 2x_4 \end{cases}.$$

Якщо вільні змінні $x_3 = x_4 = 0$, одержимо частинний розв'язок системи: $x_1 = 3.5; x_2 = 3; x_3 = 0; x_4 = 0$, який є базисним розв'язком системи.

У прикладі 3.2 система має єдиний розв'язок, тобто матриця системи елементарними перетворюванням зведено до трикутної:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ \qquad x_2 + 5x_3 = 13 \\ \qquad\qquad x_3 = 2 \end{cases}.$$

Продовжуючи перетворення, а саме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, на місці матриці системи утворена одинична матриця і система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = 5 \\ \quad x_2 \qquad = 3 \\ \qquad\quad x_2 = 2 \end{cases}.$$

Таким чином, змінні дорівнюють відповідно вільним членам.

3.4. Використання методу Жордана – Гаусса для знаходження оберненої матриці

Методи Гаусса та Жордана – Гаусса широко використовуються для знаходження оберненої матриці по відношенню до даної. Нехай матриця X – обернена матриця, елементи якої невідомі.

Запишемо матричну рівність

$$A \cdot X = E. \tag{3.11}$$

Домножимо обидві частини рівності (3.11) на A^{-1}. Тоді $A^{-1}AX = A^{-1}E$, тобто $E\,X = A^{-1}E$, або

$$X = A^{-1}E \tag{3.12}$$

Таким чином, визначення оберненої матриці еквівалентно розв’язку системи лінійних рівнянь з матрицею A та n стовбцями вільних членів, які є стовбцями одиничної матриці.

Звідси засіб знаходження оберненої матриці: необхідно до даної матриці A дописати одиничну, а далі елементарними перетворюваннями на місці A одержати одиничну, тоді на місці одиничної буде одержана матриця, обернена даній.

Приклад 3.3. Знайти матрицю, обернену до даної.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Допишемо до матриці A одиничну матрицю та елементарними перетвореннями на місці матриці A одержимо одиничну.

$$A|E = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 5 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислювання можна проводити в таблиці з контролем. Якщо у процесі одержання матриці контроль не виконувався, слід перевірити кінцевий результат добутком: $A^{-1}A = E$.

3.5. Однорідні системи рівнянь. Загальний розв'язок

Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо вільні члени в кожному рівнянні системи дорівнюють нулю:

$$AX = 0, \quad \text{де} \quad A = \left(a_{ij}\right), \left(i = \overline{1, m}\right), \left(j = \overline{1, n}\right), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Система **однорідних** лінійних рівнянь завжди сумісна. Вона має або єдиний розв'язок, або безліч розв'язків. Якщо $\mathrm{r_A} = \mathrm{n}$, то система має єдиний (тривіальний) розв'язок $X = 0$; якщо $r_A < n$, то система, крім тривіального, має безліч розв'язків.

Приклад 3.4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Ранг матриці $\mathrm{r_A} = 2$, тому що маємо мінор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Наведена система еквівалентна системі

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = -x_2 - x_4 \\ 4x_1 + x_3 = -2x_2 + 3x_4 \end{cases}.$$

$$x_1 = \frac{-3x_2 + 2x_4}{6}, \qquad x_3 = \frac{5}{3}x_4,$$

тобто знайшли загальний розв’язок системи, з якого можна отримати безліч нетривіальних частинних розв’язків системи, якщо вільним невідомим x_2, x_4 задавати будь-які значення.

3.6. Лінійна балансова модель (модель Леонтьєва)

Нехай є *n* галузей промисловості, кожна з яких виробляє свою продукцію. Введемо позначення:

x_i – загальний обсяг продукції, що виготовляє *i*-та галузь,

x_{ij} – обсяг продукції i-ї галузі, яку споживає *j*-та галузь,

y_i – обсяг кінцевого попиту продукції *i*-ої галузі,

$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Валовий обсяг продукції i-$ї$ галузі дорівнює сумарному обсягу продукції, яку споживають n галузей, і кінцевій продукції, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.14}$$

Рівняння (3.14) називаються співвідношеннями балансу. Це співвідношення можна записати у вигляді

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.15}$$

де

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} - \tag{3.16}$$

коефіцієнти прямих витрат, які показують витрати продукції *i*-ї галузі на виготовлення одиниці продукції *j*-$ї$ галузі.

Співвідношення балансу (3.15) можна записати в матричному вигляді

$$X = AX + Y, \tag{3.17}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X – матриця-стовпець валового випуску усіх видів продукції, A – матриця прямих витрат (технологічні коефіцієнти); Y – матриця-стовпець кінцевого попиту.

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такої матриці X валової продукції, яка при відомій матриці A прямих витрат забезпечить задану матрицю Y кінцевої продукції.

Рівняння (3.17) можна переписати у вигляді

$$(E - A)X = Y. \tag{3.18}$$

Якщо $|E - A| \neq 0,$ то маємо розв'язок системи

$$X = (E - A)^{-1} Y = S \cdot Y. \tag{3.19}$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат. Звичайно, виходячи з економічного змісту задачі, $x_i \geq 0, y_i \geq 0$ та $a_{ij} \geq 0$.

Приклад 3.5. Задано матрицю прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ і вектор $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$ кінцевої продукції на плановий період (ум. од.) Знайти планові обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки та чисту продукцію галузей.

Розв'язання.

Знайдемо матрицю $E - A$.

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,1 & 0,5\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9 & -0,5\\ -0,3 & 0,8\end{pmatrix};$$

$$\left(E-A\right)^{T}=\begin{pmatrix}0,9 & -0,3\\ -0,5 & 0,8\end{pmatrix};$$

$$\Delta=\left|E-A\right|=0,9\cdot 0,8-0,3\cdot 0,5=0,57.$$

Тоді матриця S повних витрат

$$S=\left(E-A\right)^{-1}=\frac{1}{0,57}\begin{pmatrix}0,8 & 0,5\\ 0,3 & 0,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,404 & 0,877\\ 0,526 & 1,579\end{pmatrix}.$$

За формулою (3.19) обчислюємо вектор X валової продукції:

$$X=\begin{pmatrix}1,404 & 0,877\\ 0,526 & 1,579\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}400\\ 500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1000\\ 1000\end{pmatrix}.$$

З формули (3.16) видно, що $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$. Отже, за цією формулою можна знайти міжгалузеві поставки x_{ij}:

$$\begin{pmatrix}0,3\cdot 1000 & 0,5\cdot 1000\\ 0,3\cdot 1000 & 0,2\cdot 1000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300 & 500\\ 300 & 200\end{pmatrix}.$$

Чиста продукція є різницею між валовою продукцією галузі і витратами усіх галузей на виробництво цієї галузі.

Одержані результати можна записати в таблицю міжгалузевого балансу(табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Таблиця міжгалузевого балансу

Галузі	I	II	Кінцевий продукт	Валовий продукт
I	300	500	400	1000
II	300	200	500	1000
Чиста продукція	400	300		
Валова продукція	1000	1000		

Запитання для самодіагностики

1. Яка система рівнянь називається лінійною?
2. Запишіть систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими.
3. Що таке матриця системи?
4. Що таке розширена матриця?
5. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.
6. Який розв'язок називається:
   а) загальним;
   б) частинним;
   в) базисним;
   г) опорним?
7. У чому полягає метод Жордана – Гаусса?
8. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?
9. Які особливості розв'язку однорідної системи рівнянь?

Приклади і вправи

Приклади:

3.6. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь*:*

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 = 5 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 = 3 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Метод Гаусса полягає у зведенні системи рівнянь до трикутного вигляду. Перепишемо систему:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3x_3 = 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 = 5 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Виключимо x_1 з другого й третього рівнянь. Для цього перше рівняння помножимо на (-2) і додамо до другого, а потім перше рівняння помножимо на (-3) і додамо до третього. Одержимо систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3x_3 = 3 \\ & -x_2 & +2x_3 = -1 \\ & -7x_2 & +11x_3 = -7 \end{cases}.$$

Виключимо x_2 з третього рівняння. Для цього друге рівняння помножимо на (-7) і додамо до третього. Одержуємо систему трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3x_3 = 3 \\ & x_2 & -2x_3 = 1 \\ & & -3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв’язуємо систему, починаючи з останнього рівняння:

$$x_3 = 0, x_2 = 1 + 2x_3 = 1, x_1 = 3 - 2x_2 + 3x_3 = 1.$$

Розв'язання можна провести інакше, а саме, перетворюючи розширену матрицю системи:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

після чого записуємо систему трикутного вигляду і розв'язуємо її.

3.7. Дослідити і розв’язати систему рівнянь, якщо вона сумісна.

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = -3 \\ x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = 0 \\ -x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 3 \\ 3x_1 & +x_2 & -13x_3 & = -6 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Запишемо розширену матрицю системи та елементарними перетвореннями приведемо її до трикутного вигляду:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -13 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right). \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

З останньої матриці видно, що $r_A=3$, $r_{A\vdots B}=3$. Оскільки $r_A=r_{A\vdots B}=n$, то задана система має єдиний розв'язок. Знайдемо його.

За останньою матрицею запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -3x_3 & =-3 \\ & x_2 & -x_3 & =0 \\ & & x_3 & =1 \end{cases},$$

розв’язуючи яку, знаходимо $x_3=1$, $x_2=x_3=1$, $x_1=2x_2+3x_3-3=2$.

Отже, розв'язок системи $(2;1;1)$.

3.8. Дослідити і розв’язати систему рівнянь, якщо вона сумісна.

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 & =-1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & =1 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Запишемо матрицю системи $A\vdots B$ і перетворимо за допомогою елементарних перетворень:

$$A\vdots B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&2&-3&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&0&-4&-4\\0&-1&-4&-5\\0&1&-4&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-4&-2\\0&-1&-4&-5\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-4&-2\\0&0&-8&-7\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-4&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{array}\right).$$

Отже, $r_A=3$, $r_{A\vdots B}=4$. Оскільки $r_A\neq r_{A\vdots B}$, то дана система рівнянь несумісна. Розв’язків не має.

3.9. Дослідити і розв’язати систему рівнянь, якщо вона сумісна.

$$\begin{cases}3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & =1\\2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -3x_4 & =2.\\5x_1 & +3x_2 & +x_3 & -2x_4 & =3\end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо розширену матрицю системи B і перетворимо її:

$$A\vdots B=\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&-1&1&1\\2&1&2&-3&2\\5&3&1&-2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&4&-1\\2&1&2&-3&2\\5&3&1&-2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&4&-1\\0&-1&8&-11&4\\0&-2&16&-22&8\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&4&-1\\0&1&-8&11&-4\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Отже, $r_A=r_{A\vdots B}$ – система сумісна, а оскільки $r_A=r_{A\vdots B}<n$, то вона має нескінчену множину розв'язків.

Останній матриці, яка еквівалентна матриці $A\vdots B$, відповідає система рівнянь

$$\begin{cases}x_1 & +x_2 & -3x_3 & +4x_4 & =-1\\ & x_2 & -8x_3 & +11x_4 & =-4\end{cases}.$$

Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & =3x_3 & -4x_4 & -1 \\ & x_2 & =8x_3 & -11x_4 & -4 \end{cases}.$$

Виразимо через x_3 і x_4 змінні x_1 та x_2:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3 + 7x_4 + 3 \\ x_2 = 8x_3 - 11x_4 - 4 \end{cases}.$$

Одержаний розв'язок називається загальним розв'язком системи рівнянь.

3.10. Розв'язати однорідну систему рівнянь.

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =0 \\ 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & =0. \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & =0 \end{cases}$$

Розв'язання.

Однорідна система завжди сумісна. Вона має єдиний розв'язок, $x_1 = 0,\ x_2 = 0, ..., x_n = 0,$ якщо ранг матриці A дорівнює числу невідомих n, тобто $r_A = n$, і має нескінчену множину розв'язків, якщо ранг матриці A менший за число невідомих, тобто $r_A < n$. Проведемо перетворення:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 13 & 8 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r_A = 3 = n$, система має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3.11. Розв'язати однорідну систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & =0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & =0. \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & =0 \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо r_A.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 0 & -5 & -1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, $r_A = 2 < n$ і система має нескінчену множину розв'язків.

За останньою матрицею запишемо систему

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ -5x_2 - x_3 = 0\end{cases}.$$

Нехай, x_1 і x_3 – основні змінні, а змінна x_2 – довільна. Виразимо основні змінні через довільну:

$$\begin{cases}x_1 + x_3 = -x_2\\ x_3 = -5x_2\end{cases};\begin{cases}x_1 + x_3 = -x_2\\ x_3 = -5x_2\end{cases},$$

звідси $x_3 = -5x_2$, $x_1 = 4x_2$. Це загальний розв'язок системи рівнянь.

3.12. Розв'язати однорідну систему рівнянь.

$$\begin{cases}2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0\end{cases}.$$

Розв'язання.

Запишемо матрицю системи A і знайдемо її ранг.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2 & -1\\ 7 & 5 & 4 & 1\\ 8 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & -4 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2 & -1\\ 7 & 5 & 4 & 1\\ 8 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & -4 & 1 & -2\\ 0 & 11 & -1 & 5\\ 0 & 33 & -3 & 15\\ 0 & 33 & -3 & 15\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & -4 & 1 & -2\\ 0 & 11 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Отже, $r_A = 2 < n \quad (n = 4)$. Система має нескінчену множину розв'язків.

За останньою матрицею запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 & -4x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 0 \\ & 11x_2 & -x_3 & +5x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Нехай, x_1 і x_3 основні невідомі, а x_2 і x_4 – довільні. Треба виразити основні невідомі через довільні.

$$\begin{cases} x_1 & +x_3 & = & 2x_2 & +2x_4 \\ & x_3 & = & 11x_2 & +5x_4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 - 3x_4 \\ x_3 = 11x_2 + 5x_4 \end{cases}.$$

Одержано загальний розв'язок системи.

3.13. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = 3. \\ 3x_1 & -4x_2 & -x_3 & = 5 \end{cases}$$

Розв'язання.

Метод Жордана – Гаусса базується на перетворенні розширеної матриці системи таким чином, що на місці матриці A утворюється одинична матриця. Це дозволяє без додаткових перетворень одержати розв'язок системи.

Запишемо розширену матрицю заданої системи:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

За допомогою елементарних перетворень одержимо на місці матриці системи три одиничних стовпця:

$$A\vdots B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&6\\2&5&3&3\\3&-4&-1&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&6\\0&-1&-5&-9\\0&-13&-13&-13\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&6\\0&1&5&9\\0&1&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-11&-21\\0&1&5&9\\0&0&-4&-8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right).$$

Із останньої системи маємо розв’язок: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

3.14. Розв’язати системуру рівнянь методом Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3+x_4=10\\2x_1-x_3-x_4=7\\2x_1-x_2-4x_3-3x_4=4\\x_2+3x_3+2x_4=3\end{cases}.$$

Розв'язання.

Для зручності усі елементарні перетворення будемо проводити в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Схема Гаусса

№ рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	b_j	$\sum$	Примітки	№ ітерації
1	2	[1]	2	1	10	16	Рядок, що веде	Початкова система
2	2	0	-1	-1	7	7		
3	2	-1	-4	-3	4	-2		
4	0	1	3	2	3	9		
5	2	1	2	1	10	16	[1]	I
6	2	0	-1	-1	7	7	[2]	
7	4	0	-2	-2	14	14	[1] + [3]	
8	-2	0	[1]	1	-7	-7	[4] – [1]	
9	6	1	0	-1	24	30	[12] · [–2] + [5]	II
10	0	0	0	0	0	0	[12] + [6]	
11	0	0	0	0	0	0	[12] · [2] + [7]	
12	-2	0	1	1	-7	-7	[8]	
13	6	1	0	-1	24	30	[9]	III
14	-2	0	1	1	-7	-7	[12]	

У процесі обчислень слід відзначити, що після другої ітерації друге і третє рівняння обернулися в тотожні рівності. За двома останніми рядками запишемо систему:

$$\begin{cases} 6x_1 & +x_2 & & -x_4 & =24 \\ -2x_1 & & +x_3 & +x_4 & =-7 \end{cases}.$$

Отримана система має нескінченну множину розв’язків. Знайдемо її загальний розв'язок. Нехай x_2 і x_3 – основні невідомі, а x_1 і x_4 – довільні. Виразимо x_2 і x_3 через x_1 і x_4.

$$\begin{cases} x_2 = 24 - 6x_1 + x_4 \\ x_3 = -7 + 2x_1 - x_4 \end{cases}.$$

Це є загальний розв'язок системи, одержаний методом Жордана – Гауса.

Щоб одержати частинні розв'язки, треба довільним змінним задавати будь-які значення. Серед частинних розв'язків виділяють базисні розв'язки системи. Це ті частинні розв'язки, коли довільні змінні приймають нульові значення.

Так, якщо $x_1 = 0$ і $x_4 = 0$, то $x_2 = 24$, $x_3 = -7$. Це є один з базисних розв’язків, де за базисні невідомі взято x_2 і x_3. Базисними можуть бути такі пари невідомих:

$$x_1x_2;\ x_1x_3;\ x_1x_4;\ x_2x_4;\ x_3x_4,$$

якщо визначник при цих змінних $\Delta \neq 0$.

Проте, відмітимо, що всі базисні розв'язки можна одержати з загального розв'язку, якщо давати нульові значення тим невідомим, які вважаються довільними.

Вправи:

Розв’язати методом Гаусса системи рівнянь:

3.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18 \end{cases}.$ **3.16.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}.$

3.17. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}.$ **3.18.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$

*Дослідити на сумісність і розв'язати системи рівнянь, якщо вони сумісн*і:

3.19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$ **3.20** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}.$

3.21. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}.$ **3.22.** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -2 \end{cases}.$

3.23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ **3.24.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}.$

3.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$ **3.26.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}.$

3.27. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}.$ **3.28.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -4x_1 + 2x_2 = -2 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}.$

Розв'язати систему однорідних рівнянь:

3.29. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$. **3.30.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

3.31. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. **3.32.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$.

3.33. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$. **3.34.** $\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

3.35. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$. **3.36.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

3.37. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$. **3.38.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$.

3.39. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$.

3.40. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$.

Глава 4
Лінійні n-вимірні вектори.
Власні числа та власні вектори матриці

4.1. Лінійні n-вимірні вектори та дії над ними

Упорядкована система *n* чисел є *n*-вимірний вектор: $\vec{a} = a_1, a_2, \ldots, a_n$; числа $a_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ – координати *вектора*. Два вектори однієї вимірності називаються рівними, якщо рівні їх відповідні координати:

$$\vec{a} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right);$$

$$\vec{b} = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\right);$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \text{, якщо } a_i = \beta_i \left(1 = \overline{1, n}\right).$$

Вектор, усі координати якого дорівнюють нулю, називається нульовим вектором: $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Два вектори однієї вимірності можна додавати

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n\right).$$

Одиничним n-вимірним вектором називається вектор $\vec{l} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$, одна з координат якого дорівнює одиниці, а всі інші – нулю. У тримірному просторі одиничними будуть вектори:

$$\vec{l}_1\left(1, 0, 0\right); \ \vec{l}_2\left(0, 1, 0\right); \ \vec{l}_3\left(0, 0, 1\right).$$

Операції додавання векторів та добутку вектора на число мають такі властивості:

1. $(c_1+c_2)\vec{a}=c_1\vec{a}+c_2\vec{a}.$

2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},\quad c\vec{a}=\vec{a}c.$

3. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$

4. $c_1c_2\vec{a}=c_1(c_2\vec{a})=(c_1c_2)\vec{a}.$

5. $(c_1+c_2)\vec{a}=c_1\vec{a}+c_2\vec{a}.$

6. $c(\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$,

де $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – n-вимірні вектори, c_1,c_2 – числа.

Множина R^n – n -вимірних векторів, у якій визначені додаток векторів, добуток на число і виконуються умови 1 – 5, називається **лінійним *n*-вимірним** векторним простором.

4.2. Лінійна залежність векторів

Лінійною комбінацією m векторів називається вектор

$$\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\ldots+k_m\vec{a}_m, \tag{4.1}$$

де $k_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ – числові коефіцієнти.

Введемо поняття лінійної залежності та лінійної незалежності системи векторів.

Означення. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_m$ називаються лінійно залежними, якщо один з них є лінійною комбінацією решти векторів. В іншому випадку, якщо в системі векторів немає такого, який є лінійною комбінацією інших, то така система векторів називається лінійно незалежною.

Означення лінійної залежності та незалежності векторів, що дано вище, є наслідком такого означення: система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_m$ називається лінійно незалежною, якщо їх лінійна комбінація $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2\ldots+k_m\vec{a}_m$ дорівнює нульовому вектору тільки в тому випадку, коли усі числові коефіцієнти $k_i=0\left(i=\overline{1,m}\right)$. Якщо $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2\ldots+k_m\vec{a}_m=\vec{0}$, а при цьому хоча б один з коефіцієнтів $k_s\neq0$, вектори називаються лінійно залежними.

Для того щоб розв’язати питання про лінійну залежність або незалежність векторів, необхідно:

1. Скласти векторну рівність:

$$k_1\vec{a}_2+k_2\vec{a}_2+\ldots+k_m\vec{a}_m=\vec{0}. \qquad (4.2)$$

2. Записати цю рівність у координатах:

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix}+\ldots+k_m\begin{pmatrix}a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (4.3)$$

або

$$\begin{cases}a_{11}k_1+\ldots+a_{1m}k_m=0\\ a_{21}k_1+\ldots+a_{2m}k_m=0\\ \ldots\\ a_{n1}k_1+\ldots+a_{nm}k_m=0\end{cases}. \qquad (4.4)$$

3. Дослідити систему рівнянь. При цьому якщо система має тільки нульовий розв’язок, тобто $k_i=0\left(i=\overline{1,m}\right)$, то вектори лінійно незалежні. Якщо система рівнянь має не тільки нульовий розв’язок, то вектори – лінійно залежні.

Приклад 4.1. Розв’язати питання про лінійну залежність векторів:

$$\vec{a}_1(1,2,3);\ \vec{a}_2(4,5,6);\ \vec{a}_3(7,8,9).$$

Розв'язання.

1. Складаємо векторну рівність

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+k_3\vec{a}_3=\vec{0}.$$

2. Запишемо рівність у координатах

$$k_1\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} k_1 + 4k_2 + 7k_3 = 0 \\ 2k_1 + 5k_2 + 8k_3 = 0 \\ 3k_1 + 6k_2 + 9k_4 = 0 \end{cases}.$$

3. Проведемо дослідження системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці системи $r_A = 2 < 3$ менше числа векторів. Отже, система векторів залежна. Дійсно, дана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_3 \\ k_2 = -2k_3 \end{cases}.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у векторну рівність, здобудемо:

$$k_3\vec{a}_1 - 2k_3\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Поділимо цю рівність на $k_3 \neq 0$:

$$\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

або

$$\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3$$

$(\vec{a}_1 -$ лінійна комбінація $\vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

4.3. Базис *n*-вимірного простору. Розкладання вектора по базису

Означення. Система *n* лінійно незалежних *n*-вимірних векторів називається базисом *n*-вимірного простору. Вектори $\vec{l}_1(1, 0, \ldots, 0)$; $\vec{l}_2(0, 1, \ldots, 0), \ldots,$ $\vec{l}_n(0, 0, \ldots, 1)$ утворюють одиничний базис (перевірити!).

Теорема. Будь-який *n*-вимірний вектор єдиним способом можна зобразити як лінійну комбінацію *n* лінійно незалежних векторів (базису).

$$\vec{X} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n. \qquad (4.5)$$

Тут вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ утворюють базис, а числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – координати вектора $\vec{X}$ у цьому базисі.

Дійсно, якщо для даної векторної рівності (4.5) записати алгебраїчну систему лінійних рівнянь, то ця система буде мати єдиний розв'язок. Визначник, що складений з координат векторів $\vec{a}_i \left(i = \overline{1, n}\right)$, буде відрізнятись від нуля, тому що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ утворюють базис. Розв'язати цю систему можна одним з відомих методів

Приклад 4.2. Розкласти вектор $\vec{X}(9, 5, 16)$ по трьох векторах $\vec{a}_1(2, 1, 3)$; $\vec{a}_2(1, 0, 2)$; $\vec{a}_3(1, 2, 3)$, які утворюють базис.

Розв'язання

1. Складаємо векторну рівність

$$\vec{X} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3.$$

2. Запишемо еквівалентну систему рівнянь

$$\begin{cases} 9 = 2k_1 + k_2 + k_3 \\ 5 = k_1 + 2k_3 \\ 10 = 9k_1 + 2k_2 + 3k_3 \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи буде: $k_1 = 3$; $k_2 = 2$; $k_3 = 1$. Отже, $\vec{X} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_3 + \vec{a}_3$, тобто $\vec{X} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

4.4. Застосування векторів до розв'язання систем лінійних рівнянь

Будь-яку систему лінійних рівнянь можна записати як векторну рівність

$$x_1\vec{P}_1 + x_2\vec{P}_2 + \ldots + x_n\vec{P}_n = \vec{P}_0, \qquad (4.6)$$

якщо позначити:

$$\vec{P}_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\right) \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$\vec{P}_0 = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right).$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь легко знайти, якщо система приведена до одиничного базису, тобто матриця системи містить у собі одиничну матрицю, коефіцієнти якої є координати векторів, що утворюють одиничний базис.

У лінійному програмуванні важливе місце займають системи, що мають незлічену множину розв'язків. Серед усіх частинних розв'язків важливо знайти всі базисні розв'язки. Розглянемо це питання на прикладі.

Приклад 4.3. Визначити всі базисні розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Введемо позначення:

$\vec{P}_1 = (1; 4)$; $\vec{P}_2 = (2; 1)$; $\vec{P}_3 = (3; -2)$; $\vec{P}_4 = (3; -2)$; $\vec{P}_0 = (5; 6)$.

Для визначення базисних розв'язків треба привести систему рівнянь до одиничного базису. Введемо до базису будь-які два лінійно незалежні вектори, наприклад $\vec{P}_1, \vec{P}_2$. Перетворення проводимо в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Приведення системи до одиничного базису.

N п/п	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_0$	Контрольні суми	Примітки
I	1	2	-1	3	5	10	головні
II	4	1	3	-2	6	12	рівняння
III	1	2	-1	3	5	10	(1)
IV	0	-7	7	-14	-14	-28	(I) (-4)+II
V	0	1	-1	2	2	4	(IV):(-7)
VI	1	0	1	-1	1	2	(V)(-2)+ IV

Унаслідок елементарних перетворень визначаємо початковий базисний розв'язок. Повна кількість базисних розв'язків: C_4^2 = 6. Тут усі вектори $\vec{P}_j \left(j=\overline{1,4} \right)$ попарно лінійно незалежні. Якщо серед векторів $\vec{P}_j$ є пари лінійно залежних, відповідні їм невідомі не можуть бути базисними. Зверніть увагу на знаходження опорних розв'язків системи (табл. 4.2). Серед усіх базисних розв'язків $\vec{X}_4, X_6$ опорними не будуть. Метод визначення на базі початкового опорного розв'язку всіх інших опорних розв'язків розглянути самостійно.

Таблиця 4.2

Знаходження базисних розв'зків.

Базис $\vec{P}_1$ $\vec{P}_2$ $\vec{P}_3$ $\vec{P}_4$ $\vec{P}_0$ $\sum$	Базисний розв'язок
$\leftarrow \vec{P}_1$ 1 0 1 -1 1 2 $\vec{P}_2$ 0 1 -1 2 2 4	$\vec{X}_1$=(1;2;0;0)
$\rightarrow \vec{P}_3$ 1 0 1 -1 1 2 $\leftarrow \vec{P}_2$ 1 1 0 1 3 6	$\vec{X}_2$ = (0;3;1;0)
$\rightarrow \vec{P}_4$ 1 1 0 1 3 6 $\leftarrow \vec{P}_3$ 2 1 1 0 4 8	$\vec{X}_3$ = (0;0;4;3)
$\rightarrow \vec{P}_1$ 1 1 0 1 3 6 $\leftarrow \vec{P}_3$ 0 -1 1 -2 -2 -4	$\vec{X}_4$ = (4;0;-2;0)
$\rightarrow \vec{P}_4$ 0 0,5 -0,5 1 1 2 $\leftarrow \vec{P}_1$ 1 0,5 0,5 0 2 4	$\vec{X}_5$ =(2;0;0;1)
$\vec{P}_2$ 2 1 1 0 4 8 $\vec{P}_4$ 1 0 -1 1 -1 2	$\vec{X}_6$ =(0;4;0;-1)

4.5. Власні числа та власні вектори матриці

Означення. Вектор $X \neq 0$ називається власним вектором матриці A, якщо знайдеться таке число λ - власне значення матриці A, що $AX = \lambda X$, або в алгебраїчній формі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}.$$

Запишемо цю систему у вигляді

$$-\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}.$$

Ця однорідна система завжди має нульовий розв’язок $X = 0$. Для існування не нульового розв’язку необхідно та достатньо, щоб визначник системи:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) + a_{12} + \ldots + a_{1n} \\ a_{21} + (a_{22} - \lambda) + \ldots + a_{2n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.7)$$

Визначник $|A - \lambda E|$ є многочленом *n*-го степеня відносно λ. Цей многочлен називається характеристичним многочленом матриці *A*.

Приклад 4.4. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Розв’язком цього рівняння є власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Знайдемо власний вектор *X*, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$. Маємо систему рівнянь

$$(A - \lambda_1 E)X = 0 \text{ або } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}.$$

Розв’язком цієї системи є $x_2 = -x_1$. Якщо $x_1 = c$, то вектори $\vec{X}(c, -c)$ при будь якому значенні *с* є власними векторами матриці *А* з власним значенням $\lambda_1 = 1$.

Аналогічно можна довести, що вектори $\vec{X}(c, 3c)$ є власними векторами матриці *А* з власним значенням $\lambda_2 = 5$.

Запитання для самодіагностики

1. Що таке лінійна комбінація векторів?
2. Які вектори називаються лінійно незалежними?
3. Які вектори називаються лінійно залежними?
4. Що таке базис *n*-вимірного простору?
5. Як знайти розклад вектора по базису?
6. Як використовуються вектори при знаходженні базисних розв’язків системи лінійних рівнянь?
7. Яке число називаєтья власним для матриці?
8. Як знайти власні вектори, що відповідають відповідним власним числам?

Приклади і вправи

Приклади:

4.5. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (4;3;2;1)$, $\vec{a}_2 = (1;2;3;4)$, $\vec{a}_3 = (5;6;5;0)$ є лінійно незалежними.

Розв'язання.

Складаємо векторну рівність:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=0,$$

або:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}5\\6\\5\\0\end{pmatrix}=0.$$

Одержуємо систему однорідних рівнянь:

$$\begin{cases}4\lambda_1 & +\lambda_2 & +5\lambda_3 & =0\\ 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & +6\lambda_3 & =0\\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +5\lambda_3 & =0\\ \lambda_1 & +4\lambda_2 & & =0\end{cases}.$$

Знайдемо ранг матриці системи:

$$A=\begin{pmatrix}4&1&5\\3&2&6\\2&3&5\\1&4&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&4&0\\0&-1&1\\0&-10&6\\0&-3&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&4&0\\0&-1&1\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, враховуючи, що $r_A=3=n,$ система має єдиний нульовий розв’язок $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, що означає лінійну незалежність векторів.

4.6. Показати, що вектори $\vec{a}_1=(4;3;2;1)$, $\vec{a}_2=(2;3;4;5)$, $\vec{a}_3=(6;6;6;6)$ лінійно залежні.

Розв'язання.

Складаємо наступну залежність: $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=0$, або

$$\lambda_1\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}6\\6\\6\\6\end{pmatrix}=0,\text{ або }\begin{cases}4\lambda_1 & +\lambda_2 & +6\lambda_3 & =0\\ 3\lambda_1 & +3\lambda_2 & +6\lambda_3 & =0\\ 2\lambda_1 & +4\lambda_2 & +6\lambda_3 & =0\\ \lambda_1 & +5\lambda_2 & +6\lambda_3 & =0\end{cases}.$$

Знайдемо ранг матриці отриманої системи рівнянь.

$$A=\begin{pmatrix}4&2&6\\3&3&6\\2&4&6\\1&5&6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&5&6\\4&2&6\\3&3&6\\2&4&6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&5&6\\0&-18&-18\\0&-12&-12\\0&-6&-6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&5&6\\0&1&1\\ & & \end{pmatrix}.$$

Отже, $r_A=2<n,$ тому система має нескінчену множину розв'язків. За останньою матрицею записуємо новоутворену систему:

$$\begin{cases}\lambda_1 & +5\lambda_2 & +6\lambda_3 & =0\\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & =0\end{cases}, \text{ або отримаємо: } \begin{cases}\lambda_1 & =-\lambda_3\\ \lambda_2 & =-\lambda_3\end{cases}.$$

Наявність цієї комбінації визначає, що вектори є лінійно залежними, таким чином на їх основі є можливим створити будь яку іншу комбінацію. Наприклад: $-\vec{a}_1-\vec{a}_2+\vec{a}_3=0$. Наявність такої комбінації і є умовою лінійної залежності векторів.

4.7. Довести, що вектори $\vec{a}_1=(1;0;3;4)$, $\vec{a}_2=(2;1;0;3)$, $\vec{a}_3=(1;0;4;3)$, $\vec{a}_4=(1;2;3;4)$ утворюють базис.

Розв'язання.

Якщо чотири 4-вимірні вектори утворюють базис, то відповідний визначник, складений з їх координат, не дорівнює нулю (тобто ранг матриці дорівнює кількості векторів).

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&1&0&2\\3&0&4&3\\4&3&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&1&0&2\\0&-6&1&0\\0&-5&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\-6&1&0\\-5&-1&0\end{vmatrix}=2\cdot 11=22\neq 0.$$

Вектори лінійно незалежні і утворюють базис.

4.8. Показати, що вектори $\vec{a}_1=(2;1;3)$, $\vec{a}_2=(1;0;2)$, $\vec{a}_3=(1;2;3)$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{a}=(9;5;16)$ за цим базисом.

Розв'язання.

За означенням три 3-вимірні вектори утворюють базис, якщо визначник, складений з їх координат, не дорівнює нулю. Тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 .$$

Отже, задані вектори утворюють базис і можна розкласти вектор $\vec{a}$ за цим базисом. Для цього запишемо відповідну рівність:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3,$$

або

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}, \text{ або } \quad \begin{cases} 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 = 9 \\ \lambda_1 & & +2\lambda_3 = 5 \\ 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 = 16 \end{cases} .$$

Для зручності розв'яжемо систему за допомогою методу Жордана – Гаусса (табл. 4.3):

Таблиця 4.3

Схема Гаусса

№ стр.	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}$	$\sum$	Примітки
1	2	$\boxed{1}$	1	9	13	Початкова система
2	1	0	2	5	8	
3	3	2	3	16	24	
4	2	1	1	9	13	
5	$\boxed{1}$	0	2	5	8	
6	-1	0	1	-2	-2	[1]*(-2)+[3]
7	0	1	-3	-1	-3	[8]*(-2)+[4]
8	1	0	2	5	8	[5]
9	0	0	$\boxed{3}$	3	6	[8]+[6]
10	0	1	0	2	3	[11]*(3)+[7]
11	1	0	0	3	4	[11]*(-2)+[8]
12	0	0	1	1	2	[9]:(3)

Отже, одержано: $x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1$. Тоді , розклад вектора $\vec{a}$ за векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має вигляд: $\vec{a} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

4.9. Знайти власні числа та власні вектори матриці: $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Складемо характеристичне рівняння: $|A-\lambda E|=0$;

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-4 \end{vmatrix}=(2-\lambda)(-3-\lambda)+4=\lambda^2+\lambda-2$; $\lambda^2+\lambda-2=0,$

звідки: $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$ є власними значеннями матриці A. Знаходимо власні вектори, які відповідають власним значенням, шляхом розв'язання системи рівнянь. Так, власний вектор $X_1(x_1,x_2)$, який відповідає власному значенню $\lambda_1=1$, визначається рівнянням:

$$(A-\lambda_1 E)X_1=0 \text{ або } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0,$$

тобто $\begin{cases} x_1 & +4x_2=0 \\ -x_1 & -4x_2=0 \end{cases}$, тобто $x_1+4x_2=0$. Нехай $x_2=C_1$, тоді власний вектор $X_1(-4C_1,C_1),\ \ C_1\neq 0$, який відповідає власному значенню $\lambda_1=1$. Для власного значення $\lambda_2=-2$ маємо: $(A-\lambda_2 E)X_2=0$ або $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$, тобто $x_1+x_2=0$. Нехай $x_1=C_2$, тоді $x_2=-C_2$, власний вектор власного числа $\lambda_2=-2$ має вигляд $X_2=(C_2-C_1),\ \ C_2\neq 0$.

4.10. Знайти власні числа та власні вектори матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2(1-\lambda)-9(1-\lambda)=0,$$

звідки $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -3$ - власні значення матриці А.

Шукаємо власний вектор $X_1(x_1, x_2, x_3)$, який відповідає числу $\lambda_1 = 1$, тобто:

$$(A-E)X = 0 \text{ або } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

або

$$\begin{cases} \quad 2x_2 \quad -2x_3 = 0 \\ x_1 \quad -x_2 \quad +3x_3 = 0 \\ x_1 \quad +3x_2 \quad -x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

звідки знаходимо: $x_2 = x_3, x_1 = -2x_3$. Нехай $x_3 = C_1$, тоді власний вектор $\vec{X}_1 = (-2C_1; C_1; C_1)$ при $C_1 \neq 0$. Для власного значення $\lambda_2 = 3$ маємо систему:

$$\begin{cases} -2x_1 \quad +2x_2 \quad -2x_3 = 0 \\ x_1 \quad -3x_2 \quad +3x_3 = 0 \\ x_1 \quad +3x_2 \quad -3x_3 = 0 \end{cases},$$

з якої знаходимо: $x_1 = 0, x_2 = x_3$.

Нехай $x_2 = x_3 = C_2$. Тоді власний вектор $\vec{X}_2$, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 3$ має вигляд: $\vec{X}_2 = (0; C_2; C_2), \quad C_2 \neq 0$. Для власного значення $\lambda_3 = -3$ маємо систему:

$$\begin{cases} 4x_1 \quad +2x_2 \quad -2x_3 = 0 \\ x_1 \quad +3x_2 \quad +3x_3 = 0 \\ x_1 \quad +3x_2 \quad +3x_3 = 0 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} 4x_1 \quad +2x_2 \quad -2x_3 = 0 \\ x_1 \quad +3x_2 \quad +3x_3 = 0 \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$, або $x_2 = \frac{-7}{5}x_3,\ x_1 = \frac{6}{5}x_3$.

Нехай $x_2 = 5C_3,\quad C_3 \neq 0,$ тоді власний вектор $\vec{X}_3 = (6C_3; -7C_3; 5C_3),\ C_3 \neq 0$.

Вправи:

4.11. Знайти лінійну комбінацію $\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3$ системи векторів $\vec{a}_1 = (3;-5;2)$, $\vec{a}_2 = (4;5;1)$, $\vec{a}_3 = (-3;0;-4)$.

4.12. Знайти лінійну комбінацію $2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$ системи векторів $\vec{a}_1 = (2;-1;1;0)$, $\vec{a}_2 = (1;-1;2;1)$, $\vec{a}_3 = (-1;-2;0;1)$.

4.13. З'ясувати, чи є вектори лінійно залежними:

а) $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (6;15)$;

б) $\vec{a} = (-1;-3)$; $\vec{c} = (-2;-6)$;

в) $\vec{a} = (2;1;3)$, $\vec{b} = (-1;3;1)$, $\vec{c} = (1;1;-1)$;

г) $\vec{a} = (1;4;6)$, $\vec{b} = (1;-1;1)$, $\vec{c} = (1;1;3)$.

4.14. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (2;-1;3)$, $\vec{a}_2 = (1;4;-1)$, $\vec{a}_3 = (0;-9;5)$ лінійно залежні.

4.15. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (1;2;0)$, $\vec{a}_2 = (3;-1;1)$, $\vec{a}_3 = (0;1;1)$ лінійно незалежні.

4.16. Показати, що вектори $\vec{a} = (2;-3)$ і $\vec{b} = (1;2)$ утворюють базис двовимірного простору і розкласти вектор $\vec{c} = (9;4)$ за цим базисом.

4.17. Показати, що вектори $\vec{a} = (1;2;0)$, $\vec{b} = (3;-1;1)$ і $\vec{c} = (0;1;1)$ утворюють базис.

4.18. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (0;2;4;6)$, $\vec{a}_2 = (-1;0;1;1)$, $\vec{a}_3 = (2;4;-1;3)$ лінійно незалежні.

4.19. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (1;3;2;-4)$, $\vec{a}_2 = (1;2;0;4)$, $\vec{a}_3 = (2;4;0;8)$ лінійно залежні.

4.20. З'ясувати, чи є задані вектори $\vec{a}_1 = (1;2;0;-3)$, $\vec{a}_2 = (2;1;3;4)$, $\vec{a}_3 = (1;0;3;-2)$ лінійно залежними.

4.21. З'ясувати, чи є задані вектори $\vec{a}_1=(1;2;0;-1)$, $\vec{a}_2=(2;-3;-1;1)$, $\vec{a}_3=(0;1;1;1)$ і $\vec{a}_4=(-1;-1;-1;-1)$ лінійно залежними.

4.22. З'ясувати, чи утворюють базис тривимірного простору вектори $\vec{a}_1=(1;1;1)$, $\vec{a}_2=(1;0;1)$ і $\vec{a}_3=(2;1;2)$.

4.23. З'ясувати, чи утворюють базис чотиривимірного простору вектори $\vec{a}_1=(1;1;1;1)$, $\vec{a}_2=(1;0;1;0)$, $\vec{a}_3=(0;-1;0;1)$ і $\vec{a}_4=(1;0;0;1)$.

4.24. Показати, що вектори $\vec{a}_1=(-1;4;2)$, $\vec{a}_2=(3;0;1)$, $\vec{a}_3=(4;5;2)$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{a}=(5;7;8)$ за цим базисом.

4.25. Показати, що вектори $\vec{a}_1=(-2;3;5)$, $\vec{a}_2=(1;-3;4)$, $\vec{a}_3=(7;8;-1)$ утворюють базис і знайти розклад вектора $\vec{a}=(1;20;1)$ в цьому базисі.

4.26. Показати, що вектори $\vec{a}_1=(3;1;2;4)$, $\vec{a}_2=(-1;3;-4;-2)$, $\vec{a}_3=(2;4;3;1)$ і $\vec{a}_4=(4;2;-1;3)$ утворюють базис і знайти розклад вектора $\vec{a}=(11;27;-1;7)$ за цим базисом.

Знайти власні значення і власні вектори наступних матриць:

4.27. $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

4.28. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$.

4.29. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -8\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

4.30. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}$.

4.31. $A=\begin{pmatrix}6 & 1 & -4\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

4.32. $A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 2\\ -6 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Глава 5
Елементи векторної алгебри

5.1. Вектори та дії над ними у геометричній формі

Вектор – це напрямлений відрізок. Початок вектора називається точкою його прикладення. Зображується вектор відрізком зі стрілкою, що розташована біля кінця вектора (рис. 5.1). Позначається вектор $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Напрямком вектора $\overrightarrow{AB}$ називається напрямок променя AB, довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB.

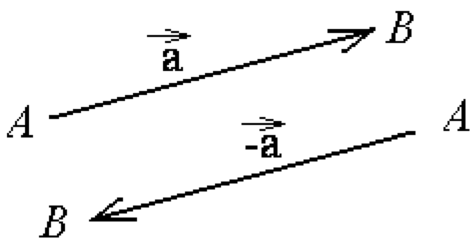


Рис. 5.1

Два вектори називаються рівними, коли вони суміщаються паралельним переносом. Рівні вектори мають рівні довжини та однакові напрями. Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається нульовим і позначається через $\vec{0}$. Сумою кількох векторів, наприклад $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ називається вектор

$$\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d},$$

який за величиною та напрямком дорівнює вектору, початком якого є початок вектора $\vec{a}$ (першого доданка), а кінець – кінець вектора $\vec{a}$ (останнього доданка).Легко перевірити, що сума має такі (рис. 5.2.) властивості:

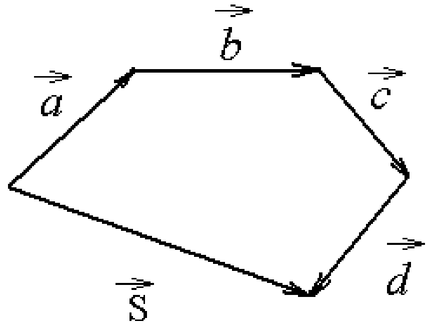


Рис. 5.2

1) додаток векторів – переставний

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{d}$;

2) сполучна властивість

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

3) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$;

4) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

(Вектор $\left(-\vec{a}\right)-$ протилежний вектору $\vec{a}$, його довжина дорівнює довжині вектора $\vec{a}$, а напрям – протилежний вектору $\vec{a}$).

Під різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ розуміємо вектор

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b},$$

такий, що дорівнює доданку векторів $\vec{a}$ та$\left(-\vec{b}\right)$. Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр k називається вектор $\vec{d}=k\,\vec{a}$, який має довжину $\left|\vec{b}\right|=\left|k\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$, а напрям такий, як у $\vec{a}$, якщо $k>0$, або такий, як $y\left(-\vec{a}\right)$, якщо $k<0$. Операція множення на число має такі властивості:

1) $\left(k+l\right)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$;

2) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$;

3) $k\left(l\vec{a}\right)=\left(kl\right)\vec{a}$;

4) $1\cdot\vec{a}=\vec{a};\ \left(-1\right)\vec{a}=-\vec{a}$;

5) $0\cdot\vec{a}=\vec{0};\ \vec{l}=\vec{a}/\left|\vec{a}\right|$,

де $\left(k,l\right)-$ скаляри; $\vec{l}$ – одиничний вектор.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються колінеарними, якщо вони належать одній прямій або паралельним прямим. Можна довести, що необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є їх пропорціональність, тобто

$$\vec{b} = k\vec{a}\ (k - \text{скаляр}).$$

Три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називаються компланарними, якщо вони належать будь-якій площині або паралельні їй. Можна довести, що три ненульові вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді та тільки тоді, коли один з них є лінійною комбінацією двох інших, тобто

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b},$$

де $k, l -$скаляри.

Розглянемо ще одне означення, що має дуже важливе значення в теорії векторів. Це означення проекції вектора на вісь. Нагадаємо, що вісь – це пряма, яка має напрямок. Заданий напрямок будемо вважати додатним, протилежний напрямок – від'ємним.

Під компонентою вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ відносно осі l розуміємо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{A'B'}$, початок якого A' є проекція на вісь l початку A вектора $\vec{a}$, а кінець якого B' є проекція на вісь l кінця B цього вектора.

Під проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l розуміємо скаляр

$$a_l = \pm\left|\overrightarrow{A'B'}\right|,$$

який дорівнює довжині компоненти вектора $\vec{a}$ на вісь l, якщо її напрямок збігається з напрямом осі l, та мінус довжині компоненти, коли її напрямок протилежний напрямку осі. Вкажемо на основні властивості проекції:

1. Проекція вектора на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на косинус кута між напрямком вектора та напрямком осі, тобто

$$a_l = |\vec{a}|\cos\varphi,\ \varphi = \angle\left(\vec{a}, \vec{l}\right).$$

2. Проекція суми будь-якого числа доданків векторів на дану вісь дорівнює доданку їх проекцій на цю вісь.

3. Якщо даний вектор помножити на скаляр, то його проекцію на вісь теж треба помножити на цей скаляр $ї\,ð_l\left(k\vec{a}\right)=k\cdot ї\,ð_l\vec{a}$.

5.2. Прямокутна система координат. Вектори, що задані своїми координатами

Нехай (рис. 5.3) Ox, Oy, Oz - три взаємно перпендикулярні прямі, які мають напрямки та масштаб. Для кожної точки M простору існує її радіус – вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, початок якого є початок координат O , а кінець є дана точка M .

Означення. Під декартовими прямокутними координатами x, y, z точки M розуміємо проекції її радіус – вектора $\vec{r}$ на відповідні осі координат, тобто $x=x_r,\ y=y_r,\ z=z_r$. Точка M з координатами x, y, z позначається через $M\left(x, y, z\right)$. Для знаходження координат точки треба побудувати прямокутний паралелепіпед з діагоналлю (рис. 5.3).

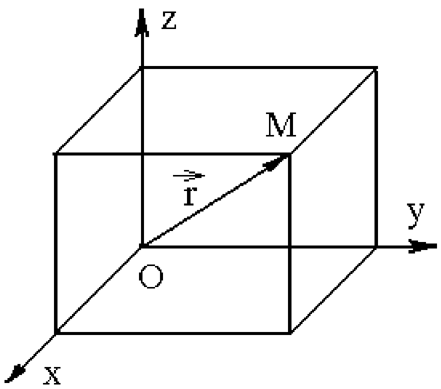


Рис. 5.3

Довжина діагоналі паралелепіпеда: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Якщо позначити через α, β, γ кути, що утворені радіусом – вектором з координатними осями, то будемо мати

$$x=\left|\vec{r}\right|\cos\alpha\,;\quad y=\left|\vec{r}\right|\cos\beta\quad z=\left|\vec{r}\right|\cos\gamma\,. \tag{5.1}$$

Косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами* радіус-вектора $\vec{r}$. Властивість їх легко доводиться:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

Якщо у просторі задано вільний вектор $\vec{a}$, проекції його на осі та координати вектора

$$a_x = np_x\vec{a}\,; \quad a_y = np_y\vec{a}\,; \quad a_z = np_z\vec{a}\,.$$

Довжина вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{5.2}$$

Напрямні косинуси можна знайти із рівнянь:

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha; \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta; \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Приклад 5.1. Знайти довжину на напрямок вектора $\vec{a} = (1; 2; -2)$.

Розв'язання.

Маємо

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2(-2)^2} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{1}{3}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 5.2. Знайти відстань між двома точками, що задані своїми координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Розв'язання. Нехай точка M_1 – це початок відрізка $\overrightarrow{M_1M_2}$, а M_2 – його кінець (рис. 5.4). Точки M_1 та M_2 можна задати їх радіусами-векторами $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Тоді вектор $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Якщо цю векторну рівність спроектуємо на осі координат, то на основі властивостей проекцій будемо мати:

$$r_x = x_2 - x_1;\quad r_y = y_2 - y_1;\quad r_z = z_2 - z_1.$$

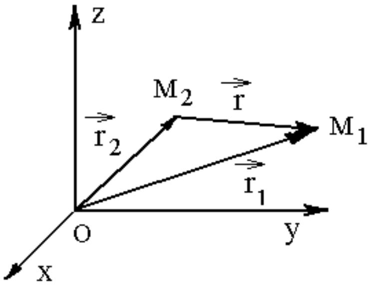


Рис. 5.4

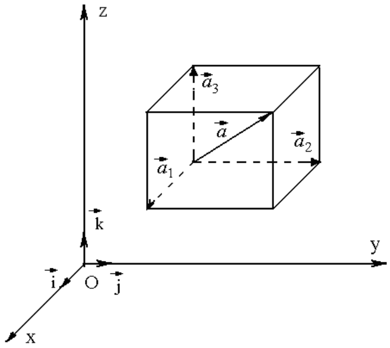


Рис. 5.5

Таким чином, довжина відрізка M_1M_2 або довжина вектора $\vec{r}$ буде:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{5.3}$$

Визначимо основні дії над векторами, які задані координатами.

Нехай вектор $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ заданий своїми проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz. Побудуємо паралелепіпед (рис. 5.5), діагоналлю якого є вектор $\vec{a}$, а ребрами будуть його компоненти відносно відповідних координат осей. Маємо розклад: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$. Якщо введемо одиничні вектори осей (орти) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, які напрямлені по осях координат, то на основі зв'язку між компонентами вектора та його проекціями будемо мати:

$$\vec{a}_1 = a_x\vec{i}\ ;\quad \vec{a}_2 = a_y\vec{j}\ ;\quad \vec{a}_3 = a_z\vec{k}\ .$$

Тоді вектор $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$, або

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,. \tag{5.4}$$

Якщо вектор $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Тоді розглянуті вище лінійні операції над векторами можна записати в такому вигляді:

1) $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$;

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$,

$\lambda -$ скаляр. Таким чином, при множенні вектора на скаляр координати вектора треба помножити на цей скаляр;

2) $\vec{a} + \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$, або:

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$.

Таким чином, при додаванні (або відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (або віднімаються).

Приклад 5.3. Знайти координати точки $C(x, y, z)$, що ділить відрізок у відношенні λ (рис. 5.6) , $\lambda = \dfrac{np_{AB}\overline{AC}}{np_{AB}\overline{CB}}$.

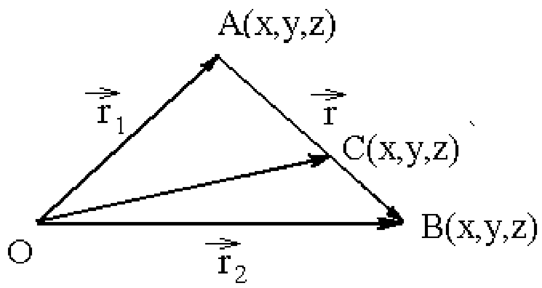


Рис. 5.6

Розв'язання.

Нехай точкам $A; B; C$ відповідають радіус-вектори $\vec{r}_1, \vec{r}, \vec{r}_2$. Тоді вектор $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$, або

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}).$$

З цієї векторної рівності знайдемо вектор $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1+\lambda},$$

або у координатах

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \;\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \;\; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (5.5)$$

Звідси, якщо відрізок точки C поділити на дві рівні частини, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \;\; z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (5.6)$$

5.3. Скалярний добуток векторів та його властивості

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин даних векторів та косинусу кута між ними, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \text{ де } \varphi = \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right). \qquad (5.7)$$

На основі першої властивості проекції можна записати

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}|\, np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\, np_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (5.8)$$

Скалярний добуток має такі властивості:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
3. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
4. $\left(\lambda \vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \lambda \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.
5. $\left(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \mu\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$, ($\lambda, \mu -$ скаляри).

З означення скалярного добутку можна знайти косинус кута між двома ненульовими векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \qquad (5.9)$$

Скалярний добуток векторів можна записати у координатній формі. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані так:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Знайдемо добуток цих векторів як многочленів (на основі властивостей скалярного добутку):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \qquad (5.10)$$

Для косинуса кута між векторами одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (5.11)$$

Умова колінеарності двох векторів

$$\vec{b} = k\cdot\vec{a},$$

або у координатах $b_x = ka_x;\ b_y = ka_y;\ b_z = ka_z$, звідки

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \qquad (5.12)$$

Таким чином, вектори колінеарні тільки у тому випадку, коли їх відповідні координати пропорційні.

Для перпендикулярних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $(\varphi = \pi/2)$ скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (5.13)$$

5.4. Векторний добуток векторів. Змішаний добуток

Задаємо у просторі додатню орієнтацію. Будемо вважати, що трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ орієнтована за правилом правої руки, тобто з кінця третього вектора найкоротший оборот від першого до другого видно проти годинникової стрілки (рис. 5.7).

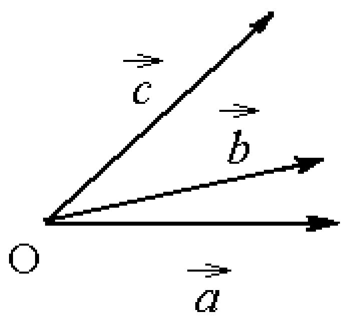


Рис. 5.7

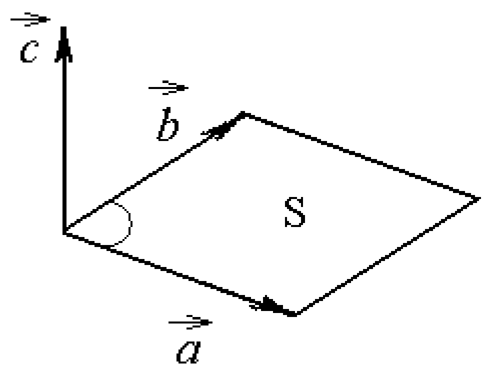


Рис. 5.8

Означення. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє наступним умовам:

1. Модуль вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ (рис. 5.8)

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \qquad (5.14)$$

де
$$\varphi = \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\left(0 \le \varphi \le \pi\right).$$

2. Вектор $\vec{c}$ напрямлений перпендикулярно до площини цього паралелограма, тобто

$$\vec{c} \perp \vec{b} \text{ і } \vec{c} \perp \vec{b}.$$

3. Впорядкована трійка векторів ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) задає додатну орієнтацію простору.

Властивості векторного добутку:

1. При зміні порядку співмножників векторний добуток змінює свій знак на протилежний, модуль при цьому не змінюється.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

Дійсно, при перестановці векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ площа паралелограма, побудованого на векторах, не змінюється, однак орієнтація векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ буде лівою.

2. Векторний квадрат дорівнює нулю-вектору, тобто

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \text{ (за означенням).}$$

3. Скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку, тобто якщо $\lambda -$ скаляр, то

$$\left(\lambda \vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \times \lambda \vec{b}\right) = \lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

4. Для будь-яких трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедлива рівність

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

(розподільна властивість).

Розглянемо координатну форму векторного добутку. Нехай

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k};$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Якщо помножити векторно $\vec{a}\times\vec{b}$, одержимо таку рівність

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Останню рівність можна записати у вигляді визначника третього порядку

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (5.15)$$

Знайдемо довжину вектора $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2.$$

Приклад 5.4. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ і $C(0,1,1)$.

Розв'язання.

Площа S трикутника ABC дорівнює $1/2$ площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. $\overline{AB}=(0,-1,1)$ і $\overline{AC}=(-1,0,1)$, звідси

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-i-j-k.$$

Отже,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Означення. Мішаним добутком (або векторно-скалярним добутком) векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Побудуємо паралелепіпед (рис. 5.9), ребрами якого є вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, що приведені до загальної вершини O. Нехай вектор $\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b}$, тобто він перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (напрям h). Нагадаємо, що $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто площа основи паралелепіпеда. Висота цього паралелепіпеда H:

$$H = \pm np_h \vec{c} = \pm\left|\vec{c}\right|\cos\varphi.$$

Знак плюс відповідає гострому куту $\varphi = \angle(\vec{c}, \vec{h})$, знак мінус – тупому куту φ. У першому випадку вектори утворюють праву трійку, а у другому – ліву трійку.

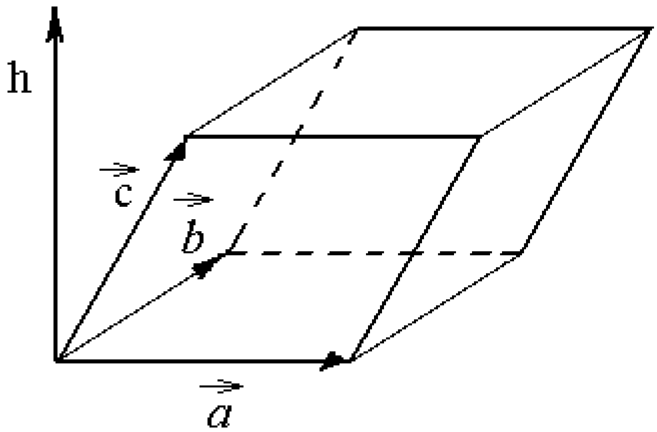


Рис. 5.9

На основі означення скалярного добутку маємо:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{S} \cdot \vec{c} = \left|\vec{S}\right| \cdot пр_h \vec{c} = \pm\left|\vec{S}\right| \cdot H = \pm V,$$

де V - об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Звідси

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V,$$

тобто мішаний добуток трьох векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, який побудовано на цих векторах, і береться із знаком плюс, якщо ці вектори утворюють праву трійку, та зі знаком мінус, якщо вони утворюють ліву трійку.

Зазначимо основні властивості мішаного добутку:

1. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці цих співмножників, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Дійсно, у цьому випадку не змінюється об’єм паралелепіпеда та орієнтація його ребер.

2. При перестановці двох сусідніх співмножників мішаний додаток змінює свій знак на протилежний:

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c},$$

тобто при перестановці співмножників права трійка переходить у ліву, а ліва у праву.

За допомогою змішаного добутку одержимо необхідну та достатню умову компланарності трьох векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

(об’єм паралелепіпеда дорівнює нулю). Якщо

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k};$$
$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},$$

то, використовуючи вирази у координатах для векторного та скалярного добутків, одержимо:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Запитання для самодіагностики

1. Що таке прямокутна система координат?

2. Чим визначається положення точки в прямокутній системі координат?

3. Як обчислюється відстань між точками в прямокутній системі координат?

4. Записати формули для знаходження координат точки, що ділить відрізок у заданому відношенні.

5. Що називається скалярним добутком двох векторів?

6. Які властивості скалярного добутку вам відомі?

7. Чому дорівнює скалярний добуток векторів, що задані координатами?

8. Як обчислюється кут між векторами?

9. Умови паралельності і перпендикулярності векторів.

10. Що називається векторним добутком двох векторів?

11. Основні властивості векторного добутку.

12. Як виражається векторний добуток, коли вектори задані координатами?

13. Як обчислюється площа паралелограма, побудованого на двох векторах?

14. Що називається мішаним добутком трьох векторів?

15. Як виражається векторний добуток, коли вектори задані координатами?

16. Як обчислюється об’єм паралелепіпеда?

17. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

18. Як обчислюється площа трикутника, якщо відомі координати його вершин?

Приклади і вправи

Приклади:

5.5. За наданими $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори:

$$2\vec{a}+3\vec{b} \quad \text{і} \quad \frac{\vec{a}}{2}-2\vec{b}.$$

Розв'язання.

Геометрична побудова векторів показана на рис. 5.10 і 5.11.

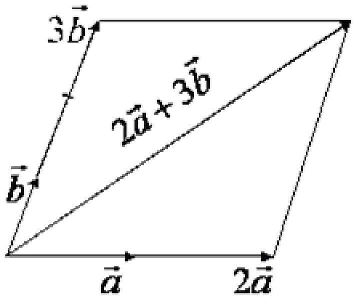


Рис. 5.10

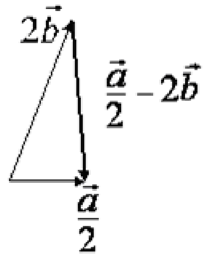


Рис. 5.11

5.6. Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=13$, $\left|\vec{b}\right|=19$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=22$.

Розв'язання.

Зробимо креслення (рис. 5.12).

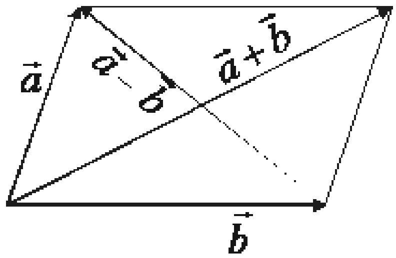


Рис. 5.12

Як відомо, сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін. Отже, маємо

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2;$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2\cdot 13^2+2\cdot 19^2-22^2=576;$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=24.$$

5.7. Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^0$, і $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=8$.

Розв'язання.

Зробимо креслення (рис. 5.13).

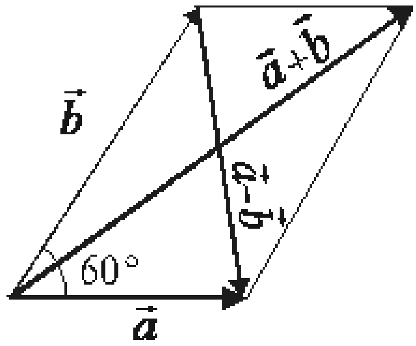


Рис. 5.13

За відомою теоремою косинусів маємо:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^0=25+64-2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=49;$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7;$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 120^0=25+64-2\cdot5\cdot8\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=129;$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}.$$

5.8. Задані три вектори $\vec{a}=(-2;1;3)$, , $\vec{b}=(-1;3;2)$, $\vec{c}=(-3;-2;1)$. Знайти вектор $\vec{m}=4\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$ і його довжину.

Розв'язання.

Запишемо координати векторів $4\vec{a}$, $3\vec{b}$, $-2\vec{c}$:

$$4\vec{a}=(-8;4;12);\quad 3\vec{b}=(-3;9;6);\quad -2\vec{c}=(6;4;-2).$$

Складаємо їх відповідні координати і знаходимо координати вектора $\vec{m}$:

$$\vec{m}=(-5;17;16).$$

Тоді

$$\left|\vec{m}\right|=\sqrt{(-5)^2+17^2+16^2}=\sqrt{570}.$$

5.9. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(-3;\alpha;9)$ і $\vec{b}=(2;-8;\beta)$ колінеарні.

Розв'язання.

Умовою колінеарності векторів є пропорційність їх координат:

$$\frac{-3}{2}=\frac{\alpha}{-8}=\frac{9}{\beta}.$$

Звідки знаходимо: $\beta = -6; \alpha = 12$.

5.10. Довести, що точки $A(3;4;1)$, $B(1;0;-1)$ і $C(-2;-6;-4)$ лежать на одній і тій самій прямій.

Розв'язання.

Якщо вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ – колінеарні, то це й буде значити, що точки A, B і C належать одній прямій. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-2;-4;-2), \quad \overrightarrow{AC} = (-5;-10;-5).$$

Координати векторів пропорційні, бо

$$\frac{-2}{-5} = \frac{-4}{-10} = \frac{-2}{-5}.$$

Точки A, B і C лежать на колінеарних векторах, які паралельним переносом можуть бути перенесені на будь-яку пряму.

5.11. Вершини чотирикутника знаходяться в точках $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$. Показати, що $ABCD$ є трапеція і знайти довжини її основ.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ (рис. 5.14), які співпадають зі сторонами чотирикутника.

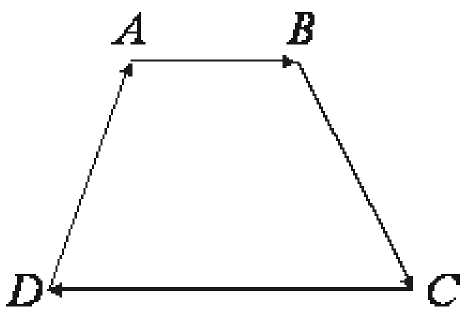


Рис. 5.14

$$\overrightarrow{AB} = (-2;3;-3); \quad \overrightarrow{BC} = (-2;-1;-2);$$
$$\overrightarrow{CD} = (4;-6;6); \quad \overrightarrow{DA} = (0;4;-1).$$

Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ пропорційні, а тому вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, тобто прямі AB і CD паралельні.

Вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$ не колінеарні, бо їх координати не пропорційні, а тому прямі AD і CB не паралельні. Таким чином, $ABCD$ – трапеція.

Знайдемо довжини її основ:

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22};$$

$$|DC| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 6^2} = 2\sqrt{22}.$$

5.12. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (12; -15; -16)$.

Розв'язання.

За формулами напрямних косинусів:

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2}} = \frac{12}{15}; \quad \cos\beta = \frac{-15}{25}; \quad \cos\gamma = \frac{-16}{25}.$$

5.13. На осі Ox знайти точку, яка рівновіддалена від точок $A(3;9;-1)$ і $B(7;-3;9)$.

Розв'язання.

Шукана точка $M(x;0;0)$. За умовою $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$. Знайдемо

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{(3-x)^2 + 9^2 + (-1)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 91}.$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(7-x)^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 139}.$$

Маємо рівняння $x^2 - 6x + 91 = x^2 - 14x + 139$, $x = 6$. Отже, шукана точка $M(6;0;0)$.

5.14. Відомо, що $|\vec{a}| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 6$, $\varphi = 120°$.

Знайти: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)$; в) $\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2$.

Розв'язання:

а) за формулою скалярного добутку маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120^0=5\cdot 6\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=-15;$$

б) перемножимо вектори скалярно:

$$\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})=6\vec{a}^{\,2}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-9\vec{b}\cdot\vec{a}-6\vec{b}^{\,2}=$$

$$=6\cdot|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\cos 120^0-6|\vec{b}|^2=6\cdot 25-3\cdot 30\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)-6\cdot 36=411;$$ в)

$$(3\vec{a}+2\vec{b})^2=9|\vec{a}|^2+6|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+4|\vec{b}|^2=9\cdot 25+6\cdot 5\cdot 6\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+4\cdot 36=249.$$

5.15. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

Знайти довжину вектора $\vec{c}=5\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$.

Розв'язання.

За формулою модуля вектора маємо: $|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^{\,2}}$, тобто

$$|\vec{c}|=|5\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{\left(5\vec{a}+3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{25|\vec{a}|^2+30\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+9|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{25\cdot 9+30\cdot 3\cdot 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+9\cdot 4}=\sqrt{171}.$$

5.16. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, а вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, що дорівнюють $60°$. Знайти довжину вектора $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$.

Розв'язання.

Знайдемо $\vec{m}^2$

$$\vec{m}^{\,2}=\left(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)^2=\vec{a}^{\,2}+4\vec{b}^{\,2}+9\vec{c}^{\,2}+4\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{a}\cdot\vec{c}-12\vec{b}\vec{c}=$$

$$=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2+4\cdot 0-6\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^0-12|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 120^0=433.$$

Отже,

$$|\vec{m}|=\sqrt{433}.$$

5.17. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $30°$. Знайти кут між векторами $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$.

Розв'язання.

За формулою маємо:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|},$$

де φ – кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Зробимо креслення (рис. 5.15), з якого легко знайдемо $|\vec{m}|$ і $|\vec{n}|$.

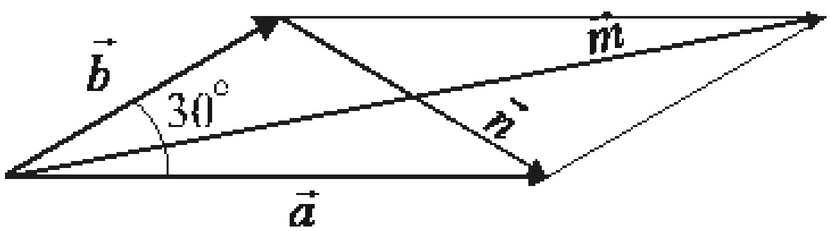


Рис. 5.15

Вектори $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$ є діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

За теоремою косинусів знаходимо $|\vec{m}|$ і $|\vec{n}|$:

$$|\vec{n}|^2=|\vec{a}|^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 30^0+|\vec{b}|^2=3-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=7;$$

$$|\vec{m}|^2=|\vec{a}|^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120^0+|\vec{b}|^2=3-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=1.$$

Отже, $|\vec{m}|=\sqrt{7}$, $|\vec{n}|=1$.

Знайдемо добуток $|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=2$, тоді:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{7}},\quad \varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

5.18. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}=(3;-1;5)$ і $\vec{b}=(1;-2;-3)$ та кут φ між ними.

Розв'язання.

За формулою $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$ маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 1-1\cdot(-2)+5\cdot(-3)=-10,$$

далі:
$$\cos\varphi=\frac{-10}{\sqrt{9+1+25}\cdot\sqrt{1+4+9}}=\frac{-10}{7\sqrt{10}}.$$

5.19. Знайти:

а) проекцію вектора $\vec{a}=(5;4;-6)$ на вектор $\vec{b}=(2;-1;-1)$;

б) проекцію вектора $\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$.

Розв'язання:

а) маємо: $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{2\cdot 5+4\cdot(-1)+(-1)\cdot(-6)}{\sqrt{4+1+1}}=2\sqrt{6}$;

б) знайдемо координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$:

$$\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}=(10;8;-12)-(10;-5;-5)=(0;13;-7);$$

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}=(2;-1;-1)+(5;4;-6)=(7;3-7).$$

Тоді

$$np_{\vec{d}}\vec{c}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}=\frac{0\cdot 7+13\cdot 3+(-7)\cdot(-5)}{\sqrt{49+9+25}}=\frac{74}{\sqrt{83}}.$$

5.20. Для векторів $\vec{a}=(1;-2;2)$ і $\vec{b}=(2;-2;-1)$ знайти $2\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+5\vec{b}^2$.

Розв'язання.

Одержуємо:

$$2\vec{a}-4\vec{a}\vec{b}+5\vec{b}^2=2(1+4+4)-4(1\cdot 2+(-2)\cdot(-2)+2\cdot(-1))++5\cdot(4+4+4+1)=47.$$

5.21. При якому значенні α вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ і $\vec{b}=4\vec{i}+\alpha\vec{j}-7\vec{k}$ перпендикулярні?

Розв'язання.

Запишемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у вигляді:

$$\vec{a}=(\alpha;3;4);\quad \vec{b}=(4;\alpha;-7)$$

і знайдемо їх скалярний добуток:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\alpha+3\alpha-28=7\alpha-28.$$

Оскільки $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $7\alpha-28=0$, $\alpha=4$.

5.22. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=(3;-1;4)$ і задовольняє умову : $\vec{x}\cdot\vec{a}=-52$;

Розв'язання.

Оскільки вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a}=(3;-1;4)$, то його можна записати $\vec{x}=\lambda\vec{a}=(3\lambda;-\lambda;4\lambda)$. За умовою скалярний добуток $\vec{x}\cdot\vec{a}=-52$. Отже,

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=9\lambda+\lambda+16\lambda=26\lambda,\quad 26\lambda=-52,\quad \lambda=-2.$$

Тоді $$\vec{x}=(-6;2;-8).$$

5.23. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=(-12;16;15)$, утворює з віссю Oz тупий кут. Довжина його $|\vec{x}|=100$.

Розв'язання.

Оскільки вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, то $\vec{x}=\lambda\vec{a}=(-12\lambda;16\lambda;15\lambda)$. Так як за умовою $|\vec{x}|=100$, тобто: $\sqrt{(12\lambda)^2+(16\lambda)^2+(15\lambda)^2}=100$.

Звідки $\lambda=\pm4$. При $\lambda=4$, $\vec{x}=(48;\ 64;\ 60)$, а при $\lambda=-4$, $x=(48;-64;\ -60)$. Умову задовольняє вектор $x=(48;-64;\ -60)$, який утворює тупий кут із віссю Oz.

5.24. Знайти у трикутнику ABC з вершинами $A(3;2;-3)$, $B(5;1;1)$ і $C(1;-2;1)$ внутрішній кут при вершині C.

Розв'язання.

Шуканий кут φ – це кут між векторами $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(-2;-4;4)$ і $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(4;3;0)$. Одержуємо:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-3)+4\cdot0}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{16+9+0}}=\frac{20}{6\cdot5}=\frac{2}{3}.$$

Отже, $\varphi=\arccos\frac{2}{3}$.

5.25. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $150°$. Знайти $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=8$.

Розв'язання.

Відповідно формулі:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin150^0=3\cdot5\cdot\frac{1}{2}=7,5.$$

5.26. Знайти векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ і його модуль $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ для векторів $\vec{a}=\left(-1;2;4\right)$ і $\vec{b}=\left(2;-1;-4\right)$.

Розв'язання.

За формулою векторного добутку маємо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&4\\2&-1&-4\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2&4\\-1&-4\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1&4\\2&-4\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}=$$

$$=-4\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}.$$

Тоді $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{41}$.

5.27. Знайти векторний добуток $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\left(1;1;-2\right)$ і $\vec{b}=\left(-2;-1;-4\right)$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $2\vec{a}-\vec{b}=\left(4;3;0\right)$ і $2\vec{a}+\vec{b}=\left(0;1;-8\right)$. Тоді:

$$(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&3&0\\0&1&-8\end{vmatrix}=-24\vec{i}+32\vec{j}+4\vec{k}.$$

5.28. Вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ утворюють кут $\varphi=45^0$. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{m}-3\vec{n}$ і $\vec{b}=3\vec{m}+2\vec{n}$, якщо $\left|\vec{m}\right|=\left|\vec{n}\right|=1$.

Розв'язання.

Площа паралелограма: $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Знайдемо

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{m} - 3\vec{n}) \times (3\vec{m} + 2\vec{n}) = 6\vec{m} \times \vec{m} + 4\vec{m} \times \vec{n} - 6\vec{m} \times \vec{n} = 13\vec{m} \times \vec{n}.$$

Оскільки: $\vec{m} \times \vec{m} = 0, \vec{n} \times \vec{n} = 0, \vec{n} \times \vec{m} = -\vec{m} \times \vec{n}$.

Отже, $S = \left|13\vec{m} \times \vec{n}\right| = 13\left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \sin 45^0 = 13 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6{,}5\sqrt{2}$.

5.29. Знайти для трикутника з вершинами $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$ довжину його висоти, проведеної з вершини B.

Розв'язання.

Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Знаходимо

$$\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0), \ \overrightarrow{AC} = (0; 4; -3).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{25}{2} = 12{,}5.$$

Як відомо, $S_\Delta = \dfrac{ah}{2}$, або в даному випадку: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot h_{AC}$, звідки:

$$h_{AC} = \frac{2S_{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2 \cdot 12{,}5}{\sqrt{0 + 16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5.$$

5.30. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;3;-1)$ і $\vec{b} = (1;-2;3)$ і задовольняє умову: $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

Розв'язання.

Будь-який вектор, що перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, є колінеарним вектору $\vec{a} \times \vec{b}$. Отже, $\vec{x} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Знайдемо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Отже, $\vec{x}=(7\lambda;-7\lambda;-7\lambda)$. За умовою $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$. Маємо $14\lambda+7\lambda-7\lambda=-6,$ звідки $\lambda=\frac{-3}{7}$, тоді $\vec{x}=(-3;3;3)$.

5.31. Показати, що вектори $\vec{a}=(1;2;2)$, $\vec{b}=(2;5;7)$ і $\vec{c}=(1;1;-1)$ компланарні.

Розв'язання.

За формулою мішаного добутку маємо:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-5+14+4-10+4-7=0.$$

Оскільки, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, то задані вектори компланарні.

5.32. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ і $D(3;7;2)$.

Розв'язання.

Розглянемо вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(2;3;4)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(6;2;2)$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=(3;7;1)$. Шуканий об'єм, звичайно, дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Отже,

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Знайдемо:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix}=4+18+168-24-18-28=120,$$

$$V=20\,(\text{куб. од.}).$$

Вправи:

5.33. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори

1) $2\vec{b}-\vec{a}$; 2) $-\vec{a}-\vec{b}$; 3) $-\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{a}}{2}$; 4) $2\vec{a}+2\vec{b}$.

5.34. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=6$.

Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

5.35. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $120°$. Знайти $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=5$.

5.36. Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=11$, $\left|\vec{b}\right|=23$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=30$.

5.37. У трикутнику ABC проведені медіани AK, BL і CM. Виразити вектори $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ і $\overrightarrow{CM}$ через вектори $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$.

5.38. У паралелограмі $ABCD$ задані сторони $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{DB}$.

5.39. Яку умову задовольняють ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо виконується рівність $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

5.40. Знайти довжину і напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(4;-2;6)$, $B(1;4;0)$.

5.41. Задані вектори $\vec{a}=(-3;4;-1)$, $\vec{b}=(-1;2;3)$, $\vec{c}=(-4;-2;1)$. Знайти вектор $\vec{d}=-5\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}$ і його довжину.

5.42. Знайти вектор $\vec{a}$, якщо відомі $\left|\vec{a}\right|=4$ і кути, які він утворює з координатними осями: $\alpha=60^0$; $\beta=120^0$; $\gamma=45^0$.

5.43. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(2;1;-4)$, $B(1;3;5)$, $C(7;2;3)$, $D(8;0;-6)$ є паралелограм. Знайти довжини його сторін.

5.44. При яких значеннях α і β вектори: $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{a}=-\alpha\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ колінеарні?

5.45. Показати, що точки $A(4;4;3)$, $B(1;-2;0)$, $C(-1;-6;-2)$ лежать на одній прямій.

5.46. При яких значеннях α і β точка $C(-4;\alpha;\beta)$ лежить на прямій AB, якщо $A(-3;-2;-3)$, $B(-2;-5;-1)$?

5.47. Показати, що трикутник з вершинами $A(-1;-4;-2)$, $B(-4;0;-2)$ і $C(-7;-4;-2)$ є рівнобічним.

5.48. Показати, що точки $A(2;1;0)$, $B(0;4;-3)$, $C(-2;3;-5)$ і $D(2;-3;1)$ є вершини трапеції. Знайти довжини її основ.

5.49. На осі Oz знайти точку, яка рівновіддалена від точок $A(4;-1;2)$ і $B(0;2;-1)$.

5.50. Задані чотири послідовні вершини паралелограма $A(-1;-1;2)$, $B(0;1;-3)$, $C(-4;0;-2)$. Знайти четверту вершину D.

5.51. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $45°$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$.

5.52. Знайти $(3\vec{a}-5\vec{b})(2\vec{a}+7\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

5.53. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Знайти довжину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$.

5.54. При якому значенні α вектори $m=3\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$ і $\vec{n}=\vec{a}-2\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{a}|=7\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$дорівнює 45^0.

5.55. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{m}+2\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{n}|=3$, кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$дорівнює:$\beta=45^0$.

5.56. Знайти кут між векторами $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$дорівнює:$\beta=120^0$.

5.57. Знайти кут між векторами $\vec{a}=3\vec{m}+2\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}+5\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, кут між векторами $\vec{m}$ та $\vec{n}$ дорівнює $\beta=90^0$.

5.58. Знайти довжину вектора $\vec{m}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=5$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює $\beta=60^0$, кут між векторами $\vec{c}$ та $\vec{b}$ дорівнює $\gamma=60^0$.

5.59. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, а вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути по $60°$. Знайти $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{a})$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=1$.

5.60. Задані вершини чотирикутника $A(1;2;3)$, $B(7;3;2)$, $C(-3;0;6)$, $D(9;2;4)$. Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

5.61. Задані вектори $\vec{a}=(4;-2;-4)$ і $\vec{b}=(6;-3;2)$. Знайти:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$;   в) $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$;   г) $\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|$.

5.62. Знайти довжину вектора $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ і його напрямні косинуси.

5.63. При якому значенні α вектори $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+2\cdot\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?

5.64. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(2;1;0)$ і $\vec{b}=(0;-1;1)$.

5.65. Задані вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ і $C(3;-2;1)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A.

5.66. Довести, що трикутник ABC з вершинами $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$ і $C(7;4-2)$ рівнобічний і знайти його кути.

5.67. Знайти кути трикутника з вершинами $A(-1;-4;0)$, $B(-2;-2;-2)$, $C(-3;-3;2)$.

5.68. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$, який задовольняє умову: $\vec{x}\cdot\vec{a}=6$

5.69. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє умови: $\vec{x}\cdot\vec{a}=2$; $\vec{x}\cdot\vec{b}=8$; $\vec{x}\cdot\vec{c}=8$, якщо $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

5.70. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=(5;4;-6)$ на вектор $\vec{b}=(2;-1;-1)$.

5.71. Вершини трикутника ABC мають координати: $A(1;-2;-3)$, $B(-1;-1;-2)$, $C(3;0;-2)$. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

5.72. Задані вектори $\vec{a}=(3;-6;2)$ і $\vec{b}=(-2;-1;2)$. Знайти проекцію вектора $\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}$ на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

5.73. Знайти $\text{ï ð}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$, якщо $\vec{a}=(1;-3;4)$, $\vec{b}=(3;-4;2)$, $\vec{c}=(-1;1;4)$.

5.74. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат кути $\alpha=60^0$; $\beta=120^0$; $\gamma=45^0$. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=4$.

5.75. Спростити вираз $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+4\vec{b})$.

5.76. Вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ утворюють кут $45°$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}-3\vec{n}$ і $\vec{b}=3\vec{m}+4\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$.

5.77. Знайти векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ та його модуль, якщо $\vec{a}=(5;-4;7)$ і $\vec{b}=(1;1;-2)$.

5.78. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(2;3;5)$ і $\vec{b}=(1;2;1)$.

5.79. Знайти площу трикутника з вершинами $A(-3;-2;-4)$, $B(-1;-4;-7)$ і $C(1;-2;2)$.

5.80. Знайти висоту трикутника ABC, проведену з вершини C, якщо координати його вершин $A(9;-9;13)$, $B(7;-13;17)$, $C(17;-3;17)$.

5.81. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;-3;1)$ та $\vec{b}=(1;-2;3)$ і задовольняє умову: $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

5.82. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}=(1;1;4)$, $\vec{b}=(2;-1;-1)$, $\vec{c}=(1;3;-1)$.

5.83. Показати, що вектори $\vec{a}=(7;-3;2)$, $\vec{b}=(3;-7;8)$ і $\vec{c}=(1;-1;1)$ компланарні.

5.84. Довести, що чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежать в одній площині.

5.85. Обчислити об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(3;2;1)$, $\vec{b}=(1;0;-1)$, $\vec{c}=(1;-2;1)$.

5.86. Знайти об’єм трикутної піраміди з вершинами $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ і $D(4;1;3)$

5.87. Задані вершини трикутної піраміди $A(2;-1;-3)$, $B(-1;2;-3)$, $C(-2;-1;1)$ і $D(-3;-3;-3)$. Знайти площу грані ABC і довжину висоти, проведеної з вершини D.

Глава 6
Лінії у просторі. Пряма лінія на площині

6.1. Поверхні та лінії у просторі

В аналітичній геометрії розв'язують дві основні задачі:

1. Множина точок задана геометричною властивістю. Знайти її рівняння та дослідити його властивості.

2. Дано рівняння. Дослідити множину точок, яка задається цим рівнянням.

Лінією у просторі називають лінію перетину двох поверхонь, тобто множину точок, координати яких задовольняють одночасно двом рівнянням:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Координати точок, що не лежать на лінії, не задовольняють систему рівнянь. У конкретному випадку:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Можна виключити z з першого рівняння системи. У цьому випадку лінія належить площині XOY, тобто $\varphi(x, y) = 0$ – це рівняння лінії на площині.

Приклад 6.1. Знайти рівняння лінії, всі точки якої знаходяться на одній відстані R від точки $O(a, b)$.

Розв'язання

1. Вибираємо довільну точку $M(x, y)$ на лінії.

2. Запишемо рівнянням умову задачі.

Відстань між точками $M(x, y)$ та $O(a, b)$:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

або

$$(x-a^2)+(y-b)^2=R^2.$$

Це є рівняння кола, радіус якого дорівнює R, а центр має координати (a,b).

6.2. Рівняння прямої, що проходить через дану точку. Загальне рівняння прямої та його дослідження

Пряма на площині визначається, якщо задати точку $M_0\,(x_0,\,y_0)$, яка належить даній прямій, та нормальний вектор $\vec{n}\,(A,B)$, тобто вектор, який перпендикулярний до даної прямої (рис. 6.1).

Нехай $M\,(x,\,y)$ – будь-яка точка, що належить даній прямій. Тоді, якщо точці $M\,(x,\,y)$ відповідає радіус-вектор $\vec{r}\,(x,\,y)$, а точці M_0 – вектор $\vec{r}_0\,(x_0,\,y_0)$, то вектор $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ з координатами $(x-x_0,\;y-y_0)$. Вектори $\vec{r}-\vec{r}_0$ та $\vec{n}$ взаємно перпендикулярні, тому $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$ – векторне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\,(x_0,\,y_0)$. Або рівняння у скалярній формі

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

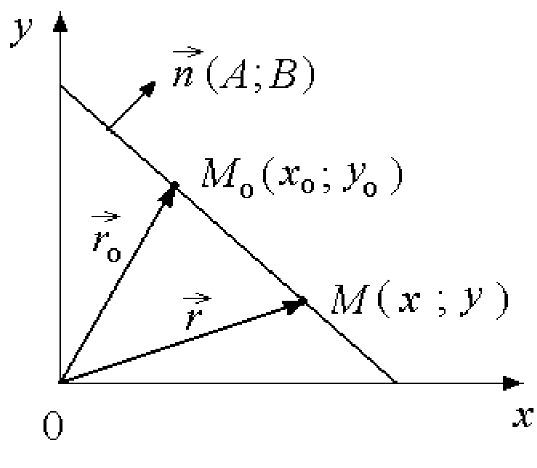


Рис. 6.1

Розкриємо дужки та позначимо $-Ax_0-By_0=C$, одержимо:

$$Ax + By + C = 0. \quad (6.1)$$

Це рівняння називається *загальним рівнянням прямої на площині*. Розміщення прямої на площині залежить від коефіцієнтів A, B, C, $A^2 + B^2 \neq 0$.

1. $C = 0$, $A \neq 0$; $B \neq 0$ – пряма проходить через початок координат.

2. $B = 0$; $A \neq 0$ – пряма $Ax + C = 0$; $x = -C/A$ – паралельна осі Oy, а якщо $C = 0$, одержимо рівняння осі $Ox\,(y = 0)$.

3. $A = 0$; $B \neq 0$ – пряма $By + C = 0$; $y = -C/A$ – паралельна осі Ox, а якщо $C = 0$, маємо рівняння осі $Ox\,(y = 0)$.

Приклад 6.2. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M\,(5, -3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\,(3, 2)$.

Розв'язання.

На основі рівняння прямої $A(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0$ одержимо:

$$3\,(x - 5) + 2\,(y + 3) = 0, \text{ або } 3x + 2y - 9 = 0.$$

6.3. Канонічне рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Пряму на площині можна задати таким чином: задати точку $M_0\,(x_0, y_0)$ та напрямляючий вектор $\vec{S}\,(m, n)$, тобто вектор, який паралельний прямій. Візьмемо на прямій будь-яку точку $M\,(x, y)$ (рис. 6.1). Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ буде колінеарним вектору $\vec{S}$: $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\vec{S}$ або

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \text{ (\textit{канонічне рівняння прямої})}. \quad (6.2)$$

Якщо напрямленим вектором прямої вибрати одиничний вектор $\vec{S}_0\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$, то канонічне рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} \quad (6.3)$$

або

$$y-y_0=\operatorname{tg}\alpha\,(x-x_0).$$

Позначимо $tg\alpha=k$. Тоді *рівняння прямої, що проходить через дану точку*, та утворює з віссю Ox кут α, буде:

$$y-y_0=k\,(x-x_0). \qquad (6.4)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно y, одержимо рівняння прямої:

$$y=kx+b.$$

Слід зауважити, що у цьому рівнянні k – кутовий коефіцієнт, або тангенс кута нахилу прямої до осі Ox; $(O;b)$ – точка перетину з віссю Oy. Одержане рівняння визначає будь-яку пряму площини, крім прямої, що паралельна осі $Oy\,(k=\infty)$. А рівняння прямої, що проходить через точку $(x_0;\,y_0)$, можна вважати рівнянням в'язки жмутка прямих, якщо у ньому k - довільне.

Приклад 6.3. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M\,(3,2)$ та утворює кут 120^0 з віссю Ox.

Розв'язаня.

На основі рівняння $y-y_0=k\,(x-x_0)$ одержимо:

$$y-2=-\sqrt{3}\,(x-3)$$

або

$$y+\sqrt{3}x+3\sqrt{3}-2=0.$$

6.4. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки. Рівняння прямої у відрізках на осях

Якщо дві точки $M_1\,(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$ належать прямій, то напрямним вектором прямої буде вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, тобто

$$\vec{S}=(x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}.$$

Тоді *рівняння прямої, що проходить через дві точки*, має такий вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};\ x_2\neq x_1;\ y_2\neq y_1. \tag{6.5}$$

Запишемо рівняння прямої у відрізках на осях. Хай пряма перетинає осі OX та OY відповідно у точках $A(a,0)$, $B(0,b)$. Рівняння прямої, що проходить через ці точки, буде:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{6.6}$$

Це рівняння є рівнянням прямої у відрізках на осях.

Приклад 6.4. Знайти рівняння сторін трикутника, який задано його вершинами $A(3,2)$, $B(-4,-3)$, $C(-3,4)$.

Розв'язання.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(3,2)$ та $B(-4,-3)$ буде:

$$\frac{x-3}{-4-3}=\frac{y-2}{-3-2}$$

або

$$5x-7y-1=0.$$

Аналогічно можна знайти рівняння інших сторін.

6.5. Взаємне розташування двох прямих на площині

Хай на площині задано дві прямі (l_1) і (l_2) з нормальними векторами $\vec{n}(A_1;B_1)$; $\vec{n}_2(A_2;B_2)$:

1) $A_1x+B_1y+C_1=0$ (l_1);

2) $A_2x+B_2y+C_2=0$ (l_2).

Якщо $l_1\perp l_2$, тоді $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ та $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$, тобто

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

При $l_1 \parallel l_2$ маємо $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ та

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Кут між двома прямими дорівнює куту між $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Нехай прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

1) $y = k_1x + b_1$ (l_1);

2) $y = k_2x + b_2$ (l_2),

тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

де $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$; $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}. \tag{6.7}$$

При $l_1 \perp l_2$ маємо $1 + k_1k_2 = 0$, тобто $k_1k_2 = -1$. При $l_1 \parallel l_2$ маємо $k_1 = k_2$.

Приклад 6.5. Для трикутника (приклад 6.4) записати рівняння перпендикулярів, що проходять через середини сторін, знайти координати центра описаного кола при умові попереднього прикладу.

Розв'язання.

1. Середина сторони AB буде мати координати

$$x = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2};\ y = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2},$$

тобто $(-1/2, -1/2)$.

2. Через точку $(-1/2, -1/2)$ треба провести пряму, перпендикулярно до прямої AB. Кутовий коефіцієнт прямої $k_{AB} : k = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$; $k = 5/7$. Тоді кутовий коефіцієнт серединного перпендикуляра k = -7/5.

3. Рівняння прямої, перпендикулярної до AB, яка проходить через точку $(-1/2; -1/2)$, буде:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{7}{5}(x + \frac{1}{2}),$$

або

$$10y + 14x + 12 = 0,$$

або

$$5y + 7x + 6 = 0.$$

Аналогічно знайдемо рівняння прямої, перпендикулярної CB, що проходить через середину відрізка CB. Таким рівнянням буде: $7y + x = 0$.

4. Знайдемо точку перетину двох прямих:

$$\begin{cases} 5y + 7x + 6 = 0 \\ 7y + x \qquad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7y \\ 5y - 49y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{21}{22} \\ y = \dfrac{3}{22} \end{cases}.$$

Таким чином, координати центра описаного кола будуть:

$$x = -\frac{21}{22};\ y = \frac{3}{22}.$$

6.6. Нормальне рівняння прямої на площині, відстань від точки до прямої

Нехай як нормальний вектор $\vec{n}$ прямої (рис. 6.2) вибрано одиничний вектор $\vec{n}_0(\cos\alpha, \sin\alpha)$ та задана p відстань від початку координат до прямої. Знайдемо проекцію вектора $\vec{r}(x, y)$, який проведено від початку координат до будь-якої точки прямої, на вектор $\vec{n}$.

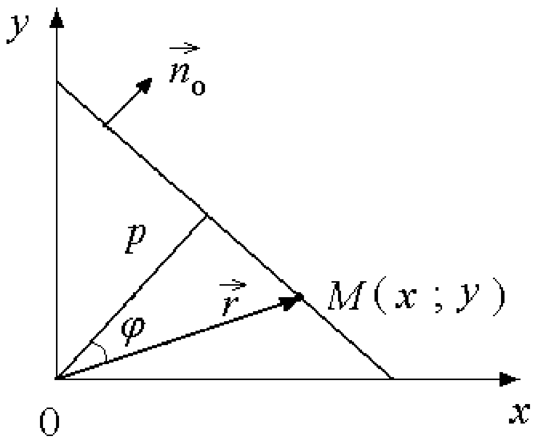


Рис. 6.2

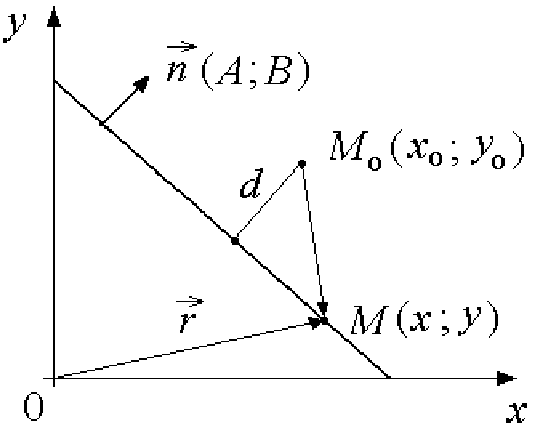


Рис. 6.3

Отже, $np_{\vec{n}}\vec{r} = \left|\vec{r}\right|\cos\varphi = \vec{r}\cdot\vec{n}_0$. Відзначимо, що $np_{\vec{n}}\vec{r} = p$, та запишемо нормальне рівняння прямої у векторній формі:

$$\vec{r}\cdot\vec{n} - p = 0,$$

або у скалярній:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (6.8)$$

Це рівняння має дві важливі властивості:

1) $-p \le 0$;

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

На основі цих властивостей можна загальне рівняння прямої привести до нормального вигляду. Помножимо загальне рівняння прямої на нормувальний множник M

$$MAx + MBy + MC = 0$$

та знайдемо M з умови:

$$M^2A^2 + M^2B^2 = 1;\ MC < 0.$$

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отже, щоб привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду, слід поділити його на довжину нормального вектора зі знаком, що є протилежним знаку вільного члена.

Для знаходження відстані точки $M_0\,(x_0, y_0)$ до прямої проведемо із точки вектор у будь-яку точку $M\,(x, y)$ даної прямої (рис. 6.3). Отже,

$$\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M}\right| = d\ ,$$

або

$$np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M} = \frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax+By-(Ax_0+By_0)}{\sqrt{A^2+B^2}} =$$

$$= \frac{Ax+By+C-(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(точка $M\,(x, y)$ належить прямій, тому $Ax+By+C\equiv 0$.) Звідси одержимо:

$$d = \left|\ np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M}\ \right| = \frac{\left|\ Ax_0+By_0+C\ \right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ . \qquad (6.9)$$

Таким чином, щоб знайти відстань від точки до прямої, треба привести рівняння прямої до нормального вигляду, підставити в нього координати точки і даний вираз узяти по модулю.

Приклад 6.6. Задано трикутник з вершинами $A(1;\,2)$, $B(4;\,5)$, $C(6;\,1)$. З вершини A проведені висота, медіана, бісектриса. Скласти рівняння цих ліній і знайти їх довжину. Обчислити площу трикутника.

Розв'язання.

Зробимо рисунок (рис.6.4), на якому позначемо AK – висота, AM – медіана, AN – бісектриса.

Знайдемо рівняння висоти. Висота $AK \perp$ вектору BC, тобто вектор $\overline{BC}\,(6\text{-}4{,}1\text{-}5)$ = $\overline{BC}\,(2,\text{-}4)$ є нормальним вектором до прямої AK, яка проходить через точку A. Тоді з умови $AK \perp BC$ рівняння висоти AK має вигляд

$$2(x-1)-4(y-2)=0 \text{ або } x-2y+3=0.$$

Другий спосіб. Рівняння висоти AK знайдемо як рівняння прямої, що проходить через A і має кутовий коефіцієнт k:

$$y - y_A = k(x - x_A) \text{ або } y - 2 = k(x - 1).$$

Кутовий коефіцієнт знайдемо з умови $AK \perp BC$, тобто $k \cdot k_{BC} = -1$. Коефіцієнт k_{BC} має значення $k_{BC} = \dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \dfrac{5-1}{4-6} = -2$. Отже, $k = \dfrac{1}{2}$. Рівняння висоти AK: $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-1)$, або $x - 2y + 3 = 0$.

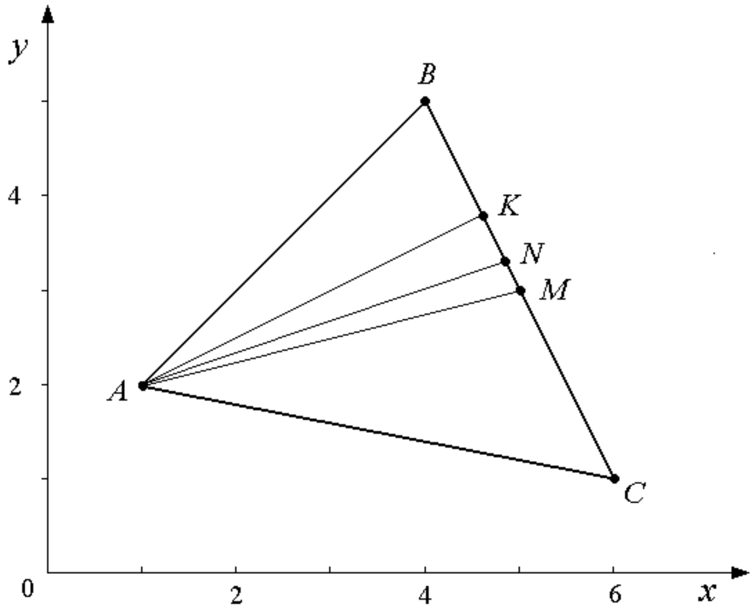


Рис. 6.4

Довжину висоти AK знайдемо за формулою відстані точки A від прямої BC: $|AK| = \left| \dfrac{Ax_A + By_A + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$, де $Ax + By + C = 0$ загальне рівняння прямої BC. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки B і C:

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}.$$

Отже, маємо $\dfrac{y-5}{1-5} = \dfrac{x-4}{6-4}$ або $y + 2x - 13 = 0$. Тоді

$$|AK| = \left| \frac{2+2\cdot 1-13}{\sqrt{4+1}} \right| = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

Рівняння медіани можна скласти як рівняння прямої AM, яка проходить через дві точки A і M, причому координати точки M знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \qquad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}, \text{ або } x_M = 5,\ y_M = 3.$$

Рівняння медіани AM дістанемо у вигляді

$$\frac{y - y_A}{y_M - y_A} = \frac{x - x_A}{x_M - x_A}, \qquad \frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1}{5-1}, \text{ або } x - 4y + 7 = 0.$$

Довжину медіани знайдемо як відстань між двома точками:

$$|AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2};\ |AM| = \sqrt{(5-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{17}.$$

Рівняння і довжину бісектриси AN можна знайти аналогічно рівнянню і довжині медіани AM. Координати точки N дістанемо, скориставшись формулами

$$x_N = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda}, \qquad y_N = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda},$$

де λ – співвідношення, у якому точка N поділяє сторону BC. Згідно із властивостями бісектриси трикутника $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \lambda$. Довжини AB і AC знаходимо як довжини між точками:

$$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}, \qquad |AC| = \sqrt{(6-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}.$$

Отже, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$ і $x_N = \frac{4 + 0.7\cdot 5}{1.7} \approx 4.8$, $\qquad y_N = \frac{5 + 0.7\cdot 1}{1.7} \approx 3.35$.

Рівняння бісектриси:

$$\frac{y-y_A}{y_N-y_A}=\frac{x-x_A}{x_N-x_A}, \qquad \frac{y-2}{3.35-2}=\frac{x-1}{4.8-1},$$

або $3.8y-1.35x-6.25=0$.

Довжина бісектриси $|AN|=\sqrt{(4.8-1)^2+(3.35-2)^2}=\sqrt{3.8^2+1.35^2}\approx 4.03$.

Площу трикутника обчислимо через модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{BC}(6-4;1-5)=\overrightarrow{BC}(2;-4)$ і $\overrightarrow{AB}(4-1;5-2)=\overrightarrow{AB}(3;3)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix}=\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-18\vec{k}.$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}18=9.$$

Запитання для самодіагностики

1. Що таке рівняння лінії?
2. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
3. Як записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
4. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямі?
5. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
6. Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?
7. Записати векторне рівняння прямої.
8. Записати канонічне рівняння прямої.
9. Який вигляд мають параметричні рівняння прямої?
10. Як записати нормальне рівняння прямої?
11. Як знайти відстань від точки до прямої?
12. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими?
13. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

14. Як обчислюється кутовий коефіцієнт прямої із його загального рівняння?

Приклади і вправи

Приклади:

6.7. Перетворити загальне рівняння прямої $2x-3y+6=0$ до вигляду з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання.

Розв'язуючи це рівняння відносно y, одержуємо

$$y=\frac{2}{3}x+2.$$

Отже, кутовий коефіцієнт прямої $k=\frac{2}{3}$, а параметр $b=2$.

6.8. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осі Oy відрізок $b=-5$ і утворює кут $\alpha=135°$ з віссю абсцис.

Розв'язання.

Знайдемо $k=tg135°=-tg45°=-1$. Тоді шукане рівняння прямої за формулою прямої із кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y=-x-5.$$

6.9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з віссю Ox кут $\alpha=60°$.

Розв'язання.

Оскільки шукана пряма проходить через початок координат, то $b=0$, і її рівняння має вигляд $y=kx$, де $k=tg60°=\sqrt{3}$. Отже,

$$y=\sqrt{3}x.$$

6.10. Загальне рівняння прямої $5x-6y+30=0$ призвести до рівняння у відрізках.

Розв'язання.

Запишемо задане рівняння у вигляді $5x-6y=-30$ і поділимо усі його члени на (-30). Одержуємо рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{5}=1.$$

Тут $a=-6$, $b=5$. За цими величинами легко побудувати графік заданої прямої (рис. 6.10).

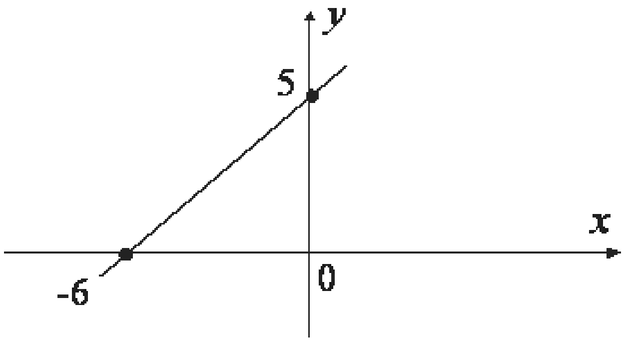


Рис. 6.10

6.11. Через точку $M(2;-5)$ провести пряму, яка відтинає на осях координат рівні за величиною відрізки.

Розв'язання.

Згідно з умовою задачі $a=b$. Тоді рівняння шуканої прямої має вигляд $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1,$ або $x+y=a$. Щоб знайти параметр a, підставимо координати точки $M(2;-5)$, яка за умовою належить прямій, у рівняння $x+y=a$, звідки дістаємо $a=2-5=-3$. Шукане рівняння прямої має вигляд $x+y=-3$ або $x+y+3=0$.

6.12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-5;1)$ і утворює кут $60°$ з віссю Ox.

Розв'язання.

Кутовий коефіцієнт прямої $k=tg60°=\sqrt{3}$, а шукане рівняння згідно з формулою $y-y_0=k(x-x_0)$ має вигляд

$$y-1=\sqrt{3}(x+5) \quad \text{або} \quad y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}+1.$$

6.13. Точка C поділяє відрізок AB, де $A(1;-3)$, $B(-8;6)$, у відношенні $\lambda=2:1$. Через точку C провести пряму, яка утворює з віссю Ox кут $135°$.

Розв'язання.

Координати точки C знайдемо за формулами ділення відрізку в заданому відношенні:

$$x_c = \frac{x_a + \lambda x_b}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot(-8)}{1+2} = -5.$$

$$y_c = \frac{y_a + \lambda y_b}{1+\lambda} = \frac{-3+2\cdot 6}{1+2} = 3.$$

Отже, точка $C(-5;3)$, а $k = tg135° = -1$. Шукане рівняння прямої:

$$y-3=-1(x+5) \text{ або } x+y+2=0.$$

6.14. З жмутка (в'язки) прямих, які проходять через точку $M(-3;2)$, обрати ту пряму, яка відтинає на осі ординат відрізок, рівний 5 одиницям.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямих, що проходить через точку $M(-3;2)$:

$$y-2=k(x+3).$$

Перетворимо це рівняння до вигляду

$$y = kx + (3k+2).$$

Згідно з умовою $3k+2=5$, звідки $k=1$, і шукане рівняння:

$$y = x+5.$$

6.15. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(-5;1)$ і $B(3;-2)$.

Розв'язання.

Згідно з формулою $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ маємо

$$\frac{x+5}{3+5} = \frac{y-1}{-2-1}, \text{ або } 3x+8y+7=0.$$

6.16. Перевірити, чи лежать на однієї прямій точки $A(-2;-7)$, $B(1;-1)$, $C(4;5)$.

Розв'язання.

Складемо рівняння прямої, яка проходить через точки A і B:

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y+7}{-1+7}, \text{ або } 2x-y-3=0.$$

Точка C лежить на цій прямій, якщо її координати задовольняють одержаному рівнянню. Перевіримо це:

$$2\cdot 4-5-3=0, \text{ тобто } 0=0.$$

Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій.

6.17. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $x-2y-4=0$ і $2x-3y-7=0$ та точку $M(-5;2)$.

Розв'язання.

Знайдемо точку N перетину заданих прямих, розв’язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x-2y &=4 \\ 2x-3y &=7 \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}, \text{ а } N(2;-1) .$$

Далі складаємо рівняння прямої, що проходить через точки M і N:

$$\frac{x+5}{2+5}=\frac{y-2}{-1-2}, \quad \text{або} \quad 3x+7y+1=0.$$

6.18. Знайти гострий кут між прямою $9x+3y-7=0$ і прямою, яка проходить через точки $A(1;-1)$ і $B(5;7)$.

Розв'язання.

Знайдемо кутові коефіцієнти заданих прямих. Перша пряма після перетворення набуває вигляду:

$$y=-3x+\frac{7}{3}, \text{ тобто } k_1=-3.$$

Для другої прямої за формулою кутового коефіцієнта $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_1-x_2}$ маємо $k_2=\dfrac{7+1}{5-1}=2.$

Далі обчислимо кут, користуючись формулою: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$, отримаємо: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{2+3}{1-2\cdot 3}\right|=1$, тобто $\varphi=45^\circ$.

6.19. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2;5)$ і утворює кут 45° з прямою $x-3y+2=0$.

Розв'язання.

Шукане рівняння прямої

$$y-5=k(x+2).$$

Кутовий коефіцієнт заданої прямої $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ дорівнює $k_1=\dfrac{1}{3}.$

За формулою $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$ маємо наступне рівняння

$$\operatorname{tg}45^0=\left|\dfrac{k_2-\dfrac{1}{3}}{1+k_1\cdot\dfrac{1}{3}}\right|,\ 1=\left|\dfrac{3k-1}{k+3}\right|,$$

звідки

$$\frac{3k-1}{k+3}=1, \quad \text{або} \quad \frac{3k-1}{k+3}=-1.$$

Розв’язуючи ці рівняння, знаходимо для шуканої прямої

$$k=2 \quad \text{або} \quad k=-\frac{1}{2}.$$

А тоді рівняння прямих:

$$y-5=2(x+2) \ \text{або} \ y-5=-\frac{1}{2}(x+2),$$

які після спрощень набувають вигляду

$$2x-y+9=0 \ \text{або} \ x+2y-8=0.$$

6.20. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;-7)$,і паралельна прямій MN, де $M(-4;3)$, а $N(2;-5)$.

Розв'язання.

Рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;-7)$, шукаємо у вигляді

$$y+7=k(x-4).$$

Шукана пряма паралельна прямій MN. Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює

$$k_{MN}=\frac{-5-3}{2+4}=-\frac{4}{3}.$$

А оскільки шукана пряма паралельна прямій MN, то $k=-\frac{4}{3}$.

І тоді рівняння шуканої прямої

$$y+7=-\frac{4}{3}(x-4),\text{, або } 4x+3y+5=0.$$

6.21. Для трикутника ABC, де $A(2;1)$, $B(-1;-1)$ і $C(3;2)$, скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

Розв'язання.

Спочатку складемо рівняння прямої AB

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-1}{-1-1}, \quad \text{або} \quad y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}, \quad \text{де} \quad k=\frac{2}{3}.$$

Висота CD перпендикулярна до прямої AB і тому її кутовий коефіцієнт $k_{CD}=-\frac{1}{k}=-\frac{3}{2}$.

Рівняння висоти CD має вигляд

$$y-2=-\frac{3}{2}(x-3), \quad \text{або} \quad 3x+2y-13=0.$$

6.22. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $M(1;3)$ на однакових відстанях від точок $A(-5;1)$ і $B(9;-7)$.

Розв'язання.

Зробимо креслення до задачі (рис. 6.6).

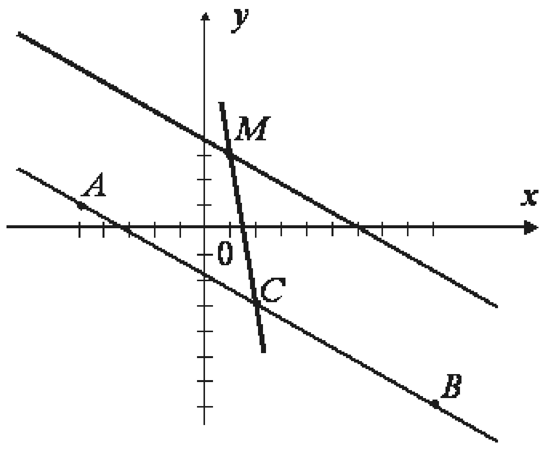


Рис. 6.6

Як видно із рис. 6.6, через точку M можна провести за умовою задачі дві прямі: одна паралельна прямій AB, а друга проходить через середину відрізка AB.

Щоб знайти рівняння першої прямої, знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AB:

$$k_{AB} = \frac{-7-1}{9+5} = \frac{-4}{7},$$

Тоді рівняння паралельної прямої:

$$y-3=-\frac{4}{7}(x-1), \text{ або } 4x+7y-25=0.$$

Для другої прямої треба знайти координати середини відрізка AB – точки C за відомими формулами:

$$x_C = \frac{-5+9}{2} = 2, \ y_C = \frac{1-7}{2} = -3.$$

Отже, $C(2;-3)$. А тоді рівняння прямої MC:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{-3-3}, \quad \text{або } 6x+y-9=0.$$

6.23. Знайти точку Q, яка симетрична точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт заданої прямої $2x-3y-3=0$ дорівнює $k=\frac{2}{3}$. Через точку $P(-5;13)$ проведемо перпендикуляр до прямої $2x-3y-3=0$. Його рівняння з урахуванням умови перпендикулярності до заданої прямої має вигляд

$$y-13=-\frac{3}{2}(x+5),\quad \text{або}\quad 3x+2y-11=0\quad (PQ).$$

Знайдемо точку A перетину прямої PQ і заданої прямої:

$$\begin{cases}3x+2y=11\\2x-3y=3\end{cases},\quad \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases};\quad A(3,1).$$

Оскільки точка Q симетрична точці P, то точка A поділяє відрізок PQ навпіл. За формулами ділення відрізка навпіл маємо

$$x_A=\frac{x_Q+x_P}{2},\quad y_A=\frac{y_Q+y_P}{2},$$

звідки

$$x_Q=2x_A-x_p=2\cdot 3+5=11,$$
$$y_Q=2y_A-y_p=2\cdot 1-13=-11.$$

Отже, точка $Q(11;-11)$ симетрична точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

6.24. Призвести до нормального вигляду рівняння прямої $12x+5y+78=0$.

Розв'язання.

Нормувальний множник

$$M=-\frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}}=-\frac{1}{13}.$$

Тоді нормальне рівняння заданої прямої має вигляд

$$-\frac{12}{13}x-\frac{15}{13}y-6=0.$$

З цього рівняння видно, що відстань прямої від початку координат дорівнює 6.

6.25. Знайти відстань від точки $M\left(-1;-3\right)$ до прямої $8x-6y+5=0$.

Розв'язання.

За формулою відстані точки до прямої

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

отримаємо:

$$d=\frac{\left|-8+18+5\right|}{\sqrt{8^2+\left(-6\right)^2}}=\frac{15}{10}=1{,}5.$$

6.26. Знайти відстань між паралельними прямими

$3x+4y-13=0$ і $3x+4y+22=0$.

Розв'язання.

На першій прямій візьмемо будь-яку точку, наприклад, $M\left(3;1\right)$ і знайдемо відстань від цієї точки до другої прямої. Це й буде шукана відстань між паралельними прямими.

Отже,

$$d=\frac{\left|3\cdot 3+4\cdot 1+22\right|}{\sqrt{9+16}}=7.$$

6.27. У трикутнику з вершинами $A\left(5;-3\right)$, $B\left(0;-1\right)$, $C\left(3;3\right)$ знайти довжину висоти, проведеної з вершини A.

Розв'язання.

Звичайно, що довжина шуканої висоти є відстань від точки A до прямої BC. Тому знайдемо рівняння цієї прямої:

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y+1}{3+1}, \text{ або } 4x-3y-3=0.$$

Далі знаходимо відстань від точки A до прямої BC

$$d=\frac{|4\cdot 5-3\cdot(-3)-3|}{\sqrt{16+9}}=\frac{26}{5}=5{,}2.$$

6.28. Скласти рівняння прямих, які паралельні прямій $3x-4y-10=0$ і які віддалені від неї на 3 одиниці.

Розв'язання.

Для будь-якої точки $M(x;y)$ шуканої прямої відстань від прямої до точки можна записати:

$$3=\frac{|3x-4y-10|}{\sqrt{9+16}}.$$

Звідси одержуємо рівняння $|3x-4y-10|=15$, наслідками котрого є наступні рівняння:

$$3x-4y-10=15 \text{ або } 3x-4y-10=-15.$$

Після перетворень маємо

$$3x-4y-25=0 \text{ або } 3x-4y+5=0.$$

Це і є шукані прямі.

6.29. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $3x+4y-9=0$ і $12x+9y-8=0$. Перевірити, що бісектриси перпендикулярні.

Розв'язання.

За означенням бісектриси кута кожна її точка $M(x;y)$ рівновіддалена від сторін кута. Відстані d_1 і d_2 точки $M(x;y)$ від сторін кута знаходимо за формулами:

$$d_1=\frac{|3x+4y-9|}{5},\ d_2=\frac{|12x+9y-8|}{15}.$$

Далі маємо рівняння

$$\frac{|3x+4y-9|}{5}=\frac{|12x+9y-8|}{15},$$

з якого одержуємо рівняння бісектрис:

а) $3(3x+4y-9)=12x+9y-8$, тобто $3x-3y+19=0$;

б) $3(3x+4y-9)=-(12x+9y-8)$, тобто $3x+3y-5=0$.

Кутові коефіцієнти цих прямих дорівнюють 1 і -1, а тому бісектриси взаємноперпендикулярні.

Вправи:

6.30. Знайти рівняння прямої, яка відтинає на осі Oy відрізок величиною -5 і утворює з віссю Ox кут α:

а) $\alpha=45°$; б) $\alpha=60°$; в) $\alpha=135°$; г) $\alpha=180°$.

6.31. Написати рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з віссю Ox кут α:

а) $\alpha=45°$; б) $\alpha=30°$; в) $\alpha=120°$; г) $\alpha=135°$.

6.32. Записати рівняння заданих прямих у вигляді рівнянь у відрізках:

а) $2x-3y-6=0$; б) $2x-5y+4=0$.

Побудувати ці прямі.

6.33. Обчислити площу трикутника, який міститься між осями координат і прямою $5x-4y+20=0$.

6.34. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2;8)$ і середину відрізка MN, де $M(6;-5)$, $N(-2;1)$.

6.35. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $M(2;3)$ під кутом $45°$ до прямої $5x+2y-4=0$.

6.36. Знайти вершини трикутника, якщо відомі рівняння його сторін: $7x+3y-25=0\,(AB)$, $2x-7y-15=0\,(BC)$, $9x-4y+15=0\,(AC)$.

6.37. При якому значенні m прямі $mx+(1-m)y-3=0$, $2x-3y-3=0$ і $7x+5y-2=0$ проходять через одну точку?

6.38. Діагоналі ромба дорівнюють 8 і 3 одиниць. Написати рівняння сторін ромба, якщо більша діагональ лежить на осі Ox, а менша – на осі Oy.

6.39. Знайти периметр трикутника, обмеженого прямими $4x-3y+6=0$, $x+3y-36=0$ і віссю ординат.

6.40. Скласти рівняння прямої, яка проходить через середину відрізка AB, де $A(-1;6)$, $B(9;-6)$ паралельно прямій $2x-3y+5=0$.

6.41. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x+2y+7=0$ і $4x+3y+9=0$ паралельно прямій $y=-2x+3$.

6.42. Через точку $M(-3;2)$ провести дві прямі так, щоб одна з них була паралельна, а друга перпендикулярна до прямої $4x+5y-2=0$.

6.43. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3)$ перпендикулярно до прямої, яка містить точки $A(1;7)$ і $B(-2;-5)$.

6.44. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x-3y+5=0$ і $3x+y-7=0$ перпендикулярно до прямої $2x-y+11=0$.

6.45. Скласти рівняння діагоналей ромба, якщо відомі координати двох його протилежних вершин $M(-3;2)$ і $N(7;-6)$.

6.46. Знайти проекцію точки:

а) $M(3;4)$ на пряму $2x+5y+3=0$;

б) $N(5;-2)$ на пряму $2x-3y-3=0$.

6.47. Знайти проекцію точки $A(-8;12)$ на пряму, яка проходить через точки $M(2;-3)$ і $N(-5;1)$.

6.48. Задані вершини трикутника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини A до медіани, проведеної з вершини B.

6.49. Задані рівняння двох сторін паралелограма $x-2y=0$ і $x-y-1=0$ та точка перетину його діагоналей $M(3;-1)$. Знайти рівняння двох інших сторін.

6.50. Знайти точку, що симетрична точці $A(8;-9)$ відносно прямої, яка проходить через точки $M(3;-4)$ і $N(-1;-2)$.

6.51. Знайти точку B, яка симетрична точці $A(2;-5)$ відносно прямої $2x+8y-15=0$.

6.52. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $M(3;5)$ на однакових відстанях від точок $A(-7;3)$ і $B(11;-15)$.

6.53. Знайти відстань від точки $M(-1;3)$ до прямої $3x-4y+40=0$.

6.54. Знайти відстань між паралельними прямими $2x-3y-5=0$ і $2x-3y+21=0$.

6.55. Точка $A(2;-5)$ є вершина квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Знайти площу квадрата.

6.56. Перевірити, що точки $A(-4;-3)$, $B(-5;0)$, $C(5;6)$ і $D(1;0)$ є вершини трапеції. Знайти висоту трапеції.

6.57. У трикутнику з вершинами $A(-3;0)$, $B(2;5)$ і $C(3;2)$ знайти довжину висоти BD і його площу.

6.58. Скласти рівняння прямих, віддалених від точки $A(3;-4)$ на 5 одиниць і паралельних прямій $10x-24y+7=0$.

6.59. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $12x+5y-52=0$ і віддалених від неї на 2 одиниці.

6.60. У трикутнику з вершинами $A(1;2)$, $B(3;7)$ і $C(5;-13)$ знайти довжину перпендикуляра, проведеного з вершини B на медіану AM.

6.61. Дві сторони квадрата лежать на прямих $4x-3y+15=0$ і $8x-6y+25=0$. Обчислити його площу.

6.62. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими $3x+4y-5=0$ і $5x-12y+3=0$.

6.63. На осі ординат знайти точки, які рівновіддалені від початку координат і від прямої $3x-4y+12=0$.

6.64. У трикутнику з вершинами $A(6;8)$, $B(2;-4)$ і $C(-6;4)$ знайти кут між стороною AB і медіаною AM.

Глава 7
Криві другого порядку

7.1. Загальні рівняння

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F – будь-які числа, крім того, числа A, B, C не дорівнюють нулю одночасно. Залежно від знаку величини $AC - B^2$ лінії другого порядку поділяються на три типи:

1) еліптичний, якщо $AC - B^2$>0;
2) гіперболічний, якщо $AC - B^2$<0;
3) параболічний, якщо $AC - B^2$=0.

Розглянемо лінії другого порядку різних типів: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

7.2. Канонічні рівняння кола та еліпса

Колом називається множина точок, відстань кожної з яких до однієї точки, що називається центром, є величина стала. Відстань будь-якої точки кола від її центра – це радіус кола.

Знайдемо рівняння кола з центром у точці $C(a;b)$ та радіусом R. Хай $M(x,y)$ – деяка точка кола. Тоді з визначення маємо (рис. 7.1) $\left|\overrightarrow{OM}\right| = R$, або $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = R^2$, або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{7.1}$$

Це буде шукане рівняння кола. Якщо центр кола співпадає з початком координат, то рівняння кола буде:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{7.2}$$

Еліпсом називається множина точок, сума відстаней яких від двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є величина стала.

Для знаходження канонічного рівняння еліпса позначимо $M(x;y)$ як довільну точку еліпса. Хай вісь OX проходить між фокусами, а вісь OY – через середину відстані між фокусами. Тоді з визначення еліпса $|MF_1|+|MF_2|=2a$ (рис. 7.2) відстань між фокусами нехай буде дорівнювати $2c$ ($2a > 2c$), тобто для еліпса $a > c$.

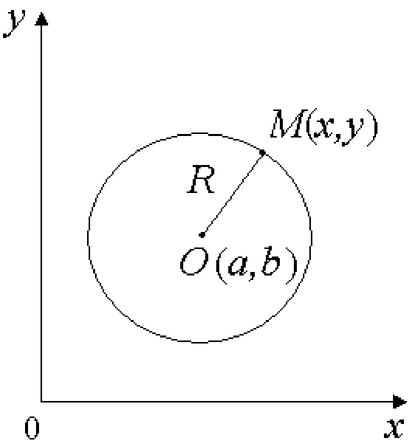


Рис. 7.1

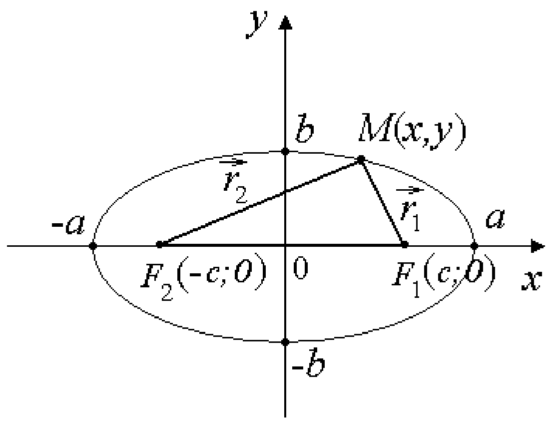


Рис. 7.2

Запишемо рівняння еліпса відповідно до його визначення:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Спростимо одержане рівняння

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Позначимо через b^2 величину $a^2-c^2\left(a^2-c^2>0\right)$. Одержимо

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.3)$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням еліпса.

Таким чином, еліпс – замкнута крива, яка симетрична відносно вісей координат та початку координат, тому що разом з точкою $M_1(x;y)$ до цієї кривої належать і точки $M_2(x;-y)$, $M_3(-x;y)$, $M_4(-x;-y)$. Усі точки еліпса лежать у середині прямокутника, який обмежений прямими $x = \pm a$ і $y = \pm b$ Точки $(0,\pm b)$ та $(\pm a,0)$ називаються вершинами еліпса, а числа $a > 0$ та $b > 0$ – піввісями еліпса. Для еліпса $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Величина $c/a = \varepsilon$ називається ексцентриситетом еліпса та характеризує його форму. Якщо $a = b$, то $\varepsilon = 0$ (еліпс переходить в коло), якщо зменшувати b, залишивши a сталою, то еліпс буде наближатися до відрізка $[-a,a](\varepsilon = 1)$.

Ексцентриситет еліпса можна знайти за формулою:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

або

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \qquad \varepsilon < 1.$$

Лінії $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами еліпса** $\left(F_1(c;0);F_2(-c;0)\right)$.

Приклад 7.1. Задано еліпс: $4x^2 + 9y^2 = 36$. Визначити його вісі, вершини, фокуси, директриси.

Розв'язання.

Запишемо задане рівняння в канонічній формі:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Видно, що $a^2 = 9$, $b^2 = 4$. Тобто вісі: $2a = 6$, $2b = 4$. Координати вершин еліпса : (3; 0), (-3;0), (0; 2), (0; -2). Знайдемо величину $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$. Таким чином, $F_1\left(\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{5};0\right)$. Для рівнянь директрис еліпса знаходимо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Тоді маємо: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.

7.3. Канонічне рівняння гіперболи. Асимптоти гіперболи

Гіперболою називається множина точок, для яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є величина стала.

Якщо точка $M\left(x,y\right)$ належить гіперболі, а $F_1(c;0)$ та $F_2(-c;0)$ – її фокуси, то властивість точок гіперболи можна записати: $\left|MF_1\right| - \left|MF_2\right| = \pm 2a$. Канонічне рівняння гіперболи буде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.4}$$

де

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Гіпербола, як еліпс, симетрична відносно вісей координат (рівняння парного ступеня). Усі точки гіперболи лежать поза смугою, обмеженою прямими $x = \pm a$. Точки $\left(\pm a;0\right)$ називаються вершинами гіперболи; $a > 0$ – дійсна піввісь, $b > 0$ – уявна піввісь.

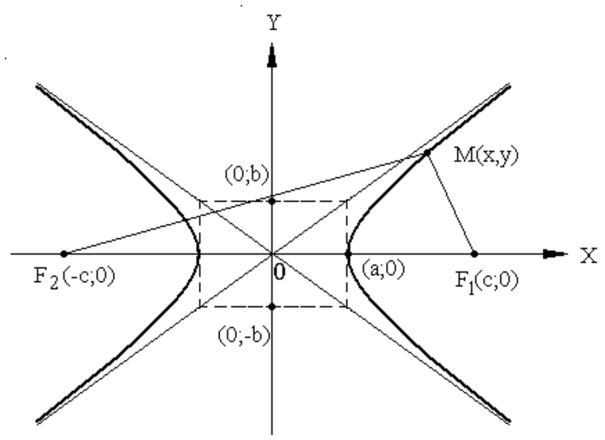
Розв’яжемо рівняння гіперболи відносно y:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Якщо $x \to \infty$; то $y \to \infty$, гіпербола має нескінченні гілки та, крім того, при великих значеннях x змінна буде наближатися до $\pm\frac{b}{a}\cdot x$, а це означає, що гіпербола буде наближатися до прямих $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$. Дійсно

$$\lim_{x\to\infty}\left(y_{ac} - y_{гип}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Прямі $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$ називаються асимптотами гіперболи. Внаслідок того, що $|x| > \sqrt{x^2 - a^2}$, точки гіперболи лежать у середині кута, який містить у собі вісь *Ox* та утворений асимптотами (рис. 7.3).



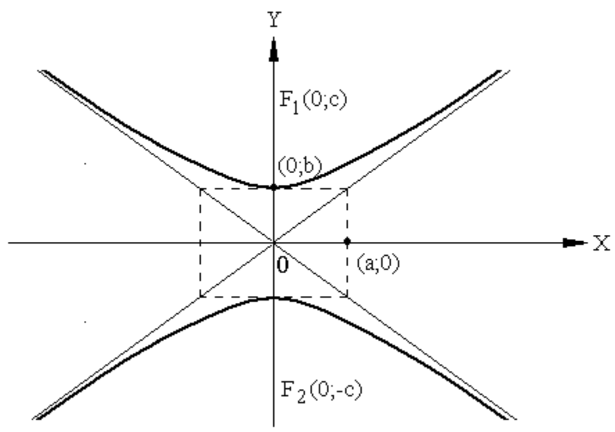


Рис. 7.3 Рис. 7.4

Позначимо $\varepsilon = c/a > 1$ – ексцентриситет гіперболи. Якщо ε збільшується, a – фіксовано, то зростає і b, тобто збільшується кут між асимптотами. При $\varepsilon \to 1$ гіпербола наближається до відрізків $(-\infty, -a)$ та $(a, +\infty)$ осі Ox. Точку перетину асимптот гіперболи називають центром гіперболи. Поряд з гіперболою $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ можна розглянути гіперболу $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Її дійсна вісь – це вісь *Oy*, асимптоти співпадають з асимптотами початкової гіперболи. Ці гіперболи називаються спряженими (рис. 7.4).

Якщо піввісі гіперболи рівні одна одній, тобто $a=b$, гіпербола називається рівнобічною. Рівняння її асимптот $y=\pm x$, тобто вони взаємно перпендикулярні. Така гіпербола задається рівнянням $x^2-y^2=a^2$.

Ексцентриситет гіперболи можна знайти за формулами:

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

або

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\quad(\varepsilon>1).$$

Ексцентриситет характеризує форму прямокутника, діагоналями якого є асимптоти гіперболи.

Приклад 7.2. Задано гіперболу: $9x^2-16y^2=144$. Знайти її вісі, вершини і фокуси, асимптоти.

Розв'язання.

Запишемо задане рівняння в канонічній формі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Видно, що $a^2=16$ і $b^2=9$. Тобто вісі гіперболи: $2a=8$, $2b=6$. Координати вершин гіперболи: (4; 0), (-4; 0). Знайдемо величину $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$. Маємо координати фокусів: $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$.

Рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x$. Визначимо величину ε: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.

7.4. Парабола. Канонічне рівняння

Параболою називається множина точок, відстань яких від фокуса дорівнює відстані від прямої, що є директрисою параболи (рис. 7.5). Знайдемо канонічне рівняння параболи на основі її геометричної властивості $|MF|=|MN|$, або

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Після спрощення отримаємо

$$y^2=2px.$$

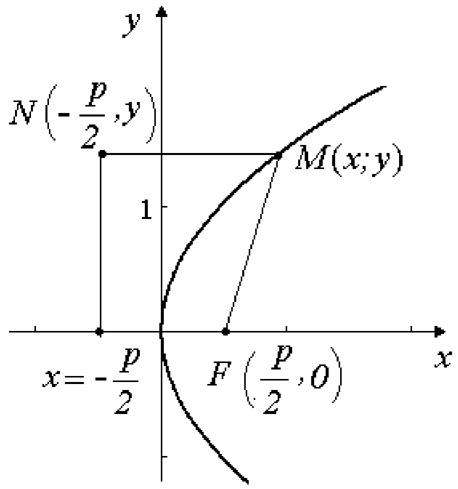


Рис. 7.5

Рівняння параболи також може мати вигляд:

$$x^2=2py.$$

Така парабола має фокус $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, директрису $y=-\frac{p}{2}$.

Приклад 7.3. Скласти рівняння параболи, вершина якої лежить у початку координат, коли: а) парабола симетрична відносно осі ОХ і має фокус в точці $F(3;0)$; б) парабола симетрична відносно осі OY і має директрису $y+3=0$.

Розв'язання:

а) $y^2=2px$. Фокус параболи: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Тобто, $\frac{p}{2}=3$, $2p=12$. Маємо: $y^2=12x$;

б) $x^2 = 2py$. Директриса параболи: $y = -\frac{p}{2}$.

Якщо, $y = 3$, то $\frac{p}{2} = 3$, $2p = 12$. Маємо: $x^2 = 12y$.

Якщо лінія другого порядку задана в загальному вигляді, паралельне перенесення системи координат дозволить визначити тип лінії. Нехай маємо систему координат *xOy* з початком в точці O(0;0). Перенесемо паралельно осі координат і отримаємо нову систему координат $x_1O_1y_1$ з початком в точці $O_1(a;b)$. Тоді можна записати координати точки $M(x;y)$ в новій системі $M(x_1;y_1)$

$$x_1 = x - a;$$
$$y_1 = y - b.$$

Приклад 7.4. Визначити тип лінії:

а) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$;

б) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

Розв'язання:

а) $4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 3(y^2 + 4y + 4) - 12 - 32 = 0$;

$4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 48$;

$\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$

Робимо паралельне перенесення системи координат:

$x_1 = x - 1$; $O_1(1;-2)$;

$y_1 = y + 2$;

$\frac{x_1^2}{12} + \frac{y_1^2}{16} = 1$ – еліпс;

б) $16(x^2 - 4x + 4) - 64 - 9(y^2 + 6y + 9) + 81 - 161 = 0$.

$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 144$.

$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$

$x_1 = x - 2$, $y_1 = y - 3$, $O_1(2;-3)$.

$\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1$ – гіпербола.

Якщо центр лінії другого порядку знаходиться в точці $O_1(x_0;y_0)$, то рівняння кривих будуть:

коло: $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$;

еліпс: $\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$;

гіпербола: $\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$;

парабола: $y-y_0=2p\left(x-x_0\right)$.

Запитання для самодіагностики

1. Що називається колом?
2. Який вигляд має канонічне рівняння кола?
3. Що називається еліпсом?
4. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?
5. Як пов'язані між собою a, b, c для еліпса?
6. Що називається ексцентриситетом еліпса?
7. Де знаходяться фокуси?
8. Що називається гіперболою?
9. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?
10. Як пов'язані між собою a, b, c для гіперболи?
11. Що називається ексцентриситетом гіперболи?
12. Де знаходяться фокуси?
13. Яку гіперболу називають рівнобічною?
14. Записати рівняння асимптот гіперболи.
15. Що називається параболою?
16. Який вигляд має канонічне рівняння параболи?

Приклади і вправи

Приклади:

7.5. Скласти рівняння кола з центром у точці $C\left(-1;4\right)$, яке проходить через точку $A\left(3;5\right)$.

Розв'язання.

За формулою $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ маємо:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=R^2.$$

Щоб знайти радіус кола R, треба підставити координати точки $A(3;5)$ в написане рівняння. Отже, маємо:

$$(3+1)^2+(5-4)^2=R^2,$$

звідки $R^2=17$, і тоді шукане рівняння кола:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=17.$$

7.6. Скласти рівняння кола, якщо кінці одного з його діаметрів знаходяться в точках $M(2;-7)$ і $N(-4;3)$.

Розв'язання.

Звичайно, центр кола знаходиться у точці C – середині відрізка MN. За формулами ділення відрізка навпіл маємо $C(-1;-2)$. Радіус кола R дорівнює довжині відрізка CM, тобто

$$R=\sqrt{(2+1)^2+(-7+2)^2}=\sqrt{34}.$$

Шукане рівняння кола має вигляд:

$$(x+1)^2+(y+2)^2=34.$$

7.7. Скласти рівняння кола, яке має центр у точці $C(8;6)$ і дотикається прямої $5x-12y-46=0$.

Розв'язання.

Радіус шуканого кола знайдемо як відстань від точки $C(8;6)$ до прямої $5x-12y-46=0$:

$$R=\frac{|5\cdot 8-12\cdot 6-46|}{\sqrt{25+144}}=\frac{78}{13}=6.$$

Отже, рівняння кола з центром у точці $C(8;6)$ і радіусом $R=6$ має вигляд:

$$(x-8)^2+(y-6)^2=36.$$

7.8. Скласти рівняння кола, яке дотикається осі абсцис і проходить через точки $A(7;8)$ і $B(6;9)$.

Розв'язання.

Нехай точка $C(a;b)$ – радіус шуканого кола (рис. 7.6) Звичайно, радіус кола $R=b$. Оскільки $AC=R$ і $BC=R$, запишемо і розв'яжемо систему рівнянь.

$$\begin{cases}\sqrt{(a-7)^2+(b-8)^2}=b,\\ \sqrt{(a-6)^2+(b-9)^2}=b,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-14a-16b+113=0,\\ a^2-12a-18b+117=0.\end{cases}$$

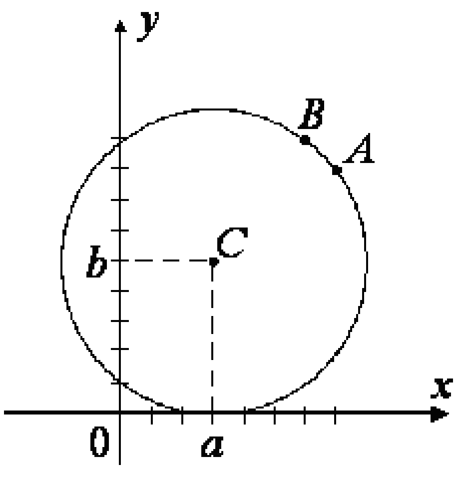


Рис. 7.6

Звідси одержуємо розв'язки:

$$\begin{cases}a=3\\ b=5\end{cases}, \text{ або } \begin{cases}a=27\\ b=29\end{cases}.$$

Отже, умову задачі задовольняють два кола, рівняння яких мають вигляд

$$(x-3)^2+(y-5)^2=25,\ (x-27)^2+(y-29)^2=841.$$

7.9. Скласти рівняння кола, яке проходить через три точки $A(-2;-6)$, $B(-3;1)$ і $C(4;2)$.

Розв'язання.

Нехай точка $M(a;b)$ – центр шуканого кола. Тоді $AM=BM=CM$ як радіуси кола. Застосовуючи формулу відстані між двома точками, складемо систему рівнянь відносно невідомих a і b:

$$\begin{cases}\sqrt{(a+2)^2+(b+6)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(b-1)^2}\\ \sqrt{(a+3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2}\end{cases}.$$

Після перетворень одержуємо

$\begin{cases}a-7b=15\\ 7a+b=5\end{cases}$, звідки $a=1$, $b=-2$, тобто $M(1;-2)$, а

$$R=\sqrt{(1+2)^2+(-2+6)^2}=5.$$

Шукане рівняння кола має вигляд:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25.$$

7.10. Знайти відстань між центрами кіл $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ і $x^2+y^2+3x+4y-12=0$.

Розв'язання.

Перетворимо кожне рівняння до канонічного вигляду

$$x^2+y^2-10x+16y+80=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-5)^2+(y+8)^2-25-64+80=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-5)^2+(y+8)^2=9.$$

Центр першого кола у точці $C_1(5;-8)$.

Аналогічно маємо:

$$x^2+y^2+6x+4y-12=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

Центр другого кола у точці $C_2(-3;-2)$.

Відстань C_1C_2 знаходимо за формулою:

$$C_1C_2=\sqrt{(5+3)^2+(-8+2)^2}=10.$$

7.11. Скласти канонічне рівняння еліпса, у якого довжина малої осі дорівнює 24, а один з фокусів має координати $(-5;0)$.

Розв'язання.

За умовою $2b=24$, тобто $b=12$, а $c=5$. Тоді $a^2=b^2+c^2=169$. Рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1.$$

7.12. Скласти канонічне рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{2};2)$ і $B(2;\sqrt{3})$..

Розв'язання.

В рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ підставимо координати заданих точок і одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{2}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\end{cases},$$

з якої маємо $a^2=10$, $y^2=5$. Тобто рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1.$$

7.13. Еліпс, ексцентриситет якого $\varepsilon = 0{,}5$, а фокуси лежать на осі Ox, проходить через точку $M(-4;\sqrt{15})$. Скласти рівняння цього еліпса і знайти відстані від його фокусів до точки M.

Розв'язання.

Координати точки $M(-4;\sqrt{15})$ підставимо в канонічне рівняння еліпса і одержимо рівняння

$$\frac{16}{a^2} + \frac{15}{b^2} = 1.$$

Крім того, за умовою

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ або } \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ або } \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ звідки } a^2 = \frac{4b^2}{3}.$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння

$$\frac{16 \cdot 3}{4b^2} + \frac{15}{b^2} = 1, \text{ звідки } b^2 = 27.$$

Тоді $a^2 = 36$, а рівняння еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. Далі знайдемо координати фокусів і їх відстані до точки M.

Оскільки $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, то $c^2 = \frac{36}{4} = 9$, а $c = 3$. Тоді фокуси: $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, а відстані

$$F_1M = \sqrt{(-3+4)^2 + 15} = 4;$$

$$F_2M = \sqrt{(3+4)^2 + 15} = 8.$$

7.14. Показати, що рівняння $9x^2 + 18x + 16y^2 - 64y - 71 = 0$ є рівнянням еліпса. Знайти центр і осі еліпса, побудувати його.

Розв'язання.

Перетворимо задане рівняння до канонічного вигляду. Для цього згрупуємо доданки, які містять змінні x і y, і виділимо в одержаних дужках повні квадрати.

Отже, маємо

$$(9x^2+18x)+(16y^2-64y)-71=0;$$

$$9(x^2+2x+1-1)+16(y^2-4y+4-4)-71=0;$$

$$9(x+1)^2+16(y-2)^2=144;$$

$$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Це рівняння визначає еліпс з центром у точці $C(-1;2)$, півосі якого дорівнюють $a=4$, $b=3$ (рис. 7.7).

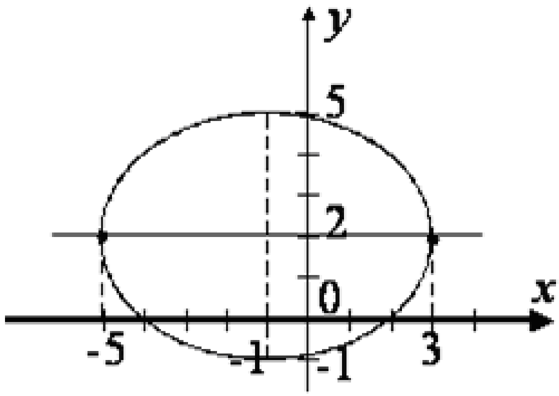


Рис. 7.7

7.15. Скласти рівняння траєкторії точки M, відстань якої до точки $A(1;0)$ вдвічі менша, ніж до прямої $x=4$.

Розв'язання.

Нехай точка $M(x;y)$ належить шуканій траєкторії. За умовою $AM=\frac{1}{2}MB$, де точка $M(4;y)$ лежить на прямій $x=4$. Отже, маємо рівняння:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2},$$

яке після перетворень набуває вигляду:

$$3x^2+4y^2=12, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Це канонічне рівняння еліпса, у якого $a=2$, $b=\sqrt{3}$.

7.16. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точки $M(3;-2)$ і $N(-6;2\sqrt{10})$. Знайти ексцентриситет і фокуси гіперболи.

Розв'язання.

У рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ підставимо координати заданих точок і одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{36}{a^2}-\frac{40}{b^2}=1\end{cases},$$

з якої знаходимо $a^2=6$, $b^2=8$. Тоді рівняння гіперболи $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1$. Далі знаходимо $c^2=a^2+b^2=14$. Отже, координати фокусів $F_1(-\sqrt{14};0)$ і $F_2(\sqrt{14};0)$, а ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

7.17. Написати рівняння гіперболи, один із фокусів якої знаходиться у точці $(-10;0)$, а прямі $y=\pm\frac{3}{4}x$ є її асимптотами.

Розв'язання.

За умовою з рівняння асимптот прямує $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, а з координат фокуса – що $c=10$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{16}\\ c^2=100\end{cases};\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{16}\\ a^2+b^2=100\end{cases};\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=64\\ b^2=36\end{cases}.$$

Шукане рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

7.18. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, якщо вона проходить через точку $M(-5;3)$ і має ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Розв'язання.

Координати точки M підставляємо у рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Одержуємо рівняння: $\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$. За умовою $\varepsilon=\sqrt{2}$, тобто, $\frac{c^2}{a^2}=2$, або $\frac{a^2+b^2}{a^2}=2$, звідки $b^2=a^2$. Отже, $\frac{25}{a^2}-\frac{9}{a^2}=1$, $a^2=16$. Шукане рівняння гіперболи:

$$x^2-y^2=16, \text{ або } \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$$

(це рівняння рівнобічної гіперболи).

7.19. Написати рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться в фокусах, а фокуси – в вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Розв'язання.

За умовою задачі $a_{гіп.}=c_{еліп.}$, $c_{гіп.}=a_{еліп.}$. З рівняння еліпса маємо $a_{еліп.}=5$, $b_{еліп.}=3$. Тоді

$$c_{еліп.}=\sqrt{a_{еліп.}^2-b_{еліп.}^2}=\sqrt{25-9}=4.$$

Отже, для гіперболи маємо

$$a=4,\ c=5,\ b^2=25-16=9.$$

А тоді її рівняння:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

7.20. Показати, що рівняння $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ є рівнянням гіперболи.

Розв'язання.

Перетворимо задане рівняння до найпростішого вигляду наступним чином:

$$(16x^2-64x)-(9y^2+54y)-161=0;$$

$$16(x^2-4x)-9(y^2+6y)-161=0;$$

$$16(x^2-4x+4-4)-9(y^2+6y+9-9)-161=0;$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144;$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

7.21. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус знаходиться у точці:

а) $F(3;0)$; б) $F(0;-5)$.

Розв'язання:

а) маємо $y^2=2px$. За умовою $F(3;0)$, тобто $\frac{p}{2}=3$, а $p=6$. Тоді $y^2=16x$.

б) маємо $x^2=-2py$. Оскільки $F(0;-5)$, то $\frac{p}{2}=5$, а $p=10$. Тоді $x^2=-10y$.

7.22. Скласти канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, якщо відомо, що вона проходить через точку $M(-4;2)$.

Розв'язання.

Звичайно, за умовою задачі $y^2=-2px$. Параметр $p>0$ знайдемо, підставляючи координати точки M у рівняння $y^2=-2px$. Одержуємо $2^2=-2p\cdot(-4)$, звідки $2p=1$. Тоді $y^2=-x$ – шукане рівняння параболи.

7.23. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її фокус знаходиться у точці перетину прямої $4x-3y-4=0$ з віссю Ox.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку фокус параболи. З рівняння $4x-3y-4=0$ при $y=0$ знаходимо $x=1$. Отже, фокус $F(1;0)$, де $\frac{p}{2}=1$. Тоді рівняння параболи $y^2 = 2px$, або $y^2 = 4x$.

7.24. Побудувати параболу:

а) $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$.

Розв'язання.

Перетворимо це рівняння наступним чином:

$$\left(y^2 + 2y + 1\right) + 4x - 12 = 0,$$

або
$$4(x-3) = -(y+1)^2.$$

Це є рівняння параболи, з вершиною у точці $C(3;-1)$. Вісь симетрії паралельна осі абсцис.

Вправи:

7.25. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(-1;2)$, яке проходить через точку $A(2;6)$.

7.26. Скласти рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів $A(3;2)$ і $B(-1;6)$.

7.27. Скласти рівняння кола з центром в початку координат, якщо воно проходить через точку $(-3;4)$.

7.28. Центр кола лежить на осі Ox, коло проходить через точки $A(6;4\sqrt{2})$ і $B(0;-2\sqrt{5})$. Знайти його рівняння.

7.29. Коло проходить через точки $A(3;-1)$ і $B(-4;-8)$ і має радіус $R = 13$. Знайти його рівняння.

7.30. Пряма $5x - 12y + 9 = 0$ дотикається кола з центром у точці $C(1;-1)$. Знайти рівняння кола.

7.31. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(3;7)$ і $B(5;-1)$ і має центр на осі ординат.

7.32. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$ і $C(1;-1)$.

7.33. Скласти рівняння кола, яке описано навколо трикутника з вершинами $A(2;0)$, $B(1;1)$ і $C(1;-1)$.

7.34. Коло, центр якого лежить на прямій $x-y-1=0$, проходить через точки $A(4;-11)$ і $B(6;3)$. Скласти рівняння цього кола.

7.35. Знайти точки перетину кола $x^2+y^2-4x+16y-5=0$ з прямою $x-y+1=0$.

7.36. Написати рівняння кола, яке проходить через початок координат і точки перетину прямої $x+y+2=0$ з колом $x^2+y^2=4$.

7.37. Перетворити задані загальні рівняння кіл до канонічного вигляду і побудувати їх.

а) $x^2+y^2+6x-10y+13=0$;

б) $x^2+y^2+2x-3=0$;

в) $x^2+y^2-8x+6y=0$;

г) $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.

7.38. Знайти відстань між центрами кіл:

а) $x^2+y^2+4x-12y+36=0$ і $x^2+y^2-8x+10y+5=0$;

б) $x^2+y^2+6x-14y-6=0$ і $x^2+y^2-24x+2y-51=0$.

7.39. Знайти координати вершин, осі, фокуси і ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням $25x^2+9y^2=900$.

7.40. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{6}}{4})$ і $N(-2;\frac{\sqrt{15}}{5})$.

7.41. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо відомо, що він проходить через точку $M(-2;\frac{3\sqrt{3}}{2})$ і його велика вісь $2a=8$.

7.42. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в точках $(-\sqrt{3};0)$ і $(\sqrt{3};0)$, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{3}$.

7.43. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо велика вісь його дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon=0,6$.

7.44. Еліпс проходить через точки $M(-2;3\sqrt{3}/3)$ і $N(-2;0)$. Його фокуси лежать на осі Ox. Скласти канонічне рівняння еліпса і знайти його фокуси.

7.45. Відстань між фокусами еліпса, які лежать на осі Ox, дорівнює 30, а велика вісь дорівнює 34. Написати канонічне рівняння еліпса і знайти його ексцентриситет.

7.46. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точки $M(2;\sqrt{3})$ і $N(0;2)$. Знайти відстані від точки M до фокусів.

7.47. Знайти рівняння траєкторії точки M, яка знаходиться вдвічі ближче до точки $A(0;1)$, ніж до прямої $y=4$.

7.48. Показати, що задані рівняння визначають еліпси.:

а) $x^2+4y^2-6x+8y=3;$

б) $x^2+2y^2-4x+4y+2=0;$

в) $9x^2+10y^2+40y-50=0.$

7.49. Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини знаходяться в точках $(-3;0)$ і $(3;0)$, а фокуси – в точках $(-3\sqrt{5};0)$ і $(3\sqrt{5};0)$.

7.50. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{14}=1.$ Знайти координати її вершин і фокусів.

7.51. Знайти вершини, фокуси, ексцентриситет і асимптоти гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$

7.52. Скласти рівняння гіперболи і написати рівняння її асимптот, якщо відомі її фокуси $(-6;0)$ і $(6;0)$, а також ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{3}.$

7.53. Знайти гострий кут між асимптотами гіперболи $x^2-3y^2=27$ і її ексцентриситет.

7.54. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо вона проходить через точки $(-6;-\sqrt{7})$ і $(6\sqrt{2};4).$

7.55. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ і має ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}.$

7.56. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M(10;-3\sqrt{3})$ і має асимптоти $y=\pm\frac{3}{5}x.$

7.57. Скласти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1,$, за умови, що її ексцентриситет $\varepsilon=1{,}2$.

7.58. Скласти рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться в фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1.$

7.59. Показати, що задані рівняння є рівняннями гіпербол. Знайти для цих гіпербол центр, вершини, осі та побудувати їх:

а) $x^2-y^2+4x-10y-25=0;$

б) $x^2-3y^2+6y-15=0;$

в) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0.$

7.60. Знайти координати фокусів і написати рівняння директриси для кожної параболи:

а) $y^2=6x$; б) $y^2=-8x$;

в) $x^2=10y$; г) $x^2=-4y$.

7.61. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричною відносно осі Ox, яка проходить через точку $M(\frac{1}{3};4)$. Знайти фокус F параболи і визначити довжину відрізка MF.

7.62. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(2;0)$ і від прямої $y=2$.

7.63. На параболі $y^2=36x$ знайти точки, відстань яких до її фокуса дорівнює 34.

7.64. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від осі Oy і від точки $F(3;0)$.

7.65. Знайти точки перетину параболи $y^2=9x$ з прямими:

а) $3x+y-6=0$; б) $2x-y+5=0$; в) $y-6=0$.

7.66. Написати рівняння параболи, коли відомо, що вона проходить через точки перетину прямої $x+y=0$ і кола $x^2+y^2+4y=0$.

7.67. Побудувати параболи

а) $y^2-8y=4x;$ б) $x^2-6x+8y-47=0;$

в) $y^2+8y-x+16=0;$ г) $x^2+6x+5=2y.$

Глава 8. Площина та пряма лінія в просторі

8.1. Площина в просторі

Означення. Поверхнею, заданою рівнянням відносно декартової системи координат, називається множина точок, координати яких задовольняють дане рівняння:

$$F(x, y, z) = 0, \text{ або } z = f(x, y).$$

Розглянемо площину в просторі.

Площину в просторі можна однозначно задати, якщо вибрати точку на площині $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і нормальний вектор $\vec{n}(A, B, C)$, який перпендикулярний до площині (рис.8.1).

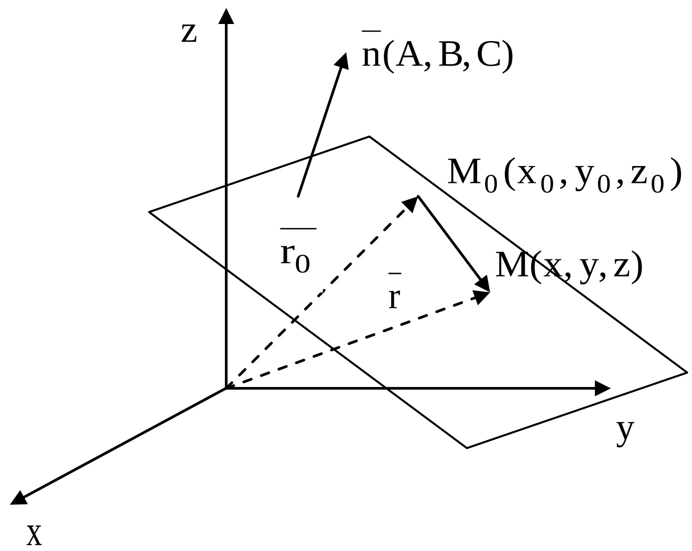


Рис. 8.1

Рівняння у скалярній формі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ –} \qquad (8.1)$$

рівняння площини, яка проходить через дану точку.

Розкриємо дужки та позначимо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, одержимо $Ax + By + Cz + D = 0$ – *загальне рівняння площини*. У цьому рівнянні коефіцієнти A, B, C – координати нормального вектора $\overline{n}(A,B,C)$.

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ можна знайти, вибравши довільну точку $M(x, y, z)$ площини і три вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$. Ці вектори компланарні при будь-якому положенні точки M у площині. Згідно з умовою компланарності мішаний добуток трьох векторів має дорівнювати нулю:

$$\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right) = 0.$$

Отже, маємо

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ –} \tag{8.2}$$

рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

Рівняння площини у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{8.3}$$

знайдемо, якщо в загальному рівнянні вільний член D, перенесемо в правий бік $Ax + By + Cz = -D$ і поділимо на (-D) та позначимо $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$.

Нормальне рівняння площини

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{8.4}$$

(α, β, γ – кути, які утворює вектор нормалі з координатами-осями Ox, Oy, Oz: p – відстань початку координат від площини.). Його легко одержати, поділивши загальне рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ на довжину нормального вектора $|\overline{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, взяту зі знаком, протилежним знаку вільного члена.

Нехай дві площини задані загальними рівняннями:

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тоді кут φ між ними визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}, \ \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (8.5)$$

Якщо $P_1 \| P_2$, то $\overline{n_1} \| \overline{n_2}$, тобто умова паралельності площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (8.6)$$

Якщо $P_1 \perp P_2$ то $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$,тобто $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$,або

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \ – \quad (8.7)$$

умова перпендикулярності двох площин.

Відстань точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *від площини*, заданої загальним рівнянням, визначається за формулою

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \quad (8.8)$$

8.2. Пряма в просторі

Пряму лінію у просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин, а саме:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \tag{8.9}$$

Це є *загальне рівняння* прямої в просторі, напрямлений вектор $\overline{S}$ якої можна знайти як векторний добуток нормальних векторів площин $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ і $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$.

$$\overline{S} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}. \tag{8.10}$$

Пряму можна також задати, якщо задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка належить прямій, та напрямний вектор цієї прямої $\overline{S}(m, n, p)$ (рис. 8.2).

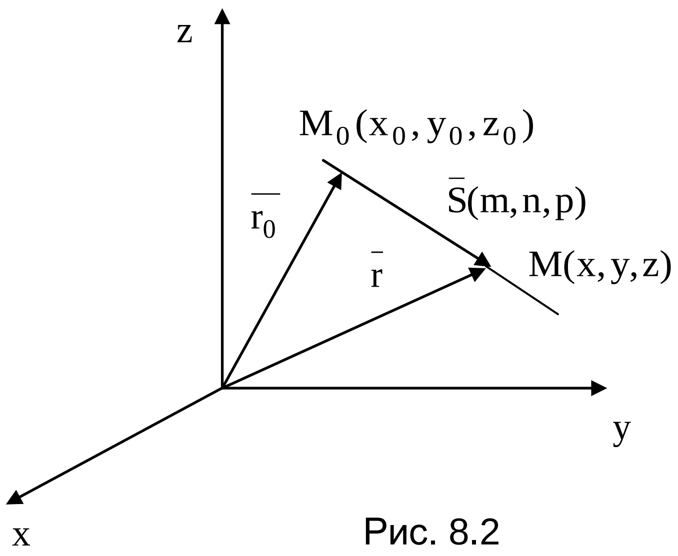


Рис. 8.2

Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої і $\overline{r_0}(x_0; y_0; z_0)$, $\overline{r}(x; y; z)$ – радіус-вектори точок M_0 і M_1, тоді вектор $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ з координатами $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ колінеарний вектору $\overline{S}$, тобто $\overline{r} - \overline{r_0} = t\overline{S}$, або

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{S} \quad – \tag{8.11}$$

векторне рівняння прямої у просторі.

У скалярній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt - \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (8.12)$$

параметричне рівняння прямої у просторі.

Обчислимо t з цих рівнянь. Одержимо

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - \qquad (8.13)$$

канонічне рівняння прямої у просторі.

Нехай пряма задана у просторі двома точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді вектор $\overline{M_1M_2}$ є напрямним вектором $\overline{S}$ заданої прямої: $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Підставляючи замість m, n, p координати вектора $\overline{M_1M_2}$ у канонічне рівняння (8.13), дістанемо *рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (8.14)$$

Нехай маємо прямі l_1 і l_2:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут між двома прямими у просторі дорівнює куту між їх напрямними векторами $\overline{S_1}(m_1; n_1; p_1)$ та $\overline{S_2}(m_2; n_2; p_2)$ і визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\ \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (8.15)$$

Умова перпендикулярності двох прямих: $\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} = 0$, або

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \qquad (8.16)$$

Умова паралельності двох прямих: $\overline{S_1} \| \overline{S_2}$, або

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad .(8.17)$$

Дві непаралельні прямі, задані у просторі напрямними векторами $\overline{S_1}$ і $\overline{S_2}$ та точками M_1 і M_2, перетинаються, якщо здійснюється умова компланарності трьох векторів $\overline{M_1M_2}$, $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, а саме

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.18)$$

8.3. Розміщення прямої відносно площини

Припустимо, що пряма l перетинає задану площину *P*. Знайдемо точку перетину. Пряма l задана рівнянням у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt. \end{cases}$$

Площина *P* подана загальним рівнянням:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Підставимо в рівняння площини x, y, z і знайдемо значення параметра t, яке відповідає шуканій точці перетину. Дістанемо:

$$A(x_1 + mt) + B(y_1 + nt) + C(z_1 + pt) + D = 0,$$

звідки

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Підставивши значення параметра t у параметричне рівняння прямої, знайдемо точки перетину прямої l з площиною *P*.

Кут φ між прямою l з напрямним вектором $\overline{S}(m;n;p)$ і площиною Р з нормальним вектором $\overline{n}(A;B;C)$ визначається за формулою

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{8.19}$$

Знак у формулі треба вибирати так, щоб права частина була додатною.

Коли пряма l паралельна площині Р, то маємо

$$\overline{S} \perp \overline{n}: \quad Am + Bn + Cp = 0. \tag{8.20}$$

Коли пряма l перпендикулярна до площини Р, то вектори $\overline{S}$ і $\overline{n}$ колінеарні: $\overline{S} \| \overline{n}$, або

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{8.21}$$

Приклад 8.1. Задано дві прямі, які перетинаються:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Написати рівняння площини яка проходить через ці дві прямі.

Розв'язання.

Позначимо через $M(x;y;z)$ довільну точку шуканої площини і сполучимо її вектором з точкою $M_1(x_1;y_1;z_1)$. Очевидно, що вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ компланарні. Отже, мішаний добуток

$$\left(\overline{M_1M}\ \overline{S}_1\ \overline{S}_2\right)=0.$$

Підставивши координати векторів, матимемо рівняння шуканої площини:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 8.2. Через точку $M(3;-1;2)$ провести площину перпендикулярно прямій $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через дану точку

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Шукана площина перпендикулярна заданій прямій. Отже, $\overline{n}$ і $\overline{S}$ колінеарні: $\overline{n}=k\overline{S}$, тобто можна взяти $\overline{n}=\overline{S}$. Рівняння шуканої площини має вигляд

$$2(x-3)-(y+1)+3(z-2)=0$$

або

$$2x-y+3z-13=0.$$

Приклад 8.3. Тетраедр $ABCD$ задано координатами вершин:

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;-1;1)$, $D(1;1;1)$. Знайти: 1) рівняння і довжину ребра BD; 2) рівняння і площу грані ABC; 3) кут між ребрами AB і AC; 4) рівняння і довжину висоти тетраедра, проведеної через D; 5) кут між ребром AD і площиною ABC.

Розв'язання.

1. Рівняння ребра BD знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки B і D:

$$\frac{x-x_B}{x_D-x_B}=\frac{y-y_B}{y_D-y_B}=\frac{z-z_B}{z_D-z_B}, \qquad \frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

Довжину ребра BD знайдемо як відстань між двома точками B і D:

$$|BD| = \sqrt{\left(x_B - x_D\right)^2 + \left(y_B - y_D\right)^2 + \left(z_B - z_D\right)^2}\ ;$$

$$|BD| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}\ .$$

2. Рівняння грані ABC матимемо за формулою рівняння площини, яка проходить через точки A, B, C:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

або $y + z = 0$, $\bar{n}(0,1,1)$. Площу грані ABC знайдемо за модулем векторного добутку:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\ \left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|;$$

$$\overline{AB}(1,0,0)\ ,\ \ \overline{AC}(0,-1,1)\ ;$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{j} - \bar{k}\ ; \qquad \bar{S}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ .$$

3. Кут між ребрами AB і AC знайдемо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{AB}\ \overline{AC}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|} = \frac{x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}\ \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}}\ ,$$

$$\cos\varphi = 0\ , \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\ .$$

4. Рівняння висоти, проведеної через точку D, матимемо за формулою

$$\frac{x - x_D}{m} = \frac{y - y_D}{n} = \frac{z - z_D}{p}\ .$$

Висота перпендикулярна площині ABC, отже напрямлений вектор прямої $\bar{S}$ і нормальний вектор площини $\bar{n}$ колінеарні, тобто можна взяти $\bar{S}(0,1,1)$. Тоді рівняння висоти буде мати вигляд:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань точки D від площини ABC:

$$h=\left|\frac{Ax_D+By_D+Cz_D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|,$$

A, B, C – координати нормального вектора площини: $\bar{n}(0,1,1)$. Таким чином, маємо:

$$h=\left|\frac{1\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1+1}}\right|=\sqrt{2}.$$

5. Кут між ребром і площиною ABC знайдемо за формулою

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

A, B, C – координати нормального вектора площини: $\bar{n}(0,1,1)$; m, n, p – координати вектора $\overline{AD}$, $\overline{AD}(1,1,0)$,

$$\sin\varphi=\pm\frac{0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Запитання для самодіагностики

1. Записати векторне рівняння площини.
2. Який вигляд має рівняння площини, що проходить через задану точку в заданому напрямі?
3. Який вигляд має загальне рівняння площини? Записати координати нормального вектора.
4. Записати рівняння площини, що проходить через початок координат.
5. Який вигляд має рівняння площини у відрізках на осях?
6. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки.

7. Який вигляд має нормальне рівняння площини?
8. Як знайти відстань від точки до площини?
9. Як знайти кут між двома площинами?
10. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
11. Записати векторне рівняння прямої в просторі.
12. Який вигляд мають параметричні рівняння прямої?
13. Записати рівняння прямої в канонічній формі.
14. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві точки?
15. Записати загальні рівняння прямої.
16. Як обчислити кут між двома прямими?
17. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.
18. Записати напрямні косинуси прямої.
19. Яка умова того, що дві прямі лежать в одній площині?

Приклади і вправи

Приклади:

Площина

8.4. Скласти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки $M(-1;4;-3)$ і $N(2;3;4)$.

Розв'язання.

Рівняння площини, яка паралельна осі Ox, має вигляд

$$By+Cz+D=0.$$

Підставимо в це рівняння координати точок M і N. Одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4B-3C+D=0 \\ 3B+4C+D=0 \end{cases}.$$

Ця однорідна система має нескінченну множину розв’язків. Знайдемо один з них. Нехай $C=1$, тоді

$$\begin{cases} 4B-3+D=0 \\ 3B+4+D=0 \end{cases},$$

звідки

$B=7$, а $D=-25$.

Таким чином, шукане рівняння площини

$7y+z-25=0$.

8.5. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;3;-4)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{MP}$, де $P(0;-2;3)$.

Розв'язання.

Звичайно, вектор $\overrightarrow{MP}=(1;-5;7)$ є нормальним вектором площини. Тоді її рівняння:

$1(x+1)-5(y-3)+7(z+4)=0,$

або

$x-5y+7z+44=0$.

8.6. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(6;-5;2)$ і відтинає на осі Ox відрізок $a=-3$, а на осі Oz – відрізок $c=4$.

Розв'язання.

Використаємо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{4}=1.$$

Підставимо у це рівняння координати точки M, через яку проходить площина:

$$\frac{6}{-3}-\frac{5}{b}+\frac{2}{4}=1.$$

Звідси $b=-2$.

Отже, рівняння площини

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=1 \text{ або } 4x+6y-3z+12=0.$$

8.7. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(2;-3;4)$ паралельно площині $4x-3y+2z-5=0$.

Розв'язання.

Нормальний вектор заданої площини $\vec{N}=(4;-3;2)$. Оскільки шукана площина паралельна заданій, то за її нормальний вектор можна взяти $\vec{N}=(4;-3;2)$. Тоді за формулою $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, запишемо:

$4(x-2)-3(y+3)+2(z-4)=0$,

або

$4x-3y+2z-25=0$.

8.8. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $(1;3;2)$ і перпендикулярна до площин $x+2y+z-4=0$ і $2x+y+3z+5=0$.

Розв'язання.

Нормальний вектор $\vec{N}$ шуканої площини перпендикулярний до нормальних векторів $\vec{N}_1=(1;2;1)$ і $\vec{N}_2=(2;1;3)$ заданих площин.

Тому можна взяти $\vec{N}=\overrightarrow{N_1}\times\vec{N}_2$:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}.$$

Шукане рівняння площини за формулою

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$:

$5(x-1)-(y-3)-3(z-2)=0$,

або

$5x-y-3z+4=0$.

8.9. Знайти відстань між паралельними площинами

$3x-5y+4z-24=0$ і $12x-20y+16z+4=0$.

Розв'язання.

На першій площині візьмемо будь-яку точку, наприклад $M(-1;1;8)$, і знайдемо відстань від цієї точки до другої площини.

Це й буде відстань між паралельними площинами.

$$d=\frac{|12\cdot(-1)-20\cdot1+16\cdot8+4|}{\sqrt{12^2+20^2+16^2}}=\frac{100}{20\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Пряма

8.10. Загальні рівняння прямої

$$\begin{cases}2x-3y-3z-9 & =0\\ x-2y+z+3 & =0\end{cases}$$

призвести до канонічного вигляду.

Розв'язання.

Нормальні вектори заданих площин:

$\vec{N}_1=(2;-3;-3)$ і $\vec{N}_2=(1;-2;1)$.

Напрямлений вектор $\vec{s}=(m;n;p)$ є паралельним до прямої, а тому перпендикулярним до векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$. Отже, можна взяти

$$\vec{s}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-9\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}.$$

Таким чином, $\vec{s}=(9;5;1)$. Щоб знайти будь-яку точку $M(x_0;y_0;z_0)$, через яку проходить пряма, треба взяти, наприклад $y_0=0$ і знайти x_0 і z_0 з системи рівнянь

$$\begin{cases}2x-3z & =9\\ x+z & =-3\end{cases}.$$

Звичайно, можна взяти й іншу точку. Звідси одержуємо

$x_0=0$, $z_0=-3$.

Отже, задані загальні рівняння в канонічному вигляді:

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}.$$

8.11. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;-5;-8)$ паралельно прямій $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Розв'язання.

Оскільки шукана пряма паралельна заданій, то й паралельні напрямні вектори цих прямих. За напрямний вектор шуканої прямої можна взяти вектор $\vec{s}=(5;2;-1)$ заданої прямої.

За формулою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, запишемо канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+8}{-1},$$

а потім перейдемо до параметричних

$$x=5t+3,\quad y=2t-5,\quad z=-t-8.$$

8.12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-4;3;-8)$ перпендикулярно до двох прямих $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-4}$ і $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-1}{5}$.

Розв'язання.

Напрямлені вектори заданих прямих $\vec{s}_1=(-3;2;-4)$ і $\vec{s}_2=(3;-6;5)$. Оскільки шукана пряма перпендикулярна до двох заданих прямих, то її напрямний вектор $\vec{s}=(m;n;p)$ також перпендикулярний до векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ і тому може бути визначений як їх векторний добуток $\vec{s}_1\times\overrightarrow{s_2}$.

Отже,

$$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -4\\ 3 & -6 & 5\end{vmatrix}=-14\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}.$$

Тобто $\vec{s}=(-14;3;12)$. Шукані рівняння прямої у канонічному вигляді

$$\frac{x+4}{-14}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+8}{12}.$$

8.13. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ і площини

$$3x-y+2z-5=0.$$

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді

$$x=5t+7,\quad y=t+4,\quad z=4t+5$$

і підставимо ці вирази в рівняння площини. Одержимо

$$3(5t+7)-(t+4)+2(4t+5)-5=0.$$

Звідси $t=-1$. Тоді точка перетину прямої і площини має координати $x=-5+7=2$, $y=-1+4=3$, $z=-4+5=1$, тобто $(2;3;1)$.

8.14. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-3;2;-1)$ перпендикулярно до площини

$$3x-4y+z-8=0.$$

Розв'язання.

Нормальний вектор площини $\vec{N}=(3;-4;1)$. Оскільки пряма перпендикулярна до площини, то її напрямний вектор $\vec{s}=(m;n;p)$ паралельний вектору $\vec{N}$, і можна взяти $\vec{s}=(3;-4;1)$.

Канонічні рівняння шуканої прямої мають вигляд:

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{1}.$$

8.15. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;1;-3)$ перпендикулярно до прямої,

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{4}.$$

Розв'язання.

Напрямлений вектор $\vec{s}=(3;-1;4)$ заданої прямої паралельний нормальному вектору $\vec{N}$ шуканої площини. Тоді можна взяти $\vec{N}=(3;-1;4)$ і рівняння площини, що проходить через точку $M(2;1;-3)$ має вигляд:

$$3(x-2)-1(y-1)+4(z+3)=0,$$

або у загальному вигляді

$$3x-y+4z+7=0.$$

8.16. Знайти проекцію точки $M(5;2;-1)$ на площину $2x-y+3z+23=0$.

Розв'язання.

Проекція точки на площину – це точка перетину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини, з площиною. Нормальний вектор $\vec{N}=(2;-1;3)$. Тоді рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;2;-1)$ перпендикулярно до площини:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3},$$

або в параметричному вигляді

$$x=2t+5, \quad y=-t+2, \quad z=3t-1.$$

Знайдемо точку перетину цієї прямої з площиною

$$2x-y+3z+23=0,$$

або

$$2(2t+5)+t-2+3(3t-1)+23=0.$$

Одержимо $t=-2$, а тоді $x=1$, $y=4$, $z=-7$.

Отже, $(1;4;-7)$ – проекція точки M на задану площину.

Вправи:

Площина

8.17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;4;5)$ перпендикулярно до вектора.

8.18. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-2;3)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_2(2;-3;-1)$.

8.19. Скласти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки $M_1(7;2;-3)$ і $M_2(5;6;-4)$.

8.20. Скласти рівняння площини, яка паралельна площині xOz і проходить через точку $M(-3;-2;4)$.

8.21. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;-2;-7)$ і паралельна площині $x+2y-3z+4=0$.

8.22. Знайти кут між площинами $2x-3y+4z-1=0$ і $3x-4y-z+3=0$.

8.23. Знайти відстань від точки:

а) $M(2;3;4)$ до площини $4x+3y+12z+13=0$;

б) $N(2;3;-2)$ до площини $6x-7y-6z-124=0$.

8.24. Знайти відстань між паралельними площинами:

а) $2x-3y+6z+28=0$ і $2x-3y+6z-14=0$;

б) $2x-y+2z+9=0$ і $4x-2y+4z-21=0$.

8.25. На осі Oy знайти точку, яка рівновіддалена від площин $3x-4y+2z-9=0$ і $4x+2y-3z-21=0$.

8.26. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4;-3;1)$ і паралельна векторам $\vec{a}=(5;2;-3)$ і $\vec{b}=(1;4;-2)$.

8.27. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;-1;2)$ і яка перпендикулярна до площин $x+2y-2z+4=0$ і $x-2y+z-4=0$.

8.28. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4;-8;6)$ паралельно вектору $\vec{a}=(2;-4;-3)$ і перпендикулярно до площини $3x-7y-5z-8=0$.

Пряма

8.29. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;2;3)$ паралельно вектору $\vec{s}=(-5;4;-6)$.

8.30. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5;-8;1)$ паралельно прямій $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+2}{-1}$.

8.31. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M(1;-2;-1)$ і $N(3;0;4)$.

8.32. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M(-3;-2;1)$ і $N(4;-8;7)$, знайти їх напрямлені косинуси.

8.33. Довести, що прямі $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{-4}$ і $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-5}{2}$ взаємно перпендикулярні.

8.34. Призвести до канонічного вигляду загальні рівняння прямих

а) $\begin{cases} 2x+3y+z-10=0, \\ 4x-5y-z+24=0; \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x-4y+5z-18=0, \\ 6x-5y+z-27=0. \end{cases}$

8.35. Знайти гострий кут між прямими

а) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z-7}{3}$ і $x=t+3,\quad y=2t-1,\quad z=-2t+5$;

б) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ і $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

8.36. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2;0;6)$ і перпендикулярна до двох прямих $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-2}{-3}$ і $\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-5}$.

Пряма і площина

8.37. Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}$, $x+2y-3z-4=0$;

б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

8.38. Показати, що пряма $\frac{x-2}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{-2}$ паралельна площині $5x-2y+7z+3=0$.

8.39. Показати, що пряма $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ лежить в площині $2x-y-2z-9=0$.

8.40. Знайти кут між прямою $\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{4}$ і площиною $2x-3y-2z+5=0$.

8.41. При якому значенні m пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y+6z+7=0$.

8.42. Знайти рівняння перпендикуляра до площини $x+4y-8z-4=0$, проведеного з точки $A(3;-6;7)$.

8.43. Знайти проекцію точки $M(4;-3;1)$ на площину $x+2y-z-3=0$.

8.44. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;2;-1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

8.45. Знайти проекцію точки $M(-6;5;-7)$ на пряму $x=1+3t$, $y=7-2t$, $z=4+t$.

РОЗДІЛ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Глава 9
Функції, способи задання, класифікація

9.1. Абсолютна величина дійсного числа та її властивості

Означення. Абсолютною величиною числа x називається само число x, якщо воно додатне і $-x$, якщо воно від'ємне, тобто

$$|x| = \left[\begin{array}{rl} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} \right. . \tag{9.1}$$

Для будь-якого дійсного числа x виконуються нерівності

$$|x| \ge 0; \ |x| \ge x; \ |x| \ge -x.$$

Властивості абсолютних величин:

1. $|x| \le \alpha$ рівнозначно нерівностям $-\alpha \le x \le \alpha$.

2. Абсолютна величина додатку не більше доданку абсолютних величин

$$|x + y| \le |x| + |y|. \tag{9.2}$$

3. Абсолютна величина різниці величин не менш за різницю абсолютних величин

$$|x - y| \ge |x| - |y|. \tag{9.3}$$

4. Абсолютна величина додатку дорівнює доданку абсолютних величин

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|. \tag{9.4}$$

5. Абсолютна величина частки дорівнює частці абсолютних величин

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \ne 0). \tag{9.5}$$

9.2. Змінні та сталі величини. Область змінювань

При дослідженні явищ або будь-якого процесу маємо справу з різноманітними величинами: температурою, швидкістю, довжиною, об'ємом та ін. Деякі з них змінюються, а інші залишаються сталими. Величина, яка за даних умов набуває різних числових значень, зветься змінною величиною, а величина, яка лишається сталою, в будь-якому процесі, зветься сталою величиною. Сталі величини, які не змінюються за будь-яких умов, – це абсолютно сталі (число π, число e, швидкість світла та ін.). Сталі, що не є універсальними, звуть параметрами (у рівнянні прямої $y = kx + b,\ x; y -$змінні; k і b – параметри). Сукупність усіх числових значень, що їх може набувати змінна величина, називається областю, або обсягом змінювання цієї змінної.

Змінна величина вважається заданою, якщо вказано обсяг її змінювання $X = \{x\}$.

Будь-яка числова множина може бути областю змінювання змінної.

Наприклад:

1) $a < x < b -$ відкритий інтервал;
2) $a \le x \le b -$ замкнений інтервал, або відрізок;
3) $a < x \le b$; $a \le x < b$;
4) $(a; +\infty), (-\infty; a),\ [a; +\infty),\ (-\infty; a]$.

Означення. Числовий проміжок з центром у точці $x = a$ довжиною 2ε називається ε-околом цієї точки: $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

9.3. Функція. Способи задання функції

Поняття функції є з одним з основних понять математичного аналізу.

Означення. Якщо кожному значенню змінної x множини $X\left(x \in X\right)$ за деяким правилом або законом f ставиться у відповідність одне значення змінної y з множини $Y\left(y \in Y\right)$, то говорять, що на множині X задано функцію $y = f\left(x\right)$.

Змінну x називають аргументом, або незалежною змінною, а залежну змінну $y -$функцією, множину X – областю визначення, а множину $Y -$ областю значень функції.

Правило відповідності між значеннями змінних x і y є спосіб задання функції. Існує три основні способи задання функції:

1. Аналітичний спосіб. Якщо функція задається у вигляді аналітичного виразу (формули), де зазначено, які дії і в якому порядку слід виконати над значенням x, щоб дістати відповідні значення функції. При цьому вказується, для яких значень аргументу ця функція розглядається. Якщо множина X не задається, то маються на увазі всі значення аргументу x, за яких функція кінцева та дійсна.

Приклад 9.1. Знайти область визначення функцій:

Розв'язання.

1. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $X=(-\infty;+\infty)$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; $X=(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty)$.

3. $y=\arcsin x$; $X=[-1;1]$.

4. $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}$; $X=[1;5]$.

2. Табличний спосіб – це спосіб зображення функції таблицею, яка складається з ряду значень незалежної змінної x та відповідних значень змінної y. Такий спосіб задання часто встановлюється експериментально або шляхом спостережень.

3. Графічний спосіб. При дослідженнях, пов'язаних з використанням самописних приладів, відповідність між незалежною змінною x та функцією y встановлюється за допомогою деякої лінії, яку побудовано у вибраній системі координат. Абсциса кожної точки лінії зображує деяке значення x, а ордината – відповідне значення y. Множину всіх точок координатної площини (x,y), координати яких задовольняють рівність $y=f(x)$, називають графіком функції.

Розроблені в математичному аналізі методи дослідження функції найкраще пристосовані до аналітичного способу задання функції.

9.4. Класифікація функцій за їх властивостями

Монотонні функції. Функція $f(x)$ є зростаючою на деякій множині X, якщо із нерівності $x_1<x_2$ маємо нерівність $f(x_1)<f(x_2)$. Функція –

спадна, якщо при $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Зростаючі та спадні функції на множині X називаються монотонними.

Приклад 9.2. Функція $y = x^3$ визначена на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, зростає на цьому інтервалі.

Приклад 9.3. $y = \ln(-x)$, область визначення: $(-\infty;0)$. Функція спадає на цьому інтервалі.

Функція називається кусково-монотонною на множині X, якщо цю множину можливо розбити на такі множини, на яких ця функція буде монотонною. Наприклад, функція $y = x^2 - x - 6$ є кусково-монотонна, тому що вона на інтервалі $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ – спадає, а на інтервалі $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ – зростає.

Обмежені та необмежені функції. Функція $y = f(x)$ – обмежена на множині X, якщо є такі числа m і M, що $m \le f(x) \le M$, якщо таких чисел немає, то функція називається необмеженою. Нехай число C найбільше з чисел m і M, тоді для обмеження функції має виконуватись умова $|f(x)| \le C$.

Приклад 9.4. Функція $y = \arcsin x$, обмежена на проміжку $[-1;1]$.

Приклад 9.5. Функція $y = \operatorname{tg} x$, обмежена на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ і не обмежена на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$.

Парні та непарні функції. Множина X зветься симетричною відносно початку координат, якщо їй належать як значення x, так і значення $-x$. Функція називається парною, якщо виконується рівність:

$$f(x) = f(-x),\ x \in X, \tag{9.6}$$

а якщо

$$f(-x) = -f(x),\ x \in X, \tag{9.7}$$

то функція називається непарною.

Приклад 9.6. Дослідити функції на парність та непарність.

1. $y = \frac{1}{x^2+1}$ – парна, $f(x) = f(-x)$.

2. $y=\frac{1}{x^3}-$ непарна, $f(-x)=-f(x)$.

3. $y=x^2-x-6$, не є парною і не є непарною.

4. $y=\sqrt{x}$ не є парною і не є непарною, тому що значення $-x$ не належать області визначення функції.

Зауважимо, що графік непарної функції – це крива, що симетрична відносно початку координат, а парної функції – відносно осі координат.

Періодична функція. Функція $y=f(x)$ називається періодичною на множині X, якщо існує таке число $l>0$, що для будь-якої точки x, що належить області визначення, виконується умова:

$$f(x\pm l)=f(x). \tag{9.8}$$

Число l є період функції $f(x)$. Отже, маємо також рівність

$$f(x+kl)=f(x),\ k\in Z.$$

При цьому числа kl теж можна вважати періодами функції, але, говорячи про період функції, йдеться про її найменший період.

Наприклад: $y=\sin x$ має періодом $l=2\pi$, $y=\mathrm{tg}\,x$ має періодом $l=\pi$.

Зауважимо, що при побудові графіка періодичної функції достатньо побудувати його в будь-якому сегменті $[x_0;x_0+l]$, а далі продовжити його на всю числову вісь.

Обернена функція. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $X=\{x\}$, а областю її значень є множина $Y=\{y\}$.

Якщо кожному значенню змінної $y\in Y$ відповідає одне значення змінної $x\in X$, то на множині Y можливо визначити функцію

$$x=\varphi(y) \tag{9.9}$$

Множини X та Y є будь-які проміжки, або інші числові множини. Якщо $x\in[a;b]$, $y\in[c;d]$, то $x=\varphi(y)-$ функція, обернена по відношенню до функції $y = f(x)$, яка задовольняє умови на всій множині Y: $y = f(\varphi(y))$. При цьому функції $x = \varphi(y)$ та $y = f(x)$ – взаємообернені.

Графіки прямої та оберненої функції симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів (рис. 9.1).

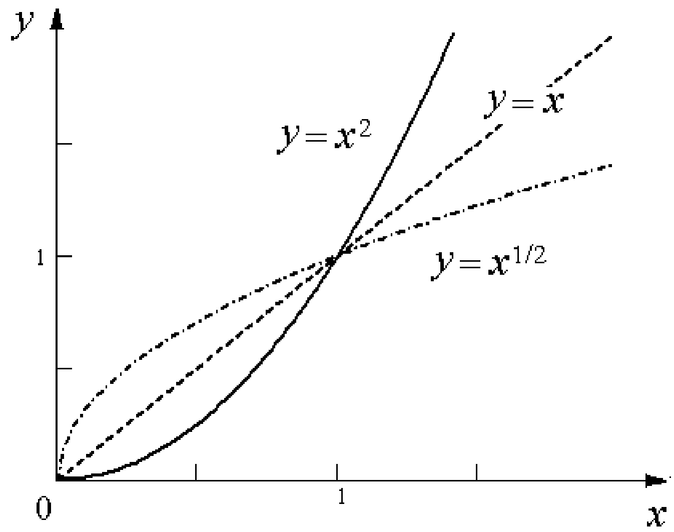


Рис. 9.1

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ монотонна на множині X, то на відповідній множині Y існує також монотонна обернена функція

$$x = \varphi(y).$$

Доведення.

Дійсно, якщо функція $y = f(x)$, наприклад, зростає, то кожному $y \in Y$ відповідає тільки одне значення $x \in X$, тобто існує $x = \varphi(y)$.

Тепер покажемо, що обернена функція теж зростаюча на множині Y, тобто із нерівності $y_2 > y_1$ випливає нерівність $x_2 > x_1$. Припустимо протилежне: $x_2 \le x_1$, тоді за умовою зростання функції $y = f(x)$ одержимо $f(x_2) \le f(x_1)$, що не задовольняє умову $y_2 > y_1$. Отже, якщо $y_2 > y_1$, то $x_2 > x_1$, тобто функція $x = \varphi(y)$ зростає. Для спадної функції теорема доводиться аналогічно.

9.5. Основні елементарні функції

Основними елементарними функціями в математичному аналізі є такі функції:

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$, а область значень залежить від α.

2. Показникова функція $y = a^{x}\left(a > 0; a \neq 1\right)$, функція визначена на множині $\left(-\infty; +\infty\right)$, а областю значень є інтервал $\left(0; +\infty\right)$.

3. Логарифмічна функція $y = \log_{a} x\left(a > 0, a \neq 1\right)$, область визначення $\left(0; +\infty\right)$, а область значень $(-\infty; +\infty)$. Функція є оберненою до $y = a^{x}$.

4. Тригонометричні функції

$$y = \sin x;\ \ y = \cos x;\ \ x \in R;\ \ \left|y\right| \leq 1;$$

$$y = \operatorname{tg} x;\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\left(k \in Z\right);$$

$$y = \operatorname{ctg} x;\ \ x \neq \pi k\left(k \in Z\right).$$

5. Обернені тригонометричні функції

$$y = \arcsin x;\ \ x \in \left[-1;1\right];\ \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x;\ \ x \in \left[-1;1\right];\ \ y \in \left[0; \pi\right];$$

$$y = \operatorname{arctg} x;\ \ x \in R;\ \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arcctg} x;\ \ x \in R;\ \ y \in \left(0; \pi\right).$$

Означення. Функція $y = f\left(x\right)$, визначена на множині X, називається елементарною, якщо вона задається однією формулою, так, що її значення при будь-якому $x \in X$ може бути знайдено за допомогою скінченного числа елементарних дій (додавання, добуток, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, обчислення тригонометричних та обернених тригонометричних функцій), при цьому кількість операцій не залежить від значення аргументу x. Наприклад,

$y = \lg \sin(x+1)$ – це елементарна функція; прикладами неелементарних функцій є

$$y = n!, \text{ або } y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}.$$

У першому випадку число дій над аргументом нескінченне, у другому – функція задається двома формулами.

9.6. Приклади застосування елементарних функцій в економіці.

Приклад 9.7. Лінійна функція

$$y = kx + b.$$

Якщо $x-$ обсяг продукції, а $k-$витрати на одиницю продукції, $b-$сталі витрати, то $y = f(x)-$ загальні витрати виробництва, або виробнича функція.

Приклад 9.8. Дробово-лінійна функція.

Нехай виробнича функція $y = kx + b$, тоді собівартість одиниці продукції $y = \dfrac{kx+b}{x}$.

Останню функцію можна визначити, як середні витрати виробництва на одиницю продукції. При цьому функція y може мати будь-який вигляд, тоді середні витрати виробництва на одиницю продукції є $y = \dfrac{f(x)}{x}$.

Приклад 9.9. Формула простих відсотків.

У банк внесена початкова сума X_0 під $p\%$ відсотків щорічних. Яку суму буде накопичено за n років?

Якщо початкова сума X_0, то

за перший рік: $X_1 = X_0 + \dfrac{p}{100} X_0 = X_0 \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$;

за другий рік: $X_2 = X_1 + \dfrac{p}{100} X_0 = X_0 \left(1 + \dfrac{2 \cdot p}{100}\right)$.

Накопичена сума за n років буде: $X_n = X_0\left(1 + n\cdot\frac{p}{100}\right)$.

Приклад 9.10. Формула складених відсотків.

Сума в X_0 внесена в банк під складений процент, при умові нарахування кожної одиниці часу (місяць, рік) $p\%$. Яка буде сума через n одиниць часу?

На кінець першого року сума складає:

$$X_1 = X_0 + \frac{p}{100}X_0 = X_0\left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

другого року

$$X_2 = X_1 + \frac{p}{100}X_1 = X_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Звідки:

$$X_n = X_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad (9.10)$$

Формулу (9.10) можна довести методом математичної індукції.

Запитання для самодіагностики

1. Що називається абсолютною величиною числа?
2. Які властивості абсолютних величин?
3. Яка залежність називається функціональною?
4. Які існують засоби завдання функції?
5. Які функції називають парними, непарними?
6. Які функції називають періодичними?
7. Які функції називають монотонними?
8. Які функції називають обмеженими?
9. Які функції належать до основних елементарних?
10. Які функції називаються елементарними?
11. Наведіть приклади застосування елементарних функцій в економіці.
12. Чому дорівнює границя суми двох функцій?
13. Чому дорівнює границя добутку двох функцій?
14. Чому дорівнює границя добутку сталої на функцію?
15. Чому дорівнює границя частки двох функцій?

Приклади і вправи

Приклади:

9.11. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\sqrt{3x-7}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{3-x}-2\sqrt{4x-x^2}+\dfrac{3}{x-1}}$;

3) $y=\log_{\frac{1}{3}}(3+4x-4x^2)$; 4) $y=\arccos\dfrac{x^2-1}{4}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції зводиться до розв'язання нерівності або системи нерівностей.

$$D(y):\begin{cases}3x-7\geq 0\\ 4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{7}{3}\\ x<4\end{cases}\Leftrightarrow\frac{7}{3}\leq x<4.$$

Отже, $D(y)=\left[\dfrac{7}{3};4\right)$.

$$2.\ D(y):\begin{cases}\dfrac{x+1}{3-x}\geq 0,\\ 4x-x^2\geq 0,\\ x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-3}\leq 0,\\ x(x-4)\leq 0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Застосовуючи відомий метод проміжків, отримуємо (рис. 9.2).

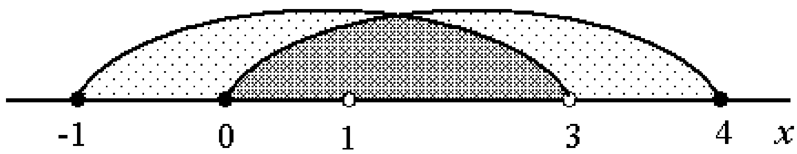


Рис. 9.2

Отже $D(y)=[0;1)\cup(1;3)$

3. За означенням логарифмічної функції маємо нерівність

$$3+4x-4x^2>0,$$

розв'язуючи яку, отримуємо:

$$D(y)=\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right).$$

4. Дана функція визначена для тих проміжків, для яких виконується нерівність

$$-1\le\frac{x^2-1}{4}\le 1.$$

Розв'язуючи її, одержуємо

$$-4\le x^2-1\le 4,\ -3\le x^2\le 5,\ |x|\le\sqrt{5}.$$

Отже, $D(y)=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

9.12. Побудувати графіки елементарних функцій:

1) $y=2x^2-6x+4$; 2) $y=\sqrt{4-x}$; 3) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$.

Розв'язання.

1. Графік даної функції є парабола (рис. 9.3), гілки якої спрямовані вверх. Точки перетину графіка з віссю Ox знаходимо з рівняння

$$2x^2-6x+4=0;\ x_1=1,\ x_2=2.$$

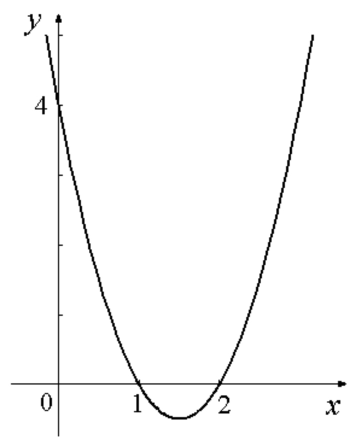


Рис. 9.3

2. Область визначення функції

$$D(y) = \left(-\infty; 4\right].$$

Графік відображено на рис. 9.4.

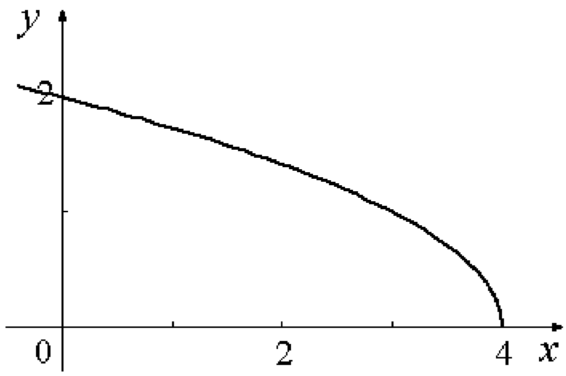


Рис. 9.4

2. Перетворимо дану функцію

$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{\left(x-2\right)+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Графіком цієї функції є гіпербола (рис. 9.5) з асимптотами $x = 2$ і $y = 1$.

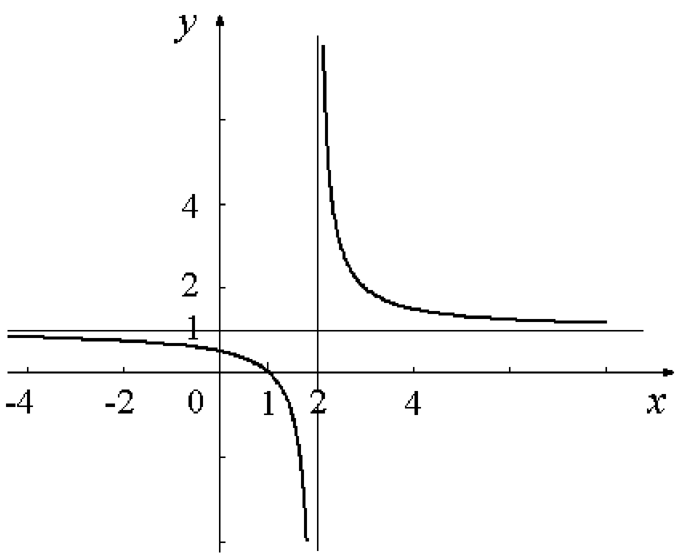


Рис. 9.5

9.13. У яку суму обернеться вклад у 1 гривню, якщо його поклали в банк на 100 років під 8 % річних?

Розв'язання.

Застосовуючи формулу складених процентів, маємо:

$$A_{100} = 1 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{100} = (1{,}08)^{100} \approx 2188 \text{ ãðí} .$$

9.14. У банк покладено 5 000 гривень під складені проценти. Через 7 років ця сума обернулася в 7035,5 грн. Під які проценти було зроблено вклад?

Розв'язання.

За формулою складених процентів маємо:

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{7} = 7035{,}5, \text{ звідки } 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[7]{1{,}4071};\, 1 + \frac{p}{100} = 1{,}05.$$

З останнього рівняння маємо $p = 5\ \%$.

Вправи:

9.15. Знайти область визначення кожної з наступних функцій:

1) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$;

2) $y = \log_2(3-x)$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$;

4) $y = \sqrt{x^2 + 9x} + \dfrac{2}{x+9}$;

5) $y = \sqrt{6 + 7x - 3x^2}$;

6) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2 \cdot 5^x - 3}{9 \cdot 5^x + 4}$;

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4^x + 3^{x+1}}{4^{x+1} + 3^x}$;

8) $y = \sqrt{x^2 - x - 20} + \sqrt{6-x}$;

9) $y = \sqrt{1 - |x|}$;

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x-2}{2x+1}\right)^{5x}$;

11) $y = \dfrac{1}{\log_2(1-x)} + \sqrt{x+2}$;

12) $y = \arcsin(1-2x)$;

13) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 - 9} - 2x}{2 - \sqrt[3]{x^3 + 5}}$;

14) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{64x^3 + 1} + 2}$;

15) $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x}{x+5}$.

9.16. Побудувати графіки функцій:

1) $y=2x-1$;

2) $y=|2x-1|$;

3) $y=2|x|-1$;

4) $y=x^2-4x$;

5) $y=|x^2-4x|$;

6) $y=x^2-4|x|$;

7) $y=2x-x^2-8$;

8) $y=|2x-x^2-8|$;

9) $y=\sqrt{x}$;

10) $y=\sqrt{1-x}$;

11) $y=\dfrac{2}{x-1}$;

12) $y=-\dfrac{2}{x+1}$;

13) $y=3-\dfrac{2}{x-1}$;

14) $y=\log_2(x-1)$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$;

16) $y=2^{x-1}$;

17) $y=1-2^{x-1}$;

18) $y=-\dfrac{1}{2}x^3$;

19) $y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0\\ 2x, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$

20) $y=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ 0, & 0<x<1\\ \log_2 x, & x\ge 1\end{cases}$

21) $y=\begin{cases}2x-x^2, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 2\\ -2x, & x>2\end{cases}$

22) $y=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ 2\sin x, & 0\le x>\dfrac{\pi}{2}\\ 2, & x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

9.17. Який вклад треба зробити в банк під 4 % складених, щоб через 15 років утворилась сума в 10 000 гривень?

9.18. Собівартість виробу знизилася за перше півріччя на 10 %, а за друге – на 20 %. Визначити первісну собівартість виробу, якщо нова собівартість склала 576 гривень.

9.19. Через скільки років житловий фонд міста збільшиться у півтора рази, якщо щорічно він буде збільшуватися на 3 %?

Глава 10
Границі числових послідовностей та функцій

10.1. Границя послідовності

***Означення**.* Функцію $y = f(x)$, де $x \in N$, називають числовою послідовністю. У цьому випадку функцію позначають $x_n = f(n)$. Таким чином, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ – це значення функції відповідно при $n = 1, 2, \ldots, n.$ Числова послідовність вважається заданою, якщо для кожного номера $n(n \in N)$ можливо однозначно визначити член послідовності, що знаходиться на n-му місці.

Задання послідовності найчастіше здійснюється аналітичним способом, тобто у вигляді формули загального члена $x_n = f(n)$.

Щоб підійти до поняття границі, наведемо декілька прикладів числових послідовностей, а саме:

1) $\{x_n\} = \dfrac{1}{n}: \quad 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots;$

2) $\{x_n\} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}: \quad 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots;$

3) $\{x_n\} = \dfrac{n}{n+1}: \quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots;$

4) $\{x_n\} = (-1)^{n+1}: \quad 1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots;$

5) $\{x_n\} = 2^n: \quad 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$.

Проаналізуємо поведінку числових послідовностей при зростанні номера n.

У першому прикладі змінна x_n наближається до нуля, у другому змінна наближається до нуля, але значення x_n коливаються навколо нуля; у третьому прикладі змінна наближається до 1 та весь час зростає $(x_n < 1)$. Спільним для всіх послідовностей є те, що при зростанні номера

n різниця між x_n і певною сталою величиною a зменшується і залишається малою. Стале число a є границя послідовності.

Означення. Число a називають границю послідовності x_n, якщо для будь-якого додатного числа ε, яке б мале воно не було, знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх значень змінної x_n, у яких $n > N$, задовольняється нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

Символічно означення границі можна записати:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{10.2}$$

Згідно з означенням доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Запишемо нерівність

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0;$$

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Отже, можна покласти $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1.$

На відміну від розглянутої послідовності в прикладах 4 і 5 послідовності границі не мають.

Геометричний зміст границі послідовності. Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$ якщо $n > N(\varepsilon)$.

Таким чином, якщо число a – границя послідовності x_n, то який би ε-окіл точки a не взяти, всі члени послідовності x_n, починаючи з $n > N,$

повинні попасти в цей окіл. Отже, за цим околом залишається скінченна кількість членів x_n.

10.2. Основні теореми про послідовність, яка має границю

Властивості збіжних послідовностей формулюються у вигляді теорем, які далі застосовуються в теоретичних та практичних дослідженнях.

Теорема 1. Якщо змінна x_n має границю $a>0$ $(a<0)$, то починаючи з деякого номеру і сама змінна $x_n>0\left(x_n<0\right)$.

Теорема 2. Якщо змінна x_n має скінченну границю, то вона обмежена.

Теорема 3. Якщо змінна x_n має скінченну границю, то ця границя тільки єдина.

Теорема 4. Якщо члени послідовностей задовольняють нерівність $x_n \le y_n$, то її границі задовольняють таку ж саму нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 5. Якщо члени послідовностей $\{x_n\};\{y_n\};\{z_n\}$, починаючи з деякого $n(n>N)$, задовольняють нерівність

$$x_n \le y_n \le z_n$$

та

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то послідовність $\{y_n\}$ також збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

Теорема 6. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає (спадає) і обмежена зверху (знизу), то така послідовність має границю.

Доведення цих теорем може бути розглянуто як теоретичні приклади.

10.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності, їх властивості

***Означення*.** Нескінченно малою послідовністю називається послідовність, границя якої дорівнює нулю.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,$ або $\left|x_n - 0\right| < \varepsilon, \quad n>N.$

Будемо позначати нескінченно малі послідовності: $\{\alpha_n\};\{\beta_n\}$ і т. д. Прикладом нескінченно малих послідовностей є $x_n = \frac{1}{n}$, або $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Теорема 7. Послідовність $\{x_n\}$ має границю a, тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді суми сталого числа a, та нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n\}$. Тобто $x_n = a + \alpha_n$.

Доведенння.

Необхідність. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Довести, що $x_n = a + \alpha_n$.

За означенням границі $|x_n - a| < \varepsilon,\ n > N(\varepsilon)$, тобто $x_n - a = \alpha_n -$ нескінченна мала, тоді $x_n = a + \alpha_n$.

Достатність. Нехай $x_n = a + \alpha_n$. Довести, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a.$

Отже, за умовою $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon\ (n > N)$, а це означає, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Розглянемо *основні властивості* нескінченно малих:

1. Сума декількох нескінченно малих послідовностей є послідовність нескінченно мала.

Доведенння.

Нехай $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\} -$ нескінченно малі, тобто для будь-якого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існує такий номер N_1, що для усіх $n > N_1$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Аналогічно для послідовності $\{\beta_n\}$, яка нескінченна мала, для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ і $n > N_2$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Якщо $N = \max(N_1 : N_2)$, то $|\alpha_n + \beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, n > N.$ Отже, послідовність $\alpha_n + \beta_n -$ нескінченно мала.

2. Добуток нескінченно малої на обмежену послідовність – нескінченно мала послідовність.

Доведення.

Нехай $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала, а $\{x_n\} -$ обмежена послідовність.

З визначення обмеженості, існує таке число $M,$ що для будь-якого члену послідовності $|x_n| \le M$. Для нескінченно малої послідовності:

$$\frac{\varepsilon}{M} > 0,\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}, n > N.$$

Звідси $\left|x_n \cdot \alpha_n\right| = \left|x_n\right| \cdot \left|\alpha_n\right| = \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon, n > N,$ тобто $x_n \cdot \alpha_n$ – нескінченно мала послідовність.

Наслідок 1. Добуток сталої на нескінченно малу є нескінченно мала послідовність.

Наслідок 2. Добуток скінченного числа нескінченно малих є нескінченно мала послідовність.

Означення. Нескінченно великою послідовністю зветься послідовність, яка має нескінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,$ тобто для будь-якого великого числа $M > 0$ знайдеться такий номер $N,$ що для всіх $n > N, \left|x_n\right| > M.$ Наприклад, $\left\{x_n\right\} = 2n+1,$ $\left\{x_n\right\} = 2^n,$

Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями затверджується такою теоремою:

Теорема 8*.* Якщо змінна $\left\{x_n\right\}$ – нескінченно мала, то змінна $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – нескінченно велика, і навпаки, якщо $\left\{x_n\right\}$ – нескінченно велика, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – нескінченно мала.

Доведення.

Нехай $\left\{x_n\right\}$ – нескінченно мала, тобто $\left|x_n\right| < \varepsilon, n > N,$ звідси $\frac{1}{\left|x_n\right|} > \frac{1}{\varepsilon}.$ Якщо покласти $\frac{1}{\varepsilon} = M$, то

$$\frac{1}{\left|x_n\right|} > M, n > N(\varepsilon).$$

Теорему доведено:

10.4. Границі додатку, добутку, частки

Теорема 9. Нехай $\left\{x_n\right\}, \left\{y_n\right\}$ – збіжні послідовності і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a;$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ тоді їх сума (різниця), добуток, частка (якщо границя знаменника $\neq 0$) також має границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab; \qquad (10.3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}\left(b \neq 0\right).$$

Наведені співвідношення поширюються і на випадок кількох, але певного числа, доданків чи множників.

Доведемо одне з тверджень теореми, наприклад: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$

Доведення.

З визначення границі $\quad x_n = a + \alpha_n,$

$$y_n = b + \beta_n,$$

де α_n і β_n – нескінченно малі. Знайдемо добуток

$$x_n \cdot y_n = \left(a + \alpha_n\right)\left(b + \beta_n\right) = ab + \underbrace{b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n}_{\gamma_n}.$$

На основі властивостей нескінченно малих до додатку ab додається нескінченно мала, що свідчить про те, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$

10.5. Границя функції. Геометричний зміст. Односторонні границі функції

Зафіксуємо певне значення $x = x_0$, в околі якого функція $f\left(x\right)$ визначена, в самій точці x_0 функція може й не існувати. Точка $x = x_0$ називаються граничною точкою множини $\tilde{O} = \left\{x_i\right\}$, якщо в будь-якому околі точки існують значення $x \in \tilde{O}$ відмінні від x_0.

Означення. Функція $y = f\left(x\right)$ має границю A при x, що прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, що збігається до x_0, відповідна послідовність значень функції збігається до A. Отже, якщо

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \to x_0 \quad \left(x \neq x_0\right);$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \to A.$$

Границю функції пишуть у такому вигляді:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \tag{10.4}$$

або $f(x)\to A$ при $x\to x_0$ або $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$

В останніх формулах послідовність x_n – нескінченно велика. Якщо $|f(x)|\to\infty$ при $x\to x_0$, то функцію $f(x)$ називають нескінченно великою при $x\to x_0$.

Якщо $f(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то функцію $f(x)$ називають нескінченно малою при $x\to x_0$.

Наприклад, $y=\dfrac{1}{x}$ є функція нескінченно велика при $x\to 0$ і нескінченно мала при $x\to\infty$.

Приклад 10.1. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{4x+1}=\dfrac{3}{4}.$

Розв'язання.

Розглянемо різницю між $f(x)$ і A

$$\frac{3x-1}{4x+1}-\frac{3}{4}=\frac{-7}{4(4x+1)}.$$

У знаменнику величина $4(4x+1)$ – нескінченно велика, а чисельник цього дробу - стала величина. Отже, дріб буде нескінченно малим. Таким чином, різниця між $f(x)$ і числом $\dfrac{3}{4}$ є нескінченно малою, а це означає, що $\lim\limits_{x\to\infty} f(\tilde{o})=\dfrac{3}{4}.$

Приклад 10.2. Довести, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не існує.

Доведення.

Функція визначена для всіх $x\neq 0$. Візьмемо послідовність значень аргументу, що прямує до нуля:

$$\frac{1}{\pi},\frac{1}{3\pi},\ldots,\frac{1}{(2n-1)\pi}\to 0,$$

а тоді

$$\cos\pi, \cos 3\pi, \ldots, \cos(2n-1)\pi \to -1.$$

Візьмемо другу послідовність аргументу

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \ldots, \frac{1}{2n\pi} \to 0.$$

Послідовність значень функції $\cos 2\pi, \cos 4\pi, \ldots, \cos 2n\pi \to 1.$ Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не існує, тому що для двох різних послідовностей значень x, що збігаються до нуля, одержані різні границі відповідних послідовностей значень функцій.

Наведемо означення границі функції за Коші.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називають границею функції в точці x_0, тобто $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

Звернемо увагу на поняття односторонніх границь функції. Згідно з означенням границі функції співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ передбачає, щоб відповідні умови означення виконувались для всіх точок, близьких до x_0 як справа так і зліва. Але на практиці існують функції, що поводяться по різному поблизу точки x_0. Наприклад, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$. У зв'язку з цим вводяться поняття правосторонньої та лівосторонньої границі.

Означення. Число A називають границею функції $f(x)$ зліва (справа) в точці x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу збіжної до x_0 $(x_n < x_0)(x_n > x_0)$ відповідна послідовність значень функції збігається до A. Позначається:

ліва границя:

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0),$$

права границя:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0).$$

Між односторонніми границями та границею функцій у точці x_0 має місце певний зв'язок. Якщо односторонні границі функції існують і рівні, то існує $\lim\limits_{x \to \delta_0} f(x)$, тобто

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0} f(x). \qquad (10.5)$$

Геометричний зміст границі функції. Якщо число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то який би малий ε-окіл точки A ми не взяли, знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \neq x_0$ відповідні значення функції містяться у смузі $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ шириною 2ε (рис.10.1).

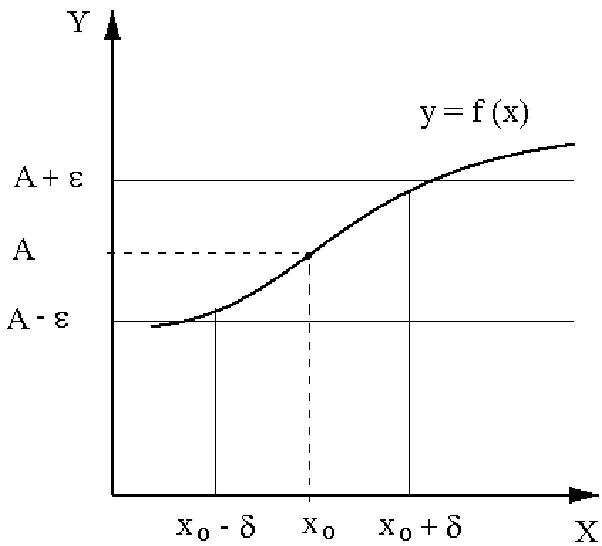


Рис.10.1

10.6. Поширення теорії границь послідовностей на функції

Границі функції неперервного аргументу мають властивості, аналогічні тим, які були доведені щодо послідовностей. Цей факт доводиться, якщо границі функції визначати на мові послідовностей.

Для розв’язування прикладів наведемо теорему про знаходження границі суми, добутку та частки.

Теорема 10. Нехай на множині $\tilde{O}$ з граничною точкою задаються функції $f(x)$ та $g(x)$, які в точці x_0 мають скінченні границі

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A; \ \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

Тоді границя суми, добутку, частки цих функцій дорівнює сумі, добутку, частці границь цих функцій (якщо границя знаменника не дорівнює нулю) відповідно.

Сформульована теорема в стислому вигляді запишеться так:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lim_{x \to x_0}\left(f(x) + g(x)\right) = A + B; \\
&2)\ \lim_{x \to x_0}\left(f(x) - g(x)\right) = A - B; \\
&3)\ \lim_{x \to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B; \\
&4)\ \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0.
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Доведемо теорему для першого співвідношення (10.6).

Доведення.

За визначенням границі функції для будь-якої послідовності значень змінної x, відмінних від x_0, що належать до області $\tilde{O}$,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \to x_0.$$

Відповідні послідовності значень функцій

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \to A;$$
$$g(x_1), g(x_2), g(x_3), \ldots, g(x_n), \ldots \to B.$$

Для функцій натурального аргументу

$$f(x_1) + g(x_1),\ f(x_2) + g(x_2),\ f(x_3) + g(x_3), \ldots, f(x_n) + g(x_n), \ldots \to A + B$$

і теорему доведено. Інші співвідношення доводяться аналогічно.

Якщо наведені умови теореми не виконуються, то маємо справу з так званими невизначеностями, границі яких можна знайти відповідними перетвореннями. Якщо функція визначена в точці x_0, то обчислення границі зведеться до підстановки замість x його граничного значення, тобто використовується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)=f(x_0)$.

Приклад 10.3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to a} x^n$.

Розв'язання.

У цьому простому прикладі легко використовується теорема про границю добутку.

$$\lim_{x\to a} x^n=\lim_{x\to a}(x\cdot x\ldots x)=\left(\lim_{x\to a} x\right)^n=a^n.$$

Приклад 10.4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -3}\left(2x^2-5x+1\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -3}\left(2x^2-5x+1\right)=\lim_{x\to -3}\left(2x^2\right)-\lim_{x\to 3}(5x)+\lim_{x\to -3}1= =2\cdot(-3)^2-5(-3)+1=34.$$

Отже, границя визначення за теоремами та їх наслідками.

Приклад 10.5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання.

У цьому прикладі також працюють теореми, а саме

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 10.6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2-x-2}=\frac{8}{0}=\infty.$$

У точці $x=2$ функція невизначена, знаменник дробу дорівнює нулю і теорема про границю частки не працює. Але із властивостей нескінченно малих ця функція нескінченно велика при $x\to 2$.

Отже, функція наближається до нескінченності.

Запитання для самодіагностики

1. Яка послідовність вважається заданою?
2. Яке число називається границею послідовності?
3. Які властивості послідовностей, що мають границю ви знаєте?
4. Яка послідовність називається нескінчинно малою (великою)?
5. Які властивості нескінченно малих (великих) послідовностей?
6. Наведіть означення границі функції.
7. Який геометричний зміст границі функції?
8. Які теореми використовуються для знаходження границі функції?

Приклади і вправи

Приклади:

10.7. Написати перші п’ять членів послідовності:

а) $\{x_n\} = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$; б) $\{x_n\} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

Розв'язання.

Задаючи для n значення 1, 2, 3, 4, 5, одержуємо перші п’ять членів даних послідовностей

а) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

б) $-\frac{\pi}{3} + \pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi, -\frac{\pi}{3} + 3\pi, \frac{\pi}{3} + 4\pi, -\frac{\pi}{3} + 5\pi \ldots$ або

$\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \ldots$

10.8. Написати формулу загального члена послідовності:

а) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; б) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$

Розв'язання:

а) маємо: $|x_1| = \left|-\frac{1}{1+1}\right| = \frac{1}{2}$, $|x_2| = \left|\frac{1}{1+2}\right| = \frac{1}{3}$, $|x_3| = \left|-\frac{1}{1+3}\right| = \frac{1}{4}, \ldots$

Отже, $x_1 < 0, x_2 > 0, x_3 < 0, \ldots$

Таким чином, одержуємо $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$;

б) легко бачити, що $x_1 = \frac{1+1}{1} = 2$, $x_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$, …

Отже, $x_n = \frac{n+1}{n}$.

10.9. Згідно з означенням границі послідовності довести, що послідовність $x_n = \frac{1}{n^2}$ має границю, яка дорівнює нулю.

Розв'язання.

Запишемо за виглядом x_n задану послідовність

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$$

Із зростанням n значення x_n зменшуються і наближаються до нуля. Доведемо, що починаючи з деякого номера N абсолютні значення x_n будуть менші за будь-яке наперед задане як завгодно мале додатне число ε.

Задамо довільне число $\varepsilon > 0$ і розглянемо $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2}$. Нерівність $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ буде виконуватися при $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, тобто $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Покладемо, наприклад, $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, що при $n > N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ виконується нерівність $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$, а це означає, що границею заданої послідовності є число нуль.

10.10. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3$.

Розв'язання.

Розглянемо модуль різниці $\left|\frac{3n-1}{n+2} - 3\right| = \left|\frac{-7}{n+2}\right| = \frac{7}{n+2}$. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$ і оцінимо цю різницю: $\frac{7}{n+2} < \varepsilon$. Звідси $n > \frac{7}{\varepsilon} - 2$. Покладемо, наприклад, $N = \frac{7}{\varepsilon} - 2$. Таким чином, для кожного додатного числа ε

знайдеться число $N=\frac{7}{\varepsilon}-2$ таке, що при $n>N$ буде мати місце нерівність $\left|\frac{3n-1}{n+2}-3\right|<\varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+2}=3$.

10.11. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-100n^2+1}{100n^4+10n}$.

Розв'язання.

Винесемо за дужки в чисельнику і знаменнику n^4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-100n^2+1}{100n^4+10n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(1-\frac{100}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(100+\frac{10}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{100}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{100+\frac{10}{n^3}}=\frac{1-0+0}{100+0}=\frac{1}{100}.$$

10.12. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$.

Розв'язання.

Перетворимо заданий вираз

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

10.13. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

Розв'язання.

Застосуємо рівність $(n+1)!=n!(n+1)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

10.14. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$.

Розв'язання.

Застосуємо для чисельника і знаменника формулу суми n членів геометричної прогресії $S_n=\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\frac{2}{3}.$$

10.15. Обчислити наступні границі, застосовуючи властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x+1}\cos 2x$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x+2}{\log_3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to1\pm0}\dfrac{3}{(x-1)^3}$.

Розв'язання:

а) при $x\to-\infty$ $2^{x+1}\to0$, а $\cos 2x$ – обмежена функція при $x\in R$ $\left(|\cos 2x|\le1\right)$. Тому $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x+1}\cos 2x=0$;

б) при $x\to+\infty$ $\operatorname{arctg}x\to\dfrac{\pi}{2}$, тому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=0$;

в) при $x\to+0$ $\log_3 x\to-\infty$ (згадаємо графік функції $y=\log_a x$ при $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(5-x^2\right)-\ln5}{2x^2}$), тому $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x+2}{\log_3 x}=0$;

г) при $x \to 1-0$ функція $(x-1)$, а тому і функція $\left(x-1\right)^3$ є від'ємна нескінченно мала, тобто $(x-1)^3 \to -0$, а тому $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{3}{(x-1)^3} = -\infty$.

При $x \to 1+0$ $(x-1)^3 \to +0$, а тому $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{3}{(x-1)^3} = +\infty$.

10.16. Знайти $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2-3x+1}{\log_3(x^2-1)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2-3x+1}{\log_3(x^2-1)} = \frac{2(-2)^2-3(-2)+1}{\log_3((-2)^2-1)} = \frac{15}{\log_3 3} = 15.$$

10.17. Знайти $\lim\limits_{x\to 2} \left(2x-5\right)^{x+1}$.

Розв'язання.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x-5\right) = -1$, а $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+1\right) = 3$, то

$$\lim_{x\to 2}\left(2x-5\right)^{x+1} = \left(-1\right)^3 = -1.$$

10.18. Обчислити односторонні границі

а) $\lim\limits_{x\to -2-0} \frac{2x+1}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to \pm 0} \frac{x+1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

Розв'язання:

а) при $x \to -2-0$ знаменник дробу прямує до -0, а чисельник – до -3. Отже, дріб $\frac{2x+1}{x+2}$ є додатною нескінченно великою величиною, тобто $\lim\limits_{x\to -2-0} \frac{2x+1}{x+2} = +\infty$;

б) при $x \to +0$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$. Тоді $\lim\limits_{x\to +0} \frac{x+1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$.

При $x \to -0$, $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $2^{\frac{1}{x}} \to 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to -0} \frac{x+1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1$.

Вправи:

10.19. Написати перші п'ять членів послідовності:

а) $\{x_n\} = \frac{3n+5}{2n-3}$; б) $\{x_n\} = 2^n + \frac{1}{2^n}$; в) $\{x_n\} = \sin \pi n$;

г) $\{x_n\} = n + (-1)^n \cdot n;$ д) $\{x_n\} = \dfrac{n+1}{n^2}.$

10.20. Вказати формулу загального члена послідовності:

а) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots;$ б) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2^2}, \dfrac{3}{2^3}, \dfrac{4}{2^4}, \dfrac{5}{2^5} \ldots;$

в) $2, 5, 8, 11, 14, \ldots;$ г) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6} \ldots;$

д) $0, 2, 0, 2, 0, \ldots.$

10.21. Згідно з означенням границі послідовності довести, що

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3} = \dfrac{5}{7};$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0.$

Знайти границі:

10.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{2-7n}.$

10.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n}{n^2-1}.$

10.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n-1}.$

10.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}.$

10.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt[3]{2n^3-1}}.$

10.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right).$

10.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right).$

10.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}.$

10.30. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{25} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{5^n}\right).$

10.31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}.$

10.32. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n}\right).$

Обчислити границі, використовуючи властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій:

10.33. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{3^x};$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \log_{1,7} x.$

10.34. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x}{\operatorname{tg}^2 3x};$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}.$

10.35. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{3^x};$ б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{|x-1|}}.$

10.36. а) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x \cdot \sin x$.

10.37. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3^x+5^x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x-1}\log_3 x$.

10.38. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2^x}{x+1}$.

Знайти границі:

10.39. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+1}$.

10.40. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x^2-1}$.

10.41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}{\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

10.42. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \arcsin x$.

10.43. $\lim\limits_{x\to1} (3x-1)^{\log_3 x}$.

10.44. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2^{x-3}}$.

10.45.. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{c\,\mathrm{tg}^2(2x+4)}$.

10.46. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

10.47. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-3x^2}{2x}$.

10.48.. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-\log_{\frac{1}{3}} x\right)$.

10.49. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x-1}\log_3 x$.

10.50. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-2x^2-3x+12\right)$.

10.51. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$.

10.52. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\log_{\frac{1}{5}} |x|}$.

10.53. $\lim\limits_{x\to1} 0{,}3^{\frac{2}{|x-1|}}$.

Знайти односторонні границі:

10.54. $\lim\limits_{x\to1\pm0} \dfrac{x+1}{x-1}$.

10.55. $\lim\limits_{x\to\pm0} \left(2^{\frac{3}{x}}+3\right)$.

10.56. $\lim\limits_{x\to3\pm0} \dfrac{-x^2+7x}{x-3}$.

10.57. $\lim\limits_{x\to(-2\pm0)} \dfrac{x^2}{4-x^2}$.

Глава 11 Розкриття невизначеностей. Перша та друга чудові границі

11.1. Розкриття невизначеностей

При знаходженні границі функцій необхідно мати на увазі теореми, яким задовольняють функції, що мають границю. На практиці досить широко маємо справу з такими функціями, до яких теореми використати неможливо, якщо не перетворити вираз, границю якого треба обчислити. Такі вирази називають невизначеностями. Розглянемо ряд невизначень різного типу.

1. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, якщо треба знайти границю відношення двох многочленів, коли аргумент прямує до нескінченності:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n.\\ \infty, & m>n\end{cases} \qquad (11.1)$$

Для обчислення границі потрібно чисельник та знаменник дробу поділити на найвищу степінь x, а потім обчислити границю.

Приклад 11.1. Обчислити границю:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x-1}{2x^3-x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{\infty}+\frac{2}{x^3}}=\frac{5}{2};$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+1}=\sqrt{3}.$$

У цьому прикладі перша степінь змінної n є найвища, тому чисельник та знаменник поділили на n і обчислили границю.

2. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Розглянемо границю частки двох функцій: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, коли $f(x)$ і $\varphi(x)$ прямують до 0 одночасно. Тобто $x=a$ є коренем чисельника та знаменника. У випадку, якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ многочлени, їх можливо за теоремою Безу розкласти на множники, один з яких $x-a$, а потім скоротити дріб на $x-a$.

Приклад 11.2. Обчислити границю.

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+5x-7}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+7\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+2x+7}{x-2}=-11.$$

Щоб виділити в чисельнику і знаменнику множник $x-1$, треба поділили «сходинками» чисельник та знаменник на $x-1$.

Подібним чином, тобто вилученням множника $(x-a)$ розкривають невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ і тоді, коли чисельник і знаменник (або) містять кореневі ірраціональності. Найбільш поширена при цьому операція – помноження чисельника і знаменника дробу на вираз, спряжений тому чи іншому (або і тому, і іншому, залежно від операції), з метою позбутися початкової ірраціональності, щоб одержати множник $(x-a)$.

Приклад 11.3. Обчислити границю

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{14+x}-4}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{6-x}-2\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{\left(\sqrt{14+x}-4\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(2-x)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=-\frac{8}{4}=-2.$$

3. Невизначеності типу $[\infty-\infty]$. Невизначеності цього виду за допомогою перетворень потрібно привести до невизначень $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 11.4. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{1}{6}$;

б) $$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(x-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)\left(x+x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)}{x+x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}=\frac{x^2-x^2-2}{x+x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=\frac{-2}{-\infty}=0.$$

У цьому прикладі, якщо x прямує до $+\infty$ невизначеності не маємо:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=\infty+\infty=\infty$$

як сума двох нескінченно великих змінних.

11.2. Перша чудова границя. Наслідки

Теорема 1. Границя відношення синуса нескінченно малого аргументу до цього аргументу дорівнює одиниці, тобто

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{11.2}$$

Доведення.

Щоб довести теорему, розглянемо коло радіусу 1 з центром у точці O (рис. 11.1) і нехай $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Порівняємо площини трикутника AOB, сектору $A\breve{O}B$, трикутника AOC. З геометричних міркувань очевидно, що $S_{\Delta AOB}<S_{сектAOB}<S_{\Delta AOS}$.

Отже, $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x$, або $\sin x<x<\dfrac{\sin x}{\cos x}$, або $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$. Звідси

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<1.$$

Зауважимо, що дані нерівності виконуються і для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, тому що функції $\cos x$ і $\frac{\sin x}{x}$ – парні. Переходячи до границі, будемо мати $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1; \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Тоді за ознакою існування границі проміжної функції $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

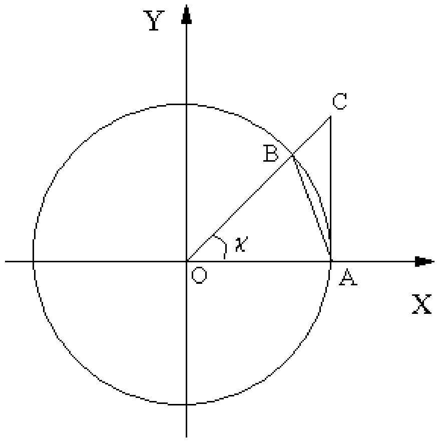


Рис. 11.1

Для застосування цієї теореми треба відзначити, що в ролі аргументу x під знаком синуса може виступати складний аргумент – функція незалежної змінної, але структура виразу повинна бути саме такою, як у наведеній теоремі. Тобто $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, якщо $\sin \alpha(x) \to 0$ і $\alpha(x) \to 0$, коли аргумент x прямує до a.

На практиці, як готові формули, використовують наслідки з теореми

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1.$ 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1.$

Приклад 11.5. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{4x} = \frac{5}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{4};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2};$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x(x-1)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x(x-1)}{2\cdot\frac{x(x-1)}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha}{2\cdot 2}=\frac{1}{2},$

де $\alpha=\frac{1}{2}x(x-1);$

д) $\lim\limits_{x\to 0}x\,\mathrm{ctg}\,5x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cdot x}{5\cdot\mathrm{tg}\,5x}=\frac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\mathrm{tg}\,5x}=\frac{1}{5}.$

11.3. Друга чудова границя. Наслідки

Теорема 2*.* Границя послідовності $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, якщо $n\to\infty$ дорівнює:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{11.3}$$

Доведення.

Розглянемо послідовність з загальним членом $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Якщо n прямує до нескінченності, маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$. Проведемо аналіз поведінки цієї послідовності при $n\to\infty$. Припустимо, що послідовність $\{u_n\}$ монотонно зростає. Дійсно, скористаємося формулою бінома Ньютона

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-(n-1))}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

або

$$u_n = 2 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Із зростанням n зростає як число додатних доданків (їх у формулі $n+1$), так і величина кожного доданка, тобто $\{u_n\}$ – зростає.

Зробимо оцінку загального члена послідовності u_n.

$$u_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отже, маємо суму S_{n-1} членів геометричної прогресії з першим членом $a = \frac{1}{2}$ та знаменником $q = \frac{1}{2}$.

$$S_{n-1} = \frac{a\left(q^{n-1} - 1\right)}{q-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

або $\qquad 2 < u_n < 2 + 1,$ тобто $2 < u_n < 3.$

Таким чином, послідовність u_n – монотонно зростає і обмежена. Тобто u_n має границю. Границя числової послідовності $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ існує і дорівнює числу e $\left(e = 2{,}718281\ldots\right)$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Можна довести, що функція $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \pm\infty$ також має границю, яка дорівнює e (будь-яке дійсне число x знаходиться між двома натуральними $n \le x \le n+1$).

Другою чудовою границею називають

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (11.4)$$

Останню рівність можна записати і в такому вигляді:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e, \tag{11.5}$$

де $\alpha=\dfrac{1}{x}$, при $x\to\infty,\ \alpha\to 0.$

Стосовно двох формул (11.4) та (11.5), що відповідають другій чудовій границі, можна навести такі самі міркування, як і при аналізі першої чудової границі: в ролі x та α можуть виступати відповідно будь-які нескінченно великі чи нескінченно малі, але структура виразу повинна бути такою, як у наведених формулах.

На практиці як готові формули використовують наслідки з основної теореми:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{1/bx}=e^{a/b}$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{bx}\right)^{x}=e^{a/b}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{bx}=e^{ab}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

Приклад 11.6. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}\cdot 5x}=e^{15};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{3/x}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1-2x)^{-1/2x}\right)^{-\frac{2x\cdot 3}{x}}=e^{-6};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2(2x-1)}{x+1}}=e^{4};$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-1+\cos x)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+(\cos x-1))^{1/(\cos x-1)}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

Задача. Початковий внесок у банк складає A_0. Банк нараховує щорічно $p\%$ річних, але нараховуються вони m разів за рік при щорічному зростанні на $p\%_0$. Необхідно знайти величину вкладу, який буде накопичено за n років.

За формулою складених процентів

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}.$$

Якщо проценти по внеску нараховуються неперервно, то будемо мати:

$$A_n = \lim_{m\to\infty} A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn} = A_0 \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{p}{100m}mn} = A_0 e^{\frac{pn}{100}}.$$

Формула відображує показниковий (експоненціальний) закон зростання (при $p>0$) або спадання (при $p<0$). Її можна використовувати при неперервному нарахуванні відсотків. Ця формула є достатньо ефективною при аналізі складних фінансових проблем, наприклад при обґрунтуванні та виборі інвестиційних рішень.

11.4. Нескінченно малі, їх порівняння

Нехай $\alpha=\alpha(x), \beta=\beta(x)-$ нескінченно малі функції при $x\to a$ ($a-$скінченне число або ∞). Хоча всі нескінченно малі мають границю O, ступінь прямування до нього буває різним, у зв'язку з чим і виникає потреба у їх порівнянні.

Порівняти нескінченно малі – це обчислити границю їх відношення

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c. \tag{11.6}$$

Якщо така границя існує, то

а) при $c\neq 0, \alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими одного порядку. Зокрема про $c=1$ нескінченно малі α і β називають еквівалентними і пишуть $\alpha \sim \beta$;

б) при $c=0, \alpha(x)$ називають нескінченно малою більш високого порядку, ніж $\beta(x)$;

в) при $c=\infty, \alpha(x)-$нескінченно мала більш низького порядку ніж $\beta(x)$.

Коли виникає потреба в більш точній порівняльній характеристиці поведінки $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, треба обчислити порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$.

Означення. Нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою порядку k відносно нескінченно малою $\beta(x)$, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c\neq 0.$$

Нехай, наприклад, $\alpha=x; \beta=x^{10}, x\to 0,$ тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{10}}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}x^9=0-$ нескінченна мала $\beta(x)$ більш високого порядку малості, ніж α. При цьому порядок малості $k=10$. Отже β і $\alpha^{10}-$еквівалентні нескінченно малі.

11.5. Використання еквівалентних нескінченно малих при обчисленні границь

Особливий інтерес при обчисленні границі функції викликають еквівалентні нескінченно малі. Ряд еквівалентних нескінченно малих одержано виходячи з першої та другої чудових границь при $\alpha(x)\to 0$:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 3. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 5. $\ln(1\pm\alpha(x))\sim\pm\alpha(x)$.

2. $\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 4. $\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 6. $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a.$ (11.7)

Приклад 11.7*.* Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{arctg}\,6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{6x}=\frac{5}{6};$

Граничний перехід дає невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки $x \to 0,$ $\sin 5x \sim 5x,\ \operatorname{arctg} 6x \sim 6x;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{2\sin^2\frac{5}{2}x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9}{4}x^2}{\frac{25}{4}x^2} = \dfrac{9}{25};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin 3x)}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 3x}{5x} = \dfrac{6}{5};$

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos 5x - \cos 7x}{\arcsin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 6x\cdot \sin x}{\arcsin^2 3x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x\cdot x}{9x^2} = \dfrac{4}{3}.$

Запитання для самодіагностики

1. Як розкриваються невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$,
2. Що являє собою перша чудова границя?
3. Що являє собою друга чудова границя?
4. Які функції називається еквівалентними?
5. Як еквівалентні функції застосовуються при обчисленні границь?

Приклади і вправи

Приклади:

11.8. Знайти: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^4-x}$.

Розв'язання.

Оскільки при $x \to 1$ чисельник і знаменник прямують до нуля, то маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розкладаємо на множники чисельник і знаменник дробу і скорочуємо його. Отже, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^4-x} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x\left(x^2+x+1\right)} = \frac{3+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

11.9. Знайти: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.

Розв'язання.

Тут маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для її розкриття помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Після скорочення дробу на $(x-4)$ застосуємо теорему про границю частки.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x-\sqrt{3x+4}\right)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}{\left(16-x^2\right)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{\left(16-x^2\right)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+1)}{-(x-4)(x+4)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+1}{-(x+4)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=-\frac{5}{64}.$$

11.10. Знайти: $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для розкриття невизначеності доцільно зробити заміну $x=t^6$. При $x\to 64$ $\;t\to\sqrt[6]{64}$, тобто $t\to 2$. Отже,

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 2}\frac{t^3-8}{4-t^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(t-2)\left(t^2+2t+4\right)}{-(t-2)(t+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{t^2+2t+4}{-(t+2)}=-3.$$

11.11. Знайти: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Помножимо чисельник і знаменник на вирази, які спряжені до них.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4x+1-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2-4)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{4x+1}+3}=\frac{4\cdot 4}{3+3}=\frac{8}{3}.$$

11.12. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2}{2x^4+3x-5}$.

Розв'язання.

Тут маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. У подібних прикладах треба поділити чисельник і знаменник дробу на x^n, де n – найвищий з степенів чисельника і знаменника. В даному прикладі ділимо на x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x^2}{2x^4+3x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^4}}=\frac{0}{2}=0,$$

оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^4}=0$.

11.13. Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+5}{3\sqrt{x^2-x}+x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+5}{3\sqrt{x^2-x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)}+5}{3\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+5}{3x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+\frac{5}{x}}{3\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{1+0}{3+1}=\frac{1}{4}.$$

11.14. Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність вигляду $[\infty-\infty]$. Щоб її позбутися, спочатку помножимо та поділимо даний під знаком границі вираз на $\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3-x}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{x}{3}}{\sqrt{\frac{2x-3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{x}{3}}{\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}=\infty,$$

оскільки при $x\to+\infty$ знаменник дробу $\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\to 0$.

11.15. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}3x\cdot\operatorname{ctg}2x$.

Розв'язання.

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Перетворимо вираз $3x\cdot\operatorname{ctg}2x$ і застосуємо першу визначну границю.

$$\lim_{x\to 0}3x\cdot\operatorname{ctg}2x=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3\cos 2x}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2},$$

бо при $x\to 0$ $\frac{2x}{\sin 2x}\to 1$, а $\cos 2x\to 1$.

11.16. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\frac{5}{3},$$

бо при $x\to 0$ $\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}\to 1$, $\frac{\sin 3x}{3x}\to 1$.

11.17. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\arcsin x-2x}{\sin x+2\operatorname{arctg}x}$.

Розв'язання.

Отже маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для її розкриття поділимо на x кожний додаток чисельника і знаменника.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin x-2x}{\sin x+2\operatorname{arctg} x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3\arcsin x}{x}-2}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{x}}=\frac{3-2}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

11.18. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\operatorname{tg}^2 6x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\operatorname{tg}^2 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}{\left(\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{6x}\right)^2\cdot 36x^2}=\frac{2\cdot 9}{36}=\frac{1}{2}.$$

11.19. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=2,$$ бо при $x\to\infty$ $\dfrac{2}{x}\to 0$.

11.20. Знайти: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{2},$$

бо $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{(2x-1)}=1.$$

11.21. Знайти: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Розв'язання.

Нехай $x-\pi=\alpha$, тоді $x=\pi+\alpha$. При $x\to\pi$ $\alpha\to 0$. Маємо

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(3\pi+3\alpha)}{\sin(2\pi+2\alpha)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\dfrac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\cdot 3\alpha}{\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cdot 2\alpha}=-\frac{3}{2}.$$

11.22. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\sin x}{(1-\cos x)-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}=-1.$$

11.23. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x\right)\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos 2x\right)}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos 2x\right)}_{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 2x}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x+x\sin x}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4x^2}{2\left(\dfrac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{x^2}{4}}+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}\cdot x^2}{2\left(\dfrac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{x^2}{4}}=\frac{16}{2}+2=10.$$

11.24. Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{\frac{x-2}{3}}$.

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_{e}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{\frac{x-2}{3}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+2}{3x-1}-1\right)^{\frac{x-2}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{x-2}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}}_{e}\right)^{\frac{3}{3x-1}\frac{x-2}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x-2}{3x-1}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

11.25. Знайти: $\lim\limits_{x\to1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to1}\left(1+(4-4x)\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to1}\left(\underbrace{\left(1+(4-4x)\right)^{\frac{1}{4-4x}}}_{e}\right)^{\frac{2(4-4x)x}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to1}e^{\frac{-8(x-1)x}{x-1}}=\lim_{x\to1}e^{-8x}=e^{8}.$$

11.26. Знайти: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2x-1}{3x-1}\right)^{\frac{2}{x}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2x-1}{3x-1}\right)^{\frac{2}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2x-1}{3x-1}-1\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{3x-1}\right)^{\frac{2}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\underbrace{\left(1-\frac{x}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{-x}}}_{e}\right)^{\frac{-x}{3x-1}\cdot\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{-2}{3x-1}}=e^{2}.$$

11.27. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}}_{e}\right)^{\frac{\cos x-1}{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x-1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)} = e^0 = 1.$$

11.28. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}}_{e}\right)^{\frac{\sin x - x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\sin x}{x}} = e^{-1}.$$

11.29. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+5}\right)^{2x}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+5}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x\to+\infty, \\ \infty, & \text{якщо } x\to-\infty \end{cases}$$

11.30. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left(\ln(2x+3)-\ln(2x-1)\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}(x-1)\left(\ln(2x+3)-\ln(2x-1)\right) = \lim_{x\to\infty}(x-1)\ln\frac{2x+3}{2x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x-1} = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x-1} = \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{x-1} =$$

$$= \ln \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}}_{e}\right)^{\frac{4}{2x-1}(x-1)} = \ln \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4x-4}{2x-1}} = \ln e^2 = 2.$$

11.31. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^x}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin 2x}-1\right)-\left(e^x-1\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{2}\right) - 1 = 2-1 = 1.$$

11.32. Довести, що при $x\to 0$ $\quad 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

Розв'язання.

Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

11.33. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1-9x)}$.

Розв'язання.

Тут маємо при $x\to 0$ відношення двох нескінченно малих функцій. Застосуємо принцип заміни еквівалентних. Замінимо нескінченно малі величини $\left(e^{3x}-1\right)$ і $\ln\left(1-9x\right)$ простішими еквівалентними нескінченно малими величинами: $e^{3x}-1 \sim 3x, \quad \ln(1-9x) \sim -9x$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1-9x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-9x}=-\frac{1}{3}.$$

11.34. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin x}{\arcsin^2 2x}.$$

При $x\to 0$ $\quad\sin 3x\approx 3x,\quad \sin x\approx x,\quad \arcsin^2 2x\approx (2x)^2$

Тому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin x}{\arcsin^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cdot 3x\cdot x}{4x^2}=-\dfrac{3}{2}.$

Вправи:

Знайти границі функцій

11.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5}{3x^2+x-10}$.

11.36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-2x-1}$.

11.37. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

11.38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

11.39. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$.

11.40. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{2x^2-x-1}$.

11.41. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

11.42. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$.

11.43. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

11.44. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+3x+7}$.

11.45. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-2x-1}{100x^3+x^2+2}$.

11.46. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+5}{7x^4-2x^2+3}$.

11.47. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2-2}-\dfrac{x^4}{x^2+2}\right)$.

11.48. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x^4}{x^2+x+2}-4x^2\right)$.

11.49. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2\cdot 5^x-3}{9\cdot 5^x+4}$.

11.50. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x^2+3}{10x^2-1}\right)^{\frac{x}{2}}$.

11.51. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{2x+1}\right)^{5x}$.

11.52. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-9}-2x}{2-\sqrt[3]{x^3+5}}$.

11.53. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\right)$.

11.54. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$.

11.55. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$.

11.56. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\sin 8x}$.

11.57. $\lim\limits_{x\to0}x^2\operatorname{ctg}3x$.

11.58. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}$.

11.59. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{4x}$.

11.60. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{2x\cdot\sin x}$.

11.61. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}10x}{\sin 5x}$.

11.62. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{\arcsin(x+2)}$.

11.63. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$.

11.64. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

11.65. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}$.

11.66. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

11.67. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)^{2x}$.

11.68. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

11.69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-2}\right)^{x^2}$.

11.70. $\lim\limits_{x\to1}\left(3-2x\right)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

11.71. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{\cos x}{2x}}$.

11.72. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+5)-\ln x\right)$.

Знайти границі, застосовуючи еквівалентність нескінченно малих:

11.73. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 20x}{\operatorname{tg}15x}$.

11.74. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 4x}$.

11.75. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin 4x}$.

11.76. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2\left(1+2x\right)}$.

11.77. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{e^{-3x}-1}$.

11.78. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}4x)}$.

Глава 12
Неперервність функції, точки розриву

12.1. Неперервність функції в точці

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякій множині X, а в точці $x_0 \in X$ її значення відповідно $y_0 = f(x_0)$. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя цієї функції при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці. Тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{12.1}$$

Для неперервної функції в точці x_0 необхідно, щоб функція в цій точці існувала. В означенні неперервності функції точка x_0 належить області визначення функції і є внутрішньою точкою, тобто розгладяється двостороння границя функції. При дослідженні неперервності можуть бути випадки, коли функція неперервна у даній точці зліва або справа.

Означення. Якщо існує границя

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \tag{12.2}$$

або

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \tag{12.3}$$

то функцію називають неперервною в точці x_0 справа та зліва відповідно. Якщо ці умови не виконуються, то функція має розрив у точці x_0 справа або зліва.

Отже, якщо функція неперервна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці справа та зліва, тобто

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0). \tag{12.4}$$

Приклад 12.1. Довести, що функція $y = x^3 + 1$ неперервна в точці $x_0 = 2$.

Доведення.

Знайдемо значення функції в точці $x_0 = 2$, $f(2) = 9$. Обчислимо

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3+1\right)=\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}1=9.$$

Таким чином, границя функції в точці $x_0 = 2$ дорівнює значенню функції у цій точці, отже, функція неперервна в точці $x_0 = 2$.

Приклад 12.2. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

неперервна в точці $x_0 = 0$.

Доведення.

За умовою функція $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ (добуток нескінченно малої на обмежену), отже, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(0)$ і функція в точці x_0 є неперервна.

Приклад 12.3. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$$

у точці $x_0 = 1$ – розривна.

Доведення.

Обчислимо односторонні границі:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}x^2=1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2,$$

тобто границя зліва не дорівнює границі справа і в даній точці границі не існує і функція в точці $x_0 = 1$ – розривна.

Розглянемо ще одне визначення неперервності функції в точці. Введемо такі поняття: приростом аргументу при переході від значення x_0 до x називають різницю $\Delta x = x - x_0$, а відповідну зміну значення функції $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$ – приростом функції в точці x_0.

Нехай функція визначена в точці x_0 і неперервна в ній. Тоді

$$\Delta y = f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right),$$

а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)\right) = 0.$$

Звідси можемо надати таке означення неперервності в точці x_0

Означення. Якщо функція неперервна в точці x_0, то нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (12.5)$$

Виконується й обернене твердження, якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то функція неперервна. Дійсно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)\right) = \lim_{x \to x_0}\left(f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right) = 0,$$

або

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right),$$

тобто функція – неперервна.

Означення. Функція неперервна на множині X, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Приклад 12.4. Довести, що функція $y = x^2$ – неперервна на множині $\left(-\infty; +\infty\right)$.

Доведення.

Для будь-якої точки x знайдемо

$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right) = \left(x + \Delta x\right)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2$$

Тоді:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2\right)=0,$$

тобто функція неперервна в довільній точці x.

Приклад 12.5. Довести, що функція $y=\sin x$ – неперервна для будь-якого $x\in\left(-\infty;\ +\infty\right)$.

Доведення.

Визначимо:

$$\Delta y=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тоді:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

і неперервність доведено ($\sin\frac{\Delta x}{2}$ – нескінченно мала, $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ – обмежений одиницею).

12.2. Класифікація розривів функції в точці. Дослідження на неперервність

Якщо для функції $f\left(x\right)$ в точці x_0 не виконується хоча б одна з умов неперервності, тобто функція не є неперервною в цій точці, то говорять, що точка x_0 – точка розриву функції, або $f\left(x\right)$ має розрив у точці x_0.

Точки розриву функції класифікуються залежно від того, як саме порушується критерій неперервності. Розрізняють такі випадки:

1. Існують односторонні границі (скінченні) і $f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right)=A$, але $f\left(x_0\right)\neq A$ або не існує, тоді кажуть, що x_0 є точкою усувного розриву.

2. Існують скінченні односторонні границі, але $f\left(x_0-0\right)\neq f\left(x_0+0\right)$, тоді x_0 називають точкою розриву 1-го роду.

3. Не існує хоча б однієї з односторонніх границь, або принаймні одна з них нескінченна, тоді точка x_0 є точка розриву 2-го роду.

Таким чином, щоб дослідити функцію на неперервність у даній точці x_0, треба знайти односторонні границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ і обчислити значення функції в точці, тобто перевірити умову

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Зробити висновки відповідно з різновидностями розриву функції.

Приклад 12.6. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad \text{в точці } x_0 = 0.$$

Розв'язання.

Відповідно до першої чудової границі:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

тобто

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Але в точці $x_0 = 0$ – функція не існує (рис. 12.1). Маємо: $f(0-0) = f(0+0) \neq f(0)$, отже, $x_0 = 0$ – точка усувного розриву.

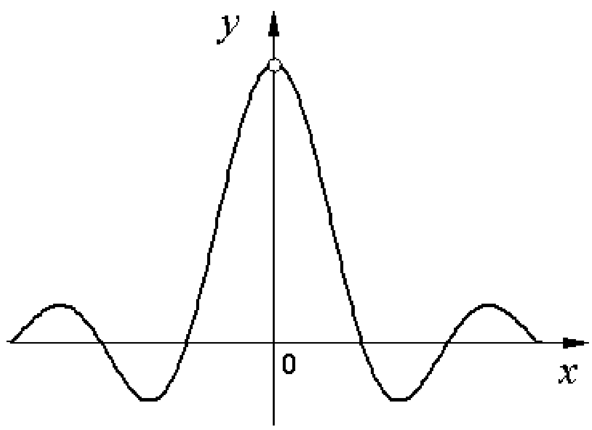


Рис. 12.1

Приклад 12.7. Дослідити на неперервність функцію

$$y=\frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Розв'язання.

Областю визначення функції є вся числова ось, крім $x=1$, $x=2$ (знаменник дорівнює нулю). Отже, на неперервність функцію досліджуємо в точках:

1) $x=1$. Знайдемо односторонні границі

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)}=-\infty.$$

Отже, точка $x=1$ – є точкою розриву 2-го роду;

2) $x=2$

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-1}=1,\ f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}=1,$$

у точці $x=2$ – функція не існує, тобто

$$f(2-0)=f(2+0)\neq f(2).$$

Таким чином точка $x=2$ – є точкою усувного розриву (рис. 12.2).

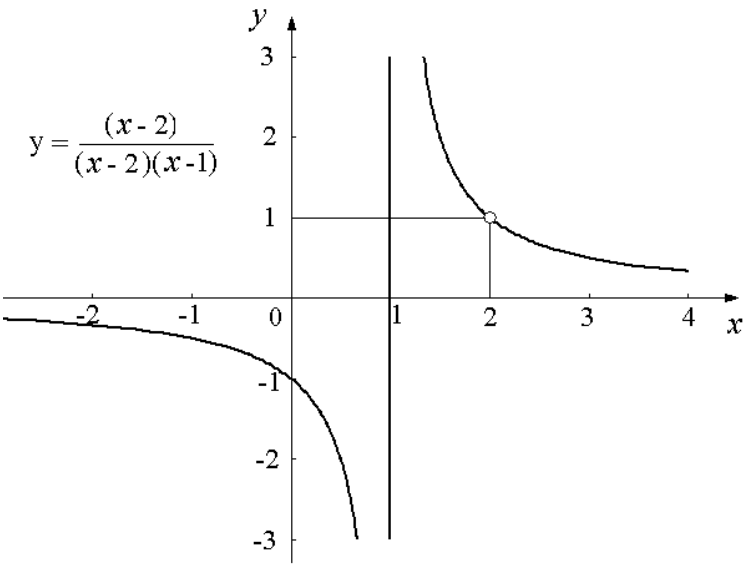


Рис.12.2

Приклад 12.8. Дослідити на неперервність функцію:

$$y=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 1. \\ x+\dfrac{3}{2}, & x>1 \end{cases}$$

Розв'язання.

Маємо неелементарну функцію, яку задано трьома формулами. На кожному із вказаних проміжків функція неперервна, як елементарна на області свого існування. Необхідно розглянути точки стиковки функцій різного вигляду. Тобто, точки $x=0$ і $x=1$.

1. При $x=0$, односторонні границі

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}(x+1)=1;\ f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\left(x^2+1\right)=1;\ f(0)=1.$$

Таким чином, функція в точці $x_0=0$ – неперервна.

2. При $x=1$ $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2$; $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+2)=3$; $f(1)=2$. Тобто, $f(1-0)\ne f(1+0)$ і функція в цій точці має розрив першого роду (рис.12.3).

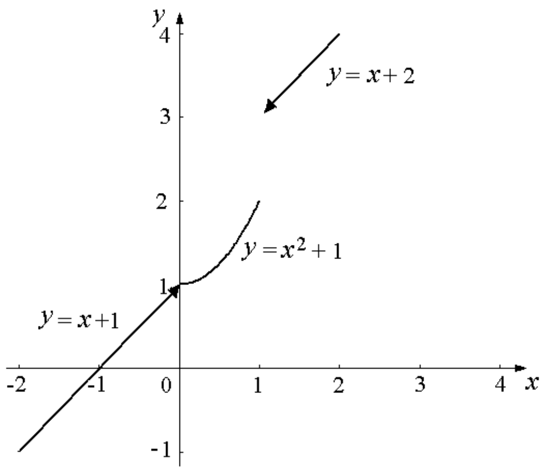


Рис. 12.3

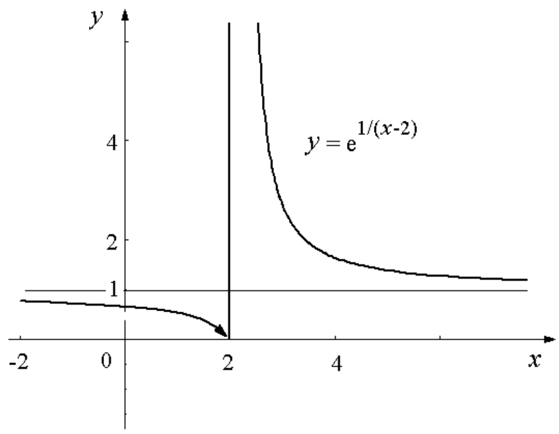


Рис. 12.4

Приклад 12.9. Дослідити на неперервність функцію

$$y=e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Розв'язання.

У точці $x=2$ односторонні границі:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=0; \quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=\infty.$$

Отже, точка $x=2$ є точки розриву другого роду (рис.12.4).

12.3. Властивості функцій, неперервних у точці

Теорема 1 (про арифметичні властивості неперервних функцій). Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ визначені на множині X і неперервні в точці $x_0 \in X$, то в цій точці неперервними є функції $f(x) \pm g(x)$; $f(x)\cdot\varphi(x)$; $f(x)/g(x)$ (остання при умові $g(x)\neq 0$).

Доведення.

Розглянемо частку двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Припущення про неперервність функції $f(x)$ і $g(x)$ в точці x_0 рівносильне наявності рівностей: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. Звідси за теоремою про границю частки двох функцій маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

а це означає, що функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ неперервна в точці x_0.

Неперервність функцій $f(x)\pm g(x)$ та $f(x)\cdot g(x)$ доводиться аналогічно; теорема справедлива для алгебраїчної суми та добутку будь-якої скінченної кількості функцій.

Приклад 12.10. Функція $f(x)=x^2+2x+5$ неперервна в кожній точці, тому що вона є додатком неперервних функцій.

Приклад 12.11. Функція $f(x)=x^3\sin x-\dfrac{x}{x^2+1}$ – неперервна для $x\in R$ як різниця двох неперервних функцій.

Теорема 2 (неперервність складеної функції). Нехай функція $y=f(u)$ визначена на множині U, а функція $u=\varphi(x)$, всі значення якої належать U, визначена на множині X. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці $x_0\in X$, а функція $y=f(u)$ неперервна в відповідній точці $u_0=\varphi(x_0)\in U$, то і функція $y=f(\varphi(x))$ буде неперервною в точці x_0.

Доведення.

Дамо в точці $x_0\in X$ приріст Δx, тоді приріст функції $u=\varphi(x)$ буде мати приріст Δu. Якщо $\Delta x\to 0$, тоді і $\Delta u\to 0$, тому що функція $u=\varphi(x)$ – неперервна, а це означає, що $\Delta y\to 0$ ($y=f(u)$ – неперервна функція). Отже, якщо $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\to 0$. Тобто функція $y=f(\varphi(x))$ – неперервна. Маємо:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0)). \tag{12.6}$$

Рівність (12.6) означає, що під знаком неперервної складеної функції можна переходити до границі.

Теорема 3 (неперервність оберненої функції). Якщо функція $y=f(x)$ зростає (спадає) і неперервна на множині X, а область її зміни є Y, тоді на множині Y існує однозначна обернена функція $x=\varphi(y)$, також зростаюча (спадаюча) і неперервна на множині Y.

Теорема 4. Основні елементарні функції є функції неперервні на множині їх визначення.

Фактично цією теоремою користуємося при обчислюванні границі функцій у точках, які належать області їх визначення.

12.4. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку

Означення. Функцію $y=f(x)$ називають неперервною на інтервалі (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Означення. Функція називається неперервною на сегменті $[a;b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b) і неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

Означення. Якщо функція $f(x)$ визначена на множині X і існує таке значення $x_0 \in X$, що для усіх $x \in X$ виконується умова $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$, то число $f(x_0)$ називається найбільшим $-M$, (найменшим $-m$) значенням функції $f(x)$ на множині X.

Теорема 4. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, $X = [a,b]$, то вона на цьому сегменті досягає свого найбільшого та найменшого значень. Тобто для будь-яких $x \in X$ виконується умова (рис.12.5)

$$m \le f(x) \le M.$$

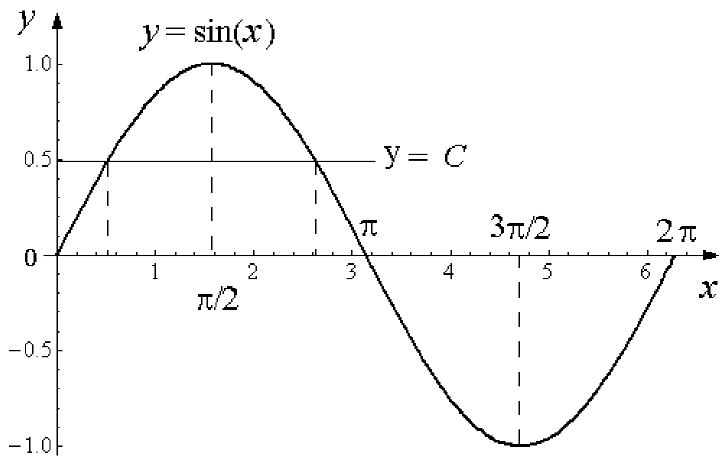


Рис. 12.5

Якщо функцію $y = f(x)$ задано на інтервалі $(a;b)$ або $[a;b)$, то вона такими властивостям може і не задовольняти. Наприклад, $y = x$, $x \in (0;1)$ ні найменшого, а ні найбільшого значення функція не має.

Функція $y = x$ на сегменті $[0;2]$ має найменше значення $m = f(0) = 0$; найбільше $M = f(2) = 2$, тобто на кінцях сегмента.

Функція $y = \dfrac{1}{x}$ на сегменті $[0,2]$ не має найбільшого значення, тому що в точці $x = 0$ вона не визначена.

Функція $y=\sin x$ на сегменті $[0;2\pi]$ досягає найменшого значення $m=0$ в точці $x=\frac{3}{2}\pi$, $m=-1$ і найбільшого значення $M=1$ в точці $x=\frac{\pi}{2}$.

Теорема 5. Якщо функція $f(x)$ визначена та неперервна на сегменті $[a;b]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків, то між a і b існує хоча б одна точка $c\in(a;b)$, у якій функція дорівнює нулю.

Теорема 6. Якщо функція неперервна на сегменті $[a;b]$ і її найменше і найбільше значення відповідно m і M, а число $C\in(m;M)$, тоді на сегменті $[a;b]$ знайдеться хоча б одна точка c така, що $f(c)=C$.

Геометричну інтерпретацію теорем 4 – 6 див. на рис. 12.5.

Запитання для самодіагностики

1. Яка функція називається неперервною в точці x_0?
2. Які означення неперервності ви знаєте?
3. Яка функція називається неперервною на відрізку?
4. Що означає неперервність у точці зліва (справа)?
5. Які точки називаються точками розриву?
6. Яка точка називається точкою усувного розриву?
7. Яка точка називається точкою розриву першого роду?
8. Яка точка називається точкою розриву другого роду?
9. Як досліджуються на неперервність елементарні функції?
10. Як досліджуються на неперервність неелементарні функції?
11. Які властивості неперервної функції на проміжку ви знаєте?

Приклади і вправи

Приклади:

12.12. Знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

Розв'язання.

Дана функція не визначена при $x=2$, а тому ця точка – точка розриву функції. Визначимо характер розриву. Знайдемо:

$$A=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2-0} x=2;$$

$$B=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-2x}{x-2}=2.$$

Отже, $x=2$ – точка усувного розриву. Щоб усунути розрив, треба вважати, що $f(2)=2$ (рис. 12.6).

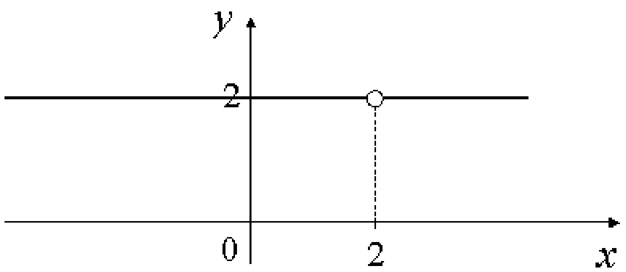


Рис. 12.6

12.13. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=3^{\frac{1}{x}}+2$, встановити характер точок розриву.

Розв'язання.

Для даної функції $x=0$ є точка розриву. Для визначення характеру розриву знайдемо

$$A=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(3^{\frac{1}{x}}+2\right)=2,$$

і

$$B=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(3^{\frac{1}{x}}+2\right)=\infty.$$

Отже, при $x=0$ дана функція має розрив другого роду (рис. 12.7).

Для побудови ескізу графіка функції знайдемо

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}+2\right)=3.$$

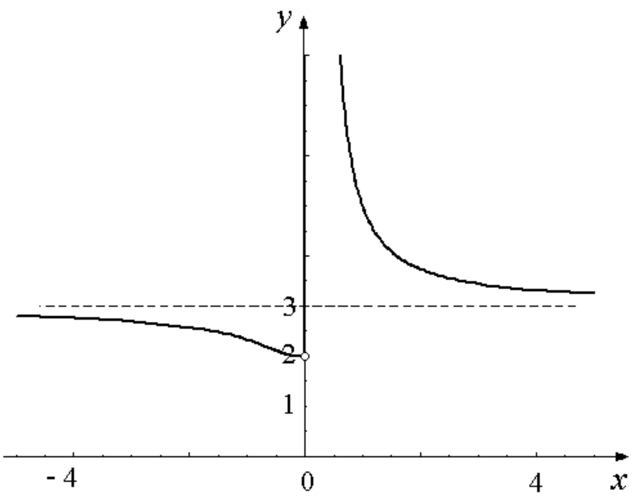


Рис. 12.7

12.14. Дослідити на неперервність функцію

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{при } x<0 \\ \sin x, & \text{при } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}. \\ 0, & \text{при } x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Розв'язання.

Функція задана трьома неперервними елементарними функціями на трьох проміжках. Дослідимо на неперервність функцію у точках "стику" цих проміжків. Знайдемо

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \sin x = 0.$$

Отже, $x=0$ – точка розриву другого роду. Далі шукаємо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = 0.$$

Отже, $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка розриву першого роду.

Таким чином, дана функція неперервна на всій числовій осі, крім точок $x=0$ і $x=\frac{\pi}{2}$. Побудуємо графік даної функції (рис. 12.8).

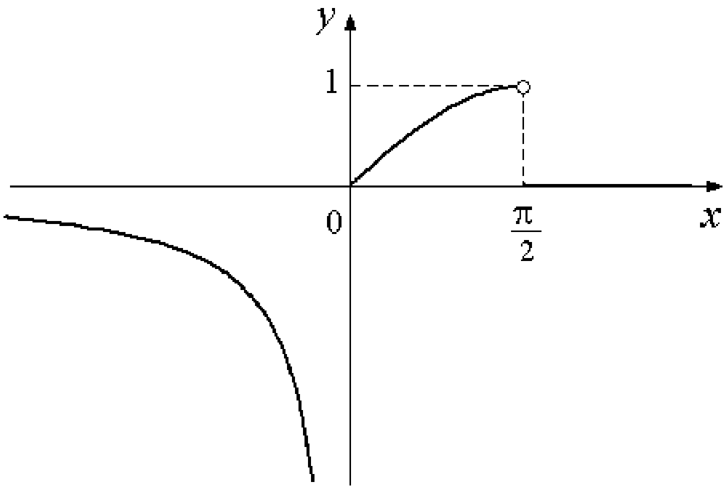


Рис. 12.8

Вправи:

Дослідити на неперервність дані функції, встановити характер точок розриву та побудувати їх графіки.

12.15. $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$.

12.16. $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

12.17. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$.

12.18. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

12.19. $f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$.

12.20. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{2x}$.

12.21. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

12.22. $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$.

12.23. $f(x)=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}-1}$.

12.24. $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

12.25. $\begin{cases} x^2, & \text{при } x\le 1 \\ x-1, & \text{при } x>1 \end{cases}$.

12.26. $\begin{cases} x^2-2x, & \text{при } x\le 1 \\ 2-x, & \text{при } 1<x<2 \\ 4-x^2, & \text{при } x\ge 2 \end{cases}$.

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Глава 13
Похідна функції. Правила диференціювання

13.1. Означення похідної, її зв'язок з неперервністю функцій

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $X=(a;b)$. Задамо значення аргументу $x=x_0$. Надаємо приріст аргументу Δx, тоді відповідний приріст функції буде $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Означення. Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy у цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля довільним способом. Тобто:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (13.1)$$

Процес відшукання похідної функції називається диференціюванням. Якщо функція має похідну в точці x_0, вона називається диференційована в цій точці. Похідна в даній точці – це число. Якщо похідна існує в кожній точці множини X, то функція – диференційована на множині. При цьому похідна змінюється разом із значенням x, тобто є функцією аргументу x.

Для похідної функції вживають різні позначення. Наприклад: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Аналізуючи означення похідної функції $f(x)$ в деякій точці x, одержуємо загальний порядок відшукання похідної, а саме:

1) надаємо аргументові x приріст Δx і знаходимо відповідний приріст функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

2) ділимо приріст функції на приріст аргументу, тобто знаходимо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x};$$

3) шукаємо границю цього відношення, тобто і знаходимо, власне, похідну:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Знайти за визначенням похідні функцій:

а) $y=\sin x$, $x\in R$;

1) $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}$;

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x;$$

б) $y=\ln x$;

1) $\Delta y=\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x}{\Delta x}$;

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$

$$=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x};$$

в) $y=a^{x}$;

1) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^{x}$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$;

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\ln a$.

Теорема 1 (про неперервність диференційованої функції). Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Доведення.

Нехай функція $f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0. Тобто:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

За критерієм існування границі маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(x,\Delta x),$$

де $\alpha(x,\Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x\to 0$. Отже, $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(x;\Delta x)\Delta x$ і, враховуючи арифметичні властивості границь та нескінченно малих, одержуємо: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Це і значить, що $f(x)$ неперервна у точці x_0. Обернене до теореми 1 твердження взагалі може і не виконуватися. Тобто із неперервності функції не випливає диференційованість $(y=|x|)$.

13.2. Геометричний, фізичний та економічний змісти похідної

1. Задача про проведення дотичної до графіка функції в точці $\mathrm{A}(x_0;y_0)$ (рис.13.1). Рівняння дотичної до кривої в точці $A(x_0;y_0)$: $y-y_0=k(x-x_0)$. Кутовий коефіцієнт дотичної: $k=\operatorname{tg}\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, тобто

$$k=f'(x_0).$$

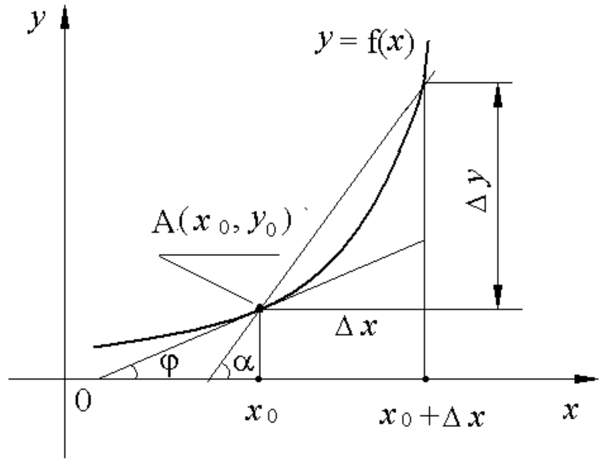


Рис. 13.1

Звідси рівняння дотичної має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{13.2}$$

а нормалі (перпендикуляра до дотичної):

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{13.3}$$

2. Задача про знаходження швидкості прямолінійного руху матеріальної точки, якщо відома функція шляху $S = S(t)$. Якщо на інтервалі t, $t + \Delta t$ вважати рух рівномірним, то $\upsilon(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, тобто швидкість руху в момент часу t є похідною функції шляху $\left(\upsilon(t) = S'(t)\right)$. Якщо термін "швидкість" розуміти в більш загальному сенсі, то похідну можна трактувати як швидкість змінювання функції $y = f(x)$ порівняно зі змінною x, незалежно від того, який процес ця функція описує.

3. Нехай підприємство виробляє однорідну продукцію. Тоді витрати підприємства є функцією обсягу виробництва $y = f(x)$. Якщо кількість продукції змінилася на Δx, тоді витрати виробництва також зміняться на

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

І отже, рівність:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

– це середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції. Якщо в цій рівності перейти до границі:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

то одержимо граничні витрати виробництва при даному обсязі виробництва x.

13.3. Таблиця похідних та правила їх обчислювання

Наведемо основні правила диференціювання, або властивості похідних. Нехай функції $u(x)$ та $\upsilon(x)$ мають похідні в певній точці x, тоді в тій самій точці:

1) $(u\pm\upsilon)'=u'\pm\upsilon'$;

2) $(u\upsilon)'=u'\upsilon+\upsilon'u \quad \left((cu)'=cu', c=const\right)$;

(13.4)

3) $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)'=\frac{u'\upsilon-\upsilon'u}{\upsilon^2} \quad (\upsilon(x)\neq 0)$.

Доведення приведемо для добутку функцій $y=u\upsilon$, використовуючи загальну схему відшукання похідних. Надамо аргументові x приріст Δx, тоді функції здобудуть, відповідно прирости Δu, $\Delta\upsilon$, Δy. Їхні нові значення $u+\Delta u$, $\upsilon+\Delta\upsilon$, $y+\Delta y$ зв'язані співвідношенням

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(\upsilon+\Delta\upsilon).$$

Звідки

$$\Delta y=(u+\Delta u)(\upsilon+\Delta\upsilon)-u\upsilon=\upsilon\Delta u+u\Delta\upsilon+\Delta u\Delta\upsilon,$$

а

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\upsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta\upsilon.$$

Спрямуємо Δx до нуля, тоді, згідно з теоремою про неперервність диференційованої функції і при $\Delta \upsilon \to 0$, границі відношень $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ дають відповідно u' і υ'. Таким чином,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\upsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\upsilon u'+u\upsilon'.$$

Приклад 13.1. Знайти похідні функцій.

Розв'язання.

а) $y=\operatorname{tg} x$

$$y=\frac{\sin x}{\cos x};$$

$$y=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

б) $y=\operatorname{ctg} x$;

$$y=\frac{\cos x}{\sin x};\quad y'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже, $(\operatorname{ctg} x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$;

в) $y=2^x\ln x$.

$$y'=\left(2^x\right)'\ln x+2^x(\ln x)'=2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\frac{1}{x}.$$

Отже, $\left(2^x\ln x\right)'=2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\frac{1}{x}$.

Таким чином, похідну будь-якої елементарної функції можна знайти, якщо користуватися правилами та таблицею похідних основних елементарних функцій.

Таблиця похідних

1. $y=c$ $\qquad y'=0$.
2. $y=x^{\alpha}\ (\alpha\in R)$ $\qquad y'=\alpha x^{\alpha-1}$.
3. $y=a^{x}\ (a>0; a\neq 1)$ $\qquad y'=a^{x}\ln a$.
4. $y=\ln x\,(x>0)$ $\qquad y'=\dfrac{1}{x}$.
5. $y=\sin x$ $\qquad y'=\cos x$.
6. $y=\cos x$ $\qquad y'=-\sin x$.
7. $y=\operatorname{tg} x$ $\qquad y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
8. $y=\operatorname{ctg} x$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

13. $y=\arcsin x$ $\qquad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $y=\arccos x$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $y=\operatorname{arctg} x$ $\qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $y=\operatorname{arcctg} x$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

13.4. Похідна складеної функції

Теорема 2. Якщо функція $y=f(u)$ при деякому значенні u має похідну $y'_u=f'_u(u)$, а функція $u=\varphi(x)$ має похідну $u'_x=\varphi'_x(x)$ в точці x, якій відповідає значення u, то похідна складеної функції $y=f(\varphi(x))$ визначається за формулою:

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$$

або

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{13.5}$$

Доведення.

За умовою теореми функція $y=f(u)$ має похідну в точці u, тобто існує $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$, звідки, згідно з теоремою про границю, маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha(u,\Delta u),$$

де $\alpha(u,\Delta u)$ – нескінченно мала при $\Delta u\to 0$. Тоді

$$\Delta y=y'_u\cdot\Delta u+\alpha(u,\Delta u)\Delta u$$

або

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\alpha(u,\Delta u).$$

При $\Delta x\to 0$ і $\Delta u\to 0$ (завдяки неперервності функції, що має похідну). Отже, знайдемо границю $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\alpha(u,\Delta u).$$

Звідки одержуємо правило для знаходження похідної складеної функції:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Приклад 13.2. Знайти похідну:

Розвязання.

а) $y=\cos^3 x$.

Якщо $u=\cos x$, тоді $y=u^3$. За таблицею похідних будемо мати:

$$y'_x=\left(u^3\right)'_u\cdot(\cos x)'_x=3u^2(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x;$$

б) $y=\cos x^3\left(u=x^3;\ f(u)=\cos u\ \right)$

Отже, $y'=\left(-\sin x^3\right)3x^2.$

Випадок складеної функції як суперпозиції декількох вичерпується послідовним застосуванням наведеного правила. Так, для функції

$$y=f(u),\quad u=\varphi(\upsilon),\quad \upsilon=\psi(x);$$
$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=y'_u\cdot u'_\upsilon\cdot\upsilon'_x.$$

Приклад 13.3. Знайти похідну $y=\operatorname{arctg}^4 2x$

Розв'язання:

$$y'=4\operatorname{arctg}^3 2x\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2.$$

13.5. Похідна оберненої, неявної, степенево-показникової та параметричної функцій

Теорема про диференціювання складеної функції дає можливість довести правила обчислення похідних для функцій.

1. Обернена функція. Якщо функція $y=f(x)$ має обернену $x=\varphi(y)$ і існує похідна відмінна від нуля y'_x в деякій точці x, то $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

Доведення.

Згідно з означенням оберненої функції змінну x можна розглядати як складену функцію:

$$x=\varphi(y),\quad y=f(x),$$

Тоді:

$$x=\varphi(f(x)).$$

Візьмемо похідну від цієї функції за змінною x.

$$x'_x=\varphi'_y\cdot f'_x,\ \text{або}\ 1=x'_y\cdot y'_x.$$

Таким чином,

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}\quad\text{і}\quad y'_x=\frac{1}{x'_y}\left(x'_y\neq 0\right).\qquad(13.6)$$

Приклад 13.4. Знайти похідні:

Розв'язання.

а) $y = \operatorname{arctg} x$.

Вважаючи, що $x = \operatorname{tg} y$, $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, або

$$y'_x = \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Отже,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2};$$

б) $y = \arcsin x$.

Тоді

$$x = \sin y,\ x'_y = \cos y,\ y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. Неявна функція. Функція визначається нерозв'язаним відносно y рівнянням:

$$F(x, y) = 0, \text{ або } F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Для знаходження похідної від y немає потреби розв'язувати рівняння $F(x, y) = 0$ відносно y (не завжди це можно зробити), достатньо розглянути $F(x, f(x)) \equiv 0$ як складену функцію від x та з урахуванням, що $F'_x \equiv 0$, знайти y' з цієї тотожності. Покажімо це на прикладі залежності ординати y точки кривої другого порядку, яка має рівняння:

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 5x - 4y - 10 = 0.$$

Знайдемо похідну по x обидвох частин рівняння, враховуючи, що змінна y – функція x. Отже,

$$2x + 4y \cdot y' + 3(y + xy') + 5 - 4y' = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно y' маємо:

$$y'=\frac{-2x-3y-5}{4y+3x-4}.$$

Для обчислення похідної в деякій точці $x=x_0$ треба знайти і відповідне значення функції y_0.

3. Степенево-показникова функція (логарифмічне диференціювання). Функція, яка має вигляд $y=\left(u(x)\right)^{\upsilon(x)}$, називається степенево-показниковою. Для обчислення похідної цієї функції знайдемо: $\ln y=\upsilon(x)\cdot\ln u(x)$. Одержана функція буде неявною і до неї застосуємо правило диференціювання неявної функції. Отже,

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\upsilon'\ln u+\upsilon\cdot\frac{1}{u}\cdot u'.$$

З цієї рівності одержимо

$$y'=u^{\upsilon}\left(\upsilon'\ln u+\upsilon\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right). \qquad (13.7)$$

Приклад 13.5. Знайти похідну функції $y=(\operatorname{tg}x)^x$.

Розв'язання.

Згідно з правилом, одержимо:

$$\ln y=x\ln\operatorname{tg}x$$

або

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln\operatorname{tg}x+x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Звідки

$$y'=(\operatorname{tg}x)^x\left(\ln\operatorname{tg}x+x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)=(\operatorname{tg}x)^x\left(\ln\operatorname{tg}x+x\frac{\operatorname{ctg}x}{\cos^2 x}\right).$$

4. Параметрична функція. Функцію $y=f(x)$ називають поданою в параметричній формі, якщо вона визначається за допомогою двох функцій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ від допоміжної змінної t (параметра), а саме:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}.$$

Параметричну функцію можна диференціювати, як неявну, не вдаючись до явного її задання.

Теорема 3. Похідна функції, що задається рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ дорівнює:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{13.8}$$

якщо y та x мають похідні по аргументу t.

Доведення.

Функцію y від x можна розглядати як складену функцію: $y=\psi(t)$, $t=g(x)$, тобто $y=\psi(g(x))$. Тоді, за правилом похідної складеної функції:

$$y'_x=\psi'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t},\ \text{бо}\ \ t'_x\cdot x'_t=1.$$

Таким чином, теорему доведено.

Зауважимо, що $y=f(x)$ геометрично – деяка лінія, тоді рівності $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$ називають параметричними рівняннями лінії.

Приклад 13.6. Знайти похідну функції

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}.$$

Розв'язання.

Відповідно теоремі:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},$$

тобто

$$y'_x=\frac{R\cos t}{-R\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

Геометрично, якщо виключити параметр t, одержуємо:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Тобто задана параметрична функція є параметричним рівнянням кола, радіуса R, t – кут між радіусом – вектором точки кола і додатним напрямком осі Ox $(0 \le t \le 2\pi)$.

13.6. Похідна вищих порядків

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ на деякій множині X, то похідна від цієї похідної називається похідною другого порядку від функції $y = f(x)$. Тобто

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Таким чином, щоб знайти n-ну похідну від функції $y = f(x)$, необхідно знайти першу похідну від $(n-1)$ похідної функції, отже,

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'. \qquad (13.9)$$

Тобто для знаходження n-ї похідної треба обчислити:

$$f'(x),\ f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x).$$

Фізичний зміст похідної другого порядку. Якщо $S = S(t)$, тоді $S'(t) = \upsilon(t)$ – це швидкість в точці t, а $S''(t) = \upsilon'(t)$ – це прискорення руху в момент часу t.

Друга похідна від виробничої функції $y = f(x)$ по змінній x є швидкість змінювання граничних витрат (зменшення або збільшення) залежно від обсягу виробництва x – це економічний зміст другої похідної.

Запитання для самодіагностики

1. Що таке похідна функції?
2. Який геометричний зміст похідної?
3. Як записати рівняння дотичної до кривої в заданій точці?
4. Який вигляд має рівняння нормалі до кривої в заданій точці?
5. Який механічний зміст похідної?
6. Запишіть таблицю похідних для основних функцій.
7. Які основні правила диференціювання?
8. Як знайти похідну складеної функції $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$?
9. Як знайти похідну функцій, яка задана неявно?
10. Як знайти похідну функції, яка задана параметрично?
11. Як знайти похідну від степенево-показникової функції?

Приклади і вправи

Приклади:

13.7. Користуючись означенням похідної, обчислити похідну функції $f\left(x\right) = \sqrt{2x+1}$ у точці $x_0 = 4$.

Розв'язання.

Згідно з означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x_0 + \Delta x) + 1} - \sqrt{2x_0 + 1}}{\Delta x};$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2 \cdot 4 + 2\Delta x + 1} - \sqrt{2 \cdot 4 + 1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2\Delta x + 9} - 3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{2\Delta x + 9} - 3)(\sqrt{2\Delta x + 9} + 3)}{\Delta x(\sqrt{2\Delta x + 9} + 3)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2\Delta x + 9} + 3} = \frac{1}{3}.$$

13.8. Знайти похідні функцій, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

1. $y=\frac{5}{x^3}+8x^{\frac{3}{4}}+2\sqrt[4]{x}+9x\cdot\sqrt[3]{x^2}-3$; 2. $y=x^3\operatorname{arctg}x$.

3. $y=\frac{x-\sin x}{\sqrt{x}}$. 4. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$.

5. $y=\cos^3(3-5x)$. 6. $y=\ln(3x^2-2x)$.

7. $y=\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}$; 8. $y=10^{1-\sin^4 3x}$.

Розв'язання.

1. Запишемо задану функцію у вигляді:

$$y=5x^{-3}+8x^{\frac{3}{4}}+2x^{\frac{1}{4}}+9x^{\frac{5}{3}}-3.$$

Тоді

$$y'=-15x^{-4}+8\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{4}}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}+9\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}=$$

$$=-\frac{15}{x^4}+\frac{6}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}+15\sqrt[3]{x^2}.$$

2. $y'=(x^3)'\operatorname{arctg}x+x^3(\operatorname{arctg}x)'=3x^2\operatorname{arctg}x+\frac{x^3}{1+x^2}$.

3. $$y'=\frac{(x-\sin x)'\sqrt{x}-(x-\sin x)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{(1-\cos x)\sqrt{x}-(x-\sin x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{x-2x\cos x+\sin x}{2x\sqrt{x}}.$$

4. $y=(1-x^4-x^8)^{-\frac{1}{2}}$, тоді

$$y'=-\frac{1}{2}(1-x^4-x^8)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^4-x^8)'=\frac{-4x^3-8x^7}{-2\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}=$$

$$=\frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}.$$

5. $$y'=3\cos^2(3-5x)\cdot(\cos(3-5x))'=3\cos^2(3-5x)(-\sin(3-5x))\cdot(3-5x)'=$$

$$=-3\cos^2(3-5x)\cdot\sin(3-5x)\cdot(-5)=15\cos^2(3-5x)\cdot\sin(3-5x).$$

6. $y' = \dfrac{1}{3x^2 - 2x}(3x^2 - 2x)' = \dfrac{6x - 2}{3x^2 - 2x}.$

7. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right)' = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \dfrac{4x^2}{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3 - 4x^2}}.$

8. $y' = 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \ln 10 \cdot (-4\sin^3 3x) \cdot \cos 3x \cdot 3 =$

$= -12\ln 10 \cdot 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \sin^3 3x \cdot \cos 3x.$

13.9. Знайти похідну другого порядку y'' від функції

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Розв'язання.

Спочатку знаходимо y'.

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot (x + \sqrt{1 + x^2})' = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}\,(x + \sqrt{1 + x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$y'' = ((1 + x^2)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$$

13.10. Довести, що функція $y = e^x \sin 2x$ задовольняє рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Розв'язання.

Послідовно знаходимо

$$y' = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x,$$

$$y'' = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x + 2e^x \cos 2x - 4e^x \sin 2x =$$

$$= 4e^x \cos 2x - 3e^x \sin 2x.$$

Підставляємо y, y', y'' у задане рівняння:

$$4e^x\cos 2x-3e^x\sin 2x-2\left(e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x\right)+5e^x\sin 2x=$$
$$=4e^x\cos 2x-3e^x\sin 2x-2e^x\sin 2x-4e^x\cos 2x+5e^x\sin 2x=0.$$

13.11. Знайти похідну y' від функції y, яка задана неявно рівнянням $x^3+y^3-3axy=2$.

Розв'язання.

Диференціюємо по x обидві частини заданого рівняння:

$$3x^2+3y^2y'-3a\left(y+xy'\right)=0.$$

Розв’язуємо це рівняння відносно y':

$$y^2y'-axy'=ay-x^2,$$
$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

13.12. Функція $y=f\left(x\right)$ задана неявно рівнянням $y=\sin\left(x+y\right)$. Знайти y''.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку y'.

$$y'=\cos(x+y)\cdot(1+y'),$$

або
$$y'-y'\cos(x+y)=\cos(x+y).$$

Тоді
$$y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

Останню рівність знову диференціюємо по x і підставляємо замість y' одержаний вираз:

$$y''=\frac{-\sin(x+y)(1+y')(1-\cos(x+y))-\sin(x+y)(1+y')\cos(x+y)}{(1-\cos(x+y))^2}=$$
$$=\frac{-(1+y')\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^2}=-\frac{(1+\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)})\cdot y}{(1-\cos(x+y))^2}=-\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}.$$

13.13. Функція задана параметрично рівняннями: $x = \arcsin t$, $y = \ln\left(1 - t^2\right)$. Знайти y'_x.

Розв'язання.

За формулою $y_x{}' = \dfrac{y_t{}'}{x_t{}'}$ маємо

$$y'_x = \frac{(\ln(1-t^2))'}{(\arcsin t)'} = \frac{-\dfrac{2t}{1-t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

13.14. Для функції $y = f(x)$, яка задана параметричними рівняннями $x = \mathrm{a}\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, знайти y''_x.

Розв'язання.

За відомими формулами послідовно знаходимо

$$y'_x = \frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)} = \operatorname{tg} t;$$

$$y''_x = \frac{(\operatorname{tg} t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

13.15. Знайти похідну y' від функції $y = \left(\cos 2x\right)^{\sin x}$.

Розв'язання.

Знайдемо логарифм заданої функції

$$\ln y = \sin x \ln\left(\cos 2x\right).$$

Диференціюємо цю рівність

$$\frac{y'}{y} = \cos x\ln(\cos 2x) + \sin x\cdot\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}.$$

Звідси

$$y' = y(\cos x\ln(\cos 2x) - 2\sin x\cdot\operatorname{tg} 2x) =$$
$$= (\cos 2x)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln(\cos 2x) - 2\sin x\cdot\operatorname{tg} 2x).$$

13.16. Для функції $y=(5x-3)^4(3x+2)^5(x+3)^3$ знайти похідну y'.

Розв'язання.

Тут доцільно знайти спочатку логарифм заданої функції:

$$\ln y=4\ln(5x-3)+5\ln(3x+2)+3\ln(x+3).$$

Тоді

$$\frac{y'}{y}=\frac{20}{5x-3}+\frac{15}{3x+2}+\frac{3}{x+3},$$

звідки

$$y'=(5x-3)^4(3x+2)^5(x+3)^3\left(\frac{20}{5x-3}+\frac{15}{3x+2}+\frac{3}{x+3}\right).$$

13.17. Для функції $y=\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x-1}\cdot\sin 2x}$ знайти похідну y'.

Розв'язання.

Безпосереднє диференціювання дробу привело б до громіздких викладок. Тому тут теж доцільно знайти спочатку $\ln y$, тобто застосувати логарифмічне диференціювання:

$$\ln y=3\ln(\ln x)-\frac{1}{2}\ln(x-1)-\ln(\sin 2x);$$

$$\frac{y'}{y}=3\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x};$$

$$y'=y\left(\frac{3}{x\ln x}-\frac{1}{2(x-1)}-2c\operatorname{tg}2x\right)=$$

$$=\frac{\ln^3 x}{\sqrt{x-1}\cdot\sin 2x}\left(\frac{3}{x\ln x}-\frac{1}{2(x-1)}-2c\operatorname{tg}2x\right).$$

13.18. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0=3$.

Розв'язання.

Знаходимо y':

$$y'=\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2}\right)'=\left(1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)'=\frac{3}{x^2}-\frac{12}{x^3}.$$

Далі обчислюємо $y_0=y(3)=\dfrac{2}{3}$.

$$y'(x_0) = y'(3) = -\frac{1}{9}.$$

Рівняння дотичної:

$$y = \frac{2}{3} - \frac{1}{9}\left(x-3\right), \text{ або } \; x+9y-9=0.$$

13.19. Визначити рівняння дотичної, проведеної до кривої $y = x^2 - 3x + 1$ паралельно прямій $3x - y + 2 = 0$.

Розв'язання.

Кутовий коефіцієнт заданої прямої $y = 3x + 2$ дорівнює 3. Кутовий коефіцієнт шуканої дотичної в точці x_0 дорівнює

$$y'(x_0) = 2x_0 - 3.$$

Умовою паралельності прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів. Отже, $2x_0 - 3 = 3$, або $x_0 = 3$. Тоді

$$y_0 = 9 - 9 + 1 = 1.$$

Рівняння дотичної в точці $(3;1)$ має вигляд

$$y = 1 + 3\left(x-3\right) \text{ або } \; y = 3x - 8.$$

13.20. У яких точках дотична до графіка функції $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ утворює з віссю Ox кут $135°$?

Розв'язання.

Треба знайти значення x, за яким похідна функції $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ набуває значення, котре дорівнює $tg135° = -1$, тобто треба розв'язати рівняння $y' = -1$. Знайдемо y':

$$y' = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)' = \frac{x-2-x-2}{(x-2)^2} = -\frac{4}{(x-2)^2}.$$

Розв'яжемо рівняння $y' = -1$:

$$\frac{-4}{\left(x-2\right)^2} = -1, \left(x-2\right)^2 = 4,, \text{ звідки } x_1 = 0, \; x_2 = 4.$$

При $x = 0$ $\; y = -1$ та при $x = 4$ $\; y = 3$ шукані точки графіка функції є $(0;-1)$ і $(4;3)$.

13.21. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2+y^2-2x+2y-3=0$ у точках його перетину з віссю Ox.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину кола з віссю Ox:

$$y=0, \text{ тоді } x^2-2x-3=0,\ x_1=3,\ x_2=-1.$$

Отже, це точки $M(-1;0)$ і $N(3;0)$. З заданого рівняння визначимо похідну:

$$2x+2yy'-2+2y'=0, \quad y'=\frac{1-x}{1+y}.$$

У точці $M(-1;0)$ $y'=2$ і тоді рівняння дотичної

$$y=2(x+1), \text{ або } y=2x+2.$$

А в точці $N(3;0)$ $y'=-2$, а рівняння дотичної

$$y=-2(x-3), \text{ або } y=-2x+6.$$

13.22. Скласти рівняння дотичної до кривої, заданої рівняннями $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, в точці, для якої $t=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку координати точки, до якої проведено дотичну:

$$x_0=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1, \quad y_0=1-\cos\frac{\pi}{2}=1.$$

Далі визначаємо в цій точці y':

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1.$$

Тоді рівняння дотичної має вигляд

$$y=1+(x-\frac{\pi}{2}+1) \text{ або } x-y+2-\frac{\pi}{2}=0.$$

Вправи:

13.23. Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій:

1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sin^2 x$.

Знайти похідні функції, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

13.24. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{x}{3} + \sqrt{2}.$

13.25. $y = 3x^{-2} - \frac{5}{6}x^{-3} + 3.$

13.26. $y = \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{11x^4}.$

13.27. $y = x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}.$

13.28. $y = 3\sqrt{x} + 5x\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} + \frac{1}{x}.$

13.29. $y = \frac{x^2 + 2x}{3 - 4x}.,$

13.30. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}.$

13.31. $y = \frac{x^2 + 1}{3(x^2 - 1)} + (x^2 - 1)(1 - x).$

13.32. $y = (\frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{x} + 6)^6.$

13.33. $y = \sqrt{1 - x^2}.$

13.34. $y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x^3)^4}.$

13.35. $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}.$

13.36. $y = 3\sin x - 5x\cos x.$

13.37. $y = 2\sqrt{x}\sin x - \frac{\cos x}{x}.$

13.38. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{ctgx - 1}.$

13.39. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x}.$

13.40. $y = \sin\frac{1}{x} + \cos\sqrt{x}.$

13.41. $y = \sin\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{\sin 2x}.$

13.42. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin(2x + 1)}.$

13.43. $y = tg^2 x - ctg\left(x^2\right).$

13.44. $y = \left(1 + \sin^2 x\right)^3$

13.45. $y = \sin^5\left(\cos 5x\right).$

13.46. $y = 3\arcsin x - 4\sqrt{x}.$

13.47. $y = \sqrt{2}\arccos x - \frac{2}{\arcsin x}.$

13.48. $y = \mathrm{arctg}\, x^2.$

13.49. $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}.$

13.50. $y=\sqrt[3]{\arcsin\left(2x+1\right)}.$ **13.51.** $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}.$

13.52. $y=\ln^3 x.$ **13.53.** $y=\ln\,(x+\sqrt{1+x^2})$.

Знайти похідну другого порядку:

13.54. $y=x^4-4x^2+5x-3.$ **13.55.** $y=\sin^2 3x.$

13.56. $y=\left(1+x^2\right)arctgx$.

13.57. Довести, що функція $y=2tg\left(2x-1\right)$ задовольняє рівняння $y''=2yy'$.

13.58. Довести, що функція $y=2e^{3x}-e^{-3x}$ задовольняє рівняння $yy'''=y'y''$.

13.59. Довести, що функція $y=\arcsin x$ задовольняє рівняння $(x^2-1)\cdot y''+xy'=0$.

Знайти похідні y' від функцій, які задані неявно:

13.60. $y^3-x^3+x^2y^2=0.$ **13.61.** $x\cos y=y\sin x.$

13.62. $arctg\left(x+y\right)=x.$ **13.63.** $e^x+e^y-e^{xy}=1.$

13.64. $2y\ln y=x.$

Знайти другу похідну y'' від неявної функції:

13.65. $y=x\ln xy.$ **13.66.** $x^3+y^3-3y+3=0.$

Знайти похідні першого і другого порядків від функцій, заданих параметрично:

13.67. $x=\ln t, y=t^2.$ **13.68.** $x=t^3+3t^2,\ y=3t^2-7.$

13.69. $x=arctgt$, $y=\ln\left(1+t^2\right).$

13.70. $x=a\left(\sin t-t\cos t\right), y=a\left(\cos t+t\sin t\right).$

Застосовуючи метод логарифмічного диференціювання знайти похідні y' для заданих функцій:

13.71. $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$ **13.72.** $y=(3x-4)^4(2x+7)^5(x-1)^6$

13.73. $y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{5x+1}}{(x+1)^4}$. **13.74.** $y=x^{x+1}$

13.75. $y=(\sin x)^x$ **13.76.** $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$

13.77. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^3+y^3-xy-7=0$ в точці $(1;2)$.

13.78. В якій точці дотична до параболи $y=x^2-7x+3$ паралельна прямій $5x+y-3=0$?

13.79. В якій точці кривої $y^2=2x^3$ дотична перпендикулярна до прямої $4x-3y+2=0$?

13.80. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x^2-4x-3$ у точці $(-2;5)$.

13.81. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=\dfrac{3-x}{2x-3}$ у точці з абсцисою $x_0=2$.

13.82. Скласти рівняння дотичних до кривої $y=x^3+2x+1$, перпендикулярних до прямої $5y+x-4=0$.

13.83. Скласти рівняння дотичної до кривої $x^2+2xy^2+3y^4=6$ в точці $M(1;-1)$.

13.84. Скласти рівняння дотичної до кривої $x^3+y^2+4x-17=0$ у точці з ординатою $y_0=1$.

13.85. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=2$.

Глава 14
Диференціал функції

14.1. Означення диференціала і його геометричний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x скінченну похідну $f'(x) \neq 0$. Тобто існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0.$$

Тоді

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Отже, приріст функції в точці x дорівнює сумі двох нескінченно малих. Перший доданок є нескінченно малий і лінійний відносно приросту аргумента Δx. Другий доданок – нескінченно мала більш високого порядку, ніж Δx:

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0 \right).$$

Означення. Лінійна частина приросту функції відносно Δx називається диференціалом функції і позначається

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \text{ або } dy = f'(x) dx \ \ (\Delta x = dx; dx = x' \Delta x). \qquad (14.1)$$

Тоді $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ (позначення похідної як частки диференціалів функції y і аргументу x).

Розглянемо геометричний зміст диференціалу (рис. 14.1.) З геометричного змісту похідної

$$f'(x) = \operatorname{tg} \varphi, \ AB = \operatorname{tg} \varphi \Delta x = f'(x) \Delta x = dy.$$

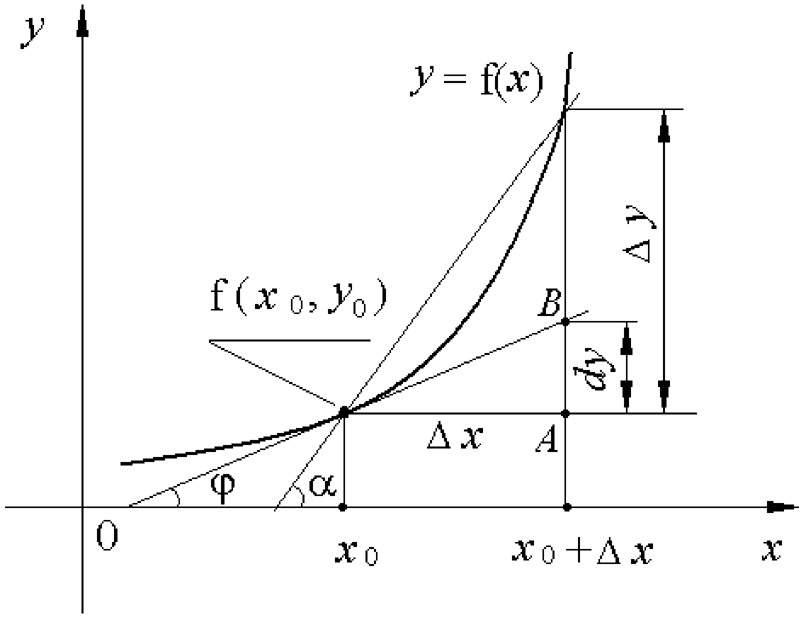


Рис. 14.1

Таким чином, геометрично диференціал dy функції $y=f(x)$ в даній точці зображує приріст ординати дотичної до графіка функції в цій точці, коли x дістає приріст Δx.

Приклад 14.1. Обчислити диференціал функції $y=x^2-2x-3$ в точці $x=2$, $\Delta x=0{,}1$.

Розв'язання.

За визначенням

$$dy=f'(x)\Delta x,$$

або

$$dy=(2x-x)\cdot\Delta x;\ dy=(2\cdot 2-2)\cdot 0{,}1=0{,}2.$$

Порівняємо dy з приростом функції Δy:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)-3-x^2+2x+3=(2x-2)\Delta x+(\Delta x)^2.$$

При $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2+0{,}01=0{,}21$. Тобто $\Delta y>dy$.

14.2. Властивості диференціала

Зважаючи на те, що диференціал dy за формою від похідної відрізняється лише множником dx, властивості диференціала аналогічні властивостям похідних, а саме:

1) $dc=0$, $c=const$;

2) $d(u\pm\upsilon)=du\pm d\upsilon$;

3) $d(u\upsilon)=\upsilon du+ud\upsilon\big(d(cu)=cdu\big)$; (14.2)

4) $d\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)=\dfrac{1}{\upsilon^2}(\upsilon du-ud\upsilon)$.

Довести кожну із властивостей можна помноживши обидві частини відповідної рівності для похідних на dx;

5) особливу увагу звернемо на властивість, яка називається інваріантністю форми диференціала.

Нехай $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ або $y=f\big(\varphi(x)\big)$ (y – функція x). Тоді маємо

$$f'(x)=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x).$$

Отже,

$$dy=f'(u)\varphi'(x)dx.$$

Але

$$\varphi'(x)dx=du,$$

тому

$$dy=f'(u)du.$$

Таким чином, для dy маємо такий вираз, начебто u є незалежною змінною. Тобто форма диференціала функції не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною, чи функцією іншої змінної.

14.3. Застосування диференціала до наближених обчислень

Якщо функція $y=f(x)$ в точці x має скінченну похідну, то

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,\ \text{де}\ \alpha(x,\Delta x)\to 0,\ \text{при}\ \Delta x\to 0$$

або користуючись позначенням диференціала,

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x .$$

Звідси

$$\Delta y - dy = \alpha \cdot \Delta x .$$

Тобто, чим менше є приріст аргументу Δx, тим менше диференціал функції відрізняється від приросту функції. Отже, для достатньо малих Δx можна написати наближену рівність $\Delta y \approx dy$; $\Delta = \left|\Delta y - dy\right|$ – абсолютна похибка, а $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$ – відносна похибка. Таким чином,

$$f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right) \approx f'\left(x\right)\Delta x \text{ або } f\left(x + \Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right)\Delta x . \qquad (14.3)$$

Зауважимо, що в практичних задачах обчислення приросту функції значно складніше, ніж обчислення диференціала. Тому якщо Δx – малі, диференціал можна наближено вважати приростом функції.

Приклад 14.2. Обчислити приріст та диференціал функції

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

при переході від $x = 2$ до $x = 2{,}02$.

Розв'язання.

Маємо $y' = 3x^2 - 4x + 3$, отже $dy = \left(3x^2 - 4x + 3\right)\Delta x$. Знайдемо dy в точці $x = 2$ при $\Delta x = 0{,}02$. Таким чином $dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x = 0{,}02}} = 7 \cdot 0{,}02 = 0{,}14$;

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^3 - 2\left(x + \Delta x\right)^2 + 3\left(x + \Delta x\right) - 4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 4,$$
$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x = 0{,}02}} = 0{,}14160 .$$

Отже, абсолютна помилка $\Delta = \left|\Delta y - dy\right| = 0{,}0016$, відносна помилка

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = 0{,}011 .$$

14.4. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y=f(x)$ має похідну в деякій точці x, тоді диференціалом першого порядку є вираз виду:

$$dy=f'(x)dx.$$

Якщо припустити, що dx має будь-яке, але фіксоване значення, то dy також, як і похідна, є функцією змінної x. Тобто можна знайти його диференціал, а саме:

$$d(dy)=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)dx\right)' dx=f''(x)(dx)^2,$$

або

$$d^2y=f''(x)dx^2. \tag{14.4}$$

Отже, диференціалом другого порядку функції $y=f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку цієї функції.

Аналогічно диференціалом n-го порядку $d^n y$ називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку, тобто $d^n y=d\left(d^{n-1}y\right)$.Таким чином, у загальному випадку, маємо:

$$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n. \tag{14.5}$$

Із останньої формули знайдемо значення похідної n-го порядку як відношення диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала незалежної змінної:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}. \tag{14.6}$$

14.5. Використання похідної в економіці. Граничний аналіз

Похідна функції та її диференціал використовуються в економіці для одержання граничних витрат, граничного прибутку, граничної корисності, продуктивності та ін. Слово "граничний" у цих термінах означає похідну від відповідної функції, або швидкість її змінення.

Таким чином, граничні величини характеризують не стан, а швидкість зміни економічного процесу за часом чи щодо іншого фактора.

Граничні величини в економічній літературі називаються маржинальними. Розглянемо використання похідної для аналізу деяких економічних показників.

1. Витрати виробництва.

Якщо витрати виробництва розглядати як функцію кількості продукції x , що випускається, тобто $y = f(x)$, то $y' = f'(x)$ – граничні витрати, які характеризують приріст витрат на виробництво додаткової одиниці продукції, тоді $y_1(x) = f(x)/x$ - середні витрати, які є витратами на одиницю випуску продукції.

2. Продуктивність праці.

Нехай $y = f(t)$ – це обсяг зробленої продукції за час t. Тоді $y' = f'(t)$ є продуктивність праці в момент часу t.

3. Функція споживання і заощадження.

Нехай x- національний дохід, $C(x)$ - функція споживання (частина доходу, що витрачається), $S(x)$ - функція заощадження (частина доходу, що заощаджується), тоді

$$x = C(x) + S(x).$$

Диференціюючи обидві частини рівності, одержимо:

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1, \tag{14.7}$$

де $\frac{dC}{dx}$ - гранична схильність до споживання; $\frac{dS}{dx}$ – гранична схильність до заощадження.

Для дослідження економічних процесів і розв'язування прикладних задач часто використовують поняття еластичності функції

Еластичністю функції $E_x(y)$ в точці x називається границя відношення відносного приросту функції в даній точці до відносного приросту аргумента x, якщо $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{x}{y}\cdot y'. \qquad (14.8)$$

Еластичність функції наближено показує, на скільки відсотків змінюється функція $y=f(x)$ при зміні аргумента x на 1 %. Якщо $|E_x(y)|>1$ – функція є еластичною, при $|E_x(y)|<1$ – нееластична, при $|E_x(y)|=1$ – функція вважається нейтральною.

Розглянемо основні властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної на темп зміни функції:

$$E_x(y)=x\cdot T_y,\quad T_y=(\ln y)'=\frac{y'}{y}.$$

2. $E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v),\ E_x\left(\dfrac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v).$

3. $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}.$

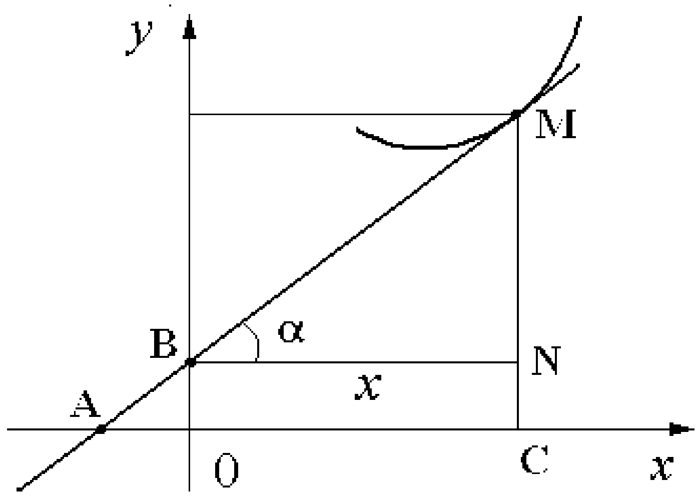


Рис. 14.2

Розглянемо геометричний зміст еластичності функції. Із рис.14.2 видно

$$\Delta MBN\sim\Delta MAC,$$

тоді

$$\frac{MN}{MC}=\frac{MB}{MA},$$

$$MN = x\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ \ MC = y,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y',\ \ \frac{x}{y}y' = \frac{MB}{MA},$$

тобто

$$\frac{MB}{MA}=E_x\left(y\right).$$

Таким чином, еластичність (по абсолютній величині) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від даної точки графіка функції до точок її перетинання з осями Oy і Ox відповідно.

Приклад 14.3. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд:

$$y(x)=0.1x^3-1.2x^2+5x+250.$$

Знайти граничні і середні витрати при $x=10$.

Розв'язання.

Граничні витрати:

$$y'(x)=0.3x^2-2.4x+5; \qquad y'(10)=30-24+5=11.$$

Середні витрати:

$$y_1(x)=\frac{0.1x^3-1.2x^2+5x+250}{x}=0.1x^2-1.2x\ \ +5+\frac{250}{x};\ y_1(10)=28.$$

Це означає, що при даній кількості продукції, що випускається, середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 28 грош. од., а збільшення обсягу на 1 одиницю продукції при даному рівні виробництва обійдеться фірмі приблизно в 11 грош. од.

Приклад 14.4. Обсяг виробництва зимового взуття, що випускається фірмою, може бути описаний рівнянням

$$f\left(t\right)=\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+6t+2100.$$

Обчислити продуктивність праці, швидкість її зміни:

а) на початку року (t=0);

б) у середині року (t=6);

в) наприкінці року (t=12).

Розв'язання.

Продуктивність праці:

$$f'(t) = t^2 - 7t + 6 \text{ (од./міс.)},$$

а швидкість зміни продуктивності – $f''(t)$, або $f''(t) = 2t - 7$. Отже, значення продуктивності праці та швидкості її зміни в даних точках буде:

$a)\ f'(0) = 6,\ f''(0) = -7;$

$б)\ f'(6) = 0,\ \ f''(6) = 5;$

$в)\ f'(12) = 6.6,\ f''(12) = 16.$

Приклад 14.5. Функція споживання деякої країни має вигляд:

$$C(x) = 15 + 0.25x + 0.36x^{4/3},$$

де x – сукупний національний дохід (грош. од.).

Знайти:

а) граничну схильність до споживання;

б) граничну схильність до заощадження, якщо національний дохід складає 27 грош. од.

Розв'язання.

Гранична схильність до споживання

$$C'(x) = 0.25 + 0.48x^{1/3},$$

її значення

$$C'(27) = 1.69.$$

Граничну схильність до заощадження знайдемо з формули:

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1.$$

Отже,

$$S'(x) = 1 - C'(x) = 0.75 - 0.48x^{1/3};$$
$$S'(27) = 1 - 1.69 = -0.69.$$

Приклад 14.6. Залежність між собівартістю одиниці продукції в (тис. грн) і випуском продукції x (млн грн) виражається формулою $y = -0,6x + 40$. Знайти еластичність собівартості при випуску продукції $x =$60 млн грн.

Розв'язання.

$$E_x(y) = \frac{-0.6x}{-0.6x+40} = \frac{x}{x-240} \text{ при } x = 60 \text{ млн грн.}$$
$$E_x(y) = -0.33,$$

тобто при випуску продукції на 60 млн грн збільшення його на 1 % приведе до зниження собівартості на 0,33%.

Запитання для самодіагностики

1. Що називається диференціалом функції?
2. Записати формулу для використання диференціала в наближених обчисленнях.
3. Який геометричний зміст диференціала?
4. Які властивості диференціалів?
5. Що називається еластичністю функції?
6. Який геометричний зміст еластичності?
7. Який економічний зміст еластичності функції?
8. Наведіть приклади використання похідної та диференціала в економіці.

Приклади і вправи

Приклади:

14.7. Знайти диференціал функції $y = \operatorname{arctg}^3(e^{3x})$.

Розв'язання.

За формулою $dy = y'dx$ маємо

$$dy = 3\operatorname{arctg}^2(e^{3x}) \cdot \frac{1}{1+e^{6x}} \cdot e^{3x} \cdot 3dx = \frac{9e^{3x}}{1+e^{6x}} \operatorname{arctg}^2(e^{3x})dx.$$

14.8. Обчислити наближено $\sqrt[3]{27,36}$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$ і обчислимо її значення при $x = 27,36$.

Нехай $x_0 + \Delta x = 27,36,$, $x_0 = 27,$, $\Delta x = 0,36$. Тоді

$$\sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \text{ а } y'(x_0) = y'(3) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}.$$

За формулою $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$ маємо

$$\sqrt[3]{27,36} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27} \cdot 0,36 \approx 3,013.$$

14.9. Функція витрат має вигляд:

$$y(x) = 0,01x^3 - 0,2x^2 + 10x + 2000.$$

Знайти граничні витрати та обчислити їх значення при $x = 10$.

Розв'язання.

Граничні витрати:

$$y'(x) = 0,03x^2 - 0,4x + 10, \; y'(10) = 9.$$

Якщо приріст функції наближено замінити її диференціалом, тобто $\Delta y \approx dy = y'(x)\Delta x,$ то $y'(10) = 9$ означає, що при виробленні одинадцятої одиниці продукції додаткові витрати складають дев'ять одиниць.

14.10. Попит населення на деяку продукцію залежить від ціни на неї таким чином:

$$y(x) = \frac{25000}{x^2} - \frac{1}{5}.$$

Знайти швидкість змінення попиту та його еластичність, якщо $x = 10$.

Розв'язання.

Швидкість змінення попиту : $y'(x) = -\frac{50000}{x^3}$, $y'(10) = -50$.

Еластичність: $E_x(y) = \frac{x}{y} y'(x); E_{x=10}(y) = \frac{10}{249,8} \cdot (-50) \approx -2$.

Отже, збільшення ціни на продукцію на один відсоток зменшує попит на неї на два відсотка при $x = 10$.

Вправи:

Знайти диференціали функцій:

14.11. $y = \cos^3 2x.$

14.12. $y = 2x\sqrt{7x-2}.$

14.13. $y = 5^{x^2} \arccos\frac{1}{x}.$

14.14. $y = \frac{e^{3x-5}}{\sqrt{x^2-3}}.$

14.15. $y = \sqrt{1+\sin^2 x}.$

14.16. $y = \sqrt[3]{(2+\cos x)^2}.$

14.17. $y = x\ln(x^2-2x).$

14.18. $(x+y)^2(2x+y)^2 = 1.$

14.19. $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$

Знайти наближене значення функції:

14.20. $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ при $x = 0,1.$

14.21. $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1,03.$

14.22. $y = e^{1-x^2}$ при $x = 1,05.$

14.23. $\sqrt[4]{80,5}$.

14.24. $\arcsin 0,4983.$

14.25. $\sin 29°.$

14.26. $\ln 1,01.$

14.27. $e^{0,2}$

Глава 15
Застосування похідних до дослідження функцій

15.1. Теореми диференціального числення

Для дослідження функцій та побудови їх графиків фундаментальне значення мають деякі теореми, які є теоретичною основою для багатьох прикладних задач.

Розглянемо три основні теореми.

1. Теорема Ферма. Нехай функція $y=f(x)$, яка визначена в інтервалі $(a;b)$ і в деякій точці $c\in(a;b)$, приймає найбільше (найменше) значення. Якщо в цій точці існує скінченна похідна, то вона дорівнює нулю.

Доведення.

Нехай для визначеності в точці c функція досягає найбільшого значення. Це означає, що для будь-яких значень $x\in(a;b)$ виконується умова $f(x)\le f(c)$.

Дамо аргументу x у точці c приріст Δx, одержимо приріст функції

$$\Delta y=f(c+\Delta x)-f(x),\ \left(c+\Delta x\in(a,;b)\right)$$

або

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

Чисельник цього дробу $\Delta y\le 0$ $\left(f(x)\le f(c)\right)$. Отже, якщо $\Delta x<0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$, а якщо $\Delta x>0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$.

За умовою теореми в точці c існує похідна, тобто існує $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)$, який не залежить від того, як Δx прямує до нуля (зліва або справа). Якщо обчислити границю при $\Delta x\to +0$ і $\Delta x\to -0$ відповідно одержимо $f'(c)\le 0$, $f'(c)\ge 0$. Звідси одержимо $f'(c)=0$.

У випадку, коли функція $f(x)$ досягає в точці c найменшого значення, теорема доводиться аналогічно.

Геометричний зміст теореми (рис. 15.1). За теоремою $f'(c)=0$, тобто дотична в точці $M(c; f(c))$ паралельна осі Ox.

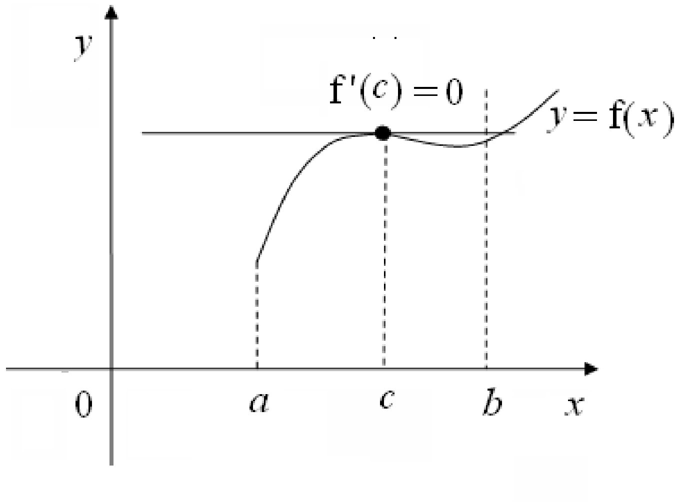


Рис.15.1

2. Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на сегменті $[a;b]$; 2) має скінченну похідну в інтервалі $(a;b)$; 3) на кінцях сегмента набуває однакові значення, тобто $f(a)=f(b)$, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, у якій $f'(c)=0$.

Доведення.

Неперервна на сегменті функція досягає на цьому сегментіі найбільше M та найменше m значення.

Розглянемо два випадки.

1. Нехай $M=m$, тоді $m \le f(x) \le M$. Звідси для будь-яких $x \in [a;b]$, $f(x)=m$, тобто $f(x)=\text{const}$ на сегменті $[a;b]$. Отже, $f'(x)=0$ на цьому сегменті і у якості точки c можливо брати будь-яку точку сегмента $[a;b]$.

2. Якщо $M>m$, тоді хоча б одне із значень M, або m функція досягає у внутрішній точці сегмента $[a;b]$. Отже, за теоремою Ферма у цій точці $f'(c)=0$ (рис. 15.2). Теорему доведено.

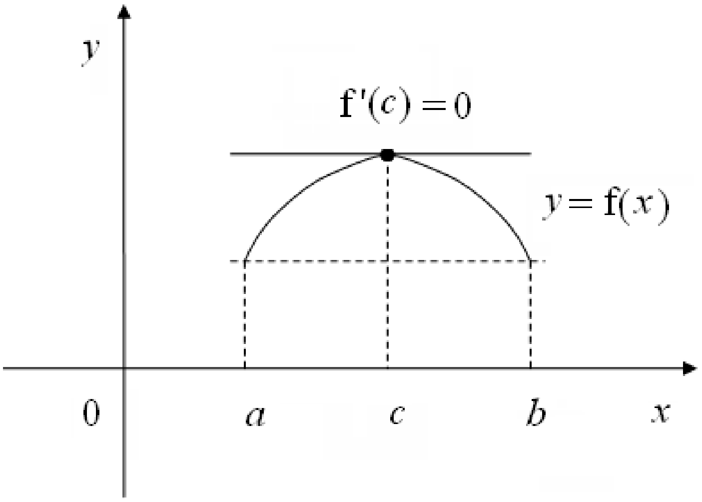


Рис.15.2

3. Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$ та має скінченну похідну на інтервалі $(a;b)$, то знайдеться принаймні одна така точка $x=c$, $a<c<b$, у якій справджується рівність:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (15.1)$$

або

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Доведення.

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \qquad (15.2)$$

Функція $F(x)$ задовольняє трьом умовам теореми Ролля. Дійсно: 1) неперервна на $[a,b]$, як сума неперервних функцій; 2) у кожній точці інтервала $(a;b)$ має скінченну похідну; 3) на кінцях сегмента $[a;b]$ набуває однакових значень: $F(a)=F(b)=0$. Таким чином, на сегменті $[a,b]$ існує принаймні одна точка $x=c$, у якої $F'(c)=0$. Отже,

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ або } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа (рис. 15.3): на кривій $y = f(x)$ завжди знайдеться принаймні одна точка, дотична, у якій буде паралельна хорді, яка з'єднує кінці графіка функції на $[a;b]$.

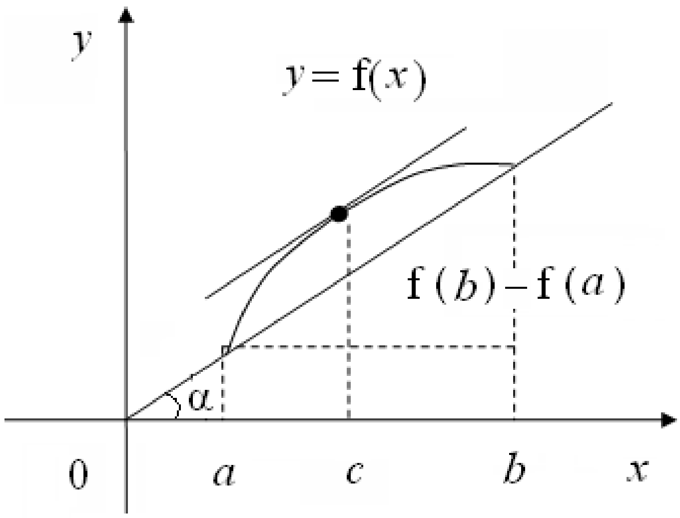


Рис.15.3

Наслідок. Приріст функції $f(x)$ в точці $x_0 \in [a;b]$ дорівнює приростові аргумента, помножиному на похідну в деякій точці c, що знаходиться між x_0 та $(x_0 + \Delta x)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x.$$

Дійсно, якщо в теоремі Лагранжа: $a = x_0$, а $b = x_0 + \Delta x$, то точка $c \in [x_0; x_0 + \Delta x]$. Якщо ввести параметр $\theta (0 < \theta < 1)$, то будь-яку внутрішню точку c сегмента $[x_0; x_0 + \Delta x]$ можна подати у вигляді $c = x_0 + \theta \Delta x$, і тоді:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x. \qquad (15.3)$$

Останню формулу називають формулою скінченних приростів. Таким чином, приріст функції Δy виражається точною формулою через приріст аргумента Δx і похідну у деякій точці сегмента $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

15.2. Правило Лопіталя

Теорема. Нехай маємо відношення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, де функції визначені на $[a;b]$ мають скінченні похідні на цьому сегменті $\left(g'(x)\neq 0\right)$, тоді, якщо обидві функції нескінченно малі або нескінченно великі при $x\to x_0\left(x_0\in(a;b)\right)$ і існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, виконується рівність:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (15.4)$$

Доведення.

Розглянемо теорему для невизначенності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ при $x\to x_0$.

Припустимо, що функції $f(x)$ та $g(x)$, а також їхні похідні неперервні в точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=0$. У цьому разі

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}.$$

Використовуючи теорему Лагранжа для функцій $f(x)$ та $g(x)$ на відрізку $[x,x_0]$, отримаємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)(x-x_0)}{g'(c_2)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

де $x<c_1<x_0$, $x<c_2<x_0$. При $x\to x_0$ внаслідок неперервності похідних $f'(x)$ та $g'(x)$ маємо $f'(c_1)\to f'(x_0)$ òà $g'(c_2)\to g'(x_0)$. Використовуючи теорему про границю частки двох функцій, отримаємо рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопіталя використовується і у випадку, коли $x\to\infty$. Таким чином, згідно з правилом Лопіталя розкриваються невизначеності вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Зведення інших типів невизначеностей до розглянутих здійснюється так:

$$1)\ [0\cdot\infty]\Rightarrow y=u\cdot\upsilon\Rightarrow\begin{cases} y=\dfrac{u}{\dfrac{1}{\upsilon}}=\left[\dfrac{0}{0}\right] \\ y=\dfrac{\upsilon}{\dfrac{1}{u}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\end{cases}; \qquad (15.5)$$

$$2)\ [\infty-\infty]\Rightarrow y=u-\upsilon\Rightarrow y=\frac{\dfrac{1}{\upsilon}-\dfrac{1}{u}}{\dfrac{1}{\upsilon}\cdot\dfrac{1}{u}}=\left[\frac{0}{0}\right]; \qquad (15.6)$$

$$3)\ \left(1^{\infty},0^{0},\infty^{0}\right)\Rightarrow y=u^{\upsilon}\Rightarrow \ln y=\upsilon\cdot\ln u=[0\cdot\infty]. \qquad (15.7)$$

Тобто $\ln y$ дає невизначеність уже розглянутого вигляду $[0\cdot\infty]$. Якщо вдається знайти $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=k$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0}y=e^{k}$, бо $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=\ln\left(\lim\limits_{x\to x_0}y\right)$.

Наведемо декілька прикладів на застосування правила Лопіталя.

Обчислити границі:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^7-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{7x^6}=\frac{5}{7};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1}{5x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{10x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

У цьому прикладі правило Лопіталя використали два рази;

$$3)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{7+x}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+7}}}=\frac{3}{4};$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{3\cdot 2\sin 3x\cos 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}=\frac{1}{9};$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\neq\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$.

Остання границя не існує, але це не значить, що не існує границя відношення функцій, бо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Цей приклад – застереження від неправильного використання правила Лопіталя у випадку, коли відношення $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to x_0$ не має границі. Границя $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to x_0$ може існувати й тоді, коли відношення похідних при $x\to x_0$ границі не має;

6) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$, покладаючи $y=x^x$, знаходимо $\ln y=x\ln x$.

Цей вираз $x\to x_0$ породжує невизначеність $[0\cdot\infty]$ і $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\dfrac{0}{2}=0;$

9) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$ або $\ln y=\dfrac{1}{x-1}\ln x$, $\lim\limits_{x\to 1}\ln y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$.

Звідси, $\lim\limits_{x\to 1}y=e$, тобто $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=e$.

15.3. Умови монотонності функції

Розглянемо застосування похідної для аналізу поведінки функції та побудови її графіка. З цією метою зупинимось на деяких теоремах, які мають основне значення для дослідження функції.

Теорема 1 (необхідна умова монотонності). Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$ і зростає $\left(x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)\right)$, то її похідна на цьому проміжку $f'(x) \geq 0$. Якщо функція спадає на проміжку $\left(x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)\right)$, то її похідна на цьому проміжку, $f'(x) \leq 0$. Якщо функція на проміжку $(a;b)$ є сталою, то її похідна $f'(x) = 0$ у кожній точці цього проміжку.

Доведення.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ на проміжку $(a;b)$ зростає, тобто для $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Нехай $x_2 = x + \Delta x;\ x_1 = x$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. За визначанням похідної:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

За умовою теореми $\Delta y > 0$, якщо $\Delta x > 0$ і $\Delta y < 0$, якщо $\Delta x < 0$. Отже, відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ і його границя $f'(x) \geq 0$.

Для спадної функції теорема доводиться аналогічно.

Якщо $f(x) = const,\ f'(x) \equiv 0\ (\Delta y = 0)$.

Теорема 2 (достатня умова монотонності). Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$ і її похідна $f'(x) > 0$ у кожній точці цього проміжку, то функція на цьому проміжку зростає і спадає, якщо $f'(x) < 0$.

Доведення.

Нехай $f'(x) < 0$. Доведемо, що функція спадає.

Візьмемо будь-які дві точки x_2 і x_1 із $(a;b)$ і застосуємо теорему Лагранжа до функції $f(x)$ на проміжку $[x_1; x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1; x_2).$$

Нехай $x_2 > x_1$, тоді $f(x_2) - f(x_1) < 0$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$ і функція спадає, теорему доведено.

Умова зростання функції доводиться аналогічно. Точки, які відокремлюють інтервали зростання та спадання функції, назвемо межами інтервалів монотонності. Одержимо умови наявностей меж монотонності, як висновки теорем 1 і 2.

Висновок 1. Якщо точка x_0 є межею монотонності $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ або не існує.

Дійсно, якщо точка x_0 відокремлює інтервал зростання функції від інтервалу спадання, то, проходячи через цю точку, похідна змінює знак, тобто $f'(x_0)=0$ або вона не існує в точці x_0.

Висновок 2. Точка $x=x_0$ є межею монотонності, якщо похідна функції при переході через цю точку змінює знак.

Точки, у яких похідна функції $y=f(x)$ дорівнює нулю, або не існує називають критичними точками $f(x)$. Інколи критичні точки, у яких $f'(x)=0$, називають стаціонарними точками $f(x)$.

Таким чином, при дослідженні функції $f(x)$ на монотонність необхідно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти критичні точки, тобто точки, у яких $f'(x)=0$, або не існує;

3) встановити знак похідної на кожному інтервалі, на які критичні точки розбивають область існування функції;

4) зробити висновки ($f'(x)>0$ функція зростає, $f'(x)<0-$ спадає).

Приклад 15.1. Знайти інтервали монотонності:

1. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

Функція визначена для $x\in R$. Знайдемо похідну

$$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x-2\cos x\sin x\equiv 0,$$

отже, функція є сталою для усіх $x\in R$.

2. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Функція втрачає зміст при $x=\pm 1$. Область визначення функції складається з трьох інтервалів: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Знаходимо критичні точки функції

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-2x\cdot x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2},$$

$f'(x)=0$ у точках $x=0;\ x=\pm\sqrt{3}$. При $x=\pm1$ похідна не існує. Таким чином область визначення функції розбивається на шість інтервалів, у яких похідна має постійний знак (рис. 15.4).

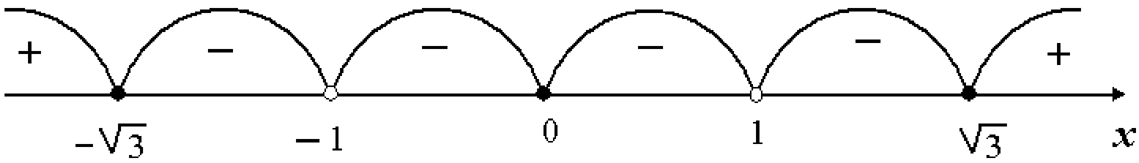


Рис.15.4

Щоб встановити знак похідної на кожному інтервалі, досить встановити знак похідної в будь-якій точці кожного із них. Як видно, критична точка $x=0$ не є межею монотонності, бо для неї не виконується достатня умова. Отже, дана функція зростає на інтервалах: $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$; спадає на інтервалах: $\left(-\sqrt{3};-1\right)$, $(-1;1)$ і $\left(1;\sqrt{3}\right)$ (рис.15.4).

3. $y=\ln\left(x^2+2x-3\right)$.

Область визначення функції: $x^2+2x-3>0$, тобто $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. Знайдемо похідну та критичні точки:

$$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3};\ \ f'(x)=0\Rightarrow 2x+2=0;\ \ x=-1.$$

Але точка $x=-1$ не належить області визначення функції. Тобто як критичні точки можливо розглянути точки, у яких похідна не існує. Отже при $x=1$ і $x=-3$. Таким чином, на інтервалі $(-\infty;-3)$ функція спадає, а на інтервалі $(1;+\infty)$– зростає (рис.15.5).

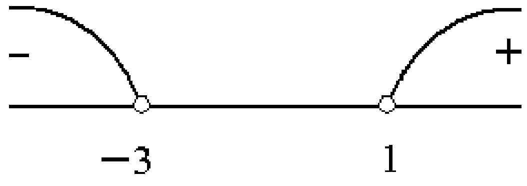


Рис.15.5

15.4. Екстремум функції. Необхідна та достатні умови екстремуму

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $(a;b)$. Точка $x_0 \in (a;b)$ називається точкою максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, що для всіх x з цього околу виконуються нерівність:

$$f(x) < f(x_0) \left(f(x) > f(x_0) \right). \tag{5.8}$$

Якщо покласти $x - x_0 = \Delta x,\ f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = \Delta y,$ то у точці x_0 функція має максимум при $\Delta y < 0,$ а мінімум при $\Delta y > 0.$

Точки максимуму і мінімуму називають точками екстремуму функції. Таким чином, із означення екстремуму функції поведінка функції розглядається в околі точки x_0 і при виконанні умови екстремуму функція $f(x)$ в точці x_0 має локальний максимум, або мінімум.

Теорема 3 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $f(x)$ в точці $x_0 \in (a,b)$ досягає екстремуму і в цій точці існує скінченна похідна, то $f'(x_0) = 0.$

Доведення.

За умовою теореми функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум або мінімум, тобто в околі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ досягає найбільше (найменше) значення, а за теоремою Ферма, якщо в цій точці функція $f(x)$ має скінченну похідну, то $f'(x) = 0.$ Теорему доведено.

Зауважимо, якщо необхідна умова виконується, то необов'язково функція досягає екстремуму. В прикладі 2 функція $f(x)$ в точці $x_0 = 0$, екстремуму не має, в той же час у точці $x_0 = -\sqrt{3}$ функція досягає максимуму, а в точці $x_0 = \sqrt{3}$ – мінімуму. Отже, якщо в точці x_0 похідна $f'(x_0) = 0$, або не існує – це тільки означає, що точка x_0 є критичною.

Теорема 4 (перша достатня умова екстремуму). Нехай точка x_0 є критичною точкою для неперервної функції $f(x)$. При цьому у деякому околі точки x_0, тобто в інтервалі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, як зліва від точки x_0, так і справа існує принаймні при $x \neq x_0$ скінченна похідна, яка зберігає знак зліва від точки x_0 і справа від неї. Тоді, якщо похідна функції при переході через точку x_0 змінює знак, то в цій точці функція має екстремум.

Доведення.

Розглянемо три можливі випадки:

1. Якщо $x < x_0$, то $f'(x) > 0$; якщо $x > x_0$, то $f'(x) < 0$.

Таким чином, зліва від точки x_0 функція зростає і справа спадає. Отже, в точці x_0 функція має максимум (рис. 15.6a).

2. Якщо $x < x_0$, то $f'(x) < 0$; якщо $x > x_0$, то $f'(x) > 0$. Тобто зліва від точки x_0 функція спадає, а справа – зростає (рис. 15.6b). Таким чином, в точці x_0 функція має мінімум.

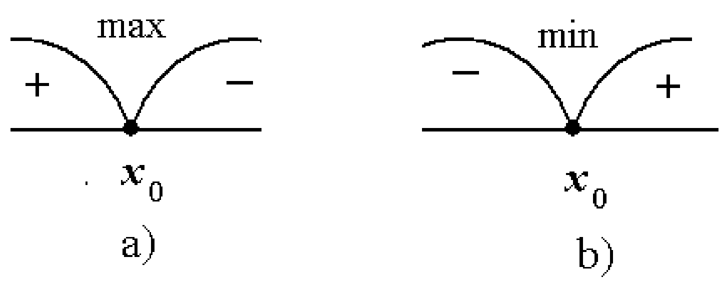


Рис. 15.6

3. Якщо при переході через точку x_0 похідна знак не змінює, то функція $f(x)$ в околі точки x_0 монотонно зростає ($f'(x) > 0$), або монотонно спадає ($f'(x) < 0$). Отже, в точці x_0 екстремуму функція не має.

Таким чином, для знаходження екстремуму функції, треба:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти критичні точки ($f'(x)=0$, $f'(x)=\infty$, або не існує);

3) дослідити на екстремум кожну критичну точку за теоремою 4.

Приклад 15.2. Дослідити на екстремум функції:

1. $y=x^2-2x-3.$

Функція визначена та неперервна на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Критичну точку знайдено із рівняння $f'(x)=0$, тобто $2x-2=0; x=1.$ При $x<1; f'(x)<0,$ а при $x>1; f'(x)>0,$ отже точка $x=1$ є точкою мінімуму: $x_{\min}=1, f_{\min}(1)=-4.$

2. $y=-x^2+3x-2.$

Область визначення $x\in R;$ $f'(x)=-2x+3=0, x=\dfrac{3}{2};$ при $x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow f'(x)>0;$ при $x>\dfrac{3}{2}\Rightarrow f'(x)<0.$ Отже, точка $x=\dfrac{3}{2}$ є точкою максимуму; $x_{\max}=\dfrac{3}{2};$ $f_{\max}\left(\dfrac{3}{2}\right)=0,25.$

3. $y=\sqrt[3]{x}$.

Область визначення функції: $x\in R;$ критична точка $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\infty,$ при $x=0;$ але при переході через $x=0$ похідна знак не змінює $\left(f'(x)>0\right).$ Отже, функція на $(-\infty;+\infty)$ зростає і екстремуму не має.

4. $y=(x+2)^2(x-1)^3.$

Функція визначена на інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Знайдемо похідну і критичні точки:

$$y'=2(x+2)(x-1)^3+3(x-1)^2(x+2)^2=(x-1)^2(x+2)(5x+4).$$

Отже, критичні точки: $x_1=-2; x_2=-\dfrac{4}{5}; x_3=1.$ Дослідимо знак похідної в околі кожної із цих точок (рис. 15.7). На кожному проміжку вибираємо довільну точку: $f'(-3)=176>0;$ $f'(-1)=-4<0;$ $f'(0)=8>0;$ $f'(2)=56>0.$ Отже, зробимо висновки: точка $x_1=-2-$ точка є точкою максимуму,

$f_{\min}(-2)=0$; точка $x_2=-\frac{4}{5}$ є точкою мінімуму, $f_{\max}\left(-\frac{4}{5}\right)\approx 8,4$; в точці $x_3=1-$функція екстремуму не має.

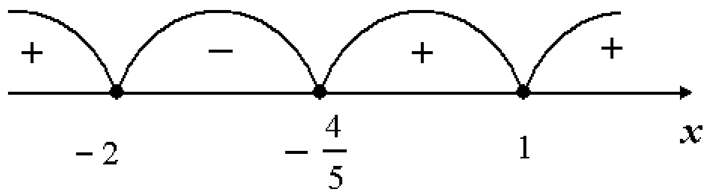


Рис.15.7

Теорема 5 (друга достатня умова екстремуму). Нехай точка x_0 є критичною точкою функції $f(x)$і існує друга похідна $f''(x_0)$, яка неперервна в деякому околу точки x_0 і $f''(x_0)\neq 0$, тоді: а) якщо $f''(x_0)>0,$то в точці x_0 функція має мінімум; б) якщо $f''(x_0)<0$, то функція в точці x_0 має максимум.

Доведення.

а) нехай $f''(x_0)>0$, тоді $f'(x)$ в точці x_0 є функцією зростаючою, тобто при $x<x_0$, $f'(x)<0$, а при $x>x_0$, $f'(x)>0$. Отже, в точці $x=x_0-$функція має мінімум (за першим правилом).

б) нехай $f''(x_0)<0$, то $f'(x)$ є функцією спадною в точці x_0. тобто, при $x<x_0$, $f'(x)>0$, а при $x>x_0$, $f'(x)<0$. Отже, в точці $x=x_0$функція має максимум (за першим правилом);

Якщо в точці x_0 похідна $f''(x_0)=0$, то друге правило використовувати не можна і дослідження треба проводити за першим правилом. Покажемо застосування другої достатньої умови екстремуму на прикладах 15.2:

1) $y=x^2-2x-3$; $y'=2x-2$; $y''=2>0$,

отже, в точці $x=1-$функція має мінімум;

2) $y=-x^2+3x-2$; $y'=-2x+3$; $y''=-2<0$,

функція в точці $x=\frac{3}{2}$ має максимум;

3) $y=\sqrt[3]{x}$; $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'=\infty$ при $x=0$ і друге правило не використовується.

4) $y=(x+2)^2(x-1)^3$; $y'=(x-1)^2(x+2)(5x+4)$;

$y''=2(x-1)\left(10x^2+16x+1\right)$.

Отже, в точці $x=-2$ $y''<0$ і функція має максимум; в точці $x=-\dfrac{4}{5}$, $y''>0$ і функція має мінімум; в точці $x=1$ $y''=0$ і за другим правилом провести дослідження на екстремум не можна.

Розглянемо задачу про знаходження найбільшого та найменшого значення функції на сегменті $[a;b]$.

Задача. Функція $y=f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$. Знайти її найбільше та найменше значення, тобто M і m на цьому сегменті.

Розв'язання.

За властивостями неперервних на сегменті $[a;b]$ функцій на цьому сегменті знайдеться принаймні одна точка, у якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення M, і точка, у якій функція досягає найменшого значення m. Функція може досягати значень M або m у внутрішній точці сегмента $[a;b]$ або на його границях. Якщо функція приймає найбільше (найменше) значення у внутрішній точці x_0, то за теоремою Ферма в цій точці $f'(x_0)=0$, або не існує, тобто точка x_0 є критичною точкою функції $f(x)$.

Звідси, для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на сегменті $[a;b]$ треба:

1. Знайти похідну $f'(x)$ і всі критичні точки, які належать сегменту $[a;b]$. Тобто точки, у яких $f'(x_0)=0$, $f'(x_0)=\infty$, або $f'(x)$ не існує.

2. Обчислити значення функції $f'(x)$ у критичних точках і на кінцях сегмента $[a;b]$.

3. Порівняти одержані значення функції та вибрати серед цих значень найбільше та найменше.

Позначимо: $\sup\limits_{[a;b]} f(x)=M$ (найбільше значення $f(x)$),

$$\inf_{[a;b]} f(x) = m$$ (найменше значення $f(x)$).

Приклад 15.3*.* Знайти найбільше та найменше значення функції $y = (x+2)^2 (x-1)^3$ на проміжку $[-1;2]$.

Розв'язання.

Обчислимо:

$$y' = (x-1)^2 (x+2)(5x+4), \; y' = 0 \text{ при } x_1 = -2; \; x_2 = -\frac{4}{5}; \; x_3 = 1.$$

Одержуємо значення функції у критичних точках, що належать сегменту $[-1;2]$, тобто у точках $x_2 = -\frac{4}{5}$ і $x_3 = 1$ і на його кінцях ,а саме при $x = -1$ і $x = 2$:

$$f(-1) = 8; \; f\left(-\frac{4}{5}\right) = -8{,}4; \; f(1) = 0; \; f(2) = 16.$$

Таким чином, порівнявши одержані значення, будемо мати:

$$M = \sup_{[-1;2]} f(2) = 16$$ (найбільше значення),

$$m = \inf_{[-1;2]} f\left(-\frac{4}{5}\right) = -8{,}4$$ (найменше значення).

15.5. Опуклість, угнутість та точки перегину кривої

Означення**.** Функція $y = f(x)$ називається опуклою (угнутою) в точці x_0, якщо в деякому околі точки x_0 крива, яка є графіком функції, лежить нижче (вище) дотичної до кривої в цій точці.

Означення.Крива називається опуклою (угнутою) на проміжку $(a;b)$, якщо вона опукла (угнута) в усіх точках цього проміжку.

Теорема 6 (необхідна і достатня умова опуклості (угнутості)). Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ двічі неперервна диференційована і $f''(x) \neq 0$ на цьому інтервалі, тоді для того, щоб крива $y = f(x)$ була опукла (угнута) на інтервалі, необхідно та достатньо, щоб друга похідна функції $f''(x)$ зберігала знак $f''(x) < 0$ (опуклість), або $f''(x) > 0$ (угнутість).

Доведення.

Розглянемо випадок угнутості кривої. Нехай $f''(x)>0$. Покажемо, що крива $y=f(x)$ – угнута. На інтервалі $(a;b)$ візьмемо будь-яку точку x_0 і проведемо дотичну до кривої в цій точці. Приріст функції в точці x_0 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$; $dy=f'(x_0)\Delta x.$ Необхідно довести, що різниця $\Delta y-dy>0$. Це і буде означати угнутість кривої на $(a;b)$ (рис.15.8).

За теоремою Лагранжа приріст $\Delta y=f'(c_1)\Delta x,\ c_1\in(x_0;x_0+\Delta x)$. Таким чином, $\Delta y-dy=f'(c_1)\Delta x-f'(x_0)\cdot\Delta x=\left(f'(c_1)-f'(x_0)\right)\Delta x,$ або за теоремою Лагранжа $\Delta y-dy=f''(c_2)(\Delta x)^2$, де $c_2\in(x_0;c_1)$. Звідси одержуємо: $\Delta y-dy>0$ і теорему доведено.

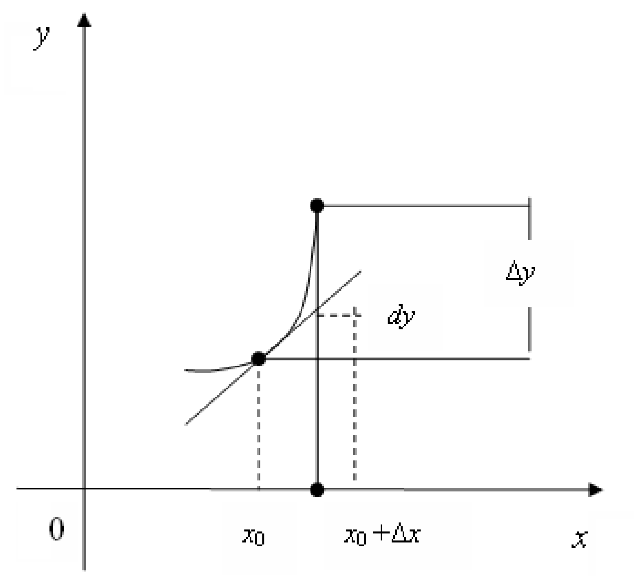


Рис.15.8

Аналогічно доводиться випадок опуклості кривої. Необхідність умови опуклості та угнутості кривої легко довести на основі рівності: $\Delta y-dy=f''(c_2)(\Delta x)^2$.

Означення. Точки, які відокремлюють інтервали опуклості та угнутості кривої, називаються межами відповідних інтервалів, або точками перегину кривої.

Теорема 7 (необхідні умови точок перегину). Проміжки опуклості та угнутості кривої відокремлюються точками, у яких друга похідна $f''(x)=0$, або не існує.

Доведення.

Дійсно, якщо точка $x = x_0 \in (a;b)$ є межею інтервалів опуклості та угнутості $(a;x_0)$, $(x_0;b)$, то для другої похідної $f''(x_0)$ маємо дві можливості: або $f''(x_0)$ існує, і тоді $f''(x_0) = 0$, або перехід від "додатності" до "від'ємності" та навпаки здійснюється через нуль; або $f''(x_0)$ не існує.

Означення. Точки, у яких друга похідна функції $f''(x) = 0$, або не існує, називають критичними точками другого роду.

Теорема 8 (достатні умови точок перегину). Критична точка x_0 є точкою перегину функції $f(x)$, якщо друга похідна функції при переході через цю точку змінює знак.

Дійсно, якщо $f''(x)$ при переході через x_0 знак не змінює, то крива буде або опуклою, або угнутою як для $x < x_0$, так і для $x > x_0$. Тобто точка x_0 не є точкою перегину.

Дослідження функції на опуклість (угнутість) за допомогою $f''(x)$ аналогічне дослідженню функції на екстремум на основі $f'(x)$, а саме:

1. Знайти область існування функції $f(x)$.

2. Обчислити похідну $f''(x)$ і критичні точки другого роду ($f''(x) = 0$, або не існує).

3. Встановити знак другої похідної в кожному із інтервалів, на які критичні точки розбивають область існування функції.

4. Зробити відповідні висновки.

Приклад 15.4. Дослідити на опуклість (угнутість) функцію: $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Розв'язання.

Область існування функції: $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$. Знаходимо $f'(x)$ та $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2\left(x^2 - 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}; \ f''(x) = \frac{2x\left(x^2 + 4\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3};$$

$f''(x) = 0$ при $x = 0$; $f''(x)$ не існує при $x = \pm 1$.

Отже, функція має три критичні точки другого роду, а саме: $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=1$. Цими точками область існування функції розбивається на інтервали: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1,+\infty)$.

Встановлюємо знак другої похідної на кожному інтервалі.

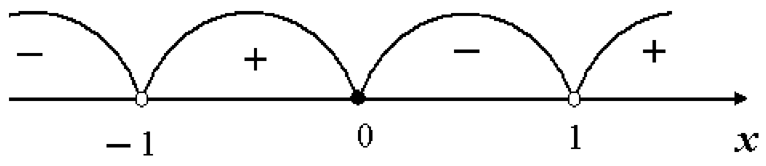


Рис.15.9

Отже, на проміжках $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ графік функції опуклий; на проміжках $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ – угнутий. Усі критичні точки є точками перегину функції (рис. 15.9).

15.6. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка

Означення. Асимптотою кривої $y=f(x)$ називається пряма, відстань до якої від точки кривої прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат.

Розрізняють три типи асимптот (рис. 15.10):

1) вертикальні $(x=a)$;

2) похилі $(y=kx+b)$;

3) горизонтальні $(y=b)$ як частковий випадок похилих $(k=0)$.

Для знаходження рівняння вертикальних асиптот необхідно знайти точки, у яких функція $f(x)$ обертається в нескінченність. Тобто якщо принаймні одна одностороння границя в точці $x=a$ дорівнює нескінченності: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

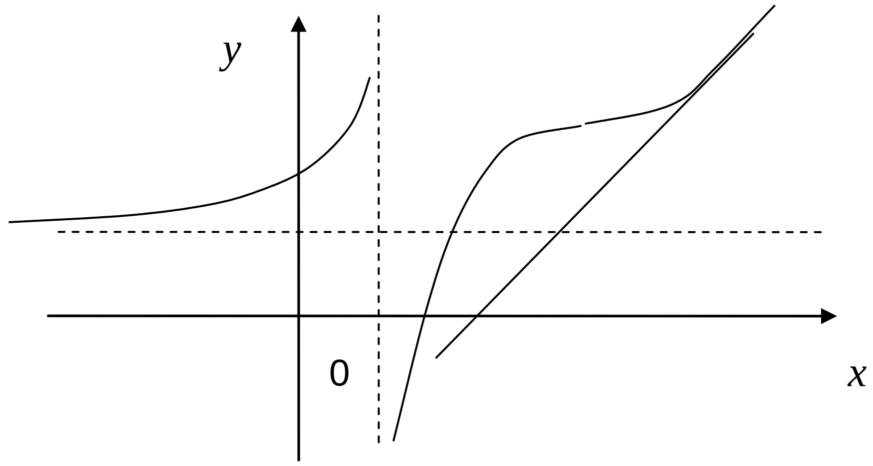


Рис. 15.10

Рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$ графіка функції знаходиться обчисленням границь:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right). \qquad (15.9)$$

Дійсно, якщо відстань від точки на кривій до асимптоти: $\left|f(x) - (kx + b)\right| \to 0$, $x \to \infty$, то $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$ є нескінченно мала при $x \to \infty$; звідси:

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} = \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Перейдемо у цій рівності до границі при $x \to \infty$. Одержимо:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};\ \left(\frac{b}{x} \to 0;\ \frac{\alpha(x)}{x} \to 0,\quad x \to \infty\right).$$

Отже, якщо k знайдено, тоді: $\left|\left(f(x) - kx\right) - b\right| \to 0$ при $x \to \infty$, а саме $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = b$. Таким чином, якщо k і b мають скінченні значення, то $y = kx + b$ є асимптотою. Зауважимо, що при прямуванні $x \to \infty$ в одному напрямі $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$ можливі різні похилі асимптоти. Тоді границі для обчислення k і b знаходять і при $x \to +\infty$, і при $x \to -\infty$.

Горизонтальну асимптоту одержуємо при $k=0$:

$$b=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right).$$

Якщо принаймні одна із границь (для k або b) не існує або нескінченна, то крива похилих асимптот не має.

Приклад 15.5. Знайти асимптоти графіка функції:

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання.

Для знаходження вертикальних асимптот розглянемо точки, у яких функція обертається в нескінченність, та поведінку функції в околі цих точок. Отже,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty;\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty;\ \lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty.$$

Таким чином, прямі $x=-1$ і $x=1$ – вертикальні асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$ одержимо, якщо обчислимо границі:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1;\ b=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Отже, маємо рівняння похилої асимптоти: $y=x$.

2. $y=x\cdot e^x$.

Розв'язання.

Вертикальних асимптот функція не має $\left(x\in R\right)$. Похилі асимптоти визначимо, розглядаючи два випадки:

а) $x\to+\infty$; $k=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\infty$, асимптот графік функції не має;

б) $x\to-\infty$; $k=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0.$

Таким чином, при $x\to-\infty$ крива має горизонтальну асимптоту: $y=0$. За результатами дослідження функції згідно з пунктами 15.1. – 15.5, з урахуванням деяких інших відомостей про неї, можна дати схематичне зображення графіка функції. Отже, для зображення графіка функції треба провести її дослідження за схемою:

1) знайти область визначення функції;
2) перевірити функцію на парність, непарність, періодичність;
3) дослідити функцію на монотонність та екстремум;
4) встановити інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину;
5) визначити асимптоти графіка функції;
6) знайти точки перетину графіка функції з вісями координат.

Приклад 15.6. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

У пунктах 15.2. – 15.5 ця функція була досліджена на екстремум; опуклість (угнутість),та наявність асимптот. Отже, зобразимо схематично графік функції (рис.15.11).

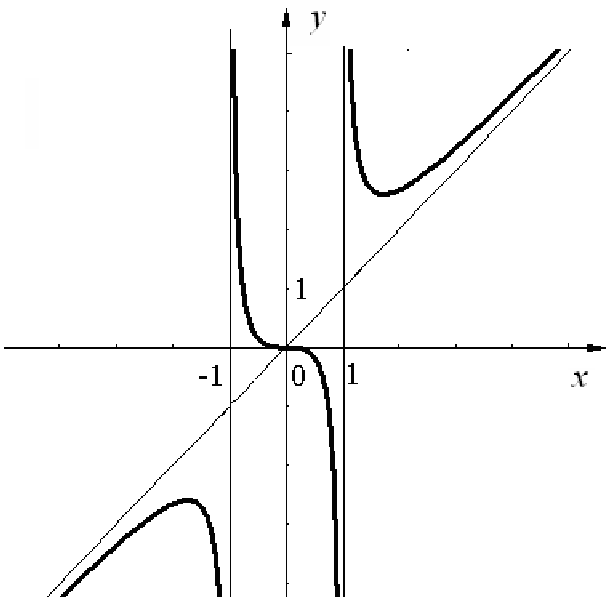


Рис. 15.11

Приклад 15.7. Дослідити функцію $y = \operatorname{arctg} x - x$ та побудувати графік.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x \in R$.

2. Функція непарна $f(-x) = -f(x)$ (графік симетричний відносно початку координат).

3. Знайдемо критичні точки за першою похідною і визначимо інтервали монотонності та екстремуми:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{-x^2}{1+x^2};$$

$f'(x)=0$ при $x=0$. $f'(x)<0$, $x\in R$, тому функція всюди спадає і екстремуму не має.

4. Установимо інтервали опуклості (угнутості):

$$f''(x)=-\frac{2\,\mathrm{x}}{(1+\mathrm{x}^2)^2},$$

$f''(x)=0$ при $x=0$. Отже, на інтервалі $(-\infty;0)$ крива угнута $\left(f''(x)>0\right)$ на інтервалі $(0;+\infty)$ крива опукла $\left(f''(x)<0\right)$.

5. Вертикальних асимптот крива не має $(x\in R)$.

Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1\right)=0,\; b=\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg}x-x\right)=\infty.$$

Отже, похилих асимптот крива теж не має.

6. Точка перетину з вісями координат: $(0;0)$.

Результати досліджень відображені на рис.15.12.

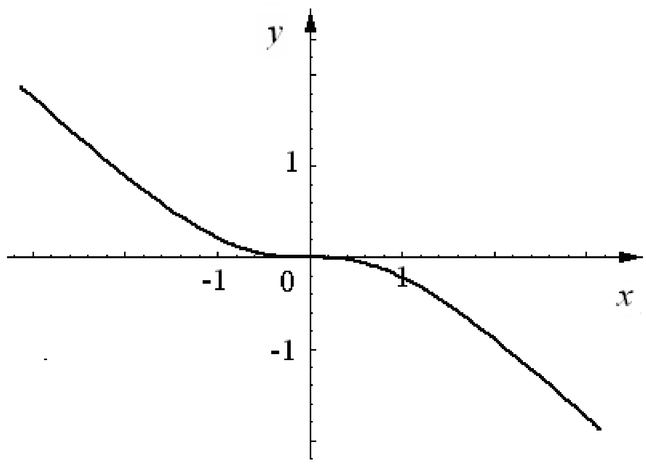


Рис.15.12

Зауважимо, що для побудови графіка цієї функції характерних точок ($x=0$) недостатньо, і значення функції потрібно обчислити в будь-яких інших точках. Наприклад, при $x=1$, $y=\frac{\pi}{4}-1$, а при $x=-1$, $y=-\frac{\pi}{4}+1$ (функція непарна, графік симетричний відносно початку координат).

Запитання для самодіагностики

1. Яка необхідна умова зростання (спадання) функції?
2. Яка достатня умова зростання (спадання) функції?
3. Що називається максимумом і мінімумом функції в точці?
4. Яка необхідна умова екстремуму?
5. Яка достатня умова екстремуму?
6. У чому полягає достатня умова екстремуму за другою похідною?
7. Як знайти найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку?
8. Що таке точка перегину?
9. У якому випадку крива опукла на проміжку?
10. У якому випадку крива угнута на проміжку?
11. Що таке асимптота?
12. Яке рівняння вертикальної асимптоти?
13. Як знаходять рівняння похилої асимптоти?
14. Яка основна схема дослідження функції і побудова її графіка?

Приклади і вправи

Приклади:

15.8. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосуємо для її розкриття правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(\sin 5\pi x)'}{(\sin 2\pi x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5\pi\cos 5\pi x}{2\pi\cos 2\pi x}=\frac{5\cos 5\pi}{2\cos 2\pi}=-\frac{5}{2}.$$

15.9.Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$. Нехай $y=\left(\cos 4x\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Прологарифмуємо цю рівність і одержимо

$$\ln y=\frac{1}{x^2}\ln\cos 4x.$$

За правилом Лопіталя обчислимо

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{4}{\cos 4x}\cdot\sin 4x}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}4x}{x}=-8.$$

Отже, $\ln y=-8,$, а тоді $y=e^{-8},$, тобто

$$\lim_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-8}.$$

15.10. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність $\left[\infty^0\right]$. Нехай $y=\left(tgx\right)^{\cos x}$. Тоді

$$\ln y=\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x).$$

За правилом Лопіталя обчислимо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x)=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\dfrac{1}{\cos x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\ln\operatorname{tg}x)'}{(\dfrac{1}{\cos x})'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 0$, тоді $\ln y = 0$, а $y = e^0 = 1$, або $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$.

15.11. Показати, що $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ існує, але не може бути обчислена за правилом Лопіталя.

Розв'язання.

Обчислимо границю без правила Лопіталя.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Отже, шукана границя існує.

Оскільки є невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то спробуємо знайти границю заданої функції за правилом Лопіталя.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Як видно, остання границя не існує і тому не можна за правилом Лопіталя обчислити границю заданої функції.

15.12. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$$

Розв'язання.

Оскільки задана функція є многочлен, то $x \in R$. Знайдемо

$$y' = x^2 - 2x - 3.$$

Критичні точки одержуємо з рівняння $y' = 0$, тобто з рівності $x^2 - 2x - 3 = 0$. Маємо $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Ці точки наносимо на числову вісь. Вони розбивають її на три проміжки (рис. 15.13).

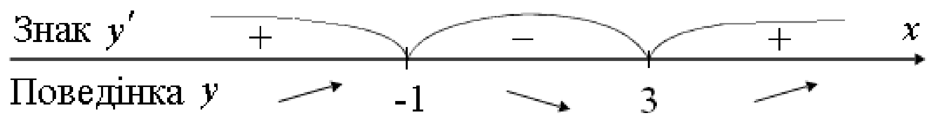


Рис.15.13

Визначаємо знак похідної в кожному з отриманих проміжків. Похідну доцільно записати у вигляді:

$$y' = (x-3)(x+1).$$

При $x=-1$ функція має максимум, а при $x=3$ – мінімум.

$$y_{\max} = -\frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{5}{3},\ y_{\min} = \frac{3^3}{3} - 9 - 9 = -9.$$

На проміжках $(-\infty;-1)$ і $(3;+\infty)$ функція зростає, а на проміжку $(-1;3)$ спадає.

15.13. Дослідити на монотонність і екстремум функцію

$$y = x - \ln(1+x).$$

Розв'язання.

Область визначення даної функції визначається розв'язком нерівності $1+x>0$, звідки $x>-1$. Знаходимо:

$$y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$$

і критичну точку, розв’язуючи рівняння $\frac{x}{x+1} = 0$, звідки $x=0$.

Точка $x=0$ належить області визначення даної функції. Дослідимо її на екстремум (рис. 15.14).

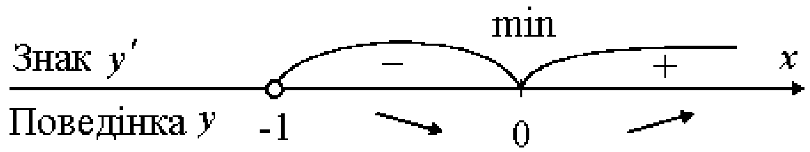


Рис.15.14

Як видно, задана функція спадає при $x \in (-1;0)$ і зростає при $x \in (0;\infty)$, а при $x = 0$ вона має мінімум і $y_{\min} = y(0) = \ln 1 = 0$

15.14. Знайти проміжки монотонності і екстремуми функції $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Розв'язання.

Тут $x \in R$. Знайдемо

$$y' = (x^{\frac{2}{3}} - x)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Похідна y' дорівнює нулю, якщо $2 - 3\sqrt[3]{x} = 0$, звідки $x = \dfrac{8}{27}$, і не існує при $x = 0$. Ці точки є критичними для даної функції. Наносимо їх на числову вісь, утворимо три проміжки і визначимо знак y' в кожному з них (рис. 15.15.).

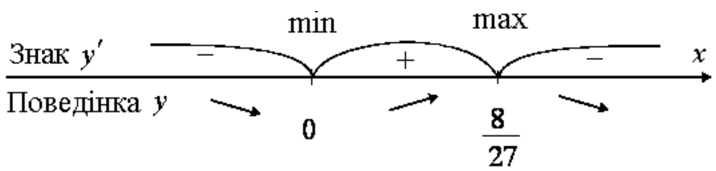


Рис.15.15

З рис. 15.15 видно, що функція спадає на проміжках $(-\infty;0)$ та $(\frac{8}{27};\infty)$ і зростає на проміжку $\left(0;\frac{8}{27}\right)$, при $x = 0$ вона має мінімум, а при $x = \dfrac{8}{27}$ – максимум, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = \dfrac{4}{27}$.

15.15. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 \text{ на відрізку } [-2;1].$$

Розв'язання.

Знайдемо $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ і критичні точки з рівняння

$$6x^2 - 6x - 12 = 0: \; x_1 = -1, \; x_2 = 2.$$

Даному відрізку $\left[-2;1\right]$ належить тільки точка $x=-1$.

Визначимо значення функції в цій точці і на кінцях даного відрізку. Одержуємо:

$$f\left(-1\right)=17;\ f\left(-2\right)=6;\ f\left(1\right)=-3.$$

вибираємо з одержаних значень найбільше і найменше:

$$\max_{\left[-2;1\right]} f\left(x\right)=17,\ \min_{\left[-2;1\right]} f\left(x\right)=-3.$$

15.16. Знайти найбільше та найменше значення функції

$f\left(x\right)=\cos^2\dfrac{x}{2}\sin x$ на відрізку $\left[0;\pi\right]$.

Розв'язання.

Знайдемо $f'\left(x\right)$

$$f'(x)=2\cos\frac{x}{2}\cdot(-\sin\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin x+\cos^2\frac{x}{2}\cos x=$$

$$=\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos\frac{x}{2})=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}.$$

Шукаємо критичні точки, розв'язуючи рівняння $f'\left(x\right)=0$:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x=0\ .$$

Звідси $\cos\dfrac{x}{2}=0$ або $\cos\dfrac{3}{2}x=0$, тобто

$x_1=\pi+2\pi n\ n\in z$, або $x_2=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$.

Видно, що $x_1\in x_2$, тоді $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$ – критичні точки.

Заданому відрізку належить тільки одна точка $x=\dfrac{\pi}{3}$ (при $k=0$).

Обчислимо: $f(0)=0;\ f(\pi)=0;\ f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Найменше з одержаних значень 0, а найбільше $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. Отже,

$$\max_{[0;\pi]} f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{8},\ \min_{[0;\pi]} f(x)=0.$$

15.17. Знайти найбільше або найменше значення функції $f\left(x\right)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$ на проміжку $\left(0;2\right)$.

Розв'язання.

Знайдемо $f'\left(x\right)$.

$$f'\left(x\right)=\frac{(3+x^2)-2x(1+x)}{(3+x^2)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(3+x^2)^2}$$

і критичні точки з рівняння

$$\frac{-x^2-2x+3}{(3+x^2)^2}=0;\ x_1=1,\ x_2=-3.$$

Проміжку $\left(0;2\right)$ належить точка $x=1$. Її треба дослідити на екстремум (рис. 15.16).

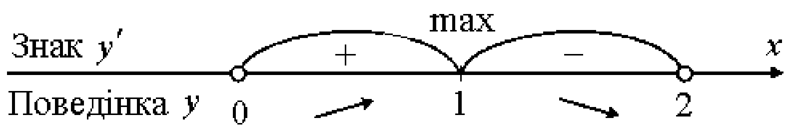


Рис.15.16

При $x=1$ $f\left(x\right)$ має максимум, а оскільки цей максимум єдиний, то він і визначає найбільше значення $f\left(x\right)$ на $\left(0;2\right)$: $\sup\limits_{[0;\,2]} f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$.є

15.18. З куска дроту довжиною 30 см треба зігнути прямокутник найбільшої площі. Знайти розміри цього прямокутника.

Розв'язання.

Позначимо довжини сторін прямокутника через x і y. За умовою $2x+2y=30$, звідки $y=15-x$. Площа прямокутника

$$S=xy=x\left(15-x\right)=15x-x^2,\text{ де } 0<x<30.$$

Треба знайти, при якому значенні $x \in (0;30)$ функція $S(x)$ набуває найбільше значення. Знайдемо $S'(x) = 15 - 2x$ і критичну точку $x = 7{,}5$ з рівняння $15 - 2x = 0$ (рис. 15.17).

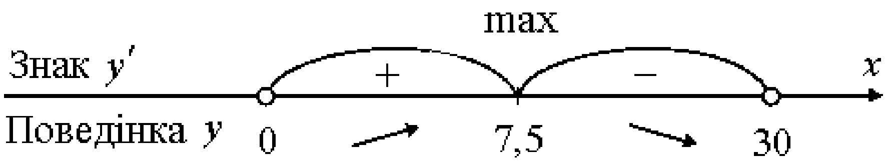


Рис.15.17

З рис. 15.17 видно, що $x = 7{,}5$ – точка максимуму. А оскільки цей максимум єдиний, то він визначає найбільше значення функції. Таким чином, на проміжку $(0;30)$ функція $S(x)$ набуває найбільше значення при $x = 7{,}5$, тобто шукані розміри прямокутника: $7{,}5$ см і $7{,}5$ см.

15.19. Знайти проміжки опуклості, угнутості і точки перегину графіка функції $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 15x - 6$.

Розв'язання.

Тут $x \in R$. Знайдемо $f'(x)$ і $f''(x)$.

$$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 24x + 15, \quad f''(x) = -12x^2 - 12x + 24.$$

Розв'язуємо рівняння

$$-12x^2 - 12x + 24 = 0 \text{ , або } x^2 + x - 2 = 0 \text{ звідки } x_1 = 1, \; x_2 = -2.$$

Точки $x = -2$ і $x = 1$ розбивають числову вісь на три проміжки (рис.15.18).

Рис.15.18

З'ясуємо знак $f''(x)$ на цих проміжках і вигляд графіка.

Обчислимо $f(-2)=-9$, $f(1)=18$.

Отже, задана функція має дві точки перегину $(-2;-9)$ і $(1;18)$, при цьому на проміжках $(-\infty;-2)$ і $(1;\infty)$ графік опуклий, а на $(-2;1)$ – угнутий.

15.20. Знайти проміжки опуклості, угнутості і точки перегину графіка функції

$$y = x\ln^2 x.$$

Розв'язання.

Область визначення функції $D(y)=(0;\infty)$. Шукаємо y' і y''.

$$y' = \ln^2 x + x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x;$$

$$y'' = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}(\ln x+1).$$

Далі, $y''=0$, якщо $\ln x+1=0$, тобто $\ln x=-1$, а $x=\frac{1}{e}$. Ця критична точка поділяє область визначення на два проміжки (рис. 15.19). З'ясуємо знак y'' на цих проміжках.

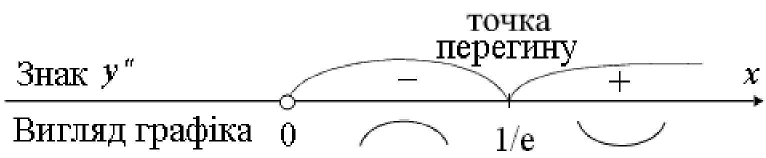


Рис.15.19

Отже, графік опуклий при $x\in(0;\frac{1}{e})$, угнутий – при $x\in(\frac{1}{e};\infty)$, а точка $x=\frac{1}{e}$ – точка перегину.

15.21. Знайти асимптоти кривої $y=\frac{3x-x^2}{x-1}$.

Розв'язання.

Крива має вертикальну асимптоту $x=1$, оскільки $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-x^2}{x-1}=\infty$.

Знайдемо похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{3x-x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x}{x-1}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{3x-x^2}{x-1}+x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=2.$$

Отже, пряма $y=-x+2$ є похилою асимптотою. Горизонтальних асимптот немає.

15.22. Знайти асимптоти функції $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

Розв'язання.

Оскільки $x\neq 0$, то шукаємо $\lim\limits_{x\to 0}y$. Отже

$$\lim_{x\to 0+0}(xe^{\frac{2}{x}}+1)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}+1=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^{\frac{2}{x}}\cdot(-\frac{2}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}+1=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}2e^{\frac{2}{x}}+1=\infty.$$

Таким чином, $x=0$ – вертикальна асимптота, хоча $\lim\limits_{x\to 0-0}(xe^{\frac{2}{x}}+1)=1.$ Останнє має значення при побудові графіка функції. Знайдемо похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{\frac{2}{x}}+1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x})=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(xe^{\frac{2}{x}}+1-x)=1+\lim_{x\to\pm\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)=1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=$$

$$=1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(e^{\frac{2}{x}}-1)'}{(\frac{1}{x})'}=1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}\cdot(-\frac{2}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=1+2\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{2}{x}}=1+2=3.$$

Отже, $y=x+3$ – похила асимптота. Горизонтальних асимптот немає.

15.23. Дослідити функцію $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+10$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення: $x\in R$, оскільки задана функція многочлен.

2. Функція не є парною і не є непарною, оскільки:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+10\text{, а } f(-x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+10\text{ .}$$

3. Точки перегину з осями координат:

а) з Ox: $x=0$, $y=10$;

б) з Oy: $y=0$, $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+10=0$.

Розв'язання останнього рівняння утруднено, тому точки перегину з віссю Ox знайдемо наближено при побудові графіка.

4. Проміжки монотонності і екстремуми функції.

$$y'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-\frac{3}{2}\cdot 2x-4=x^2-3x-4.$$

Критичні точки знаходимо з рівняння $x^2-3x-4=0$. Це $x=-1$ і $x=4$. Тоді $y'=(x+1)(x-4)$. Наносимо критичні точки на числову вісь (рис. 15.20). Одержуємо три проміжки. Знаходимо знак похідної і поведінку функції на кожному з проміжків.

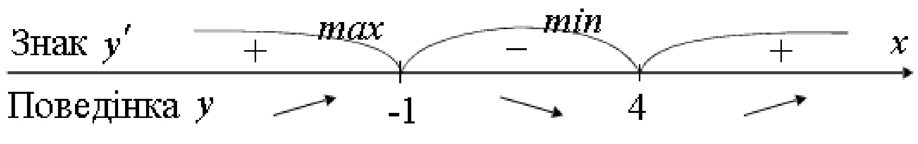


Рис.15.20

$$y_{\max}(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4+10=12\frac{1}{6}\text{ ; } y_{\min}(4)=\frac{1}{3}\cdot 64-\frac{3}{2}\cdot 16-4\cdot 4+10=-8\frac{2}{3}.$$

5. Проміжки опуклості, угнутості і точки перегину.

$$y''=(x^2-3x-4)'=2x-3\text{.}$$

Якщо $y''=0$, то $x=\dfrac{3}{2}$. Знайдемо знак y'' зліва і справа від цієї точки (рис. 15.21).

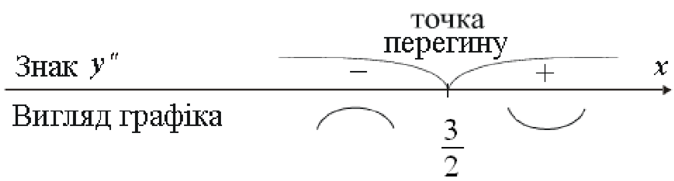


Рис.15.21

При $x=\dfrac{3}{2}$ $y=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{27}{8}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{9}{4}-4\cdot\dfrac{3}{2}+10=1\dfrac{3}{4}$.

6. Будуємо графік функції (рис. 15.22). При цьому використовуємо контрольні обчислення: $y(-2)=9\dfrac{1}{3}$, $y(-3)=-0,5$, $y(6)=4$.

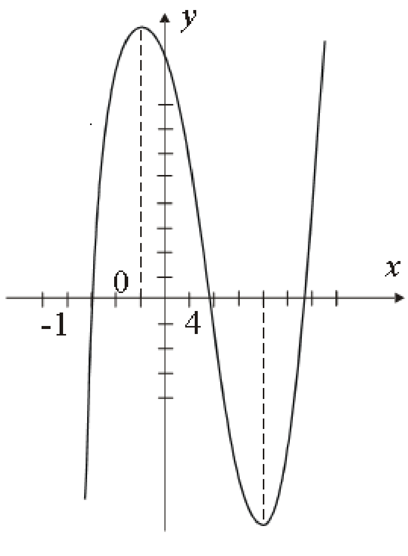


Рис.15.22

15.24. Дослідити функцію $y=\dfrac{2x^2}{x-1}$.і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення:

$$D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty).$$

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. При $x=0$, $y=0$.

4. Проміжки монотонності і екстремуми функції:

$$y' = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$y' = 0$, при $x = 0$ і $x = 2$.

Досліджуємо ці точки на екстремум (рис. 15.23).

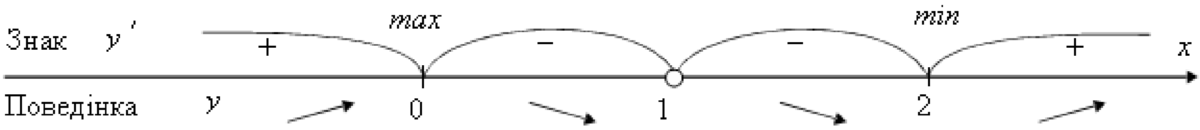


Рис.15.23

$$y_{\max}(0) = 0,\ y_{\min}(2) = 8.$$

5. Проміжки опуклості, угнутості і точки перегину.

$$y'' = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2 - 4x)}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Оскільки $y'' \neq 0$, то точок перегину немає.

При $x > 1$ $y'' > 0$ – графік угнутий, при $x < 1$ $y'' < 0$ – графік опуклий.

6. Асимптоти:

а) вертикальні.

Пряма $x = 1$ є вертикальна асимптота, оскільки

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{2x}{x-1} = -\infty, \text{ а } \lim_{x \to 1+0} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty;$$

б) знайдемо похилі асимптоти $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = 2;\ b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

Отже, $y = 2x + 2$ – є похила асимптота.

7. Будуємо графік заданої функції (рис. 15.24).

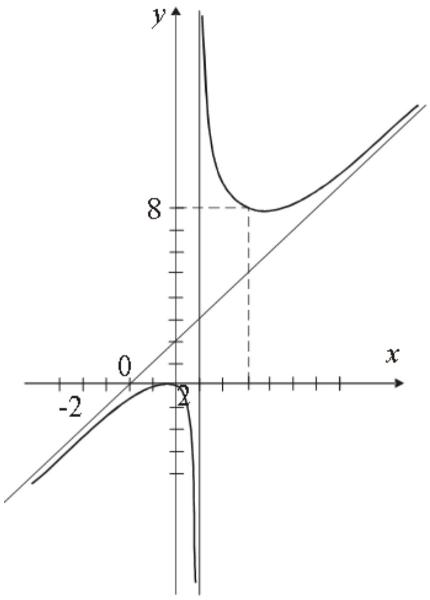


Рис.15.24

Вправи:

Знайти границі функцій за правилом Лопіталя:

15.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-6x+1}{5x^3-2x+4}$.

15.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}$.

15.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}-1}{x^2}$.

15.28. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$.

15.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$.

15.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\ln(e^{x^2}+1)}$.

15.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

15.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

15.33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sqrt{x+1}-1}$.

15.34. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{\sqrt{1+2x}-3^{x-\frac{1}{2}}}$.

15.35. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\ln(x^2-3)}{\ln(x-2)}$.

15.36. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^3 x$.

15.37. $\lim\limits_{x\to +0} xe^{\frac{1}{x}}$.

15.38. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)c\,\mathrm{tg}\,x$.

15.39. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$.

15.40. $\lim\limits_{x\to 0} c\,\mathrm{tg}\,x\cdot\ln(x+e^x)$.

15.41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

15.42. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-c\operatorname{tg}^2 x\right)$.

15.43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{\operatorname{tg}3x}$.

15.44. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$.

15.45. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

15.46. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

15.47. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

15.48. $\lim\limits_{x\to+0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

15.49. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}$.

15.50. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

15.51. $\lim\limits_{x\to+0}(c\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

15.52. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

15.53. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$.

15.54. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{2}{x^2}}$.

15.55. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

15.56. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

Дослідити на монотонність та екстремуми функції:

15.57. $y=2x^3+3x^2-12x+5$.

15.58. $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$.

15.59. $y=x^2(1-x\sqrt{x})$..

15.60. $y=(x+2)^2(x-3)^3$..

15.61. $y=\frac{(x-4)^2}{x^2-2x+5}$.

15.62. $y=x\ln x$.

15.63. $y=x\ln^2 x$.

15.64. $y=\sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

15.65. $y=-x^2\sqrt{x+2}$.

15.66. $y=x+\cos x$.

15.67. $y=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{8}x^2-\frac{x-1}{2}$.

15.68. $y=(x^2-8)e^x$.

15.69. $y=(7-x)\sqrt[3]{x+5}$..

15.70. $y=(x^2-2x)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$.

Знайти найбільше та найменше значення функцій на вказаних проміжках:

15.71. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2,\ [-1;1].$

15.72. $y = \dfrac{x}{2 + x^3},\ [0;3].$

15.73. $y = \dfrac{2x - 1}{2 + x^2},\ [-2;0].$

15.74. $y = \sqrt{100 - x^2},\ [-6;8].$

15.75. $y = \sin 2x - x, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right].$

15.76. $y = \dfrac{2 + x^2}{1 - x^2}, (-\dfrac{1}{2};1).$

15.77. $y = \ln x - 2\,\mathrm{arctg}\, x, (1;+\infty).$

15.78. Різниця двох чисел дорівнює 13. Знайти ці числа, якщо відомо, що їх добуток найбільший.

15.79. Бак з квадратним дном мусить вміщувати 27 л. Які повинні бути його розміри, щоб повна поверхня була найбільшою?

15.80. У заданий шар радіусу R вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.

15.81. Витрати на виробництво x одиниць продукції дорівнюють $d(x)$, ціна продукції $p(x)$. Визначити, яку кількість продукції треба виробити, щоб одержати максимальний прибуток, якщо:

1) $d(x) = 5x^2 + 300x + 5000,$, $p(x) = 580 - 2x$;

2) $d(x) = 10x^2 + 200x + 6000,$, $p(x) = 1000 - 10x.$

15.82. Витрати на виробництво x одиниць товару складають $d(x) = 25x + 200$, ціна товару $p(x) = 100 - \dfrac{x}{50}.$

1) Скільки товару треба виробити, щоб прибуток був максимальним?

2) Скільки товару треба виробити, щоб прибуток був максимальним, якщо з кожної одиниці товару береться податок, який дорівнює 10?

Знайти проміжки опуклості, угнутості та точки перегину наступних функції:

15.83. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$

15.84. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4.$

15.85. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

15.86. $y = x^2 \cdot e^{\frac{2}{x}}.$

15.87. $y = xe^x.$

15.88. $y = x - \ln x.$

15.89. $y = (x-1)^4 - 24x^2 + x.$

Знайти асимптоти графіків функцій

15.90. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+2}.$

15.91. $y = \dfrac{1 - x^3}{(2-x)(1+3x^2)}.$

15.92. $y = \dfrac{2x+1}{x-3}.$

15.93. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}.$

15.94. $y = \dfrac{x^2}{4 - x^2}.$

15.95. $y = \dfrac{x}{x-1} + x.$

15.96. $y = xe^{\frac{1}{x}}.$

15.97. $y = \dfrac{x}{e^x} - 2.$

Дослідити функції та побудувати їх графіки:

15.98. $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$.

15.99. $y = (x+4)^2(x-5).$

15.100. $y = x^4 - 8x^2 - 9$.

15.101. $y = \dfrac{x^2}{x-3}.$

15.102. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}..$

15.103. $y = \dfrac{4x}{x^2+1}.$

15.104. $y = \ln\,(x^2 + 4).$

15.105. $y = xe^{-x}.$

15.106. $y = \sqrt{16 - x^2}.$

15.107. $y = (x+4)\sqrt[3]{x}.$

15.108. $y = x^2 \ln x.$

15.109. $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x.$

15.110. $y = x\,\mathrm{arctg}\, x.$

РОЗДІЛ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Глава 16.
Функція багатьох змінних

16.1. Основні поняття. Область визначення функції

Означення. Функцією кількох змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ будемо називати змінну z, якщо кожному набору значень $(x_1, x_2, ..., x_n)$ із множини X за деяким правилом ставиться у відповідність певне значення z, тобто $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ із множини Z.

Змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають незалежними, z – залежною змінною. Кількість незалежних змінних може бути довільною. Для простоти викладення матеріалу обмежимося розгляданням основних понять та положень функції кількох змінних на прикладі функцій двох змінних $z = f(x; y)$.

Функція двох незалежних змінних може бути задана декількома способами: табличним (за допомогою таблиці значень аргументів та функції), аналітичним (за допомогою однієї або кількох формул) або графічним способом. Як і для функції однієї змінної, функція двох змінних не обов'язково мусить існувати для будь-яких значень x та y.

Означення. Сукупність пар $(x; y)$, для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називається областю визначення цієї функції (або областю існування). Вона позначається $D(f)$.

Якщо для функції однієї змінної $y = f(x)$ областю визначення є інтервал числової осі (скінченний чи нескінченний), то у випадку двох змінних сукупність пар $(x; y)$, які утворюють область існування функції, визначає множину точок площини. Тобто областю визначення функції двох змінних може бути деяка обмежена частина площини або вся площина, якщо область визначення необмежена. Лінію, що обмежує цю область, називають границею області. Точки області, які не належать границі, називають внутрішніми точками області. У випадку, коли границя належить області визначення, маємо замкнену область, якщо границя не належить області, то останню вважають відкритою (незамкненою).

Якщо функція задана аналітично, то під областю визначення мають на увазі область визначеності математичного виразу.

Наведемо ряд прикладів.

Приклад 16.1. Знайти область визначення функцій:

а) $z = 4x - y$, б) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, в) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Розв'язання:

а) для функції $z = 4x - y$ областю визначення є вся площина xOy, тому що вираз має сенс для будь-яких x та y;

б) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Функція існує, якщо $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 16$. Цю нерівність задовольняють усі точки, які знаходяться в межах круга радіуса 4, центр якого міститься у початку координат. Точки, що належать колу, також відповідають області визначення, тобто область замкнена (рис. 16.1).

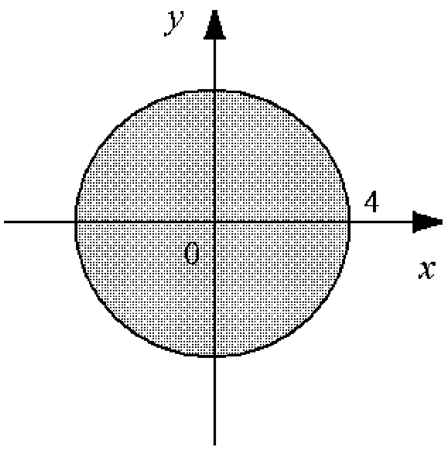


Рис. 16.1

в) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Функція має значення, коли $x^2 + y > 0$ або $y > -x^2$. Остання нерівність визначає частину площини, що розташована поза параболою $y = -x^2$, але точки самої параболи до області визначення не належать.

Це є приклад незамкненої області визначення (рис.16.2).

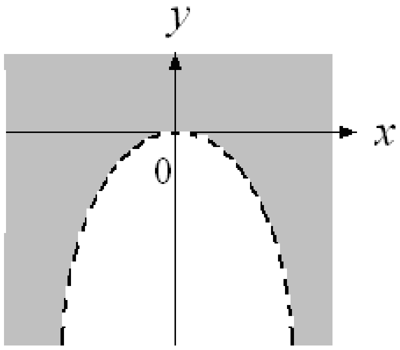


Рис. 16.2

Знаходження області визначення функції складається з таких етапів:

1) складають нерівність (або систему нерівностей), що відповідає області визначення елементарних функцій, які входять до складу аналітичного виразу функції $z = f(x, y)$;

2) за допомогою графічного розв'язання отриманої нерівності (або системи) знаходять область визначення.

Кожна пара значень $(x; y)$ визначає точку M на площині xOy, а значення функції z являє собою аплікату просторової точки $P(x; y; z)$.

Означення. Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають множину точок тривимірного простору $(x; y; z)$, апліката яких пов'язана з абсцисою x та ординатою y функціональним співвідношенням $z = f(x, y)$. Отже, графіком є деяка поверхня в тривимірному просторі.

Наприклад, графіком функції $z = x^2 + y^2$, як відомо з аналітичної геометрії, є параболоїд обертання (рис. 16.3)

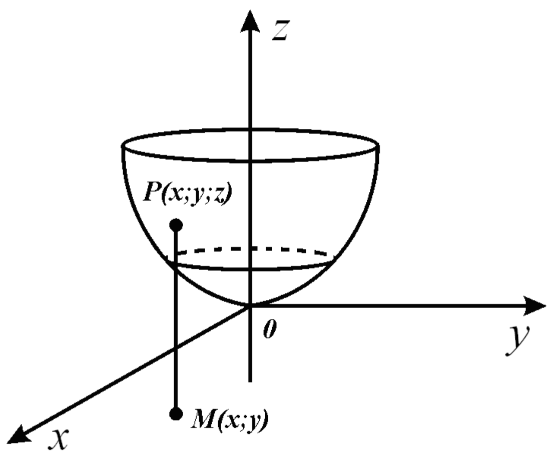


Рис. 16.3

Як правило, побудова графіка є досить складною задачею. Тому дуже часто користуються іншим поняттям для визначення характеру поведінки функції. Таким поняттям є лінії рівня функції.

Означення. Лінією рівня функції двох змінних $z = f\left(x, y\right)$ називають множину точок на площині таку, що в усіх точках цієї лінії значення функції однакове і дорівнює деякій сталій величині C $(z = const = C)$. Число C в цьому випадку називається *рівнем*.

Наприклад, лініями рівня для функції $z = x^2 + y^2$ є сукупність концентричних кіл різного радіуса $z = const$ з центром у початку координат. На рис.16.4 наведені приклади ліній рівня:

$x^2 + y^2 = c = 1$;

$x^2 + y^2 = c = 4$;

$x^2 + y^2 = c = 0$.

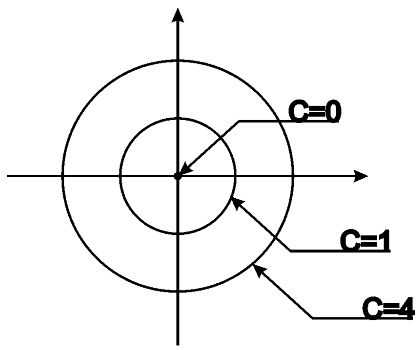


Рис.16.4

Значення константи, яке дорівнює нулю, відповідає випадку виродження лінії в точку (0,0).

16.2. Границя та неперервність функції двох змінних

Розглянемо поняття δ*-околу* точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$, під яким будемо розуміти сукупність усіх точок $\left(x; y\right)$, які знаходяться у межах круга радіуса δ $(\delta > 0)$ з центром у точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$, тобто це множина точок, відстань від яких до заданої точки задовольняє співвідношенню:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 < \delta^2.$$

Поняття границі функції двох змінних складніше, ніж для функції однієї змінної. Це пояснюється тим, що при визначенні границі функції однієї змінної шляхів, якими наближається аргумент до обраного певного значення, тільки два: вздовж осі з одного боку чи іншого. При визначенні границі функції двох змінних шляхів наближення точки $(x; y)$ до точки $(x_0; y_0)$ в декартовій системі координат безліч.

Загальноприйнятою є вимога, що значення границі функції $f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ буде дорівнювати A тільки тоді, коли величина A не буде залежати від шляху, яким відбувається наближення точки $M(x; y)$ до точки $M_0(x_0; y_0)$. Тому сформулюємо наступне означення.

Означення. Стала величина A є границею функції $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ при наближенні точки $M(x; y)$ до точки $M_0(x_0; y_0)$ будь-яким шляхом, якщо для будь-якого наперед заданого скільки завгодно малого додатного числа ε $(\varepsilon > 0)$ існує таке число δ, яке залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), що для всіх точок $M(x, y)$ з δ-околу точки M_0 виконується нерівність:

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon .$$

Позначення границі функції двох змінних таке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A. \tag{16.1}$$

Основні теореми про границі функцій однієї змінної поширюються і на випадок функцій двох змінних. А саме:

1. Границя сталої величини дорівнює самій сталій:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} A = A. \tag{16.2}$$

2. Границя алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left(f(x, y) \pm g(x, y) \right) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \pm \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x, y). \tag{16.3}$$

3. Границя добутку скінченної кількості функцій дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)g(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y). \qquad (16.4)$$

4. Границя частки скінченної кількості функцій дорівнює частці границь цих функцій:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)}. \qquad (16.5)$$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 16.2. Знайти границю функції:

а) $\frac{\sin xy}{x}$, якщо $x\to 0$, $y\to k$;

б) $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, якщо $x\to 0$, $y\to 0$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to k}}\frac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to k}}\frac{y\sin xy}{yx}=\lim\limits_{y\to k} y\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to k}}\frac{\sin xy}{xy}=k\cdot 1=k$;

б) розглянемо різні шляхи наближення точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$.

При наближенні вздовж лінії $y=0$ (вісь Ox) функція $z=0$ (чисельник дорівнює 0, а знаменник – змінний). Тому в цьому напрямку границя функції дорівнює 0. Аналогічно при наближенні вздовж лінії $x=0$ (вісь Oy) границя дорівнює нулю.

Нехай точка $M(x;y)$ наближається до точки $O(0;0)$ по будь-якій прямій $y=kx$. Тоді

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2xkx}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Отримали, що границя *залежить* від кутового коефіцієнта k, тобто від напрямку наближення точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$. Тому в даному випадку границя не існує.

Означення. Функція $f(x,y)$ є неперервною в точці (x_0,y_0), якщо:

1) вона визначена в цій точці та її околі;

2) існує скінченна границя при $x \to x_0$ та $y \to y_0$;

3) ця границя дорівнює значенню функції в точці $(x_0;y_0)$.

Геометричне тлумачення неперервності функції: графік в точці $(x_0;y_0)$ являє собою суцільну нерозшаровану поверхню.

Якщо в будь-якій точці $(x_0;y_0)$ хоча б одна з вимог не виконується, ця точка є точкою розриву.

Означення. Функція $f(x,y)$ називається неперервною в області, якщо вона неперервна в кожній внутрішній точці області.

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в кожній внутрішній точці області та на її границі, то така функція є неперервною на замкненій області.

Для функцій кількох змінних виконуються теореми про неперервність функції: алгебраїчне додавання, перемноження та відношення функцій, неперервних у деякій точці $M_0(x_0;y_0)$, є також неперервною функцією в цій точці (для відношення необхідно, щоб в цій точці знаменник не дорівнював нулю). Виконується також теорема про неперервність складеної функції.

Властивості функцій кількох змінних, неперервних у замкненій області, аналогічні властивостям функцій однієї змінної, неперервній на відрізку. Нагадаємо ці властивості.

Властивість 1. Якщо функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в замкненій області $D(f)$, то усередині цієї області знайдеться хоча б одна точка $(x_0;y_0)$, така, що для всіх інших точок області виконується співвідношення

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0),$$

і хоча б одна точка $(\overline{x}_0,\overline{y}_0)$ така, що для всіх інших точок буде виконуватися:

$$f(\overline{x}_0,\overline{y}_0) \le f(x,y).$$

Значення функції $f(x_0, y_0) = M$ є *найбільшим значенням* функції $f(x, y)$ в області $D(f)$, а значення $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = m$ - *найменшим значенням*.

Властивість 2. Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна в замкненій області $D(f)$ та якщо M та m – відповідно найбільше та найменше значення функції $f(x, y)$ в цій області, то існує хоча б одна точка $M_0(x_0; y_0)$, яка належить цій області, для якої виконується нерівність:

$$m \le f(x_0, y_0) \le M .$$

16.3. Прирости функції двох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$. Виберемо довільну точку $M_0(x_0; y_0)$ із області її існування.

Зафіксуємо значення змінної $y = y_0$ та надамо незалежній змінній x приріст Δx. Тоді залежна змінна z отримає приріст, який називають частинним приростом z *по* x в точці $M_0(x_0, y_0)$ і позначають $\Delta_x z$. Іншими словами, частинний приріст – це різниця між значеннями функції в точці $M(x_0 + \Delta x; y_0)$ та у вихідній точці $M_0(x_0, y_0)$. Він відповідно дорівнює:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \qquad (16.6)$$

Аналогічно, якщо зафіксувати змінну x $(x = x_0)$ і надати приріст незалежній змінній y, тобто з точки $M_0(x_0; y_0)$ перейти у точку $M(x_0; y_0 + \Delta y)$, отримаємо частинний приріст z *по* y, який відповідно дорівнює

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (16.7)$$

Якщо незалежній змінній x надати приріст Δx та, одночасно, незалежній змінній y надати приріст Δy і розглянути різницю між значеннями функції у точці $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ та в точці $M_0(x_0; y_0)$, отримаємо повний приріст функції в точц*і* M_0, який позначається:

$$\Delta z = f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right). \qquad (16.8)$$

Слід зазначити, що повний приріст функції не дорівнює сумі частинних приростів, тобто $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Наочно це можна показати на прикладі. Нехай $z = xy$.

Знайдемо частинні прирости та повний приріст.

$$\Delta_x z = \left(x+\Delta x\right)y - xy = \Delta x y; \qquad \Delta_y z = x\left(y+\Delta y\right) - xy = x\Delta y;$$
$$\Delta z = \left(x+\Delta x\right)\left(y+\Delta y\right) - xy = \Delta x y + x\Delta y + \Delta x \Delta y;$$

Звідси видно, що $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

16.4. Частинні похідні

Означення. Частинною похідною функції $z = f\left(x, y\right)$ *за змінною* x називається границя відношення частинного приросту функції за відповідною змінною $\Delta_x z$ до приросту самої незалежної змінної Δx за умови, що приріст аргументу наближається до нуля ($\Delta x \to 0$).

Частинна похідна за змінною x від функції $z = f\left(x, y\right)$ має ряд позначень: $z'_x,\ f'_x\left(x, y\right), \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Таким чином, згідно означення можна записати

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}. \qquad (16.9)$$

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y від функції $z = f\left(x, y\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}. \qquad (16.10)$$

Ці похідні є аналогами похідних функцій однієї змінної, але істотно відрізняються від них тим, що як сама функція, так і її похідні залежать від двох змінних. З того, що частинні прирости були отримані за припущенням, що одна з незалежних змінних залишається сталою, випливає, що правила визначення частинних похідних не відрізняються від правил диференціювання функцій однієї змінної. Зауважимо, що при знаходженні частинних похідних інша незалежна змінна (y при визначенні похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ та x при визначенні $\frac{\partial z}{\partial y}$) вважається сталою величиною і диференціювання відбувається з використанням таблиці похідних елементарних функцій.

Розглянемо ряд прикладів на знаходження частинних похідних.

Приклад 16.3. Знайти частинні похідні функції $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$.

Розв'язання.

Диференціюємо задану функцію спочатку по x, вважаючи при цьому змінну y сталою, а потім по y, вважаючи сталою змінну x, за правилом диференціювання складеної функції. Отримаємо результат:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2+xy+y^2\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+y^2\right)=\frac{1}{x^2+xy+y^2}(2x+y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}(x+2y).$$

Частинні похідні від функції $z=f(x,y)$ є також функціями незалежних змінних x та y, і може постати потреба в їх повторному диференціюванні. Як відомо, другою похідною є перша похідна від першої похідної. Тому після диференціювання частинних похідних ми отримаємо частинні похідні другого порядку функції $z=f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x'=z''_{xx}$$

– друга частинна похідна по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y'=z''_{yy}$$

– друга частинна похідна по y;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y = z''_{xy}$$

– частинна похідна по y від похідної по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_x = z''_{yx}$$

– частинна похідна по y від похідної по x.

Означення. Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають мішаними похідними.

Для двох частинних похідних першого порядку можна, відповідно, отримати чотири похідні другого порядку. Для мішаних похідних справедлива наступна теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ визначені та неперервні в деякій області, то мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \qquad (16.11)$$

Таким чином, функція $z = f(x, y)$ двох змінних має тільки три різних частинних похідних другого порядку.

Перевіримо справедливість останньої теореми на прикладі.

Приклад 16.4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x + 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y^2 e^x + 2xy^3\right)'_y = 2ye^x + 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2ye^x + 3x^2 y^2\right)'_x = 2ye^x + 6xy^2.$$

Таким чином, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

16.5. Частинні диференціали та повний диференціал. Використання в наближених обчисленнях

За визначенням повного приросту функції $z = f(x, y)$ при переході від точки (x_0, y_0) до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ маємо

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Зупинимося на аналізі структури приросту функції. Якщо його можна зобразити у вигляді суми лінійної (відносно Δx та Δy) частини та "добавки" (доданків більш високого порядку)

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{16.12}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – нескінчені малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$; A, B – деякі константи, то функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою, а вираз $A\Delta x + B\Delta y$ – її повним диференціалом, який позначають df або dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Зміст визначення диференційованості розкривається, якщо перетворити рівняння для повного приросту функції:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)= f\left(x_0, y_0\right)+\Delta f\left(x_0, y_0\right)=$$
$$= f\left(x_0, y_0\right)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y.$$

Звідси, якщо Δx та Δy малі, то значення функції в точці $\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)$ приблизно дорівнює значенню функції в точці $\left(x_0, y_0\right)$ плюс лінійний приріст $A\Delta x+B\Delta y$. Отримаємо наближене значення функції:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0, y_0\right)+A\Delta x+B\Delta y= f\left(x_0, y_0\right)+df\ . \qquad (16.13)$$

Обчислимо коефіцієнти A і B.

Для визначення коефіцієнта A припустимо $\Delta y=0$ і запишемо вираз у такому вигляді:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)=A\Delta x+\varepsilon_1\Delta x\,.$$

Поділивши обидві частини рівності на Δx, перейдемо до границі за умовою $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1\Delta x\,.$$

Другий доданок правої частини дорівнює нулю і маємо: $A=\left(\partial f/\partial x\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$. Аналогічно можна знайти (припустивши $\Delta x=0$ і $\Delta y\to 0$), що $B=\left(\partial f/\partial y\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$. Таким чином отримали остаточний вираз для повного приросту функції $z= f\left(x, y\right)$ в точці $\left(x_0, y_0\right)$:

$$\Delta z=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\Delta x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\,,\quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{– нескінченні малі}).$$

Означення. Вираз $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ утворює головну частину повного приросту Δz, яка лінійно залежить від приросту аргументів і називається повним диференціалом функції $z=f\left(x,y\right)$.

Оскільки для незалежних змінних їх прирости і диференціали співпадають, тобто $\Delta x=dx,\Delta y=dy$, остаточно формула для повного диференціала має вигляд $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$. Кожний з доданків останньої формули є головною частиною приросту функції, що лінійно залежить від приросту даного аргументу, за умови, що інші аргументи є сталими. Отже, кожний з доданків є частинним диференціалом за даним аргументом: $dz=d_xz+d_yz$, де $d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx$ – частинний диференціал функції z за аргументом x; $d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dy$ – частинний диференціал функції z за аргументом y. Отже:

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}dy+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

або наближено

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}\Delta y. \qquad (16.14)$$

Основною властивістю диференціала є інваріантність форми першого диференціала, тобто рівність $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ виконується незалежно від того, чи є змінні x та y незалежними або самі є функціями інших аргументів. Останню формулу зручно використовувати для наближеного обчислення значення функції в точці.

Приклад 16.5. Обчислити наближено $\sqrt{\left(4,05\right)^2+(2,93)^2}$.

Розв'язання. Припустимо, що знаємо значення функції $z=f\left(x,y\right)$ в деякій точці $\left(x_0,y_0\right)$, а необхідно знайти її значення в точці, близькій до даної $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Розглянемо функцію $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Близькими до заданих значень аргументів та такими, що обчислення буде достатньо простим, є значення $x_0=4$, $y_0=3$, $f(x_0,y_0)=\sqrt{16+9}=5$. Тоді $x=x_0+\Delta x=4{,}05$, а $y=y_0+\Delta y=2{,}93$. Звідки знаходимо $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=-0{,}93$. Залишилось знайти диференціал у точці (x_0,y_0). Спочатку визначимо значення похідної:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

та обчислимо повний диференціал:

$$dz\Big|_{\substack{x=4\\y=3}}=\frac{4}{\sqrt{16+9}}\cdot 0{,}05-\frac{3}{\sqrt{16+9}}\cdot 0{,}07=-0{,}002.$$

Звідки $z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}\approx 5-0{,}002=4{,}998.$

Розрахунок на калькуляторі дав такий результат: 4,9987398. Як видно, похибка складає 0,0007398.

Запитання для самодіагностики

1. Що розуміють під функцією кількох змінних?
2. Що таке область визначення функції двох змінних?
3. Що таке лінія рівня?
4. Що називається границею функції двох змінних?
5. Що таке частинний приріст функції за x?
6. Що таке частинний приріст функції за y?
7. Як знайти частинну похідну за x?
8. Як знайти частинну похідну за y?
9. Що називається повним диференціалом?
10. Записати формулу, яка застосовується в наближених обчисленнях.

11. Що називається частинними похідними другого порядку від функції з двома невідомими?

12. Як обчислюється z''_{xx}?

13. Як обчислюється z''_{xy}, z''_{yx}?

14. Як обчислюється z''_{yy}?

Приклади і вправи

Приклади:

16.6. Знайти область визначення функції $z = \log_{\sqrt{3}}(y - x^2)$.

Розв'язання.

Функція z визначена за означенням логарифма, коли $y - x^2 > 0$, тобто при $y > x^2$. Цю нерівність задовольняють точки, що розташовані усередині параболи $y = x^2$ (рис.16.5).

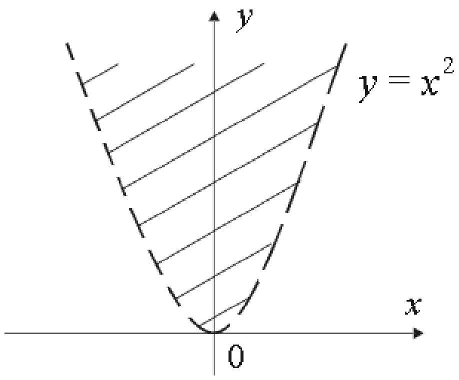


Рис.16.5

16.7. Знайти область визначення функції:

1) $z = \arcsin(x + y - 1)$.

Розв'язання.

Як відомо, область визначення функції $\arcsin x$ є проміжок $[-1;1]$. Тому для даної функції маємо нерівність

$$-1 \le x + y - 1 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge 0 \\ x + y \le 2 \end{cases}.$$

Рівняння $x+y=0$ та $x+y=2$ визначають на площині дві паралельні прямі.

Аналізуючи нерівності, зазначаємо, що область визначення функції $z=\arcsin(x+y-1)$ є множина точок площини, що розташовані між прямими $y=-x$ і $y=-x+2$, включаючи точки на прямих (рис. 16.6).

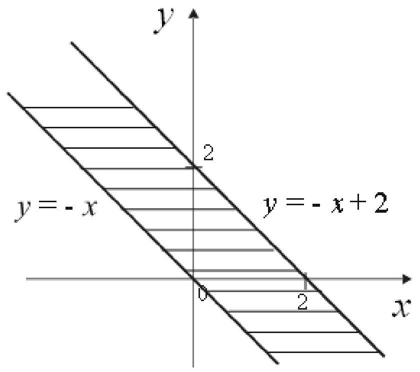


Рис.16.6

2) $z=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(y-x^2)}$.

Розв'язання.

Згідно з умовою прикладу область визначення даної функції зводиться до графічного розв'язання системи нерівностей

$$\begin{cases} 4-x^2-y^2\ge 0 \\ y-x^2>0 \\ \ln(y-x^2)\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y>x^2 \\ y-x^2\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y>x^2 \\ y\ne x^2+1 \end{cases}.$$

Будуємо графіки функцій $x^2+y^2=4$ (коло з центром у початку координат і радіусом $r=2$); $y=x^2$ і $y=x^2+1$ (параболи) і визначаємо область, де виконуються всі нерівності (рис. 16.7). З рисунка видно, що область визначення даної функції – множини точок площини між колом $x^2+y^2=4$ і параболою $y=x^2$, виключаючи точки, що лежать на параболах $y=x^2$ і $y=x^2+1$.

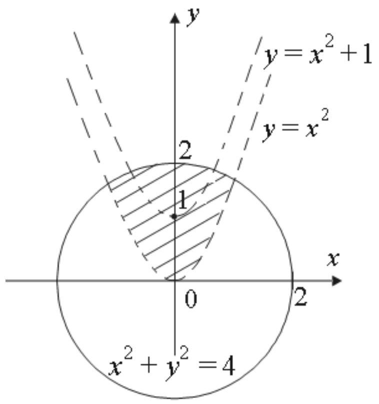


Рис. 16.7

16.8. Знайти частинні похідні функції:

1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу похідної функції $z = \operatorname{arctg} u$, де u – складний аргумент.

$$z' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

У даному прикладі

$$z'_x = \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{x}}{y})^2} \cdot (\frac{\sqrt{x}}{y})'_x = \frac{1}{1+\frac{x}{y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}y} = \frac{y}{2(y^2+x)\sqrt{x}},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{x}}{y})^2} \cdot (\frac{\sqrt{x}}{y})'_y = \frac{1}{1+\frac{x}{y^2}} \cdot (-\frac{\sqrt{x}}{y^2}) = -\frac{\sqrt{x}}{y^2+x};$$

2) $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$.

Розв'язання.

Як відомо, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ Застосуємо це:

$$u'_x = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} \cdot (\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z)'_x =$$

$$= \frac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}.$$

Аналогічно маємо:

$$u'_y = \frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}; \quad u'_z = \frac{\sin 2z}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}.$$

16.9. Знайти повний диференціал функції $z = x^y + y^x$ в точці $M(1;1)$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x + xy^{x-1}.$$

У точці $M(1;1)$ $\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = 1$. Тому $dz = dx + dy$.

16.10. Обчислити наближено $(1,97)^{3,02}$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $z = x^y$ і точку $M(2;3)$. Е цій точці $z = 2^3 = 8$. За умовою треба обчислити значення функції $z = x^y$ в точці $(1,97;3,02)$, тобто $\Delta x = -0,03$, а $\Delta y = 0,02$. Спочатку обчислимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(2;3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 3 \cdot 2^2 = 12; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2^3 \cdot \ln 2 \approx 8 \cdot 0,603 = 4,824.$$

Таким чином, маємо

$$(1,97)^{3,02} \approx 8 + 12 \cdot (-0,03) + 4,824 \cdot 0,02 = 7,736.$$

16.11. Знайти частинні похідні другого порядку для функції

$z = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4$.

Розв'язання.

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y - 8y^3.$$

Далі знаходимо похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 6xy^2)'_x = 12x^2 + 6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 6xy^2)'_y = 12xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (6x^2y - 8y^3)'_x = 12xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (6x^2y - 8y^3)'_y = 6x^2 - 24y^2.$$

Як видно з розв'язання, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

16.12. Показати, що функція $z = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{\frac{x}{y}})'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (e^{\frac{x}{y}})'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y})'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) \cdot \frac{1}{y} + e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{1}{y^2}).$$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) + e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{1}{y}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) + e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{1}{y}).$$

Як видно, $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

16.13. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ для функції $z = \sin xy$.

Розв'язання.

Знаходимо наступні частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\sin(xy))'_x = y\cos(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (y\cos(xy))'_x = -y^2\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (-y^2\sin(xy))'_y = -2y\sin xy - xy^2\cos(xy).$$

Вправи:

Знайти область визначення функцій:

16.14. $z = \sqrt{2x - y}$.

16.15. $z = \log_2(x + y)$.

16.16. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

16.17. $z = \ln(4 - x^2)$..

16.18. $z = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1}$.

16.19. $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

16.20. $z = \log_{1,7}(xy)$.

16.21. $z = \sqrt{x - 1} - \sqrt{2 - y}$.

16.22. $z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{4 - y^2}$.

16.23. $z = \arccos\left(2 - x^2 - y^2\right)$.

16.24. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

16.25. $z = \sqrt{x} + \arccos y$.

16.26. $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

16.27. $z = \ln\left(y^2 - 2x + 6\right)$.

16.28. $z = \sqrt{y \sin x}$.

16.29. $z = \ln(\cos x)$.

16.30. $z = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\log_2(x + y)}$.

16.31. $z = \sqrt{x + y}\ln\left(x^2 - y^2\right)$.

16.32. $z = \sqrt{3x + 2y - 1} + \sqrt{3 - 3x - 2y}$.

16.33. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - \log_3(3 - 3x - 2y)$.

16.34. $z = \sqrt{y - x^2 + 2x + 3} + \ln(x - y + 1)$.

16.35. $z=\sqrt{y-x^2+4x-3}-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+4x+3-y\right)$.

16.36. $z=\sqrt{1-xy}+3\sqrt{x+y}-2\sqrt{x-y}$.

16.37. $z=\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{y-x^2+3}}+\ln\left(1-|x|\right)$.

Знайти частинні похідні наступних функцій:

16.38. $z=x^2y+3y^2+5x-\sqrt{2}$.

16.39. $z=(2y^3-6xy^2+3x^2)^5$..

16.40. $z=\sqrt{4-x^2-y^3}$.

16.41. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

16.42. $z=e^{5x+3x^3y^2}$.

16.43. $z=e^{x-y}\cdot(x^2+y^2)$.

16.44. $z=(x^2+y^2)\cos\dfrac{y}{x}$..

16.45. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$..

16.46. $z=2^{\sin 3xy}$.

16.47. $z=\cos^3(3x^2-5xy)$..

16.48. $z=x^{\sin y}$.

16.49. $z=(x^2+2x)^{2y-3}$..

16.50. $z=\sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{y}{x}$.

16.51. $z=\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$.

16.52. $z=\ln\ tg\dfrac{y}{x}$.

16.53. $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$..

16.54. $z=\dfrac{\cos(2y^3-3)}{x}$..

16.55. $z=3x^2ye^{-xy}$.

16.56. $z=\ln\ tg\dfrac{\sqrt{y}}{x}$.

16.57. $z=e^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

16.58. $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{-\frac{x}{y}}$.

16.59. $u=x\sqrt[3]{z}+zy+\dfrac{y}{\sqrt[4]{x}}$.

16.60. $u=arctg\dfrac{xy}{z^2}$.

16.61. $u=x^2y\sin\left(xyz\right)$.

16.62. $u=\left(\sin x\right)^{yz}$.

16.63. $u=e^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

16.64. Довести, що функція $z=\ln(x^2+y^2)$ задовольняє умову

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

16.65. Довести, що функція $z=arctg\,\frac{y}{x}$ задовольняє умову

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

16.66. Довести, що функція $z=x^{y}$ задовольняє умову

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

16.67. Довести, що функція $z=\sqrt{x}\cos\frac{x}{y}$ задовольняє умову

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}.$$

16.68. Довести, що функція $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє умову

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

16.69. Довести, що функція $z=y\ln(x^2-y^2)$ задовольняє умову

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

Знайти повні диференціали функцій:

16.70. $z=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$.

16.71. $z=e^{xy}\left(x+y\right)$.

16.72. $z=\ln\left(x^3+y^3-3xy\right)$.

16.73. $z=\sqrt[5]{x^5-y^5}$.

16.74. $z=\sqrt{\ln\left(xy\right)}$.

16.75. $u=arctg\left(x-y\right)^{z}$.

Обчислити значення повних диференціалів:

16.76. $z=\dfrac{y}{y-x}$ при $x=1$, $y=2$, $\Delta x=\dfrac{1}{2}, \Delta y=-\dfrac{2}{3}$.

16.77. $z=\sqrt{x^2+y^2}-x-y$ при $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=-0,2$.

16.78. $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ при $x=3$, $y=4$, $z=5$, $\Delta x=-0,1$, $\Delta y=0,3$, $\Delta z=0,2$.

16.79. Обчислити наближено значення $1,03^2\cdot 0,98^4$, застосовуючи значення функції $z=x^2y^4$ при $x=1$, $y=1$.

16.80. Знайти наближено значення $\ln(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1)$,, застосовуючи значення функції $z=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$ при $x=1$, $y=1$.

16.81. Знайти наближено значення $\sqrt[3]{1,02^2+0,05^2}$, застосовуючи значення функції $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ при $x=1$, $y=0$.

16.82. Знайти наближено значення $\sqrt{1,04^{1,09}+\ln 1,02}$, застосовуючи значення функції $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ при $x=1$, $y=2$, $z=1$.

Знайти частинні похідні другого порядку:

16.83. $z=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3$.

16.84. $z=\dfrac{x}{y^2}$.

16.85. $z=x\sin(x+y)$.

16.86. $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$.

16.87. $z=\ln(x+y^2)$..

16.88. $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

16.89. $z=\sin^2(ax+by)$.

16.90. Для функції $z=e^{xy^2}$ знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

16.91. Для функції $z=e^x(\cos y+\cos x)$ показати, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

16.92. Довести, що функція $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ задовольняє умову

$$x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

16.93. Для функції $u=\dfrac{x^4}{y^2z^3}$ знайти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

Глава 17
Похідна за напрямом. Градієнт функції. Локальний і умовний екстремуми

17.1. Похідна за напрямом

Нехай функція $z = f(x, y)$ існує в певному околі точки $M(x; y)$). Розглянемо напрям, який задано вектором $\vec{S}(\cos\alpha, \cos\beta)$, де $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Вектор $\vec{S}$ називається напрямляючим вектором. Перейдемо вздовж цього напрямку у точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$.

У цьому випадку функція отримає приріст

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Вектор $\overrightarrow{\Delta S}$, координатами якого є прирости аргументів, назвемо вектором приростів: $\overrightarrow{\Delta S} = (\Delta x; \Delta y)$. Величину вектора приростів, яку позначимо ΔS, будемо визначати за правилом:

Приріст $\Delta S = \left|\overrightarrow{\Delta S}\right|$, якщо напрямок $\vec{S}$ співпадає із напрямком $\vec{S}_0$, $\Delta S = -\left|\overrightarrow{\Delta S}\right|$, якщо напрямок $\vec{S}$ протилежний напрямку $\vec{S}_0$. Модуль вектора приростів дорівнює: $\left|\overrightarrow{\Delta S}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Означення. Границя відношення $\dfrac{\Delta z}{\Delta S}$ за умови, що $\Delta S \to 0$, називається похідною (від) функції $z = f(x, y)$ *за напрямом* $\vec{S}$ та позначається символом $\dfrac{\partial z}{\partial S}$. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S}.$$

Оскільки $\vec{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, то для визначення похідної за напрямом маємо формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \qquad (17.1)$$

17.2. Градієнт функції та лінії рівня

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, яка визначена на області D і є диференційованою у точці $M(x, y) \in D$.

Означення. Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні першого порядку від функції z у цій точці. Градієнт позначається символом $\operatorname{grad} z$. Отже, за одиничним базисом можна записати:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}, \tag{17.2}$$

або у координатній формі: $\operatorname{grad} z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y} \right)$.

Виберемо в точці $M(x, y)$ довільний напрям, який визначається одиничним вектором $\vec{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Утворимо скалярний добуток градієнта функції в даній точці та напрямного вектора $\vec{S}$:

$$\operatorname{grad} z \cdot \vec{S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Як видно, він дорівнює похідній за напрямом від цієї функції:

$$\operatorname{grad} z \cdot \vec{S} = \frac{\partial z}{\partial S}.$$

Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial S} = |\operatorname{grad} z| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi, \tag{17.3}$$

де φ - кут між векторами $\operatorname{grad} z$ та $\vec{S}$. З останьої формули випливає, що похідна за напрямом у даній точці сягає найбільшого значення, якщо напрям вектора $\vec{S}$ збігається за напрямом з $\operatorname{grad} z$. Отже, ми довели одну з важливих властивостей градієнта: градієнт функції визначає напрям, у якому функція зростає з максимальною швидкістю. Ще однією властивістю градієнта, яка допомагає у дослідженні функції на екстремум, є те, що градієнт у обраній точці утворює прямий кут з дотичною до лінії рівня функції, що проходить через цю точку.

Приклад 17.1. Задано функцію $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$:

а) визначити її градієнт у точці $M_0(1;\,2)$;

б) довести, що градієнт перпендикулярний до лінії рівня, яка проходить через цю точку;

в) побудувати градієнт та лінію рівня функції $z = f(x, y)$, попередньо перетворивши рівняння кривої II-го порядку до канонічного вигляду.

Розв'язання:

а). визначимо частинні похідні першого порядку від функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6$$

та обчислимо їх у точці $M_0(1;\,2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1,\\ y=2}} = 2\cdot 1 - 4 = -2; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1,\\ y=2}} = 2\cdot 2 + 6 = 10.$$

Отже, можемо записати, що $\operatorname{grad} z = -2\vec{i} + 10\vec{j}$;

б) знайдемо рівняння лінії рівня, яка проходить через точку M_0(1;2). Визначимо стале значення функції z_0, яке відповідає цій лінії рівня: $z_0 = 1^2 + 2^2 - 4\cdot 1 + 6\cdot 2 = 13$. Рівняння лінії рівня $z_0 = 13$ має вигляд: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 13$. Перетворимо його до канонічного вигляду:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 4 - 9 = 13 \quad \text{або} \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 26.$$

Отже, це коло з центром у точці з координатами $(2; -3)$, радіус якого дорівнює $R = \sqrt{26}$. Щоб довести, що градієнт функції є перпендикулярним до лінії рівня, визначимо кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня у точці $M_0(1;\,2)$.

Рівняння лінії рівня визначає функцію, що задана неявно. За формулою похідної від такої функції маємо:

$$2x+2yy'-4+6y'=0, \text{ або } y'=\left.\frac{2-x}{y+3}\right|_{x=1,y=2},$$

$y'=\dfrac{1}{5}$ – кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня функції z.

Кутовий коефіцієнт $\operatorname{grad} z(-2;10)$ дорівнює(-5). Тоді добуток кутових коефіцієнтів дорівнює (-1). Отже, градієнт функції у точці M_0 є перпендикулярним до дотичної лінії рівня в обраній точці;

в) на рис. 17.1 зображені лінія рівня функції $z=x^2+y^2-4x+6y$ при $z_0=13$ та градієнт у точці $M_0(1;\,2)$.

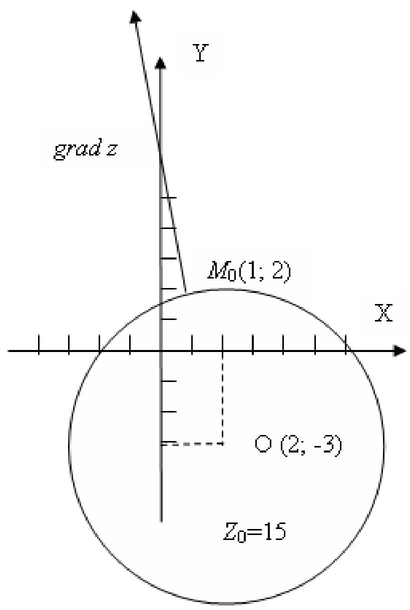


Рис.17.1

17.3. Локальний екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена на множині $D\subset R^2$ та точка $M_0(x_0;y_0)$ належить цій множині. Кажуть, що функція $z=f(x,y)$ у точці M_0 має локальний максимум (мінімум), якщо навколо цієї точки існує такий δ-окіл, що для всіх точок цього околу виконується нерівність:

$$f(x,y) \le (\ge) f(x_0, y_0).$$

Для позначення локального максимуму та мінімуму існує загальний термін – локальний екстремум або просто екстремум.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо функція двох змінних $z = f(x,y)$ диференційована в точці $M_0(x_0; y_0)$ і має в цій точці екстремум, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0 \end{cases}. \tag{17.4}$$

Точки, у яких виконується ця умова, називаються стаціонарними і можуть бути точками екстремуму. Як і для функції однієї змінної, виконання цієї умови є необхідною умовою екстремуму, однак не є достатньою. Розв'язавши систему цих рівнянь, визначимо координати точок, у яких функція може мати екстремум.

Для того щоб визначити достатню умову екстремуму, розглянемо визначник, елементи якого є похідні другого порядку від функції $z = f(x,y)$. Він позначається символом Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Теорема (достатня умова екстремуму). Якщо для функції $z = f(x, y)$ в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$ та у деякому її околі існують усі частинні похідні другого порядку від цієї функції та визначник Δ у цій точці додатний, то функція $z = f(x, y)$ сягає в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремуму. При цьому, якщо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, то у стаціонарній точці функція має мінімум, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, то максимум. Отже, достатню умову екстремуму для функції двох змінних слід записати у вигляді:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0. \qquad (17.5)$$

Якщо у стаціонарній точці визначник від'ємний, то функція локального екстремуму в цій точці не має. Якщо у стаціонарній точці визначник дорівнює нулю, то наведена вище теорема не відповідає на питання про існування екстремуму, і потрібні додаткові дослідження.

Приклад 17.2. Дослідити функцію $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$ на локальний екстремум.

Розв'язання.

За необхідною умовою екстремуму перевіримо, чи має функція стаціонарні точки. Отже, визначимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6.$$

Поклавши ці похідні рівними нулю, отримаємо систему рівнянь для обчислення координат стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ 2y_0 + 6 = 0 \end{cases}.$$

Звідси дістанемо, що стаціонарна точка $M_0(x_0; y_0)$ має координати:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

За достатньою умовою перевіримо, чи є ця точка точкою локального екстремуму. Для цього знайдемо всі похідні другого порядку і обчислимо їх значення у стаціонарній точці:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Тепер обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Виявилось, що визначник є додатним, отже, функція у стаціонарній точці сягає екстремуму. Оскільки $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$, то має місце локальний мінімум. Обчислимо значення функції у точці $M_0(2,-3)$:

$$z_{\min} = 2^2 + (-3)^2 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 27.$$

Приклад 17.3. Дослідити функцію $z = x^2 - 4y^2 - 4x + 8y$ на локальний екстремум.

Розв'язання.

Визначимо перші похідні функції і обчислимо координати стаціонарної точки з системи рівнянь, яку отримали у відповідності із вимогами необхідної умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -8y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ -8y_0 + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}.$$

За достатньою умовою екстремуму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8;, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 < 0.$$

Оскільки визначник від'ємний, то функція не має екстремуму.

17.4. Умовний екстремум

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D та точка $M_0(x_0; y_0)$ належить цій області. При цьому на незалежні змінні накладена певна умова: $\varphi(x, y) = 0$.

Означення. Точка $M_0 \in X$ називається точкою умовного локального максимуму (мінімуму) функції $z = f(x, y)$, якщо навколо цієї точки існує такий δ-окіл, що для всіх точок цього околу виконується нерівність:

$$f(x, y) \le (\ge)\, f(x_0, y_0). \tag{17.6}$$

У цьому випадку можна також користуватися терміном *умовний екстремум.*

Якщо рівняння $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно однієї із змінних, тобто представити в явному вигляді цю змінну як функцію другої змінної, то підставивши розв'язок рівняння зв'язку у вираз для функції $z = f(x, y)$, отримаємо нову функцію, яка залежить тільки від однієї змінної. Локальний екстремум цієї нової функції і буде умовним локальним екстремумом вихідної функції. Тобто задача пошуку умовного екстремуму зводиться до розв'язання задачі про визначення локального екстремуму функції однієї змінної, тобто, до пошуку безумовного екстремуму.

Приклад 17.4. Знайти умовний екстремум функції $s = xy$, якщо $x + y = 1$.

Розв'язання.

У даному випадку можна з рівняння зв'язку одну змінну виразити через іншу й підставити у функцію, а потім дослідити її на звичайний екстремум. Отже, з рівняння зв'язку маємо $y = 1 - x$. Підставляємо у функцію $z = x(1 - x)$. Дістали функцію від однієї змінної. Визначаємо похідну $dz/dx = 1 - 2x$. Критична точка $x = 1/2$. Ця точка є точкою максимуму (похідна змінює знак з «+» на «–»). Отже, при $x = 1/2;\ y = 1/2$. Знаходимо значення функції:

$$z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Якщо рівняння зв'язку не можна розв'язати відносно деякої змінної, то щоб знайти умовний екстремум функції $z = f(x, y)$ при наявності співвідношення $\varphi(x, y) = 0$, складають так звану функцію Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{17.7}$$

де λ – невизначений постійний множник, і шукають екстремум цієї допоміжної функції. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{17.8}$$

З цієї системи знаходять x, y і λ. Для функції від двох змінних, щоб перевірити, який екстремум у критичній точці, можна використати таке правило. Складаємо й обчислюємо визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}, \tag{17.9}$$

де його елементами є значення частинних похідних у критичній точці. Якщо $\Delta > 0$, то маємо умовний максимум, а якщо $\Delta < 0$, то маємо умовний мінімум. Доведення достатньої умови виходить за межі програми.

Приклад 17.5. Знайти екстремум функції $f = x + y$ за умови, що $9x^2 + 4y^2 = 13$.

Розв'язання. Утворимо функцію Лагранжа

$$F(x, y) = x + y + \lambda \cdot (9x^2 + 4y^2 - 13)$$

і знайдемо її частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 18\lambda x; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 8\lambda y.$$

Враховуючи рівняння зв’язку, одержуємо систему рівнянь для визначення координат стаціонарних точок функції Лагранжа:

$$\begin{cases} 1 + 18\lambda x = 0 \\ 1 + 8\lambda y = 0 \\ 9x^2 + 4y^2 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{18\lambda} \\ y = \dfrac{-1}{8\lambda} \\ \dfrac{9}{324\lambda^2} + \dfrac{4}{64\lambda^2} - 13 = 0 \end{cases}.$$

Розв’язавши останнє рівняння системи, знайдемо, що $\lambda = \pm\dfrac{1}{12}$. Отже, для функції $F(x, y)$ маємо стаціонарці точки $M_1\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$ та $M_2\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right)$. Відповідно, для вихідної функції точки M_1 та M_2 можуть бути точками умовного екстремуму. Для перевірки виконання достатньої умови екстремуму обчислимо визначник Δ у точках M1 і M2. В точці M1 $\Delta = -312 < 0$, отже функція досягає мінімуму; $f_{\min} = -13/6$. В точці M2 $\Delta = 312 > 0$, отже в цій точці функція досягає максимуму: $f_{\max} = 13/6$.

17.5. Найменше та найбільше значення функції на замкненій області

При визначенні екстремуму функції кількох змінних, яка неперервна на певній замкненій множині, виникає питання про обчислення найбільшого та найменшого значення, яке може набувати функція на цій множині. У загальному вигляді питання про глобальний мінімум та глобальний максимум є досить складним, оскільки функція може досягати цих значень на границі області, що ускладнює дослідження. Існують спеціальні прийоми, які застосовуються при розв’язанні таких задач. Розглянемо їх на прикладі функції двох змінних.

При визначенні найбільшого та найменшого значень функції на замкненій області можна дотримуватися такої схеми:

1) знайти стаціонарні точки функції і перевірити, чи належать вони тій замкненій області, для якої проводиться дослідження;

2) знайти найбільше та найменше значення функції на кривій, що описує межу області;

3) обчислити значення функції у знайдених стаціонарних точках на замкненій області та її межі;

4) порівняти знайдені значення функції та вибрати з них найменше та найбільше.

Приклад 17.6. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ на області $x^2 + y^2 \le 1$.

Розв'язання.

Відповідно рівнянню область визначення являє собою круг радіуса 1, центр якого знаходиться у точці $O\,(0;0)$.

Спочатку перевіримо, чи має функція стаціонарні точки, які належать області, що визначена вихідною нерівністю. Отже, знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Стаціонарна точка $O\,(0;0)$ є внутрішньою точкою області визначення, а саме вона є центром круга.

Тепер треба дослідити поведінку функції на межі області визначення. По суті це є дослідженням на умовний екстремум, де рівнянням зв'язку є рівняння межі області визначення. Немає необхідності застосовувати метод множників Лагранжа, оскільки це рівняння можна розв'язати відносно будь-якої із змінних. Дістанемо з цього рівняння, що $y^2 = 1 - x^2$, де $-1 \le x \le 1$ і, підставивши у вихідну функцію, матимемо функцію тільки однієї змінної: $z(x) = x^2 - \left(1 - x^2\right) = 2x^2 - 1$. Знайдемо її стаціонарні точки з рівняння, що відображає необхідну умову екстремуму для функції однієї змінної:

$$\frac{dz}{dy} = 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Значення функції в цій точці $z(0) = -1$. Обчислимо значення цієї функції на кінцях відрізка:

$$z(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 1, \; z(1) = 2(1^2) - 1 = 1.$$

Порівняємо отримані значення -1;0;1. Робимо висновок, що найменше значення функції дорівнює -1, а найбільше – 1.

Таким чином:

$$z_{найм.} = z(0;-1) = z(0;1) = -1, \quad z_{найб.} = z(-1;0) = z(1;0) = 1.$$

Запитання для самодіагностики

1. Що називається похідною за напрямом
2. Як обчислюється ця похідна?
3. Що називається градієнтом функції?
4. Які властивості градієнта вам відомі?
5. Як визначається екстремум функції кількох змінних?
6. Які необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних?
7. Які достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?
8. Що називається умовним екстремумом функції двох змінних?
9. Що являє собою функція Лагранжа?
10. Як знайти найменше та найбільше значення функції в замкненій області?

Приклади і вправи

Приклади.

17.7. Знайти похідну функції $z = 4 - x^2 - y^2$ в точці $M(-1;2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(3;1)$.

Розв'язання

Знаходимо частинні похідні і обчислюємо їх в точці M.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -2x\big|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -2y\big|_M = -4.$$

Далі знаходимо координати вектора $\overrightarrow{MN} = (4;-1)$ і його напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Похідна за даним напрямом

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + (-4)\cdot\frac{-1}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}.$$

17.8. Знайти градієнт функції $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точці $M(3;4)$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{3y}{2\sqrt{3xy}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3 + \frac{3x}{2\sqrt{xy}}$$

обчислюємо їх в точці $M(3,4)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 1 + \frac{3\cdot 4}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}} = 2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -3 + \frac{3\cdot 3}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}} = -\frac{9}{4}.$$

Отже,

$$\operatorname{grad} z\big|_M = 2\bar{i} - \frac{9}{4}\bar{j}.$$

17.9. Знайти похідну функції $z = \ln(2x^2 + 3y^2)$ в точці $M(1;-1)$ за напрямом градієнта функції z.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні і градієнт в точці M:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{4x}{2x^2+3y^2}\right|_M = \frac{4}{5}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{6y}{2x^2+3y^2}\right|_M = -\frac{6}{5},$$

$$\operatorname{grad} z|_M = \frac{4}{5}\bar{i} - \frac{6}{5}\bar{j}.$$

За умовою напрям s співпадає з напрямом $\operatorname{grad} z$. Тому знайдемо його напрямні косинуси.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2}} = \frac{4}{5\sqrt{\frac{52}{25}}} = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\cos\beta = \frac{-\frac{6}{5}}{\sqrt{\frac{52}{25}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Отже,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_M = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2\sqrt{13}}{5}.$$

17.10. Знайти екстремуми функції $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Далі знаходимо критичні точки з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -9, \\ -x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Точка $M(-4;1)$ – критична точка.

Знаходимо другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Оскільки ці похідні не залежать від x і y, то $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$, а $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$. Це означає, що в точці $M(-4;1)$ є екстремум. Оскільки $A = 2 > 0$, то точка $M(-4;1)$ – є точкою мінімуму. Значення функції z в цій точці

$$z_{min}(-4,1) = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1.$$

17.11. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Розв'язання.

Спочатку знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 15y \quad \text{і} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 15x$$

та розв’язуємо для знаходження критичних точок систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 15y = 0, \\ 3y^2 - 15x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{5}, \\ x(x^3 - 125) = 0. \end{cases}$$

З останньої системи отримуємо дві критичні точки $M(0;0)$ і $N(5;5)$. Для дослідження їх на екстремум знаходимо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -15,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

В точці $M(0;0)$ $A = 0$, $B = -15$, $C = 0$, а $\Delta = AC - B^2 = -18 < 0$. Отже, в точці $M(0;0)$ екстремуму немає.

В точці $N(5;5)$ $A = 6 \cdot 5 = 30$, $B = -15$, $C = 6 \cdot 5 = 30$, а $\Delta = 30 \cdot 30 - 15^2 > 0$. Отже, в точці $N(5;5)$ є екстремум, а саме мінімум, бо $A = 30 > 0$

$$z_{min} = 5^3 + 5^3 - 15 \cdot 5 \cdot 5 = -125.$$

17.12. Дослідити на екстремум функцію $z = x^4 + y^2$.

Розв'язання.

Знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Розв’язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x^3 = 0, \\ 2y = 0 \end{cases}$$

і одержуємо критичну точку $M(0;0)$. Оскільки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

то в точці $M(0;0)$ $A = 0$, $B = 0$, $C = 2$, і $\Delta = 0$, що не дає відповіді на наявність екстремуму. Але в точці $M(0;0)$ $z = 0$, а в інших точках $z > 0$, тому приходимо до висновку, що в точці $M(0;0)$ функція $z = x^4 + y^2$ має мінімум і $z_{min} = 0$.

17.13. Знайти екстремум функції $z = xy$ за умови $x + 2y - 4 = 0$.

Розв'язання. Першій спосіб. З рівняння зв’язку $x + 2y - 4 = 0$ маємо $x = 4 - 2y$. Тоді $z = y(4 - 2y) = 4y - 2y^2$ – функція однієї змінної. Знайдемо її екстремум:

$$z' = 4 - 4y,$$

$$z' = 0, \quad 4 - 4y = 0, \quad y = 1 \text{ – критична точка.}$$

При $y < 1$ $z' > 0$, а при $y > 1$, $z' < 0$. Отже, при $y = 1$ функція $z = xy$ має максимум і $z_{max} = 2$ при $x = 2$, $y = 1$.

Другий спосіб. Застосуємо метод множників Лагранжа. Утворимо функцію

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x+2y-4) = 0.$$

Знайдемо частинні похідні

$$F'_x = y+\lambda,\ \ F'_y = x+2\lambda,\ \ F'_\lambda = x+2y-4$$

і розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y+\lambda=0, \\ x+2\lambda=0, \\ x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\lambda, \\ x=-2\lambda, \\ -2\lambda-2\lambda-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=2, \\ \lambda=-1. \end{cases}$$

Критична точка $(2;1)$. Застосуємо достатню умову. За умовою $\varphi(x,y) = x+2y-4$. Знайдемо $\varphi'_x = 1$, $\varphi'_y = 2$, $F''_{xx} = 0$, $F''_{xy} = 1$, $F''_{yy} = 0$. Тоді

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi''_{xx} & \varphi''_{xy} \\ \varphi'_y & \varphi''_{xy} & \varphi''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2+2=4>0,$$

тобто в точці $(2;1)$ маємо умовний максимум і $z_{max} = 2\cdot 1 = 2$.

Зауважимо, що першій спосіб розв'язання, шляхом зведення до функції однієї змінної можливий, коли рівняння $\varphi(x,y)=0$ розв'язується відносно x або y.

17.14. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2y(4-x-y)$ в трикутнику, обмеженому прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=6$ (рис. 17.2)

Розв'язання.

1. Знайдемо критичні точки всередині даного трикутника OAB (область D). Маємо:

$$z'_x = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(8-3x-2y),$$

$$z'_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4-x-2y).$$

Далі розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0, \\ x^2(4-x-2y)=0. \end{cases}$$

Враховуючи, що всередині області D $x>0$, $y>0$, приходимо до системи

$$\begin{cases} 3x+2y=8, \\ x+2y=4, \end{cases}$$

з якої отримуємо $x=2$, $y=1$. Ця критична точка $M(2;1)$ лежить всередині області, а значення z в ній дорівнює

$$z(2;1)=2^2\cdot 1(4-2-1)=4.$$

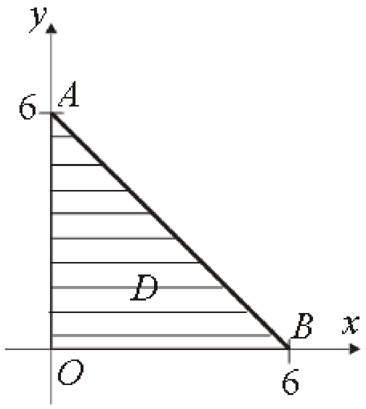


Рис. 17.3

2. Дослідимо функцію на межі трикутника, розглянувши три його сторони OA, OB і AB. На сторонах OA $(x=0)$ і OB $(y=0)$ значення функції z дорівнює нулю. На стороні AB (її рівняння $y=6-x$, де $0\le x\le 6$) функція z приймає вигляд

$$z(x)=x^2(6-x)(4-6)=2x^3-12x^2.$$

Знайдемо критичні точки функції:

$$z'=6x^2-24x,\quad 6x^2-24x=0,\quad x_1=0,\; x_2=4.$$

Обчислюємо значення функції $z(x)$ в цих точках і на кінцях проміжку $[0;6]$:

$$z(0)=0, \quad z(4)=-64, \quad z(6)=0.$$

3. Серед одержаних значень функції вибираємо найбільше й найменше значення:

$$\min_D z=-64 \text{ при } x=4,\ y=2;$$

$$\max_D z=4 \quad \text{при } x=2,\ y=1.$$

17.16. Знайти найменше й найбільше значення функції $z=x^3+3y^2$ в області, де $x^2+y^2\le 1$.

Розв'язання.

1. Шукаємо критичні точки всередині області D (рис. 17.3).

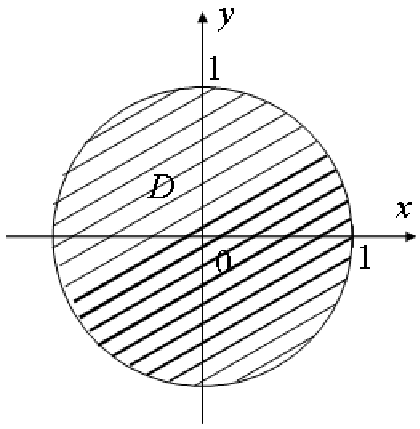


Рис.17.3

$$z'_x=3x^2, \quad z'_y=6y,$$

$$\begin{cases} 3x^2=0, \\ 6y=0, \end{cases}$$

$(0;0)$ – критична точка, що лежить всередині області $z(0;0)=0$.

2. На межі області $x^2+y^2=1$, звідки $y^2=1-x^2$,

$$z(x)=x^3+3-3x^2, \text{ де } -1\le x\le 1.$$

Знаходимо критичні точки одержаної функції однієї змінної:

$$z'_x = 3x^2 - 6x,\ 3x^2 - 6x = 0,$$

звідки $x = 0$, а $x = 2 \notin [-1;1]$.

При $x = 0$ $y^2 = 1$, тобто маємо дві критичні точки на межі області $(0;1)$ і $(0;-1)$. Значення функції z в цих точках дорівнює:

$$z(0;1) = z(0;-1) = 3.$$

3). З одержаних значень функції z вибираємо найменше і найбільше значення:

$$\max_D z = 3, \quad \min_D z = 0.$$

Вправи:

17.17. Знайти похідну функції $z = x^2 y^2 + 2x - 2y$ у точці $M(2;2)$ за напрямом вектора, що утворює з віссями координат кути $\alpha = 60°$ і $\beta = 30°$.

17.18. Знайти похідну функції $z = \ln(e^x + e^y)$ у точці $M(0,0)$ за напрямом вектора $\bar{s} = \bar{i} + \bar{j}$.

17.19. Знайти похідну функції $u = xy^2 + z^3 - xyz$ у точці $M(1;1;2)$ за напрямом вектора, що утворює з віссями координат кути відповідно $60°$, $45°$ і $60°$.

17.20. Знайти похідну функції $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\bar{s} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

17.21. Знайти $\operatorname{grad} z$ у точці $M(0;3)$, якщо $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$.

17.22. Для функції $z = e^{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$ знайти $\operatorname{grad} z$ у точці $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$.

17.23. Знайти кут між градієнтами функцій $z = \ln\dfrac{x}{y}$ у точках $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ і $N(1;1)$.

17.24. Знайти градієнт функції $u = \mathrm{tg}\,x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \mathrm{ctg}\,z$ у точці $M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right)$.

Дослідити на екстремум наступні функції:

17.25. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

17.26. $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$.

17.27. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

17.28. $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

17.29. $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

17.30. $z = x^4 + 2y^4 + 4$.

17.31. $z = 2x + 6y - 2\ln x - 18\ln y$.

17.32. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

17.33. $z = x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$.

17.34. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ за умови $x + y + 3 = 0$.

17.35. Знайти екстремум функції $z = xy^2$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.

17.36. Знайти екстремум функції $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ за умови $x + y = 2$.

17.37. Знайти екстремум функції $z = e^{x+2y}$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

17.38. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x - 2y + 5$ в області, яка визначається нерівностями $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

17.39. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2 + 4y^2$ в області, де $x^2 + y^2 \leq 1$.

17.40. Знайти найменше й найбільше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ в замкненій області, обмеженої прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 8$.

17.41. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в області, обмеженої прямими $x = 0$, $y = 0$, $y - x = 1$.

17.42. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в області, яка визначається нерівностями $1 \le x \le 4$, $-3 \le y \le 2$.

Відповіді до вправ

Відповіді до глави 1

1.19. $\sin(\alpha - \beta)$. **1.20.** $4ab$. **1.21.** 0. **1.22.** $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.
1.23. 9. **1.24.** 10. **1.25.** $-2(x^3 + y^3)$. **1.26.** 1. **1.27.** $-4a^3$. **1.28.** amn.
1.29. $\{-1,5\}$. **1.30.** $\{2;3\}$. **1.31.** $\{0;2\}$. **1.32.** 180. **1.33.** -72.
1.34. $2a + b$. **1.35.** 10. **1.36.** 0. **1.37.** 0. **1.38.** -5. **1.39.** 160.
1.40. 96. **1.41.** 30. **1.42.** $\{2;1;-1\}$. **1.43.** $\{-1;1;-2\}$. **1.44.** $\{5;-2;4\}$.
1.45. $\{0;0;-2\}$. **1.46.** $\{-2;0;1;-1\}$.

Відповіді до глави 2

2.20. $\begin{pmatrix} 5 & 22 \\ -2 & 28 \end{pmatrix}$. **2.21.** $\begin{pmatrix} 2 & 42 \\ 11 & 30 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$. **2.22.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.23.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

2.24. (13). **2. 25.** $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. **2.26.** $\begin{pmatrix} 5 & -19 & 5 \end{pmatrix}$. **2.27.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

2.28. $\begin{pmatrix} 7 & -7 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 14 & 11 \end{pmatrix}$. **2.29.** $\begin{pmatrix} -3a^2 & a & 3a^2 \\ -a & 3 & a \\ 3a^2 & -a & -3a^2 \end{pmatrix}$.

2.30. $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. **2.31.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.32.** $\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$.

2.33. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.34.** $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.35.** $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

2.36. $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. **2.37.** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -24 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.38. $\begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **2.39.** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & -5 & 13 \\ 21 & 5 & 16 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **2.40.** $(1;1;-1)$. **2.41.** $(1;2;3)$.

2.42. $(1;1;1)$. **2.43.** $(2;-1;1)$. **2.44.** 2. **2.45.** 3. **2.46.** 2. **2.47.** 2.

2.48. 3. 2.49. 4. 2.50. 2. 2.51. 2.

Відповіді до глави 3

3.15. $\{10;5;7\}$. **3.11.** $\{3;1;-1\}$. **3.12.** $\{3;-4;-1;1\}$. **3.13.** $\{1;-1;0;2\}$.

3.14. $\{1;2;-2\}$. **3.15.** Несумісна. **3.16.** $\{1;-1;-0\}$. **3.17.** Несумісна.

3.18. $x_1=-3+9x_2;\ x_3=1-3x_2$. **3.19.** $x_1=2x_2-x_3;\ x_4=1$.

3.20. $x_1=-8;\ x_2=3+x_4;\ x_3=6+2x_4$.

3.21. $\{1;2;3\}$. **3.22.** Несумісна. **3.23.** $x_2=2x_1-1;\ x_3=-6$.

3.24. $x_1=8x_3-7x_4;\ x_2=-6x_3+5x_4$. **3.25.** $x_2=5x_1+3x_3;\ x_4=3x_1+2x_3$.

3.26. $x_1=x_3+x_4;\ x_2=2x_3+2x_4$. **3.27.** $x_2=-6x_1-4x_3;\ x_4=-2x_1$.

3.28. $\{0;0;0\}$. **3.29.** $\{0;0;0\}$. **3.30.** $\{1;1;-1\}$. **3.31.** Несумісна.

3.32. $\{-1;3;1\}$. **3.33.** $\{1;1;1;1\}$. **3.34.** $x_2=3x_1-13;\ x_3=-7;\ x_4=0$.

3.35. $\{2;-1;2;1\}$.

Відповіді до глави 4

4.11. $(-4;\ \ 5;\ \ -16)$. **4.12.** $(11;\ \ 9;\ \ 8;\ \ -1)$. **4.13.** а) так, $\vec{b}=3\vec{a}$; б) ні; в) ні; г) так, $2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=0$. **4.16.** $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$. **4.20.** Ні. **4.21.** Так.

4.22. Ні. **4.23** Так. **4.24.** $\vec{a} = 3\vec{a_1} + 4\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3}$.

4.25. $\vec{a} = 2\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$. **4.26.** $\vec{a} = 3\overrightarrow{a_1} + 4\overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3}$.

4.27. $(-2C_1;C_1);\quad (C_2;C_2)$. **4.28.** $(C_1;4C_1);\quad (C_2;-4C_2)$.

4.29. $(3C_1;\quad -5C_1;C_1);\ (4C_2;\quad 0;C_2);(2C_3;\quad 0;-C_3); C_1 \neq 0; C_2 \neq 0; C_3 \neq 0$.

4.30. $(C_1;\quad C_1;2C_1);\ (C_2;\quad 0;C_2);(C_3;\quad 2C_3;-C_3); C_1 \neq 0; C_2 \neq 0; C_3 \neq 0$.

4.31. $(1;\quad -2\ ;1);\ (1;\quad 0;1);(13;\quad 1;10); \lambda_1 \neq 0; \lambda_2 \neq 0; \lambda_3 \neq 0$.

4.32. $(1;\quad 3\ ;-3);\ (1;\quad 0;2); \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 2$.

Відповіді до глави 5

5.34. 10. **5.35.** $\sqrt{19}; 7$. **5.36.** 20.

5.37. $\overrightarrow{AK} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \vec{c}; \overrightarrow{BL} = \dfrac{\vec{a}-\vec{c}}{2}; \overrightarrow{CM} = -\vec{a} - \dfrac{\vec{c}}{2}$.

5.38. $\vec{b};\quad -\vec{b};\quad -\vec{a};\quad \vec{a}+\vec{b};\ \vec{b}-\vec{a};\ \overrightarrow{a}-\vec{b}$. **5.39.** $\vec{a} \perp \vec{b}$.

5.40. $|\overrightarrow{AB}| = 9;\quad \cos\alpha = \dfrac{1}{3};\ \cos\beta = -\dfrac{2}{3};\quad \cos\gamma = \dfrac{2}{3}$.

5.41. $(7;-14;18); \sqrt{569}$. **5.42.** $(2;-2;2\sqrt{2})$. **5.43.** $\sqrt{86};\sqrt{41}$.

5.44. $\alpha = 4; \beta = -1$. **5.46.** $\alpha = 1; \beta = -5$. **5.48.** $\sqrt{22}; 2\sqrt{22}$. **5.49.** $\left(0; 0; \dfrac{8}{3}\right)$.

5.50. $(-5;-2;3)$. **5.51.** 3. **5.52.** 19. **5.53.** $\sqrt{217}$. **5.54** -35.

5.55. $15;\sqrt{593}$. **5.56.** 120^0. **5.57** $\arccos\dfrac{\sqrt{182}}{14}$. **5.58.** $\sqrt{17}$.; **5.59.** -7.

5.61. а) 22; б) $|\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 7$; в) -266; г) 784.

5.62. $|\vec{a}| = 7;\quad \cos\alpha = \dfrac{2}{7};\ \cos\beta = \dfrac{3}{7};\quad \cos\gamma = -\dfrac{6}{7}$. **5.63.** -6.

5.64. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **5.65.** 90^0. **5.66.** $\arccos\left(\dfrac{-12}{49}\right)$. **5.67.** $90^0; 45^0; 45^0$.

5.68. $(1;1;-1)$. **5.69.** $(1;2;3)$. **5.70.** $2\sqrt{6}$. **5.71.** $\dfrac{-1}{3}$. **5.72.** $\dfrac{78}{7}; \dfrac{-37}{3}$.

5.73. 5. **5.74.** $(2;-2;2\sqrt{2})$. **5.75.** $11(\vec{a}\times\vec{b})$. **5.76.** $26\sqrt{2}$.

5.77. $(1;17;9); \sqrt{371}$. **5.78.** $\sqrt{59}$. **5.79.** 14 кв. од. **5.80.** 10.

5.81. $(7;5;1)$. **5.82.** 33. **5.85.** 12 куб. од. **5.86.** 3 куб. од.

5.87. $6\sqrt{3}$ кв. од.; $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Відповіді до глави 6

6.30. а) $y = x - 5$; б) $y = \sqrt{3}x - 5$; в) $y = -x - 5$; г) $y = -5$.

6.31. $y = x$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$; $y = -\sqrt{3}x$; $y = -x$. **6.32** . $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$; $\frac{x}{-2} + \frac{y}{0,8} = 1$.

6.33. 10 кв. од. **6.34.** $5x + 2y - 6 = 0$.

6.35. $7x - 3y - 5 = 0$; $3x + 7y - 27 = 0$.

6.36. $A(1;6)$, $B(4;-1), C(-3;-3)$. **6.37.** $m = 2$.

6.38. $3x + 8y - 12 = 0$, $3x - 8y + 12 = 0$, $3x + 8y + 12 = 0$, $3x - 8y - 12 = 0$.

6.39. $20 + 2\sqrt{10}$. **6.40.** $x - y + 1 = 0$. **6.41.** $2x + y + 5 = 0$.

6.42. $4x + 5y + 2 = 0$, $5x - 4y + 23 = 0$. **6.43.** $x + 4y - 14 = 0$.

6.44. $11x + 22y - 74 = 0$. **6.45** $4x + 5y + 2 = 0$, $5x - 4y - 18 = 0$.

6.46. $\grave{a})\ (1;-1)$; $\acute{a})\ (3;1)$. **6. 74.** $(-12;5)$. **6.48.** $4x + y - 3 = 0$.

6.49. $x - y - 7 = 0$; $x - 2y - 14 = 0$. **6.59.** $(10;-5)$. **6.51.** $B(5;7)$.

6.52. $x + y - 8 = 0$, $11x - y - 28 = 0$. **6.53.** 5. **6.54.** $2\sqrt{13}$. **6.55.** 5 кв. од.

6.56. $\frac{18}{\sqrt{34}}$. **6.57.** $BD = \sqrt{10}$; $S = 10$ кв. од.

6.58. $5x - 12y + 2 = 0$, $5x - 12y - 128 = 0$.

6.59. $12x + 5y - 26 = 0$, $12x + 5y - 78 = 0$. **6.60** . $\frac{25}{\sqrt{34}}$.

6.61. $0,25$ кв. од. **6.62.** $7x + 56y - 40 = 0$, $32x - 4y - 25 = 0$.

6.63. $(0;-12)$ або $\left(0;\frac{4}{3}\right)$. **6.64** $\mathrm{arctg}\,0,5$.

Відповіді до глави 7

7.25. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$. **7.26.** $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$.

7.27 $x^2 + y^2 = 25$. **7.28.** $(x-4)^2 + y^2 = 36$.

7.29. $(x+9)^2 + (y-4)^2 = 169$. **7.30.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

7.31. $x^2+(y-2)^2=34$.

7.32. $(x+1)^2+(y+1)^2=25$.

7.33. $(x-1)^2+y^2=1$.

7.34. $(x+2)^2+(y+3)^2=100$.

7.35. $(-1;0)$, $(-6;-5)$.

7.36. $x^2+y^2+2x+2y=0$.

7.37. а) $(x+3)^2+(y-5)^2=21$; б) $(x+1)^2+y^2=4$;

в) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; г) $(x-4)^2+(y-5)^2=49$.

7.38. а) $\sqrt{157}$; б) 17.

7.39. $a=6$; $b=10$; $c=8$; $\varepsilon=\frac{4}{3}$.

7.40. $\frac{x^2}{10}+y^2=1$.

7.41. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

7.42. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{24}=1$.

7.43. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

7.44. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$.

7.45. $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{64}=1$, $\varepsilon=\frac{15}{17}$.

7.46. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $r_1=4-\sqrt{3}$, $r_2=4+\sqrt{3}$.

7.47. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

7.48. а) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$;

б) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$; в) $\frac{x^2}{10}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$.

7.49. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$.

7.50. $(-6;0)$, $(6;0)$, $(5\sqrt{2};0)$,, $(-5\sqrt{2};0)$.

7.51. $(\pm4;0)$, $(\pm5;0)$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}x$.

7.52. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$.

7.53. $60°$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7.54. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$.

7.55. $x^2-y^2=1$.

7.56. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

7.57. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$.

7.58. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

7.59. а) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+5)^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$;

в) $\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$.

7.60. а) $F\left(\frac{3}{2};0\right)$, $x=-\frac{3}{2}$; б) $F(-2;0)$, $x=2$; в) $F\left(0;\frac{5}{2}\right)$, $y=-\frac{5}{2}$;

г) $F(0;1)$, $y=-1$.

7.61. $y^2=48x$, $F(12;0)$, $MF=\frac{37}{3}$.

7.62. $y=x-\frac{x^2}{4}$.

7.63. $(25;30)$, $(25;-30)$.

7.64. $y^2-6x+9=0$.

7.65. а) $(1;3)$, $(4;-6)$; б) $\varnothing$; в) $(4;6)$.

7.65. $x^2=-2y$.

7.66. а) $(y-4)^2=4(x+4)$;

б) $(x-3)^2=-8(y-7)$; в) $(y+4)^2=x$; г) $(x+3)^2=2(y+2)$.

Відповіді до глави 8

8.17. $x+2y-3z+4=0$.

8.18. $x-y-4z+9=0$.

8.19. $y+4z+10=0$.

8.20. $y+2=0$.

8.21. $x+2y-3z-20=0$.

8.22. $\alpha=\arccos 0,51$.

8.23. а) 6; б) 11.

8.24. а) 6; б) 6,5.

8.25. $(0;2;0)$, $(0;-15;0)$.

8.26. $8x+7y+18z+35=0$.

8.27. $2x+3y+4z-3=0$.

8.28. $x-y+2z-16=0$.

8.29. $\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{6}$.

8.30. $\frac{x-5}{2}=\frac{y+8}{5}=\frac{z-1}{-1}$.

8.31. $x=2t+1$, $y=2t-2$, $z=5t-1$.

8.32. $\frac{x+3}{7}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-1}{6}$; $\cos\alpha=\frac{7}{11}$, $\cos\beta=-\frac{6}{11}$, $\cos\gamma=\frac{6}{11}$

8.34. а) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{-11}$; б) $\frac{x-2}{7}=\frac{y+3}{9}=\frac{z}{3}$.

8.35. а) $\arccos\frac{16}{21}$; б) $\frac{\pi}{3}$;

8.36. $\frac{x+2}{13}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{8}$.

8.37. а) $(6;5;4)$; б) $(2;-3;6)$.

8.40. $\arcsin\frac{8}{\sqrt{493}}$. **8.41.** $m=-3$.

8.42. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-7}{-8}$. **8.43.** $(5;-1;0)$.

8.44. $x-3y+4z+9=0$. **8.45.** $(-2;9;3)$.

Відповіді до глави 9

9.15. 1) $[1;2]$; 2) $(-\infty;3)$; 3) $(-2;3]$; 4) $(-\infty;-9)\cup[0;\infty)$; 5) $\left[-\frac{2}{3};3\right]$;
6) $(-\infty;-\sqrt{3})\cup[0;\sqrt{3}]$; 7) $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{8}\right)$; 8) $(-\infty;-4]\cup[5;6]$; 9) $[-1;1]$;10) $\{1\}$;
11) $[-2;0)\cup[0;1)$; 12) $[0;1]$; 13) $\left[-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$; 14) $(1;4]$;
15) $(-5;0]\cup[3;\infty)$.

9.17. 5 559 грн. **9.18.** 800 грн. **9.19.** 14 років.

Відповіді до глави 10

10.19. а) $-8, 11, \frac{14}{3}, \frac{17}{5}, \frac{20}{7}, \ldots$; б) $\frac{5}{2}, \frac{17}{4}, \frac{65}{8}, \frac{257}{16}, \frac{1025}{32}, \ldots$;
в) $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$; г) $0, 4, 0, 8, 0, \ldots$; д) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$.

10.20. а) $\{x_n\}=n^2$; б) $\{x_n\}=\frac{n}{2^n}$; в) $\{x_n\}=2+3(n-1)$;
г) $\{x_n\}=\frac{(-1)^n}{n+1}$; д) $\{x_n\}=1+(-1)^n$.

10.22. $-\frac{5}{7}$. **10.23.** 0. **10.24.** 1. **10.25.** $\frac{1}{2}$. **10.26.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. **10.27.** 0.

10.28. $\frac{1}{2}$. **10.29.** $\frac{1}{3}$. **10.30.** $\frac{1}{6}$. **10.31.** 0. **10.32.** 1. **10.33.** а) 0; б) $+\infty$.

10.34 а) ∞; б) 0. **10.35.**а) ∞; б) 0. **10.36.** а) ∞; б) 0.

10.37. а) 0; б) ∞. **10.38.** а) ∞; б) ∞. **10.39.** $\frac{7}{5}$. **10.40.** 0.

10.41. $\sqrt{3}$. **10.42.** $\frac{\pi}{6}$. **10.43.** 1. **10.44.** 0. **10.45.** 0. **10.46.** 0. **10.47.** $+\infty$.
10.48. $+\infty$. **10.49.** $+\infty$. **10.50.** $-\infty$. **10.51.** ∞. **10.52.** 0. **10.53.** 0.
10.54. $\pm\infty$. **10.55.** ∞. **3 10.56.** $\pm\infty$. **10.57.** $\pm\infty$. **10.58.** π.
10.59. $-\infty$. **10.60.** 0. **10.61.** 0.

Відповіді до глави 11

11.35. $\frac{1}{2}$. **11.36.** $\frac{1}{2}$. **11.37.** $\frac{4}{9}$. **11.38.** ∞. **11.39.** 1. **11.40.** $\frac{1}{3}$.
11.41. -7. **11.42.** $\frac{3}{2}$. **11.43.** $\frac{12}{5}$. **11.44.** 3. **11.45.** ∞. **11.46.** 0.
11.47. 4. **11.48.** ∞. **11.49.** $\begin{cases} -\frac{3}{4}, x \to -\infty \\ \frac{2}{9}, \quad x \to +\infty \end{cases}$. **11.50.** 0. **11.51.** ∞.
11.52. -1. **11.53.** 0. **11.54.** ∞, якщо $x \to -\infty$; 5, якщо $x \to +\infty$.
11.55. ∞, якщо $x \to -\infty$; $\frac{3}{4}$, якщо $x \to +\infty$. **11.56.** $\frac{3}{4}$. **11.57.** 0.
11.58. $\frac{1}{2}$. **11.59.** 2. **11.60.** -8. **11.61.** 2. **11.62.** $-4.-\frac{1}{4}$. **1.63.** $\frac{3}{4}$.
11.64. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.65.** $\frac{1}{8}$. **11.66.** 1. **11.67.** e^{-2}. **11.68.** e^{-1}. **11.69.** $e^{\frac{3}{2}}$.
11.70. e^{-5}. **11.71.** 1. **11.72.** e^{-6}. **11.73.** $\sqrt{e}$. **11.74.** 5. **11.75.** $-\frac{1}{2}$.
11.76. 2. **11.77.** $\frac{4}{3}$. **11.78.** $\frac{9}{8}$. **11.79.** $\frac{1}{8}$. **11.80.** $\frac{9}{4}$.**11.81.** $-\frac{5}{3}$. **11.82.** $\frac{1}{2}$.
11.83. 1.

Відповіді до глави 12

12.15. $x=3$, другого роду. **12.16.** $x=2$, другого роду.
12.17. $x_1=-3$, другого роду, $x_2=2$, усувний. **12.18.** $x=0$, усувний.
12.19. $x_1=1$, $x_2=-1$ – другого роду. **12.20.** $x=0$, усувний.
12.21. $x=2$, усувний. **12.22.** $x=2$, першого роду.
12.23. $x=0$, першого роду. **12.24.** $x=0$, першого роду.

12.25. $x=1$, першого роду. **12.26.** $x=1$, першого роду.

13.24. $4x^3-4x^2-6x+\frac{1}{3}$. **13.25.** $-\frac{6}{x^3}+\frac{5}{2x^4}$.

13.26. $-\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{15}{x^4}+\frac{24}{11x^5}$. **13.27.** $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

13.28. $\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{20}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{x^2}$. **13.29.** $\frac{6x-4x^2+6}{(3-4x)^2}$.

13.30. $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^2)^2}$. **13.31.** $\frac{-4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-3x^2$.

13.32. $6(\frac{x^3}{9}-\frac{4}{x}+6)^5(\frac{x^2}{3}+\frac{4}{x^2})$. **13.33.** $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

13.34. $\frac{16(x-3x^2)}{5\sqrt[5]{2x^2-4x^3}}$. **13.35.** $\frac{x\left(x\cos x-\sin x\right)(\sin^2 x-x^2)}{x^2\sin^2 x}$.

13.36. $5x\sin x-2\cos x$. **13.37.** $\frac{\sin x+2x\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$.

13.38. $\frac{2\sin^2 x(ctgx-1)+3x}{\sqrt[3]{x}\sin^2 x(ctgx-1)^2}$. **13.39.** $\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}$.

13.40. $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. **13.41.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}+\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$..

13 42. $\frac{\sin(2x+1)-4x\cos(2x+1)}{2\sqrt{x}\sin^2(2x+1)}$. **13.43.** $\frac{2tgx}{\cos^2 x}+\frac{2x}{\sin^2 x^2}$.

13.44. $3(1+\sin^2 x)^2\sin 2x$. **13.45.** $-25\sin^4 x(\cos 5x)\cdot\cos(\cos 5x)\cdot\sin 5x$.

13.46. $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. **13.47.** $\frac{-\sqrt{2}\arcsin^2 x+2}{\sqrt{1-x^2}arc\sin^2 x}$.

13.48. $\frac{2x}{1+x^4}$. **13.49.** $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

13.50. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\arcsin^2(2x+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-4x^2-4x}}$. **13.51.** $\frac{-2}{x\left(1+\ln x\right)^2}$.

13.52. $\frac{3\ln^2 x}{x}$. **13.53.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

13.54. $y''=12x^2-8$. **13.55.** $y''=18\cos 6x$.

13.56. $y''=\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$. **13.60.** $y'=\frac{3x^2-2xy^2}{2x^2y+3y^2}$.

13.61. $y'=\frac{\cos y-y\cos x}{\sin x+x\sin y}$. **13.62.** $y'=(x+y)^2$.

13.63. $y'=\frac{e^x-ye^{xy}}{e^y-xe^{xy}}$. **13.64.** $y'=\frac{1}{2(1+\ln y)}$.

13.65. $y''=\frac{y^2+x^2(y')^2}{x^2y}$. **13.66.** $y''=\frac{2(x+y\cdot(y')^2)}{1-y^2}$.

13.67. $y''=4t^2$. **13.68.** $y''=\frac{-4}{(t+2)^2}$.

13.69. $y''=2(t^2+1)$. **13.70.** $y''=-\frac{1}{at\sin^3 t}$.

13.71. $y'=y(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{3x+1})$. **13.72.** $y'=y(\frac{12}{3x-4}+\frac{10}{2x+7}-\frac{6}{x-1})$.

13.73. $y'=y(\frac{3}{x-2}+\frac{5}{2(5x+1)}-\frac{4}{x+3})$. **13.74.** $y'=y(\frac{x\ln x+x+1}{x})$.

13.75. $y'=y(\ln\sin x+xctgx)$. **13.76.** $y'=y(\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1})$.

13.77. $k=-\frac{1}{11}$. **13.78.** $(1;-3)$.

13.79. $(\frac{1}{8};-\frac{1}{16})$. **13.80.** $y-5=0,\ x+2=0$.

13.81. $y+3x-7=0$. **13.82.** $y=5x+3,\ y=5x-1$.

13.83. $x-4y-5=0$. **13.84.** $8x+y-17=0$.

13.85. $x+2y-4=0$.

Відповіді глави 14

14.11. $dy=-6\cos^2 2x\sin 2xdx$. **14.12.** $dy=\frac{21x-4}{\sqrt{7x-2}}dx$.

14.13. $dy=(2\cdot 5^x\cdot\ln 5\cdot x\cdot\arccos\frac{1}{x}+\frac{5^{x^2}}{x\sqrt{x^2-1}})dx$.

14.14. $dy=\frac{e^{3x-5}(3x^2-x-9)}{\sqrt{x^2-3}(x^2-3)}dx$. **14.15.** $dy=\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$.

14.16. $dy = \frac{-2\sin x}{3\sqrt[3]{2+\cos x}}dx$. **14.17.** $dy = (\ln(x^2-2x) + \frac{2x-2}{x-2})dx$.

14.18. $dy = \frac{-4x-3y}{3x+2y}dx$. **14.19.** $dy = \frac{x+y}{x-y}dx$.

14.20. 5. **14.21.** $0{,}93$. **14.22.** $0{,}9$. **14.23.** $2{,}995$. **14.24.** $0{,}5216$.
14.25. $0{,}485$. **14.26.** $0{,}01$. **14.27.** $1{,}2$.

Відповіді до глави 15

15.25. $\frac{1}{5}$. **15.26.** ∞. **15.27.** $2{,}5$. **15.28.** $-\frac{9}{7}$.

15.29. $\frac{1}{18}$. **15.30.** 1. **15.31.** $0{,}18$. **15.32.** $\frac{1}{2}$.

15.33. 2. **15.34.** $\frac{\sqrt{3}}{3-9\ln 3}$. **15.35.** 1.

15.36. 0. **5.37.** ∞. **15.38.** 0. **15.39.** $\frac{1}{2}$. **5.40.** 2.

15.41. 0. **15.42.** $\frac{1}{2}$. **15.43.** $\frac{2}{3}$. **15.44.** 1. **15.45.** 1.

15.46. $\frac{1}{3}$. **15.47.** 1. **15.48.** ∞. **15.49.** 0. **15.50.** 1.

15.51. $\frac{1}{e}$. **15.52.** 1. **15.53.** 1. **15.54.** e^{-6}. **15.55.** e. **15.56.** 1.

15.57. $(-\infty;-2)$ і $(1;\infty)$ зростає, $(-2;1)$ – спадає, $y_{\max}(-2)=25$,
$y_{\min}(1)=-2$. **15.58.** $y_{\min}(-2) = -\frac{8}{3}$, $y_{\min}(1) = -\frac{5}{12}$, $y_{\max}(0)=0$,
зростає на $(-2;0)$ і $(1;\infty)$, спадає на $(-\infty;-2)$ і $(0;1)$.

15.59. $y_{\max}(\sqrt[3]{\frac{16}{49}}) = 0{,}2$, зростає на $\left[0;\sqrt[3]{\frac{16}{49}}\right)$, спадає на $(\sqrt[3]{\frac{16}{49}};\infty)$.

15.60. $y_{\max}(-2)=0,$, $y_{\min}(0)=-108,$, зростає на $(-\infty;-2)$ і $(0;\infty)$,
спадає на $(-2;0)$. **15.61.** $y_{\max}(-\frac{1}{3}) = \frac{13}{4}, y_{\min}(4)=0$
зростає на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ і $(4;\infty)$, спадає на $(-\frac{1}{3};4)$.

15.62. $y_{\min}(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$, спадає на $(0;\frac{1}{e})$, зростає на $(\frac{1}{e};\infty)$.

15.63. $y_{\max}(\frac{1}{e^2})=\frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(1)=0,$, зростає на $(0;\frac{1}{e^2})$ і $(1;\infty)$, спадає на$(\frac{1}{e^2};1)$. **15.64.** екстремуму немає, зростає на $(-\infty;0)$, спадає на $(4;\infty)$. **15.65.** $y_{\max}(0)=0, y_{\min}(-\frac{4}{5})=\frac{8}{5}\sqrt{\frac{6}{5}}$зростає на $(-\frac{4}{5};0)$, спадає на $(-2;-\frac{4}{5})$ і $(0;\infty)$. **15.66.** екстремуму немає, монотонно зростає. **15.67.** $y_{\max}(0)=\frac{1}{2}, y_{\min}(1)=\frac{\pi}{8}$ зростає на $(-\infty;0)$ і $(1;\infty)$, спадає на $(0;1)$.

15.68 $y_{\max}(-4)=8e^{-4}$, $y_{\min}(2)=-4e^2$, зростає на $(-\infty;-4)$і$(2;\infty)$, спадає на $(-4;2)$. **15.69.** $y_{\max}(-2)=9\sqrt{3},$, зростає на $(-2;\infty)$, спадає на $(-\infty;-2)$. **15.70.** $y_{\max}(1)=\frac{5}{2}$, $y_{\min}(e)=\frac{4e-e^2}{2}$, зростає на $(-\infty;1)$ і $(e;\infty)$, спадає на $(1;e)$.

15.71. $y_{найб.}(-1)=2$, $y_{найм.}(1)=-12$.

15.72. $y_{найм.}(0)=0$, $y_{найб.}(1)=\frac{1}{3}$. **15.73.** $y_{найм.}(-1)=-1$, $y_{найб.}(0)=-\frac{1}{2}$.

15.74. $y_{найм.}(8)=6$, $y_{найб.}(0)=10$. **15.75.** $y_{найм.}=-\frac{\pi}{2}, y_{найб}=\frac{\pi}{2}$.

15.76. $y_{найм.}(0)=2$, найб. немає.

15.77. $y_{найм.}=-\frac{\pi}{2}$, найб. немає. **15.78.** 6,5 і $-6,5$. **15.79.** $3\times3\times3$.

15.80. $H=R\sqrt{2}$. **15.81.** 1) $x=20$, 2) $x=20$. **15.82.** 1) 1875, 2) 1625.

15.83. $(-\infty;1)$ – опуклий, $(1;\infty)$– угнутий, $(1;-1)$ – точка перегину.

15.84. $(-\infty;-3)$ і $(2;\infty)$ – опуклий, $(-3;2)$ – угнутий, $(-3;294)$ і $(2;114)$ – точки перегину. **15.85.** $(0;\infty)$ – опуклий, $(-\infty;0)$ – угнутий, $(0;0)$ – точка перегину. **15.86.** $(-\infty;0)$ і $(0;\infty)$ – опуклий, точок перегину немає. **15.87.** $(-\infty;-2)$ – опуклий,

$(-2;\infty)$ – угнутий, $(-2;-\frac{2}{e^2})$ – точка перегину.

15.88. $(0;\infty)$ – угнутий, точок перегину немає.

15.89. $(-\infty;-1)$ і $(3;\infty)$ – угнутий, $(-1;3)$ – опуклий, $(-1;-9)$ і $(3;-197)$ – точки перегину.

15.90. $x=-2$, $y=x-4$. **15.91.** $x=2$, $y=\frac{1}{3}$. **15.92.** $x=3$, $y=2$.

15.93. $x=0$, $y=x$. **15.94.** $x=\pm 2$, $y=-x$. **15.95.** $x=1$, $y=x+1$.

15.96. $x=0$, $y=x+1$. **15.97.** $y=-2$.

15.98. При $x=-\frac{1}{3}$ – мінімум, при $x=3$ – максимум, на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ і $(3;\infty)$ – зростає, на $(-\frac{1}{3};3)$ – спадає; асимптот немає.

15.99. При $x=-4$ – максимум, при $x=2$ – мінімум, зростає на $(-\infty;-4)$ і на $(2;\infty)$, спадає на $(-4;2)$.

15.100. При $x=\pm 2$ – мінімум, при $x=0$ – максимум, спадає на $(-\infty;-2)$ і на $(0;2)$, зростає на $(-2;0)$ і $(2;\infty)$.

15.101. При $x=0$ – максимум, при $x=6$ – мінімум, зростає на $(-\infty;0)$ і на $(6;\infty)$, спадає на $(0;3)$ і на $(3;6)$; асимптоти: $x=3$ і $y=x+3$; опукла на $(-\infty;3)$, угнута на $(3;\infty)$.

15.102. При $x=0$ – максимум, при $x=2$ – мінімум; асимптоти: $x=1$ і $y=x-1$.

15.103. При $x=-1$ – мінімум, при $x=1$ – максимум, спадає на $(-\infty;-1)$ і на $(1;\infty)$; асимптота $y=0$.

15.104. При $x=0$ – мінімум, спадає на $(-\infty;0)$, зростає на $(0;\infty)$; асимптот немає; опукла на $(-\infty;-2)$ і на $(2;\infty)$, угнута на $(-2;2)$.

15.105. При $x=1$ – максимум, зростає на $(-\infty;1)$, спадає на $(1;\infty)$; асимптота $y=0$; опукла на $(-\infty;2)$, угнута на $(2;\infty)$; асимптота $y=0$ при $(2;\infty)$.

15.106. $D(y)=[-4,4]$, при $x=0$ – мінімум, зростає на $(-4;0)$, спадає на $(0;4)$; асимптот немає; опукла.

15.107. При $x=-1$ – мінімум, спадає на $(-\infty;-1)$, зростає на $(-1;\infty)$;

асимптот немає; угнута на $(-\infty;0)$ і на $(2;\infty)$, опукла на $(0;2)$.

15.108. При $x=1$ – мінімум, спадає на $(0;\frac{1}{\sqrt{e}})$, зростає на $(\frac{1}{\sqrt{e}};\infty)$; асимптот немає; опукла на $(0;\frac{1}{e\sqrt{e}})$, угнута на $(\frac{1}{e\sqrt{e}};\infty)$.

15.109. При $x=-1$ – максимум, при $x=1$ – мінімум, зростає на $(-\infty;-1)$ і на $(1;\infty)$, спадає на $(-1;1)$; асимптоти: $y=x+\pi$ і $y=x-\pi$; опукла на $(-\infty;0)$, угнута на $(0;\infty)$.

15.110. При $x=0$ – мінімум, спадає на $(-\infty;0)$, зростає на $(0;\infty)$; асимптоти: $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ і $y=\frac{\pi}{2}x-1$; угнута усюди.

Відповіді до глави 16

16.33. $z'_x=2xy+5$; $z'_y=x^2+6y$.

16.34. $z'_x=30(2y^3-6xy^2+3x^2)^4\cdot(x-y^2)$;
$z'_y=30y(2y^3-6xy^2+3x^2)^4\cdot(y^2-2xy)$.

16.35. $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^3}}$; $z'_y=\dfrac{-3y^2}{2\sqrt{4-x^2-y^3}}$.

16.36. $z'_x=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.

16.37. $z'_x=e^{5x+3x^3y^2}\cdot(5+9x^2y^2)$; $z'_y=e^{5x+3x^3y^2}\cdot 6x^3y$.

16.38. $z'_x=e^{x-y}\cdot(2x+x^2+y^2)$; $z'_y=e^{x-y}\cdot(2y-x^2-y^2)$.

16.39. $z'_x=2x\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y(x^2+y^2)}{x^2}\sin\dfrac{y}{x}$; $z'_y=2y\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x^2+y^2}{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

16.40. $z'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\dfrac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$.

16.41. $z'_x=3y\cdot 2^{\sin 3xy}\cdot\ln 2\cdot\cos 3xy$;
$z'_y=3x\cdot 2^{\sin 3xy}\cdot\ln 2\cdot\cos 3xy$.

16.42. $z'_x=-3\cos^2(3x^2-5xy)\cdot\sin(3x^2-5xy)\cdot\left(6x-5y\right)$;

$z'_y = 15x\cos^2(3x^2 - 5xy) \cdot \sin\,(3x^2 - 5xy)$.

16.43. $z'_x = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}$; $z'_y = x^{\sin y} \cdot \ln x \cdot \cos y$.

16.44. $z'_x = \left(2y - 3\right)(x^2 + 2x)^{2y-4} \cdot \left(2x + 2\right)$;

$z'_y = 2(x^2 + 2x)^{2y-3} \cdot \ln(x^2 + 2x)$.

16.45. $z'_x = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$;

$z'_y = -\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$.

16.46. $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$; $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$.

16.47. $z'_x = \dfrac{-2y}{x^2 \sin\dfrac{2y}{x}}$; $z'_y = \dfrac{2}{x\sin\dfrac{2y}{x}}$.

16.48. $z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$; $z'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$.

16.49. $z'_x = \dfrac{-\cos(2y^3 - 3)}{x^2}$; $z'_y = \dfrac{-6y^2\sin(2y^3 - 3)}{x}$.

16.50. $z'_x = (6xy - 3x^2y^2)e^{-xy}$; $z'_y = (3x^2 - 3x^3y)e^{-xy}$.

16.51. $z'_x = \dfrac{-2\sqrt{y}}{x^2 \sin\dfrac{2\sqrt{y}}{x}}$; $z'_y = \dfrac{1}{x\sqrt{y}\sin\dfrac{2\sqrt{y}}{x}}$.

16.52. $z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{xy - x^2}}e^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}}$; $z'_y = \dfrac{-\sqrt{x}}{2y\sqrt{y - x}}e^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

16.53. $z'_x = \dfrac{1}{y}\left(e^{\frac{x}{y}} - e^{-\frac{x}{y}}\right)$; $z'_y = \dfrac{x}{y^2}\left(e^{-\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}}\right)$.

16.54. $u'_x = \sqrt[3]{z} - \dfrac{y}{4x \cdot \sqrt[4]{x}}$; $u'_y = z + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$; $u'_z = \dfrac{x}{3\sqrt[3]{z^2}} + y$.

16.55. $u'_x = \dfrac{yz^2}{y^2x^2 + z^4}$; $u'_y = \dfrac{xz^2}{y^2x^2 + z^4}$; $u'_z = \dfrac{-2xyz}{y^2x^2 + z^4}$.

16.56. $u'_x = 2xy\sin\left(xyz\right) + x^2y^2z\cos\left(xyz\right)$;

$u'_y = x^2\sin(xyz) + x^3yz\cos(xyz)$; $u'_z = x^3y^2\cos(xyz)$.

16.57. $u'_x = yz(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x$; $u'_y = z(\sin x)^{yz}\cdot\ln\sin x$;

$u'_z = y(\sin x)^{yz}\cdot\ln\sin x$.

16.58. $u'_x = (3x^2 + y^2 + z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$; $u'_y = 2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$;

$u'_z = 2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

16.65. $dz = \dfrac{y - x + 2\sqrt{xy}}{2\sqrt{x}(x+y)^2}dx + \dfrac{y - x - 2\sqrt{xy}}{2\sqrt{y}(x+y)^2}dy$.

16.66. $dz = e^{xy}(xy + y^2 + 1)\,dx + e^{xy}(x^2 + xy + 1)dy$.

16.67. $dz = \dfrac{3(x^2 - y)}{x^3 + y^3 - 3xy}dx + \dfrac{3(y^2 - x)}{x^3 + y^3 - 3xy}dy$.

16.68. $dz = \dfrac{x^4dx - y^4dy}{\sqrt[5]{(x^5 - y^5)^4}}$. **16.69.** $dz = \dfrac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy}{2\sqrt{\ln xy}}$.

16.70. $du = \dfrac{1}{1 + (x-y)^{2z}}(z(x-y)^{z-1}dx - z(x-y)^{z-1}dy + (x-y)^z\ln(x-y)dz)$.

16.71. $\dfrac{5}{3}$. **16.72.** $-0,08$. **16.73.** $0,004$. **16.74.** $0,979$.

16.75. $0,005$. **16.76.** $1,013$. **16.77.** $1,05$.

16.78. $z''_{xx} = 24x + 6y$; $z''_{xy} = 6x + 6y$; $z''_{yy} = 6x - 6y$.

16.79. $z''_{xx} = 0$; $z''_{xy} = -\dfrac{2}{y^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{6x}{y^4}$.

16.80. $z''_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$;

$z''_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$; $z''_{yy} = -x\sin(x+y)$.

16.81. $z''_{xx} = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}$; $z''_{xy} = \dfrac{2x\sin x^2}{y^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}$.

16.82. $z''_{xx} = -\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$; $z''_{xy} = -\dfrac{2y}{(x+y^2)^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$.

16.83. $z''_{xx} = \dfrac{-y^2}{(2xy + y^2)\sqrt{2xy + y^2}}$; $z''_{xy} = \dfrac{xy}{(2xy + y^2)\sqrt{2xy + y^2}}$;

$$z''_{yy}=\frac{-x^2}{(2xy+y^2)\sqrt{2xy+y^2}}.$$

16.84. $z''_{xx}=2a^2\cos 2\left(ax+by\right)$; $z''_{xy}=2ab\cos 2\left(ax+by\right)$;

$z''_{yy}=2b^2\cos 2\left(ax+by\right)$.

16.85. $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$. **16.88.** $\dfrac{24x^2}{y^3z^4}$.

Відповіді до глави 17

17.10. $9+7\sqrt{3}$. **17.11.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

17.12. 5. **17.17.** $\dfrac{7}{9}$. **17.14.** $\left(\dfrac{3}{10};0\right)$. **17.15.** $\left(\dfrac{3}{2}e^{\frac{5}{4}};-3e^{\frac{5}{4}}\right)$.

17.16. $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **17.17.** $\left(1;0;-\dfrac{1}{3}\right)$. **17.18.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)-min$.

17.19. екстремуму немає. **17.20.** $z_{min}\left(1;2\right)=-7$.

17.21. $z_{min}\left(0;0\right)=4$. **17.22.** $z_{min}\left(3;3\right)=-27$. **17.23.** $z_{min}\left(0;0\right)=4$.

17.24. $z_{min}\left(1;3\right)=20-18\ln 3$. **17.25.** $z_{min}\left(-2;0\right)=-\dfrac{2}{e}$.

17.26. $z_{max}\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)=0$. **17.27.** $z_{min}\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)=-4,75$.

17.28. $z_{min}\left(1;0\right)=0$; $z_{max}\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}$. **17.29.** $z_{min}\left(1;1\right)=2$.

17.30. $z_{min}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}};-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=e^{-\sqrt{5}}$; $z_{max}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=e^{\sqrt{5}}$.

17.31. $\max\limits_D z=6$; $\min\limits_D z=3$. **17.32.** $\max\limits_D z=4$; $\min\limits_D z=0$.

17.33. $\min\limits_D z=-64$; $\max\limits_D z=\dfrac{64}{27}$. **17.34.** $\min\limits_D z=-\dfrac{1}{3}$; $\max\limits_D z=2$.

17.35. $\min\limits_D z=-11$; $\max\limits_D z=9$.

Література

1. Барковський В. В. Математика для економістів : навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська – К.: НАУ, 1999. – 448с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 2002. – 384 с.
3. Валуєв К. Г. Вища математика : навч. посібник. У 2-х ч. / К. Г. Валуєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 452 с.
4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання-Прес, 2002. – 454 с.
5. Вища математика : навч. посібн. для самост. вивч. дисц. / під ред. К. Г. Валуєва – К. : КНЕУ, 1999. – 453с.
6. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 440 с.
7. Высшая математика : сборник задач / под ред. П. Ф. Овчинникова. – К. : Вища школа, 1999. – 350 с.
8. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. М. : ВШ, 2003. – 416 с.
9. Клетеник А. В. Сборник задач по аналитической геометрии / А. В. Клетеник. – М. : Наука, 2002. – 240 с.
10. Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посібник / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. - Харків: Вид. «ІНЖЕК», 2006. – 544 с.
11. Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посібн. до розв'язання задач / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. - Харків : Вид ХНЕУ, 2008. – 476 с.
12. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Наука, 1999, 2002. – 352 с.
13. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. . В. И. Ермакова. – М., 2003. – 464 с.
14. Тевяшев А. Д. Высшая математика. Сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшев, А. Г. Литвин. – Харків : ХТУРЭ, 1999. – 192 с.
15. Травкін Ю. І. Математика для економістів : подручник / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Харків : Вид. «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.