МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**МАЛЯРЕЦЬ Л.М.
АФАНАСЬЄВА Л.М.,
ІГНАЧКОВА А.В.,**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Харків
ВД "ІНЖЕК"
Харків 2011

ВСТУП

Фундаментальну основу в математичній підготовці економістів та менеджерів складає дисципліна „Математика для економістів”, яка є нормативною дисципліною природно-наукового циклу та являється складовою структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів з усіх економічних спеціальностей. Сучасною тенденцією у вищій освіті є переорієнтація студентів з процесу навчання на результат, на формування певних професійних компетенцій, які необхідні економісту в будь-яких сферах його діяльності.

Основними завданнями вивчення даної дисципліни є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної спрямованості, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін математичного циклу, таких, як „Економіко-математичне моделювання” та спеціалізованих курсів з економіки, таких, як „Теоретична та прикладна статистика”, „Економічна статистика”, „Аналіз виробничо-господарської діяльності”, „Економіко-математичне моделювання фінансового стану підприємства”, „Багатовимірний аналіз даних у контролі й аудиті”, а також „Комп’ютерна техніка та програмування” та інші.

Завдяки вивченню дисципліни студент повинен отримати базові знання з лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, вміти проводити основні математичні обчислення, аналізувати, обробляти отримані результати та робити висновки на достатньо високому професійному рівні, самостійно застосовувати отриманні знання для розв’язання відповідних задач та ситуаційних вправ.

Навчальний посібник створений авторами на основі багаторічного досвіду викладаня математики студентам економічних спеціальностей. Під час написання даної роботи, автори керувалися дидактичним принципом у висвітленні матеріалу з кожної теми і побудові самої структури навчального посібника за темами, яка в цілому відповідає вимогам програми з математики для економістів, затвердженої Міністерством освіти і науки України.

Слід відзначити, що сучасні навчальні плани вивчення вищої математики пропонують кількість годин ,більше половини яких відведено на самостійне засвоювання дисципліни. З метою допомогти студентам самостійно оволодівати теоретичними основами курсу та методами розв'язання задач, автори учбового посібника пропонують повний навчально методичний комплекс першої частини курсу.

В посібнику поєднується теоретичний матеріал з великою кількістю прикладів, які його застосовують. Пропонуються методичні рекомендації розв'язання багатьох типових задач та вправи для самостійної роботи з відповідями.

Навчальний посібник включає частину курсу, яка складається з таких розділів вищої математики: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної, основні поняття функцій багатьох змінних.

Матеріал з аналітичної геометрії дається в стислому вигляді, він дає можливість засвоїти основні поняття, які ,частіше за все, використують при вивченні подальших курсів з математики.

Найбільш повно представлено курс лінійної алгебри, який є теоретичною та практичною базами для вивчення прикладних математичних дисциплін. Особу увагу звернено на дослідження систем лінійних рівнянь, що мають безліч розв'язків,знаходження базисних розв'язків та ін.

Теоретичний та практичний матеріал з математичного аналізу, як найбільший і достатньо складний розділ вищої математики, займає значну частину посібника і дається в повному обсязі, необхідному для засвоювання курсу.

Завдяки теоретичному матеріалу та великій кількості розібраних і проаналізованих задач даний навчальний посібник може бути довідником для спеціалістів у різних галузях економіки при вирішенні реальних задач, де потрібно застосувати інструменти вищої математики.

Автори сподіваються, що даний навчальний посібник стане корисним студентам, які прагнуть отримати знання з вищої математики та викладачам для проведення занять та організації індивідуальної роботи студентів.

ВСТУП

Фундаментальну основу в математичній підготовці економістів та менеджерів складає дисципліна „Математика для економістів”, яка є нормативною дисципліною природно-наукового циклу та являється складовою структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів з усіх економічних спеціальностей. Сучасною тенденцією у вищій освіті є переорієнтація студентів з процесу навчання на результат, на формування певних професійних компетенцій, які необхідні економісту в будь-яких сферах його діяльності.

Основними завданнями вивчення даної дисципліни є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної спрямованості, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін математичного циклу, таких, як „Економіко-математичне моделювання” та спеціалізованих курсів з економіки, таких, як „Теоретична та прикладна статистика”, „Економічна статистика”, „Аналіз виробничо-господарської діяльності”, „Економіко-математичне моделювання фінансового стану підприємства”, „Багатовимірний аналіз даних у контролі й аудиті”, а також „Комп’ютерна техніка та програмування” та інші.

Завдяки вивченню дисципліни студент повинен отримати базові знання з лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, вміти проводити основні математичні обчислення, аналізувати, обробляти отримані результати та робити висновки на достатньо високому професійному рівні, самостійно застосовувати отриманні знання для розв’язання відповідних задач та ситуаційних вправ.

Навчальний посібник створений авторами на основі багаторічного досвіду викладаня математики студентам економічних спеціальностей. Під час написання даної роботи, автори керувалися дидактичним принципом у висвітленні матеріалу з кожної теми і побудові самої структури навчального посібника за темами, яка в цілому відповідає вимогам програми з математики для економістів, затвердженої Міністерством освіти і науки України.

Слід відзначити, що сучасні навчальні плани вивчення вищої математики пропонують кількість годин ,більше половини яких відведено на самостійне засвоювання дисципліни. З метою допомогти студентам самостійно оволодівати теоретичними основами курсу та методами розв'язання задач, автори учбового посібника пропонують повний навчально методичний комплекс першої частини курсу.

В посібнику поєднується теоретичний матеріал з великою кількістю прикладів, які його застосовують. Пропонуються методичні рекомендації розв'язання багатьох типових задач та вправи для самостійної роботи з відповідями.

Навчальний посібник включає частину курсу, яка складається з таких розділів вищої математики: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної, основні поняття функцій багатьох змінних.

Матеріал з аналітичної геометрії дається в стислому вигляді, він дає можливість засвоїти основні поняття, які ,частіше за все, використують при вивченні подальших курсів з математики.

Найбільш повно представлено курс лінійної алгебри, який є теоретичною та практичною базами для вивчення прикладних математичних дисциплін. Особу увагу звернено на дослідження систем лінійних рівнянь, що мають безліч розв'язків,знаходження базисних розв'язків та ін.

Теоретичний та практичний матеріал з математичного аналізу, як найбільший і достатньо складний розділ вищої математики, займає значну частину посібника і дається в повному обсязі, необхідному для засвоювання курсу.

Завдяки теоретичному матеріалу та великій кількості розібраних і проаналізованих задач даний навчальний посібник може бути довідником для спеціалістів у різних галузях економіки при вирішенні реальних задач, де потрібно застосувати інструменти вищої математики.

Автори сподіваються, що даний навчальний посібник стане корисним студентам, які прагнуть отримати знання з вищої математики та викладачам для проведення занять та організації індивідуальної роботи студентів.

РОЗДІЛ 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Глава1. Первісна та невизначений інтеграл. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування

1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.

Однією з основних задач диференціального числення є пошук похідної заданої функції. Різноманітні дослідження в багатьох галузях науки, в тому числі економічної, приводять до розв'язання оберненої задачі, а саме за даною функцією $f(x)$ знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.

Відновлення функції за відомою похідною цієї функції складає одну з основних задач інтегрального числення.

Отже, якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)$ то $dF(x)=F'(x)dx$. Позначимо $F'(x)=f(x)$, тоді диференціал функції:

$$dF(x)=f(x)dx, \tag{1.1}$$

а треба знайти с аму функцію $F(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною функцією для функції $f(x)$ на множині X, якщо для будь-якої змінної $x\in X$ функція $F(x)$ диференційована і $F'(x)=f(x)$, або $dF(x)=f(x)dx$.

Приклади. Знайти первісні для функцій.

1.1 Нехай функція $f(x)=1/x$, тоді $F(x)=\ln|x|$ – первісна для функції $f(x)$ на, тому що $\left(\ln|x|\right)'=1/x$.

1.2 Якщо $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$ на інтервалі $(-1;1)$, то $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ – первісна, бо в будь-якій точці x цього інтервалу $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-x/\sqrt{1-x^2}$.

1.3 Якщо $f\left(x\right)=x^3$, то $F\left(x\right)=\frac{x^4}{4}$, тому що $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$. Але також $F\left(x\right)=\frac{x^4}{4}+1$, тому що $\left(\frac{x^4}{4}+1\right)'=x^3$. Отже, $F\left(x\right)=\frac{x^4}{4}+C$, де $C-$ довільна стала . Як бачимо, задача відшуку первісної для функції $f\left(x\right)$ розв'язується неоднозначно.

В прикладах, які наведені вище, загальний вигляд усіх первісних для заданих функцій буде:

1. $F(x)+C=\ln|x|+C, \quad f(x)=1/x$.
2. $F\left(x\right)+C=\sqrt{1-x^2}+C, \quad f\left(x\right)=-x/\sqrt{1-x^2}$.
3. $F\left(x\right)+C=\frac{x^4}{4}+C, \quad f\left(x\right)=x^3$.

Теорема. 1. Якщо $F\left(x\right)-$ первісна для $f\left(x\right)$ на X, то $F\left(x\right)+C$, також первісна для $f\left(x\right)$, де $C-$стала величина.

2. Якщо $F_1\left(x\right)$ та $F_2\left(x\right)-$ дві первісні для $f\left(x\right)$ на X, то $F_1\left(x\right)-F_2\left(x\right)=C$, тобто ці функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

Доведення.

Те, що разом з функцією $F\left(x\right)$ функція $F\left(x\right)+C$ також є первісною для функції $f\left(x\right)$, очевидно, бо $\left(F\left(x\right)+C\right)'=F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

Для доведення другої частини цієї теоремі складемо функцію $\varphi\left(x\right)=F_1\left(x\right)-F_2\left(x\right)$, де $F_1'\left(x\right)=f\left(x\right)$ і $F_2'\left(x\right)=f\left(x\right)$, оскільки ці функції первісні для $f\left(x\right)$. Тоді $\varphi'\left(x\right)=F_1'\left(x\right)-F_2'\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(x\right)=0$, $x\in X$. Звідси, функція $\varphi\left(x\right)=C$, тобто $F_1\left(x\right)-F_2\left(x\right)=C$. Отже, з даної теореми випливає, якщо $F\left(x\right)$ - одна з первісних для $f\left(x\right)$, то множина всіх первісних має вигляд $F\left(x\right)+C$.

Означення. Якщо функція $F(x)-$ первісна для функції $f(x)$, то множина функцій $F(x)+C$, де $C-$ довільна стала, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається таким чином:

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \quad .(1.2)$$

Тут символ $\int$ називається інтегралом, $f(x)dx-$підінтегральним виразом, $f(x)-$ підінтегральною функцією, $x-$змінною інтегрування. Операція відновлення функції за її похідною, або знаходження $F(x)+C$ функції $f(x)$, називається інтегруванням $f(x)$.

З геометричної точки зору первісна – це лінія $y=F(x)$, а невизначений інтеграл – це сім'я ліній $y=F(x)+C,$ яка одержується шляхом зсунення однієї з них паралельно вздовж осі Oy. Так за геометричним змістом похідна $F'(x)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої $y=F(x)$ в точці з абсцисою x. Тоді знайти первісну для $f(x)$ означає знайти таку криву $F(x)$, що кутовий коефіцієнт дотичної до неї в довільній точці x дорівнював би значенню $f(x)$ в цій точці.

Таким чином,з означення невизначеного інтеграла можна зробити висновок: для того, щоб перевірити чи правильно виконане інтегрування, достатньо продиференціювати результат і отримати при цьому підінтегральну функцію.

1.2. Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла за незалежною змінною дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \quad (1.3)$$

Дійсно, $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює подінтегральному виразу , тобто:

а) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

б) $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доведення.

З означення невизначеного ітеграла:

а) $d\int f(x)dx = d\left(F(x)+C\right) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

б) $d\int dF(x) = d\left(F(x)+C\right) \;= F'(x)dx = dF(x).$

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \qquad .(1.4)$$

Знайдемо похідні від обох частин рівності.

Від лівої частини: $\left(\int Af(x)dx\right)' = Af(x)$ на основі властивості (1.3)

Від правої частини: $A\left(\int f(x)dx\right)' = A\left(\int(x)dx\right)' = Af(x)$.

Отже, похідні від обох частин наведеного вище співвідношення рівні між собою, тобто описують одну й ту ж саму множину первісних.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx. \qquad (1.4)$$

Знову здиференціюємо обидві частини цієї рівності.

$\left(\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x)$.

$\left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' \pm \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x)$.

Як бачимо, похідні від обох частин рівності співпали, значить правильна й сама рівність.

5. Якщо в підінтегральній функції змінну інтегрування помножити на будь-який сталий множник k, то первісна підінтегральної функції ділиться на цей множник:

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx)+C\,, \qquad (1.5)$$

а також

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C\,. \qquad (1.6)$$

Доведення останньої властивості аналогічне доведенню властивостей 3 і 4.

1.3. Таблиця основних інтегралів

Відомо, що невизначений інтеграл це множина усіх первісних даної функції. Отже, скористуємось означенням інтеграла і формулами диференціювання та складемо таблицю основних інтегралів. Доведення всіх формул здійснюємо диференціюванням їх правих частин.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad (n\neq -1); \quad \left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)' = x^n$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C; \quad (\ln|x|+C)' = \dfrac{1}{x}$.

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C; \quad (\sin x + C)' = \cos x$.

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad (-\operatorname{ctg} x + C)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \quad (-\ln|\cos x| + C)' = \operatorname{tg} x$.

8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \quad (\ln|\sin x| + C)' = \operatorname{ctg} x$.

14. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C, (a>0;\ a\neq 1); \quad \left(\dfrac{a^x}{\ln a}+C\right)' = a^x$.

10. $\int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a}+C, \quad (-a<x<a); \quad \left(\arcsin\dfrac{x}{a}+C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0); \quad \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a^2+x^2}$.

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C; \quad \left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \frac{1}{x^2-a^2}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \quad \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Правильність наведених формул перевіряється безпосередньо їх диференціюванням. Наприклад,розглянемо формулу (14).Знайдемо похідну від правої частини рівності:

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2 + x}}{\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

дорівнює підінтегральній функції лівої частини, тобто формула правильна.

1.4 Безпосереднє інтегрування

Знаходження інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів та основних властивостей невизначеного інтеграла, залучаючи тотожні перетворення підінтегральної функції, називається безпосереднім інтегруванням. Наведемо декілька прикладів безпосереднього інтегрування.

Приклади.Знайти інтеграли.

1.4. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

1.5. $\int (3x-1)^5 dx = \frac{(3x-1)^6}{3 \cdot 6} + C$.

1.6. $\int \left(3x^2-1\right)^2 dx = \int \left(9x^4 - 6x^2 + 1\right) dx =$

$$= 9\int x^4 dx - 6\int x^2 dx + \int dx = \frac{9x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + x + C.$$

1.7. $\int\left(2\sin x-4+3\sqrt{x}+\frac{5}{x^2+4}-\frac{1}{x}\right)dx=2\int\sin x dx-4\int dx+3\int\sqrt{x}dx+$

$+5\int\frac{dx}{x^2+4}-\int\frac{dx}{x}=-2\cos x-4x+3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\ln|x|+C=$

$-2\cos x-4x+2x\sqrt{x}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\ln|x|+C.$

У даному прикладі були використані властивості 3 та 4 і далі, відповідно до формули 3, 1, 12, 2 таблиці інтегралів.

1.8. $\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=$

$=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=$

$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$

В інтегралі було використане співвідношення $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, та формули 6 і 5 таблиці інтегралів.

1.9. $\int\frac{dx}{4x^2+9}=\frac{1}{2\cdot 3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+C.$

1.10. $\int\frac{dx}{4x^2-9}=\frac{1}{6\cdot 2}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C.$

1.11. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2\pm 9}}=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2\pm 9}\right|+C.$

1.12. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C.$

1.13. $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+2)+C$

1.14. $\int\frac{dx}{x^2+4x-5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$

1.15. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$

1.16. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}}=\arcsin(x+2)+C$

Для перевірки знайдених інтегралів треба знайти похідні від одержаних первісних і довести, що $F'(x) = f(x)$.

Запитання для самодіагностики.

1. Яка функція називається первісною для даної функції
2.Що називається невизначеним інтегралом?
3.Сформулювати властивості невизначеного інтеграла.
4.Чому дорівнює інтеграл від степеневої функції?
5.Запишіть табличні інтеграли від тригонометричних функцій.
6.Чому дорівнює інтеграл від показникової функції?
7.Знайдіть невизначений інтеграл від функції $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$.
8. Знайдіть невизначений інтеграл від функції $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$.
9.Знайдіть невизначений інтеграл від функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.
10. Знайдіть невизначений інтеграл від функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.
11. В чому полягає метод безпосереднього інтегрування?

Приклади і вправи.

Приклади.

1.17. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування.

1) $\int (2x^9 - 6x^5 + 3)dx$; 2) $\int \sqrt[3]{x^2}(8\sqrt[3]{x} - 1)\,dx$;

3) $\int \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \dfrac{x^2}{4 - x^2}dx$;

5) $\int \dfrac{3}{x^2 + 5}dx$; 6) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 10}$;

7) $\int \dfrac{2dx}{\sqrt{8 - x^2}}$; 8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2(2x + 3)}$;

9) $\int (3x+1)^9\,dx$;   10) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$;

11) $\int \cos(1-5x)\,dx$;   12) $\int \frac{dx}{3x+1}$;

13) $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$;   14) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

Розв'язання.

1) $$\int (2x^9-6x^5+3)\,dx = 2\int x^9dx - 6\int x^5dx + 3\int dx =$$
$$= \frac{2x^{10}}{10} - 6\frac{x^6}{6} + 3x + C = \frac{x^{10}}{5} - x^6 + 3x + C.$$

2) $$\int \sqrt[3]{x^2}\,(8\sqrt[3]{x}-1)\,dx = \int \left(8x - x^{\frac{2}{3}}\right)dx = 8\int x dx - \int x^{\frac{2}{3}}dx =$$
$$= 8\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} + C = 4x^2 - \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$$

3) $$\int \frac{x^2-2x+3}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}}\right)dx =$$
$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}} + C.$$

4) $$\int \frac{x^2}{4-x^2}\,dx = \int \frac{x^2-4+4}{4-x^2}\,dx = \int \left(-1 - \frac{4}{x^2-4}\right)dx =$$
$$= -\int dx - 4\int \frac{dx}{x^2-4} = -x - 4\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = -x - \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

5) $$\int \frac{3}{x^2+5}\,dx = 3\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

6) $$\int \frac{dx}{x^2-10} = \int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{10})^2} = \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C.$$

7) $$\int \frac{2dx}{\sqrt{8-x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{8})^2-x^2}} = 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}} + C.$$

8) $$\int \frac{dx}{\cos^2(2x+3)} = \frac{1}{2}tg\,(2x+3) + C.$$

9) $\int(3x+1)^9\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^{10}}{10}+C=\frac{(3x+1)^{10}}{30}+C.$

10. $$\int\sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx=\int(8-3x)^{\frac{6}{5}}\,dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(8-3x)^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}}+C=$$

$$=-\frac{5\cdot\sqrt[5]{(8-3x)^{11}}}{33}+C.$$

11. $\int\cos(1-5x)\,dx=-\frac{1}{5}\sin(1-5x)+C=\frac{\sin(5x-1)}{5}+C.$

12. $\int\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C.$

13. $\int\frac{x^2dx}{x^3+5}=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3+5}dx=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right|+C.$

14. $$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C.$$

1.18. $\int\frac{(x^2-1)(x+2)}{\sqrt{x}}dx$.

Розв’язання.

Спочатку перетворимо підінтегральну функцію

$$\frac{(x^2-1)(x+2)}{\sqrt{x}}=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}.$$

Далі використовуємо властивості (5) і (4), а також формулу **(1)**. Отже,

$$\int\frac{(x^2-1)(x+2)}{\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx+2\int x^{\frac{3}{2}}dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\cdot\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+\frac{4}{5}\sqrt{x^5}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}+C.$$

1.19. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

Розв’язання.

Оскільки $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$, то

$$\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} = \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int\left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\right)dx$$,отже

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}tgx + \frac{1}{2}x + C.$$

1.20. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв’язання.

Спочатку перетворимо підінтегральну функцію

$\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 1$, отже

$$\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int dx =$$

$$= 2\arcsin x - x + C.$$

1.21. $\int\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

Розв’язання.

Підінтегральну функцію можна перетворити так:

$$\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 - \sin x.$$

Маємо

$$\int\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int(1-\sin x)dx = \int dx - \int \sin x dx =$$

$$= x + \cos x + C.$$

1.22. $\int \frac{9+4x^2}{x^2(9+x^2)}dx$.

Розв’язання.

Підінтегральну функцію можна перетворити так:

$$\frac{9+4x^2}{x^2\left(9+x^2\right)}=\frac{9+x^2+3x^2}{x^2\left(9+x^2\right)}=\frac{9+x^2}{x^2\left(9+x^2\right)}+\frac{3x^2}{x^2\left(9+x^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{9+x^2}.$$

Маємо

$$\int\frac{9+4x^2}{x^2\left(9+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{9+x^2}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{3}{9+x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

Вправи.

Знайти такі інтеграли, застосовуючи властивості невизначеного інтеграла та таблицю інтегралів.

1.23. $\int(x^4-4x^2+2x)\,dx.$

1.24. $\int(9x^2-10\sqrt[4]{x}+3\sqrt{x})\,dx.$

1.25. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx..$

1.26. $\int\frac{(4-3\sqrt{x})^2}{x^2}dx.$

1.27. $\int(2x^2+1)(2+3x^3)dx.$

1.28. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}.$

1.29. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}..$

1.30. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

1.31. $\int\frac{3-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3-x^2}}dx.$

1.32. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx.$

1.33. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

1.34. $\int tg^2 x dx.$

1.35. $\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx.$

1.36. $\int\cos^2\frac{x}{2}dx.$

1.37. $\int\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx.$

1.38. $\int\frac{5-4x\sin^2 x}{\sin^2 x}dx..$

1.39. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x}..$

1.40. $\int\frac{\cos 3x+\cos 5x}{\cos 4x}dx.$

1.41. $\int \frac{\sin 9x - \sin 5x}{\cos 7x} dx.$

1.42. $\int \frac{\cos 7x - \cos x}{\sin 3x} dx.$

1.43. $\int (1-3x)^{17} dx.$

1.44. $\int \frac{3dx}{(2x-3)^3}.$

1.45. $\int \sqrt{8-2x}dx.$

1.46. $\int \sqrt[4]{(12x-5)^3}dx.$

1.47. $\int e^{3x-5}dx.$

1.48. $\int tg 3x dx.$

1.49. $\int \sin 5x dx.$

1.50. $\int \frac{dx}{11-4x}.$

1.51. $\int \frac{dx}{16+25x^2}.$

1.52. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}.$

1.53. $\int \frac{dx}{4x^2-25}.$

1.54. $\int \frac{dx}{\sin^2(7x-2)}.$

1.55. $\int \frac{xdx}{x^2+5}.$

1.56. $\int \frac{e^x}{e^x-3} dx.$

1.57. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx.$

1.58. $\int \frac{3dx}{x \ln x}.$

1.59. $\int \frac{3\sin x}{1-2\cos x} dx.$

1.60. $\int \frac{3x^3}{2x^4+3} dx.$

D:\РаботыДляРепозитария\ВысшМатемат(2часть)\Глава 2.doc

Глава 2. Методи інтегрування в невизначеному інтегралі

2.1. Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі

Якщо невизначений інтеграл не є табличним, то в багатьох випадках до мети приведе метод інтегрування заміною змінної, що є основним методом обчислення інтегралів. Метод підстановки або заміни змінної відіграє одну з основних ролей в інтегральному обчисленні

Нехай треба знайти інтеграл $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, який безпосередньо обчислити не можна, де підінтегральна функція – неперервна. Припустимо $t = \varphi(x)$, тоді

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \text{, де } dt = \varphi'(x)dx \text{, якщо} \tag{2.1}$$

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

де

$$dF(t) = F'(t)dt = f(t)dt,$$

тоді

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C. \tag{2.2}$$

Доведення.

Знайдемо диференціал від правої частини рівності (2.2):

$$d(F(\varphi(x) + C) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx.$$

Отже, диференціал дорівнює підінтегральному виразу і формулу (2.2) доведено.

Звернемо увагу на інтеграли, де чисельник підінтегрального виразу є диференціалом знаменника, тобто

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}. \tag{2.3}$$

Якщо тут прийняти $t = f(x)$, то в чисельнику стоїть $f'(x)dx = dt$, тоді

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Проілюструємо використання методу підстановки на прикладах.

Приклади .Знайти інтеграли.

2.1. $\int e^{x^2} xdx.$

Розв'язання.

В цьому прикладі треба зробити заміну $t = x^2$, тоді $2xdx = dt$, а $xdx = \frac{dt}{2}$. Скориставшись цією заміною, перепишемо інтеграл:

$$\int e^{x^2} xdx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

2.2. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання.

В чисельнику цього інтеграла бачимо, що $\cos xdx = d(\sin x)$, тому взявши $\sin x = t,\ \cos xdx = dt$, одержимо:

$$\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

2.3. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$.

Розв'язання.

Взявши $x^2 + 3x + 5 = t$, $(2x+3)dx = dt$, одержимо

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+3x+5\right| + C.$$

Розглянемо заміну змінної в деяких інтегралах, вигляду $\int f(x)dx$, який безпосередньо обчислити не можна. Припустимо, що змінна інтегрування $x=\varphi(t)$, причому $\varphi(t)$— неперервна функція, яка має неперервну похідну, а також обернену функцію $t=t(x)$. Тоді $dx=\varphi'(t)dt$, і шуканий інтеграл після підстановки нової змінної t буде мати вигляд:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.4)$$

Якщо інтеграл в правій частині можна взяти безпосередньо, то після інтегрування знову треба перейти до початкової змінної x.

Доведення.
Знайдемо похідні від обох частин цього співвідношення.
Отже, похідна від правої частини:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Похідна від лівої частини:

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\frac{dt}{dx}=$$

$$= f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}= f(\varphi(t))= f(x). \qquad (2.5)$$

Права частина – це складена функція аргументу x, де t – проміжний аргумент, причому, якщо $x'_t=\varphi'(t)$, то за правилом диференціювання оберненої функції:

$$\frac{dt}{dx}=t'_x=\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Отже, похідні правої та лівої частин рівні, а значить і сама рівність має місце з точністю до сталої величини, що не суперечить визначенню невизначеного інтеграла.

Приклад 2.4.Знайти $\int x\sqrt{x+1}dx$.

Розв'язання..

Зробимо заміну $x+1=t^2$, тобто $x=t^2-1$, звідки $dx=2tdt$. Маємо

$$\int x\sqrt{x+1}dx=\int\left(t^2-1\right)t\cdot 2tdt=2\int\left(t^4-t^2\right)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C.$$

Використовували властивості (4) і (5), а також формулу (1).Тепер повертаємось до змінної x, $t=\sqrt{x+1}$. Отже,

$$\int x\sqrt{x+1}dx=2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^5}}{5}-\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right)+C.$$

Приклад 2.5.Знайти $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

Зробимо заміну $x=t^2$, тоді $dx=2tdt$. Маємо

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{tdt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=2\int\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{t+1}\right).$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\left(t-\ln\left|t+1\right|\right)+C.$$

Використовували властивості (4) і (5), а також формули (1) і (2). Повертаємось до змінної x, використовуючи $x=t^2$ або $t=\sqrt{x}$.Таким чином,

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\left(\sqrt{x}-\ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right)+C.$$

Приклад 2.6.Знайти інтеграл: $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx.$

Розв'язання.

Якщо покласти $x = a\sin t$, то $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t$ і $dx = a\cos tdt.$ Отже, маємо

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a\cos t \cdot a\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int \left(1+\cos 2t\right)dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2tdt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Використано формулу $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$. Оскільки $t = \arcsin\frac{x}{a}$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t$,то повертаючись до змінної x, одержимо:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Як бачимо із прикладу, що завдяки вдалому вибіру підстановки . інтеграл було значно спрощено.

2.2. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовані функції аргумента x. Тоді $d(uv) = vdu + udv$, звідки $udv = d(uv) - vdu$. Інтегруючи цю рівність, одержимо:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2.6)$$

Це і є формула інтегрування частинами, вона використовується тоді, коли $\int vdu$ не складніший за $\int udv$.

Формула використовується для знаходження інтегралу $\int f(x)dx$, якщо $f(x)$ має вигляд:

1. $P_n(x)a^{bx}$; $P_n(x)e^x$; $P_n(x)\sin mx$; $P_n(x)\cos mx$

2. $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\operatorname{arc}\sin x$, $P_n(x)\operatorname{arc}\sin x$; $P_n(x)\operatorname{arc}\cos x$; $P_n(x)\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$; $P_n(x)\operatorname{arcctg} x$, де $P_n(x)$ - многочлен.

Інтеграли такого типу є стандартними і обчислюються лише за формулою інтегрування частинами. При цьому в інтегралах першого виду за u беремо многочлен $P_n(x)$, а в інтегралах другого виду трансцендентну функцію.

Приклади. Знайти інтеграли:

2.7. $\int (x+1)\sin 2x dx$

Розв'язання.

Покладемо $u = x,$ а $dv = \sin 2x dx$. Тоді $du = dx,$ $v = \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}$. Тепер, застосовуючи формулу інтегрування частинами (2.6) , обчислюємо даний інтеграл.

$$\int (x+1)\sin(2x)\,dx = \frac{-1}{2}\cdot\cos(2\cdot x) + \frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot x) - \frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(2\cdot x) + C$$

2.8. $\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C$.

Розв'язання.

Покладемо $u = x^2,$ $dv = e^x dx$. Тоді, $du = 2xdx,$ $v = \int e^x dx = e^x$. Одержимо $\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$. Застосовуючи до інтегралу $\int xe^x dx$ формулу інтегрування частинами, обчислюємо даний інтеграл.

2.9. $\int \arcsin x dx$

Розв'язання.

Позначимо $u = \arcsin x, dv = dx; du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$. Отже застосувавши формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Поклавши $t=1-x^2, dt=-2xdx$, будемо мати $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}$. Тоді

$$\int \arcsin xdx = x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

2.10. $\int \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Розв'язання.

Покладемо $x=u$, а $dv=\frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$, тоді $du=dx$, щоб знайти v треба спочатку зробити таку заміну $\sin x=t$, тоді $dt=\cos xdx$, а $dv=\frac{dt}{t^3}$, значить $v=\int \frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{\sin^2 x}$. Тепер, застосовуючи формулу інтегрування частинами (2.6), одержуємо:

$$\int \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}=-\frac{x}{\sin^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{x}{\sin^2 x}-c\operatorname{tg} x+C.$$

Розглянемо ще один тип інтегралів, які беруться лише частинами. Це інтеграли вигляду $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int \cos(\ln x)dx$, $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$ в яких після дворазового застосування формули інтегрування частинами виникає вихідний інтеграл. В цьому випадку ми приходимо до лінійного рівняння відносно шуканого інтеграла.

Розглянемо такого роду інтеграли на прикладах.

Приклади.Знайти інтеграли.

2.11. $\int e^x \sin xdx$.

Розв'язання.

В інтегралі :$u=e^x, du=e^x dx;\ dv=\sin xdx, v=\int \sin xdx=-\cos x$,отже

$$\int e^x\sin xdx==-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx$$

$\int e^x\cos xdx$ знову беремо частинами. Одержимо:

$$\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int e^x\sin xdx,$$

позначивши $u=e^x, du=e^x dx$, $dv=\cos x dx, v=\int \cos x dx=\sin x$. Таким чином:

$$\int e^x \sin x dx=-e^x \cos x+e^x \sin x-\int e^x \sin x dx,$$

або

$$2\int e^x \sin x dx=-e^x \cos x+e^x \sin x+C,$$

остаточно

$$\int e^x \sin x dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C.$$

2.12. $\int \sin(\ln x)dx$.

Розв'язання.

Нехай $u=\sin(\ln x)$, $dv=dx$. Тоді $du=\cos(\ln x)\frac{dx}{x}$, $v=\int dx=x$. За формулою інтегрування частинами (2.6)маємо

$$\int \sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{dx}{x}=$$
$$=x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx.$$

До останнього інтеграла знову застосовуємо формулу (2.6) .Нехай $u=\cos(\ln x)$, $dv=dx$.Тоді $du=-\sin(\ln x)\cdot\frac{dx}{x}$, $v=\int dx=x$.Маємо

$$\int \sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\left(x\cos(\ln x)-\int x\left(-\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)dx\right)=$$
$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int \sin(\ln x)dx.$$

Розв'язуємо рівняння відносно вихідного інтеграла. Для цього інтеграл, що знаходиться справа, переносимо вліво. Отже,

$$2\int \sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x).$$

Таким чином,

$$\int \sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C.$$

2.13. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

Розв'язання.

Нехай $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $dv=dx$.

Тоді

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2xdx=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}\,,\ v=\int dx=x.$$

За формулою інтегрування частинами (2.6) маємо

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

В чисельнику останнього інтеграла додамо і віднімемо a^2, тобто

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Розв'яжемо рівняння відносно вихідного інтеграла, тобто

$$2\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

Отже,

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)+C.$$

2.3. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.

Розглянемо інтеграл

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Для обчислення цього інтегралу зробимо такі перетворення: виділемо повний квадрат із квадратного тричлену та одержимо квадратний двочлен

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{a}\right] = a\left(t^2 \pm m^2\right),$$

де

$$t = x + \frac{b}{2a}, \quad \left(x = t - \frac{b}{2a}\right), \quad \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \pm m^2.$$

В останній рівності береться знак плюс, якщо $4ac - b^2 > 0$, і знак мінус, якщо $4ac - b^2 < 0$. Таким чином, інтеграл буде мати вигляд:

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 + m^2} \quad \text{або} \quad I = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 - m^2}.$$

Здобули табличні інтеграли.

Розглянемо інтеграл загального вигляду

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}dx.$$

Квадратний тричлен перетворимо в квадратний двочлен, проведемо заміну змінної та запишемо даний інтеграл у вигляді суми двох інтегралів

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{t^2\pm m^2}dt =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2t}{t^2\pm m^2}dt + \frac{1}{a}\int \frac{\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{t^2\pm m^2}dt,$$

де перший інтеграл в правій частині цієї рівності дорівнює модулю натурального логарифму знаменника дробу, а другий – табличний.

Приклад. **2.14.** Знайти інтеграл

$$\int \frac{3x+2}{2x^2+6x+5}.$$

Розв'язання.

. З квадратного тричлена виділимо повний квадрат, одержимо

$$\frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{x^2+3x+\frac{5}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-\frac{9}{4}}dx.$$

Зробимо заміну змінної, поклавши $x+\frac{3}{2}=t, \quad x=t-\frac{3}{2}, \quad dx=dt,$

$$2\int \frac{3t-\frac{9}{2}+2}{t^2+\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{3t-\frac{5}{2}}{t^2+\frac{1}{4}}dt == \frac{3}{4}\int \frac{2t}{t^2+\frac{1}{4}}dt - \frac{5}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{4}2\operatorname{arctg}2t+C = \frac{3}{4}\ln\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{4}2\operatorname{arctg}\left(2x+3\right)+C.$$

Інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{òà} \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

за допомогою перетворень, які було розглянуто вище, приводяться до табличних інтегралів.

Приклад 2.15. Знайти інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2\left(x^2-4x-1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-2\right)^2-5\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{5-\left(x-2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C.$$

2.4. Інтегрування раціональних дробів.

Раціональною функцією називається відношення двох многочленів,

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}.$$

Раціональний дріб $\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена чисельника менша за степінь многочлена знаменника, тобто коли $n<m$, і неправильним – у протилежному випадку, коли $n \geq m$.

Раціональний неправильний дріб завжди можна записати у вигляді

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)} = S_k\left(x\right) + \frac{P_l\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)},$$

де $S_k\left(x\right), P_l\left(x\right)$ – многочлени, причому степінь многочлена $P_l\left(x\right)$ менша за степінь многочлена $Q_m\left(x\right)$. Для цього треба поділити чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів.

Отже, інтегрування неправильного раціонального дробу зводиться до інтегрування цілої частини (многочлена) і правільного раціонального дробу.

Розглянемо спочатку інтегрування елементарних дробів типу:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k – ціле, $k \geq 2$);

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ($p^2-4q<0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів);.

Для знаходження $\int \frac{Adx}{x-a}$ і $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}$ треба зробити заміну змінної $t=x-a$, а $dt=dx$. Тоді

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{dt}{t^k} = A\int t^{-k}dt = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Для знаходження інтеграла 3) в знаменнику виділяємо повний квадрат і робимо заміну.

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

Заміна $x+\frac{p}{2}=t, dx=dt.$ Тепер

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt = \int \frac{At-\frac{Ap}{2}+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt.$$

Останній інтеграл запишемо як суму двох інтегралів, а саме

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{Atdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt.$$

якщо $q-\frac{p^2}{4}>0.$

Повертаємося до старої змінної:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Розглянемо загальний підхід до інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ де $n<m$. Для цього треба:

1. Розкласти знаменник $Q_m(x)$ на найпростіші дійсні множники. За основною теоремою алгебри цей розклад може мати лінійні і квадратичні множники:

$$Q_m(x)=(x-a)^k...(x-b)^l\cdot(x^2+px+q)^s...(x^2+cx+d)^r,$$

квадратичні тричлени не мають дійсних коренів.

2. Написати розклад даного раціонального дробу на елементарні (найпростіші) дроби в такому вигляді:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} +$$
$$+ \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} +$$
$$+ \ldots + \frac{M_s x + N_s}{\left(x^2 + px + q\right)^s} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + cx + d} + \frac{C_2 x + D_2}{\left(x^2 + cx + d\right)^2} +$$
$$+ \ldots + \frac{C_r x + D_r}{\left(x^2 + cx + d\right)^r},$$

де $A_1, ..., B_1, ..., M_1, ..., N_1, ..., C_1, ..., D_1, ...$ – деякі сталі. Треба зауважити, що в цьому розкладі буде стільки дробів, скільки коренів має многочлен $Q_m(x)$, включаючи їх кратність $(k, l, s, \ldots, r)$.

Знаменниками найпростіших дробів є всі цілі степені кожного множника $Q_m(x)$, починаючи з першого степеня і закінчуючи тим степенем, який має множник в розкладі $Q_m(x)$.

Чисельниками найпростіших дробів будуть або сталі $A_1, A_2, ...$ або лінійні функції $M_1 x + N_1, \ldots$ в залежності від того, чи є знаменник дробу який-небудь степінь лінійної чи квадратичної функції.

3. Позбутися знаменника в останньому розкладі, для чого треба помножити обидві частини рівності на $Q_m(x)$.

4. Скласти і розв’язати систему рівнянь, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях х в обох частинах одержаної тотожності.(Кількість цих рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих $A_1, ..., B_1, ..., M_1, ..., N_1, ..., C_1, ..., D_1, ...$).

Систему рівнянь для знаходження невідомих можна знайти інакше. Враховуючи, що тотожність має місце при будь-яких значеннях x, надаємо x довільних числових значень. Як правило, x надаються значення коренів $Q_m(x)$.

Також можна комбінувати ці способи.

5. Розв’язати одержану систему рівнянь. Знайдені значення підставити в розклад раціонального дробу. Отже, інтегрування правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування елементарних дробів.

Розглянемо методи знаходження коефіцієнтів в чисельниках простих дробів, на які розкладається раціональний дріб.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів простих дробів слід користуватися такими твердженнями:

а) у рівних дробів з рівними знаменниками і чисельники рівні.

б) якщо многочлени рівні, то вони дорівнюють один одному при будь-яких значеннях аргументу;

с) якщо многочлени рівні, то їх коефіцієнти при однакових степенях аргументу дорівнюватимуть один одному;

Приклади. Знайти інтеграли.

2.16. $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+5x-6}$.

Розв'язання.

Прирівняємо знаменник підінтегральної функції до нуля: $x^2+5x-6=0,$ звідки маємо корені $x_t=1; x_2=-6$ тоді підінтегральний дріб можна переписати так $\frac{x+2}{(x-1)(x+6)}$. Як бачимо, це правильний раціональний дріб, який можна розкласти на прості дроби таким чином:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+6)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}.$$

Приводячи до спільного знаменника і прирівнюючи чисельники отримаємо:

$$x+2=A(x+6)+B(x-1).$$

Тепер знайдемо коефіцієнти A, B. Підставимо у останню рівність значення коренів знаменника, тоді:

$$x=1 \quad \left|\, 1+2=A(1+6), \qquad 3=7A, A=\frac{3}{7}\right.$$

$$x=-6 \quad \left|\, -6+2=B(-6-1), \quad -4=-7B, B=\frac{4}{7}.\right.$$

Перепишемо інтеграл і з урахуванням попередніх перетворень знайдемо його :

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x+6)}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{7}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{4}{7}dx}{x+6} = \frac{3}{7}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{4}{7}\int \frac{dx}{x+6} =$$

$$= \frac{3}{7}\ln|x-1| + \frac{4}{7}\ln|x+6| + C.$$

2.17. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}.$

Розв'язання.

Тут, як бачимо, під знаком цього інтеграла маємо неправильний раціональний дріб. Поділимо чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів, тоді маємо:

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1},$$

звідки

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

2.18. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx.$

Розв'язання.

Під інтегралом правильний раціональний дріб. Розкладемо її на прості, тоді:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Приводячи до спільного знаменника і прирівнюючи чисельники, маємо

$$x+1=A(x-2)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-1).$$

Знаходимо коефіцієнти A,B,C. Спочатку в обидві частини підставляємо корені знаменника $x_1=1, x_2=2$:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 1+1=A \Rightarrow A=2 \\ x=2 & 2+1=C \Rightarrow C=3 \end{array}.$$

Залишилося знайти *B.* Його можна знайти, якщо прирівняти коефіцієнти, наприклад при x^2 в обох частинах.

$$x^2 \mid 0=A+B \Rightarrow B=-2.$$

Отже,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx=\int \frac{2}{x-1}dx-\int \frac{2}{x-2}dx+\int \frac{3dx}{(x-2)^2}=2\int \frac{dx}{x-1}-2\int \frac{dx}{x-2}+$$
$$+3\int \frac{dx}{(x-2)^2}=2\ln|x-1|-2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C.$$

2.19. $\int \frac{x-1}{x(x^2+4)}dx$.

Розв'язання.

Під знаком інтеграла знаменник правильного дробу має лише один дійсний корінь $x=0$, а рівняння $x^2+4=0$ не має дійсних коренів, тоді розкладання на елементарні дроби матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Знову приводимо до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники:

$$x-1=A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)x=Ax^2+4A+Bx^2+Cx=\left(A+B\right)x^2+Cx+4A.$$

Визначаємо сталі A,B,C.

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 0-1=4A, A=-1/4, \\ x^2 & 0=A+B, B=-A, B=-1/4, \\ x & 1=C, C=1 \end{array}$$

Отже, інтеграл запишеться у вигляді суми двох інтегралів від простих дробів, які легко інтегруються:

$$\int\frac{x-1}{x\left(x^2+4\right)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4}dx=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\int\frac{2xdx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

2.20. $\int\frac{x^2+3}{x^3-8}dx$.

Розв’язання.

Підінтегральна функція являє собою правильний раціональний дріб. Розкладаємо знаменник на множники:

$$x^3-8=\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right).$$

Підінтегральну функцію записуємо у вигляді суми двох найпростіших дробів:

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{x^2+3}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+4}.$$

Помноживши обидві частини на $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$, маємо

$$x^2+3=A\left(x^2+2x+4\right)+(Mx+N)(x-2).$$

Для знаходження A, M, N використовуємо комбінований метод. A можна знайти, поклавши $x=2$:

$$4+3=A\cdot(4+4+4), \text{ звідси } A=\frac{7}{12}.$$

Для знаходження M і N складаємо систему рівнянь, для чого прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+M=1, \\ x^0 & 4A-2N=3. \end{array}$$

Враховуючи, що $A=\frac{7}{12}$, тоді $M=\frac{5}{12}$, а $N=-\frac{1}{3}$. Таким чином,

$$\int\frac{x^2+3}{x^3-8}dx=\int\frac{\frac{7}{12}}{x-2}dx+\int\frac{\frac{5}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}dx=$$
$$=\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx.$$

Розглянемо окремо

$$\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx.$$

В знаменнику виділяємо повний квадрат:

$$x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3.$$

Тепер зробимо заміну $x+1=t$, звідси $dx=dt$, а $x=t-1$. Тоді

$$\int \frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx = \int \frac{5(t-1)-4}{t^2+3}dt = \int \frac{5t-9}{t^2+3}dt =$$
$$= \int \frac{5tdt}{t^2+3} + \int \frac{-9dt}{t^2+3} = \frac{5}{2}\ln\left(t^2+3\right) - \frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C.$$

Переходимо до старої змінної. Отже,

$$\int \frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) - 3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Остаточно маємо

$$\int \frac{x^2+3}{x^3-8}dx = \frac{7}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) -$$
$$-\frac{1\cdot 3\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{7}{12}\ln|x-2| +$$
$$+\frac{5}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Запитання для самодіагностики.

1.В чому полягає метод інтегрування заміною змінної?
2.Які два випадки заміни змінної можна назвати?
3.Яку заміну змінної потрібно зробити в інтегралі $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$?
4. Записати формулу інтегрування частинами.
5.Які випадки використання інтегрування частинами ви знаєте?
6. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}$?
7.Що називається раціональною функцією?

8.Який раціональний дріб називається правильним?

9.Як правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших дробів?

10.Як знаходяться невизначені коефіцієнти при розкладанні дробу?

Приклади та вправи.

Приклади.

2.21. Знайти $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

Розв'язання.

Нехай $\ln x = t$, тоді $\frac{dx}{x} = dt.$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

2.22. Знайти $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9 - e^{2x}}}.$

Розв'язання.

Нехай $e^x = t$, тоді $e^x dx = dt$.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9 - e^{2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{e^x}{3} + C.$$

2.23. Знайти $\int \frac{\cos x dx}{9 + \sin^2 x}.$

Розв'язання.

Нехай $\sin x = t$, тоді $\cos x dx = dt$.

$$\int \frac{\cos x dx}{9 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{9 + t^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{3} + C.$$

2.24. Знайти $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

Розв'язання.

Нехай $\sqrt[3]{x}=t$, тоді $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=dt.$

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=3\int\sin\sqrt[3]{x}\,\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}=3\int\sin t\,dt=-3\cos t+C=$$
$$=-3\cos\sqrt[3]{x}+C.$$

2.25. Знайти $\int\frac{dx}{\arcsin^5 x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

Розв'язання.

Нехай $\arcsin x=t$, тоді $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt.$

$$\int\frac{dx}{\arcsin^5 x\cdot\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dt}{t^5}=\int t^{-5}dt=\frac{t^{-4}}{-4}+C=$$
$$=-\frac{1}{4\arcsin^4 x}+C.$$

2.26. Знайти $\int x^2\sqrt[5]{x^3-3}dx.$

Розв'язання.

Нехай $x^3-3=t$, тоді $3x^2dx=dt$.

$$\int x^2\sqrt[5]{x^3-3}dx=\frac{1}{3}\int\sqrt[5]{x^3-3}\cdot 3x^2dx=\frac{1}{3}\int\sqrt[5]{t}dt=\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}dt=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C=\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3-3)^6}+C.$$

2.27. Знайти $\int\frac{xdx}{5+7x^4}.$

Розв'язання.

Нехай $x^2=t$, тоді $2xdx=dt$.

$$\int\frac{xdx}{5+7x^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\int\frac{2xdx}{\frac{5}{7}+(x^2)^2}=\frac{1}{14}\int\frac{dt}{\frac{5}{7}+t^2}=$$

$$=\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{7}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{7}}}+C=\frac{1}{2\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

2.28. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt[7]{\operatorname{ctg}^4 x\cdot\sin^2 x}}$.

Розв'язання.

Нехай $ctgx=t$, тоді $\quad -\frac{1}{\sin^2 x}dx=dt.$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[7]{ctg^4x\cdot\sin^2 x}}=-\int\frac{dt}{\sqrt[7]{t^4}}=-\int t^{-\frac{4}{7}}dt=-\frac{t^{\frac{3}{7}}}{3/7}+C=$$

$$=-\frac{7}{3}\sqrt[7]{ctg^3x}+C.$$

2.29. Знайти $\int\frac{\ln x}{x^3}dx.$.

Розв’язання.

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{dx}{x^3} & v=-\frac{1}{2x^2}\end{vmatrix}=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=$$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.$$

2.30. Знайти $\int(2x+1)\sin xdx.$.

Розв’язання.

$$\int(2x+1)\sin xdx=\begin{vmatrix} u=2x+1, & du=2dx, \\ dv=\sin xdx, & v=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=-(2x+1)\cos x+2\int\cos xdx=-(2x+1)\cos x+2\sin x+C.$$

2.31. Знайти $\int\operatorname{arctg}xdx$.

Розв’язання.

$$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

2.32. Знайти $\int x^2 e^{-2x} dx.$.

Розв’язання.

$$\int x^2 e^{-2x} dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = e^{-2x}dx, & v = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{vmatrix} = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \int xe^{-2x} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx, & v = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{vmatrix} = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

2.33. Знайти $\int e^{2x} \cos 3x dx.$.

Розв’язання.

$$I = \int e^{2x} \cos 3x dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos 3x dx, & v = \dfrac{\sin 3x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\int e^{2x} \sin 3x dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin 3x dx, & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^{2x} \sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\int e^{2x} \cos 3x dx \right) =$$

$$= \frac{e^{2x} \sin 3x}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} I + C_0.$$

З останньої рівності знаходимо шуканий інтеграл.

$$I+\frac{4}{9}I=\frac{e^{2x}\sin 3x}{3}+\frac{2}{9}\frac{e^{2x}\cos 3x}{9}+C_0.$$

$$I=\frac{9}{13}\left(\frac{e^{2x}\sin 3x}{3}+\frac{2e^{2x}\cos 3x}{9}\right)+\frac{9}{13}C_0=$$

$$=\frac{e^{2x}}{13}\left(3\sin 3x+2\cos 3x\right)+C,$$

2.34. Знайти $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

2.35. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-2\right)^2+1}}=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C.$$

2.36. Знайти $\int\frac{3-5x}{4x^2+16x-9}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{3-5x}{4x^2+16x-9}dx = \frac{1}{4}\int \frac{3-5x}{x^2+4x-\frac{9}{4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{3-5x}{(x+2)^2-\frac{25}{4}}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{3-5(t-2)}{t^2-\frac{25}{4}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{13-5t}{t^2-\frac{25}{4}}dt =$$

$$= \frac{13}{4}\int \frac{dt}{t^2-\frac{25}{4}} - \frac{5}{4}\int \frac{tdt}{t^2-\frac{25}{4}} = \frac{13}{4\cdot 2\cdot \frac{5}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right| -$$

$$-\frac{5}{8}\ln\left|t^2-\frac{25}{4}\right| + C_0 = \frac{13}{20}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+9}\right| - \frac{5}{8}\ln\left|4x^2+16x-9\right| + C,$$

$$= \frac{13}{4}\int \frac{dt}{t^2-\frac{25}{4}} - \frac{5}{4}\int \frac{tdt}{t^2-\frac{25}{4}} = \frac{13}{4\cdot 2\cdot \frac{5}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right| -$$

$$-\frac{5}{8}\ln\left|t^2-\frac{25}{4}\right| + C_0 = \frac{13}{20}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+9}\right| - \frac{5}{8}\ln\left|4x^2+16x-9\right| + C,$$

$$\tilde{N} = \frac{5}{4}\ln^2 .$$

2.37. Знайти $\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{7-x}{\sqrt{-(x^2-2x-3)}}dx =$$

$$= \int \frac{7-x}{\sqrt{-((x-1)^2-4)}}dx = \int \frac{7-x}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx = \begin{vmatrix} x-1=t, \\ x=t+1, \\ dx=dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{7-t-1}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{6-t}{\sqrt{4-t^2}}dt = 6\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} - \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= 6\arcsin\frac{t}{2} + \sqrt{4-t^2} + C = 6\arcsin\frac{x-1}{2} + \sqrt{3+2x-x^2} + C.$$

де $C = \frac{9}{13} C_0$. .

2.38. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 - 72}{x(x+4)(x-3)} dx$. .

Розв'язання.

Дріб $\frac{x^2 - 72}{x(x+4)(x-3)}$ – правильний. Знаменник має дійсні прості корені $x = 0$, $x = -4$, $x = 3$. Цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів таким чином:

$$\frac{x^2 - 72}{x(x+4)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-3},$$ звідки

$$x^2 - 72 = A(x+4)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+4).$$

Одержана рівність – є тотожність, тобто x приймає будь-яке значення.

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & -72 = -12A, \quad A = 6, \\ x = -4 & -56 = 28B, \quad B = -2, \\ x = 3 & -63 = 21C, \quad C = -3. \end{array}$$

Таким чином

$$\int \frac{x^2 - 72}{x(x+4)(x-3)} dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x-3} \right) dx =$$
$$= 6\ln|x| - 2\ln|x+4| - 3\ln|x-3| + C.$$

2.39. Знайти інтеграл $\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx$. .

Розв'язання.

Під знаком інтеграла неправильний дріб. Виділимо його цілу частину.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 5x^3+9x^2-22x-8 \\ 5x^3 \qquad\quad -20x \\ \hline 9x^2-2x\ -8 \end{array} & \begin{array}{l} x^3-4x \\ \hline 5 \end{array}
\end{array}
$$

Отже,

$$I=\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=\int\left(5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=5x+\int\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}dx.$$

Знаменник останнього дробу має дійсні прості корені: $x=0$, $x=2$, $x=-2$. Тому, як в попередньому прикладі, цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів:

$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2},$$

або

$$9x^2-2x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Знаходимо A,B,C.

$$
\begin{array}{l|l}
x=0 & -8=-4A,\quad A=2, \\
x=2 & 24=8B,\quad B=3, \\
x=-2 & 32=8C,\quad C=4.
\end{array}
$$

$$I=5x+\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx=$$

$$=5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C.$$

2.40. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$..

Розв'язання.

Дріб $\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)^2}$ – правильний. Знаменник має два корені: простий $x=0$ і двократний $x=1$. Дріб $\frac{1}{x(x-1)^2}$ розкладається на найпростіші так:

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},\text{ звідки}$$

$$A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx=1.$$

Для визначення коефіцієнтів *A*, *B*, *C* застосуємо комбінований спосіб. В останньому рівнянні спочатку дамо змінній значення $x=0$ і $x=1$, а потім порівняємо коефіцієнти при степенях x^2.

$$\begin{array}{l|l} x=0 & A=1, \\ x=1 & C=1, \\ x^2 & A+B=0,\ B=-A=-1. \end{array}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.$$

2.41. Знайти $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}dx.$

Розв'язання.

Дріб під знаком інтеграла правильний. Його знаменник має дійсний двократний корінь $x=1$ і два комплексно-спряжені корені $x=\pm i$. Такий правильний дріб розкладається на суму найпростіших дробів трьох типів:

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$ звідки

$$A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2=x^3-2x+2.$$

Для визначення коефіцієнтів A, B, C, D застосуємо указаний раніше комбінований спосіб.

$$\left|\begin{array}{ll} x=1 & 2B=1, \\ x^3 & A+C=1, \\ x^2 & -A+B+D-2C=0, \\ x^0 & -A+B+D=2, \end{array}\right. \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} B=\dfrac{1}{2}, \\ C=1, \\ D=\dfrac{3}{2}, \\ A=0. \end{cases}$$

Отже,

$$\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{x+\frac{3}{2}}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

2.42. Знайти $\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx..$

Розв'язання.

Дріб під знаком інтеграла правильний. Його знаменник має один простий корінь $x=2$ і два прості комплексно-спряжені корені $x=-1\pm 2i$. Такий дріб розкладається на два найпростіші дроби двох типів таким чином:

$$\frac{x^2-6x-18}{(x-2)\left(x^2+2x+5\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5},$$ звідки

$$A(x^2+2x+5)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right)=x^2-6x-18.$$

Застосовуємо комбінований спосіб для визначення коефіцієнтів *A*, *B*, *C*.

$$\begin{array}{l|ll} x=2 & 13A=4-12-18, & A=-2. \\ x^2 & A+B=1, & B=3. \\ x^0 & 5A-2C=-18, & C=4. \end{array}$$

Тоді

$$\int\frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}\,dx=\int\left(\frac{-2}{x-2}+\frac{3x+4}{x^2+2x+5}\right)dx=$$

$$=-2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{3x+4}{\left(x+1\right)^2+4}\,dx=\left|\begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array}\right|=$$

$$=-2\ln|x-2|+\int\frac{3t+1}{t^2+4}\,dt=-2\ln|x-2|+3\int\frac{tdt}{t^2+4}+\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln(t^2+4)+\frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2}+C=$$

$$=-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}+C.$$

Вправи.

Знайти наступні інтеграли методом заміни змінної.

2.43. $\int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}}\,dx.$

2.44. $\int\frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$

2.45. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

2.46. $\int\frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}.$

2.47. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+4x^2}}.$

2.48. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}.$

2.49. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^8}}$..

2.50. $\int xe^{-(x^2+1)}dx.$

2.51. $\int e^{4\sin x}\cos xdx.$

2.52. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx.$

2.53. $\int \sin^3 x\cos xdx.$

2.54. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x}dx.$

2.55. $\int \frac{\ln^5(3x-2)}{3x-2}dx.$

2.56. $\int \frac{e^{3x}}{4-e^{6x}}dx.$

2.57. $\int \frac{\sqrt[5]{tg^3 x}}{\cos^2 x}dx.$

2.58. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

2.59. $\int x\cos(x^2-1)\,dx.$

2.60. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

2.61. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt[3]{(1+tgx)^2}}.$

2.62. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx.$

2.63. $\int (x^2+1)^5 xdx.$

2.64. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{5+\sin x}}.$

2.65. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx.$

2.66. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx.$

2.67. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

2.68. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

2.69. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx.$

2.70. $\int \frac{e^x\sqrt{\mathrm{arctg}(e^x)}}{1+e^{2x}}dx.$

2.71. $\int \frac{dx}{tgx\cdot\ln^2\sin x}.$

2.72. $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx.$

2.73. $\int \frac{dx}{\arcsin^4 x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

2.74. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5}.$

2.75. $\int x\ln xdx.$

2.76. $\int x\cos 3xdx.$

2.77. $\int (x-7)\sin xdx.$

2.78. $\int (1-3x)\cos 2xdx.$

2.79. $\int xe^{2x}dx.$

2.80. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

2.81. $\int \frac{xdx}{\sin^2 3x}.$

2.82. $\int (4-x)e^{-3x}dx.$

2.83. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

2.84. $\int \ln(1+x^2)dx.$

2.85. $\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx.$

2.86. $\int \arcsin xdx.$

2.87. $\int x^2\cos xdx.$

2.88. $\int (6x-x^2)e^{-x}dx.$

2.89. $\int e^x \sin xdx.$

2.90. $\int \cos(\ln x)dx.$

2.91. $\int \sqrt{1+x^2}dx.$

2.92. $\int \sqrt{4+x^2}dx.$

2.93.. $\int \frac{dx}{(x-3)^2+9}.$

2.94. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x+5)^2}}.$

2.95. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

2.96. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

2.97. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$

2.98. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+28}}.$

2.99. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}.$

2.100. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2x^2}}.$

2.101. $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx.$

2.102. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx.$

2.103. $\int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}dx.$

2.104. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{2x^2-12x+15}}dx.$

2.105. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx.$**.**

2.106. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$**.**

Знайти інтеграли від раціональних дробів.

2.107. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx.$

2.108. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx.$

2.109. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx.$

2.110. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx.$

2.111. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx.$

2.112. $\int \frac{6+8x-x^2}{x^3+3x^2+2x}dx.$

2.113. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

2.114. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

2.115. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx.$

2.116. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx.$

2.117. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx.$

2.118. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx.$

2.119. $\int \frac{x^3-10x+25}{x^2(x-5)^2}dx.$

2.120. $\int \frac{x^3+1}{x^4-x^2}dx.$

2.121. $\int \frac{x^2+5x+8}{(x-2)^3}dx.$

2.122. $\int \frac{x^2-7x-6}{(x^2+9)(x-3)}dx.$

2.123. $\int \frac{x^3-7x^2+8}{(x^2+4)x^2}dx.$

2.124. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx.$

2.125. $\int \frac{4x^2-5x+9}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx.$

2.126. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$

Глава 3. Інтегрування тригонометричних виразів та деяких ірраціональних функцій

3.1. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо способи, за допомогою яких беруться інтеграли виду $\int R(\cos x, \sin x)\,dx,$ де R-інтегрована функція, яка залежить лише від $\cos x$ та $\sin x$. Відмітимо основні випадки інтегрування тригонометричних виразів.

Випадок 1. Інтеграли,що за допомогою відомих тригонометричних співвідношень можливо звести до табличних ,а саме

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)dx; \qquad (3.1)$$

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)dx; \qquad (3.2)$$

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)dx. \qquad (3.3)$$

$$\begin{aligned}&\int \cos^2 ax\, dx = \int \frac{1+\cos 2ax}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C;\\ &\int \sin^2 ax\, dx = \int \frac{1-\cos 2ax}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C.\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Отже, підінтегральну функцію, що є добутком тригонометричних функцій перетворено в суму, інтеграли від якої-табличні.

Приклад.3.1. Знайти $\int \sin 5x \cos 2x dx$

Розв'язання.

Застосовуємо формулу (3.3)**.**

$$\int \sin 5x \cos 2x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x dx + \frac{1}{2}\int \sin 3x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) + C = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 3x}{6} + C.$$

Приклад 3.2. Знайти $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}dx$.

Розв'язання.

Застосовуємо до добутку $\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}$ формулу (3.2). Тоді інтеграл набуває вигляду:

$$\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2}x\right)\cdot\sin\frac{x}{4}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}dx - \frac{1}{2}\int \cos\frac{3}{2}x\cdot\sin\frac{x}{4}dx.$$

До кожного інтеграла застосовуємо формулу (3.3) **.**

$$\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3}{4}x + \sin\left(-\frac{x}{4}\right)\right)dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7}{4}x + \sin\left(-\frac{5}{4}x\right)\right)dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{4\cos\frac{3}{4}x}{3}\right) -$$
$$-\frac{1\cdot 4}{4}\left(-\cos\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{4\cos\frac{7}{4}x}{7}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{-4\cos\frac{5}{4}x}{5}\right) + C =$$
$$= -\frac{\cos\frac{3}{4}x}{3} + \cos\frac{x}{4} + \frac{\cos\frac{7}{4}x}{7} - \frac{\cos\frac{5}{4}x}{5} + C.$$

Випадок 2. Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

Тут можна відокремити такі випадки:

а) принаймні один із показників степенів *m* або *n* — непарне число, а другий – будь-який. Наприклад, $m = 2p+1$— непарне число, а *n* – будь-яке, заміна $t = \cos x$ дає можливість взяти інтеграл. Якщо ж навпаки, $n = 2p+1$— непарне, а *m* — будь-яке, то інтеграл береться за допомогою заміни $t = \sin x$.

б) обидва показники *m* та *n* — парні невід'ємні числа. Наприклад, $m=2p$ і *n* $=2k$ — парні числа, інтеграл можна взяти поступово знижуючи степені тригонометричних функцій, для чого використовують формули: $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

в) Сума показників *m* та *n* дорівнює парному від'ємному числу, тобто *m+n = -2p.* Інтеграл обчислюється за допомогою підстановки

$$t=\operatorname{tg} x;\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ x=\operatorname{arctg} t;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

або

$$t=\operatorname{ctg} x;\ \cos^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ x=\operatorname{arcctg} t;\ dx=-\frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад.3.3. Знайти $\int \sin^4 x\cos^5 xdx$.

Розв'язання.

Маємо інтеграл,у якому число $n=5$ – непарне.

$$\int \sin^4 x\cos^5 xdx=\int \sin^4 x\cos^4 x\cos xdx=\int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos xdx.$$

Тепер виконаємо заміну $t=\sin x$, звідки $dt=\cos xdx$. Отже,

$$\int \sin^4 x\cos^5 xdx=\int t^4\left(1-t^2\right)^2 dt=\int t^4\left(1-2t^2+t^4\right)dt=$$
$$=\int\left(t^4-2t^6+t^8\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^9}{9}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}+C.$$

Приклад.3.4. Знайти $\int \sin^3 x\cos^3 xdx$.

Розв'язання.

Нехай $t=\sin x$, $dt=\cos\ xdx$, тоді

$$\int \sin^3 x\cos^3 xdx=\int t^3\left(1-t^2\right)dt=\int t^3dt-\int t^5dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}+C=\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

Приклад 3.5. Знайти $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання.

Оскільки $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, то $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$, в свою чергу $\dfrac{1}{4}\sin^2 2x = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1-\cos 4x}{2}$. Підставляючи ці перетворення під знак інтегралу, одержимо:

$$\int \sin^4 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)^2 dx = \frac{1}{64}\int \left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{64}\left(\int dx - -2\int \cos 4x dx + \int \cos^2 4x dx\right) =$$

$$\frac{1}{64}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C.$$

Приклад.3.6. Знайти $\int \dfrac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$.

Розв'язання.

Зробимо підстановку

$$t = \operatorname{tg} x;\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ x = \operatorname{arctg} t;\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}. \tag{3.5}$$

Тоді даний інтеграл буде мати вигляд

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{t^4 \left(1+t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^2\right)^2} dt = \int t^4 \left(1+t^2\right) dt =$$

$$= \int \left(t^4 + t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C.$$

Випадок 3. Розглянемо окремо інтеграли вигляду $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$ та $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx$. У цих інтегралах відповідно використовуються підстановки $t = \mathrm{tg}\,x$ ÷è $t = \mathrm{ctg}\,x$, які вже було розглянуто вище.

Приклад.3.7.Знайти $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$.

Розв'язання.

Зробимо підстановку $t = \mathrm{ctg}\,x$, $x = \mathrm{arcctg}\,t$; $dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$. Тоді

$$\int \mathrm{ctg}^6 x dx = -\int \frac{t^6}{1+t^2}dt = -\int\left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \mathrm{arctg}\,t\right) + C =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^5 x}{5} + \frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3} + \mathrm{ctg}\,x - \mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\,x) + C.$$

3.2. Універсальна тригонометрична підстановка

Розглянемо інтеграл $\int R(\cos x, \sin x)dx$, де підінтегральна функція є раціональною або дробово- раціональною функцією від $\cos x$ та $\sin x$. Інтеграли вказаного вигляду завжди можна звести до інтегралів від рацвзяти за допомогою підстановки

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \qquad (3.6)$$

яка називається універсальною тригонометричною підстановкою. Дійсно, використовуючи відомі тригонометричні формули, одержимо:

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},$$

Тобто,

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2},\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (3.7)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{3.8}$$

Тоді

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt\,. \tag{3.9}$$

де $R_1(t)-$ раціональна, або дробово - раціональна функція. Покажемо, як використовується ця підстановка на інтегралах вигляду:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} \text{ та } \int \frac{1}{\sin^n x}dx; \quad \int \frac{1}{\cos^n x}dx, \ \text{äå}\ n \in N\,.$$

Приклад.3.8. .Знайти $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Розв'язання.

Використуємо універсальну підстановку (3.6) та підставимо в інтеграл $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2\,dt}{t^3} =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{(1+2t^2+t^4)dt}{t^3} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right)+C\,.$$

Приклад.3.9. .Знайти $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Розв'язання.

Треба зазначити, що інтеграли ,які містять в знаменнику степені $\sin x$ при використанні універсальної підстановки приводяться до найбіль простіших раціональних дробів, тому зробимо заміну:

$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$, $z = \dfrac{\pi}{2} + x, dz = dx$, та $t = \operatorname{tg}\dfrac{z}{2}$,одержимо

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Приклад.3.10. .Знайти $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Розв'язання.

Зробимо підстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}; \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Тоді одержимо

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)} + 3\frac{2t}{\left(1+t^2\right)} + 5\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C.$$

Приклад.3.11. .Знайти $\displaystyle\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}dx$.

Розв'язання.

Зробимо підстановку підстановку $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, звідки

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Тоді

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx=\int \frac{1-\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int \frac{1+t^2-2t+1-t^2}{1+t^2+2t-1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2-2t}{2t^2+2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{1-t}{t^2+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}.$$

Підінтегральна функція є правильний раціональний дріб. Розкладаємо його на суму найпростіших.

$$\frac{1-t}{\left(t^2+t\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{1-t}{t\left(t+1\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Після множення обох частин рівності на $t\left(t+1\right)\left(1+t^2\right)$ маємо

$$1-t=A\left(t+1\right)\left(t^2+1\right)+Bt\left(t^2+1\right)+\left(Ct+D\right)t\left(t+1\right).$$

Якщо $t=0$, тоді , $A=1$, а при $t=-1$, $-2B=2$ або $B=-1$. Для знаходження C і D складаємо систему двох рівнянь, для чого прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t.

$$\begin{array}{r|l} t^3 & A+B+C=0, \\ t & A+B+D=-1. \end{array}$$

Підставляємо в систему $A=1$, $B=-1$. Тоді $C=0$, $D=-1$. Отже,

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=2\left(\ln|t|-\ln|t+1|-\operatorname{arctg}t\right)+C=2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$= 2\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\left(tg\,\frac{x}{2}\right) + C = 2\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}\right| - x + C.$$

Універсальна тригонометрична підстановка має такий недолік, що може призводити до складних, громіздких виразів. Тому використання цієї підстановки пропонується тільки до тих інтегралів, в яких простіші підстановки не можливі.

3.3. Інтегрування лінійних та дробово – лінійних ірраціональностей.

1. Розглянемо інтеграл

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx\,, \tag{3.10}$$

де $R(x)$ –неперервна функція, а $\frac{m_i}{n_i}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$— дробові показники степенів. Цей інтеграл можна взяти, застосувавши підстановку

$$x = t^n, \qquad dx = nt^{n-1}dt, \tag{3.11}$$

де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{n_i}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$. За допомогою цієї підстановки кожен дробовий показник степеня x перетвориться на ціле число і таким чином під інтегралом вже буде стояти $R(t)$ - раціональна функція, тобто

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \int R(t)\,dt,$$

де $R(t)$ – раціональна функція нового аргументу t.

2. Інтеграли типу

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (3.12)$$

зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$, $dx = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' dt$.

3. Інтеграли типу

а) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$;

б) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$;

с) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$,

де $R(x)$ – іраціональна функція від аргумента x, зводяться до інтегралів від раціональних тригонометричних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.

а) $x = a\sin t$ або $x = a\cos t$; (3.13)

б) $x = a\,tg\,t$ або $x = a\,ctg\,t$; (3.14)

в) $x = \frac{a}{\cos t}$ або $x = \frac{a}{\sin t}$. (3.15)

Приклад.3.12. Знайти $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання.

Під інтегралом маємо степені аргумента — $^1/_2$ та $^1/_4$, найменший спільний знаменник яких 4. Тоді покладемо $x = t^4, dx = 4t^3dt$ і будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t}{1+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^4dt}{1+t^2} = 4\int \frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int \frac{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)+1}{t^2+1}dt = 4\int\left(t^2-1\right)dt + 4\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 4\int t^2dt - \int dt + 4\operatorname{arctg} t = \frac{4}{3}t^3 - 4t + 4\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\right) + C.$$

Приклад.3.13. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

Розв'язання.

Щоб раціоналізувати цей інтеграл, треба взяти $x = t^6$, а $dx = 6t^5dt,$ тоді одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^2+t^3} = 6\int\frac{t^3dt}{1+t} = 6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 6\int\frac{(t+1)\left(t^2-t+1\right)-1}{t+1}dt = 6\int\left(t^2-t+1\right)dt - 6\int\frac{dt}{t+1} =$$

$$= 6\int t^2dt - 6\int tdt + 6\int dt - 6\ln\left|t+1\right| = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln\left|t+1\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}. = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Приклад.3.14. Знайти $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

Розв'язання.

Використовуємо підстановку $x+4=t^2$, звідки $x=t^2-4$, а $dx=2tdt$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\int\frac{t}{t^2-4}\cdot 2tdt=\int\frac{2t^2dt}{t^2-4}=2\int\frac{t^2dt}{t^2-4}.$$

Тепер підінтегральна функція є неправильний раціональний дріб. Треба виділити цілу частину. Отже,

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} t^2 \\ \underline{t^2-4} \end{array} & \underline{t^2-4} \\ \quad 4 & 1 \end{array}$$

Тоді

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=2t+8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=$$
$$=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$$

Приклад.3.15. Знайти $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

Розв'язання.

Поклавши $\frac{1+x}{x}=t^2$, одержимо $1+x=xt^2$, звідки $x=\frac{1}{t^2-1}$. Тоді $dx=\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$. Отже,

Приклад.3.16. Знайти $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання.

Покладаємо $x=\frac{1}{\sin t}$, звідки $dx=-\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\sin^4 t}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = -\int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}} =$$

$$= -\int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{ctgt} = -\int \sin^3 t dt = -\int \sin^2 t \sin t dt =$$

$$= -\int \left(1-\cos^2 t\right) \sin t dt.$$

Зробимо підстановку $\cos t = z$, тоді $-\sin t dt = dz$. Підставляємо в даний інтеграл. Маємо

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \int \left(1-z^2\right) dz = z - \frac{z^3}{3} + C = \cos t - \frac{\cos^3 t}{3} + C.$$

Перейдемо до змінної x. Враховуючи, що $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ і $\sin t = \frac{1}{x}$, маємо

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{1-\sin^2 t} - \frac{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^3}}{3} + C =$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}{3x^3} + C.$$

Приклад.3.17.Знайти $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

Розв'язання.

Нехай $x = 2\sin t,\ dx = 2\cos t dt$, тоді $4-x^2 = 4\left(1-\sin^2 t\right) = 4\cos^2 t.$

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = 16\int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = 16\int \frac{\sin^2 2t}{4} dt =$$

$$= 4\int \frac{1-\cos 4t}{2} dt = 2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right) + C = 2t - \frac{\sin 4t}{2} + C.$$

Повернемось до старої змінної. Оскільки $\sin t = \frac{x}{2}$, то $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Тоді

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

Запитання для самодіагностики

1. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$?

2. Які випадки заміни змінної в таких інтегралах ви знаєте?

3. Яку заміну змінної треба зробити в інтегралі $\int \sin^{2n+1} x dx$

4. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \sin^{2k} x dx$

5. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int tg^m x dx$?

6.Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$.?

7. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$?

8. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}}\right) dx$?

9. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

10. Які інтеграли від іраціональних функцій беруться тригонометричними підстановками?

Приклади і вправи.

Приклади.

Проінтегрувати тригонометричні вирази.

3.18. Знайти $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$.

Розв'язання.

Застосуємо універсальну підстановку $tg\frac{x}{2}=t.$ Тоді

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{1}{8-\frac{8t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{dt}{(t-4)^2-1}=\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

3.19. Знайти $\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Розв'язання.

Застосуємо підстановку $tg\,x=t$. Тоді, як було сказано вище,

$$dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}.$$

$$\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\int\frac{1}{4-\frac{3}{1+t^2}+\frac{5t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{9t^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3t+C=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+C$$

3.20. Знайти $\int\cos^2 x\sin^4 x dx$..

Розв'язання.

Застосуємо формули зниження степенів.

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int \left(\cos^2 x \sin^2 x\right) \sin^2 x dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 2x}{4} \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 4x \cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{32} \int \left(\cos 2x + \cos 6x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{\sin 2x}{32} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 2x}{64} + \frac{\sin 6x}{192} + C =$$

$$= \frac{1}{16} x + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 6x}{192} + C.$$

3.21. Знайти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{(1 - t^2) dt}{t^4} = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} \right) dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

3.22. Знайти $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$

Розв'язання.

Нехай $\operatorname{tg} x = t,\ dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \frac{t^4}{t^2 + 1} dt = \int \frac{(t^4 - 1) + 1}{t^2 + 1} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

3.23. Знайти $\int \sin 2x \sin 9x dx.$.

Розв'язання.

$$\int \sin 2x \sin 9x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 7x - \cos 11x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 7x}{7} - \frac{\sin 11x}{11}\right) + C.$$

3.24. Знайти $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

Розв'язання.

Застосуємо тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} + 2\int \frac{dx}{\sin 2x}.$$

В першому інтегралі зробимо підстановку $\cos x = t,$, $-\sin x\, dx = dt$. Другий інтеграл є табличним. Тоді

$$I = -\int \frac{dt}{t^3} + \ln\left|\text{tg}\, x\right| + C = -\frac{t^{-2}}{2} + \ln\left|\text{tg}\, x\right| + C = \ln\left|\text{tg}\, x\right| - \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

3.25. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt{\text{tg}\, x}} =$$

$$=\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x = t, & x = \operatorname{arctg} t, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, & \cos^2 x = \dfrac{1}{t^2+1} \end{vmatrix} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \int \left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}} \right) dt = 2t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + C.$$

Проінтегрувати іраціональні вирази

3.26. Знайти $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx.$

Розв'язання.

В підінтегральній функції *x* міститься в степенях з дробовими показниками $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$. Тому зробимо підстановку $x = t^6,\ dx = 6t^5 dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5}{t^6 - t^4} dt = \int \frac{6t^4}{t^2 - 1} dt = 6\int \frac{(t^4 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt =$$

$$= 6\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \right) + C == 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

3.27. Знайти $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$.

Розв'язання.

Нехай $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, тоді $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\operatorname{tg}^4 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t} dt = \begin{vmatrix} \sin t = z, \\ \cos t dt = dz \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{dz}{z^4} = -\frac{1}{3z^3} + C = -\frac{1}{3\sin^3 t} + C =$$

$$=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx=-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C.$$

3.28.Знайти $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$

Розв'язання.

Нехай $x=\frac{3}{\cos t}, \quad dx=\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt, \quad x^2-9=\frac{9}{\cos^2 t}-9=9\,\mathrm{tg}^2\,t.$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{3\,\mathrm{tg}\,t}{\frac{3}{\cos t}}\cdot\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt=3\int\mathrm{tg}^2\,tdt=3\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt=3\,\mathrm{tg}\,t-3t+C=$$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\frac{3\sqrt{x^2-9}}{3}-3\arccos\frac{3}{x}+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C.$$

3.29.Знайти $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

Розв'язання.

Нехай $\frac{1+x}{x}=t^2$, тоді $x=\frac{1}{t^2-1}, \quad dx=\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt.$

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int(t^2-1)^2\cdot t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int t^2dt=$$

$$=-\frac{2}{3}t^3+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C.$$

Вправи.

Знайти інтеграли.

3.30. $\int \frac{dx}{5\sin x + 12\cos x + 13}.$

3.31. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$

3.32. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$

3.33. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$

3.34. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}.$

3.35. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9\cos^2 x}.$

3.36. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}.$

3.37. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x}.$

3.38. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}dx.$

3.39. $\int \operatorname{tg}^2 5x dx.$

3.40. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

3.41. $\int \sin^3 x dx.$

3.42. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx.$

3.43. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

3.44. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx.$

3.45. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}.$

3.46. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2} dx\,.$

3.47. $\int \sin^3 x\cos^3 x dx.$

3.48. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx.$

3.49. $\int x\sin^2(x^2)\,dx.$

3.50. $\int e^x\cos^2(e^x)\,dx.$

3.51. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$

3.52. $\int \sin 2x\cos 4x dx.$

3.53. $\int \sin 2x\sin 9x dx.$

3.54. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx.$

3.55. $\int \cos 3x\cos 5x\cos 8x dx.$

3.56. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin x\cos x}dx.$

3.57. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}.$

3.58. $\int \cos^4 x dx.$

3.59. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2+5tg^2 x}}.$

3.60. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx.$

3.61. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 x dx.$

3.62. $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx.$

3.63. $\int \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}dx.$

3.64. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}}.$

3.65. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx.$

3.66. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx.$

3.67. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}.$

3.68. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}.$

3.69. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx.$

3.70. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}}dx.$

3.71. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

3.72. $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\cdot\frac{dx}{x^2}.$

3.73. $\int \sqrt{9-x^2}dx.$

3.74. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}.$

3.75. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$

3.76. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx.$

3.77. $\int x^3\sqrt{x^2-25}dx.$

3.78. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

3.79. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx.$

Глава 4. Поняття визначеного інтеграла. Властивості. Формула Ньютона-Лейбница.

4.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Нехай невід'ємна функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$ $(a,b -$ скінченні числа, графік функції зображено на Рис. 4.1.

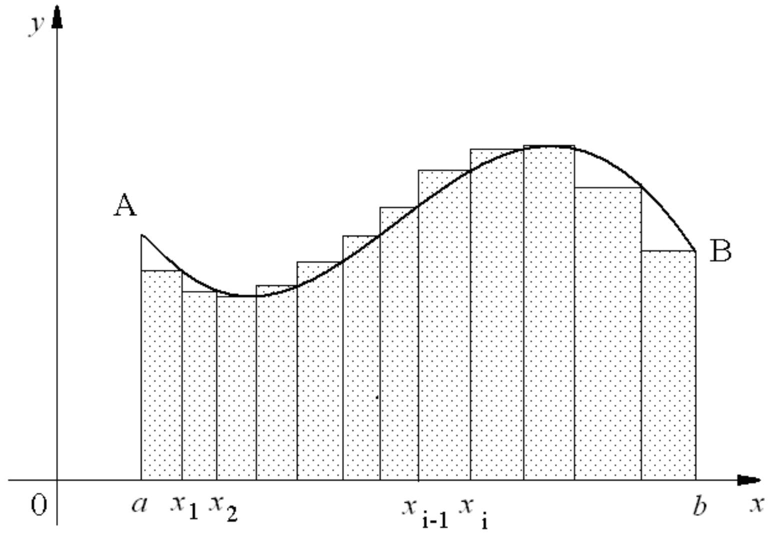


Рис.4.1. Площа криволінійної трапеції

1. Задача про знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай плоска фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a$, $x = b$. Фігура $aABb$ називається криволінійною трапецією. Для того, щоб розв'язати цю задачу виконаємо такі дії:

1) розіб’ємо довільно відрізок $[a;b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b,$$

2) оберемо на кожному з відрізків $[x_{i-1};x_i]$ по довільній точці $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$. Позначимо через Δx_i, різницю $x_i - x_{i-1}$, яку будемо називати довжиною часткового відрізка $[x_{i-1};x_i]$,

3) в точках ξ_i обчислимо значення функції $f(\xi_i)$ і складемо таку суму:

$$S_n = f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_i)\Delta x_2 + \ldots\ldots + f(\xi_i)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (4.1)$$

Геометричний зміст цієї суми очевидний – це сума площ прямокутників з основами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ та висотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots\ldots, f(\xi_n)$,

4.) для знаходження площі криволінійної трапеції припустимо, що всі Δx_i, прямують до нуля, та найбільший (максимальний) з них частковий відрізок $\max \Delta x_i$, також прямує до нуля. Знайдемо границю S_n: Тоді площа S криволінійної фігури, що зображена на Рис.4.1, є границя інтегральної суми , тобто

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0,\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (4.2)$$

2. Задача про знаходження шляху матеріальної точки. за час від T_1 до T_2, Нехай відома швидкість руху матеріальної точки як функція часу $v(t) = f(t)$.Знайти шлях, що пройде точка за час від T_1 до T_2. Якщо швидкість не змінюється протягом часу, тобто $f(t)$ – стала величина, то шлях ΔS, що його пройшла точка за проміжок часу $[t, t+\Delta t]$, обчислюється за формулою $\Delta S = f(t)\Delta t.$ Виконаємо такі дії:

1) розіб'ємо відрізок $[T_1;T_2]$ на проміжки часу

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_2$$

2) на кожному відрізку часу $[t_{i-1};t_i]$ візьмемо довільну точку ξ_i ,обчислемо в цій точці значення швидкості $f(\xi_i)$;

3) для довжини шляху ΔS_i, що його пройшла точка за проміжок $[t_{i-1};t_i]$ маємо $\Delta S_i = f(\xi_i)\Delta t_i$, де $\xi_i \in [t_{i-1};t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1 \div n$,

тоді повна довжина шляху S_n ,якщо на кожному проміжку часу Δt_i припустити рух рівномірним, буде

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta t_i. \tag{4.3}$$

4.) для знаходження шляху, що пройшла точка за час від T_1 до T_2 ,знайдемо границю S_n при $n \to \infty$ та при $\max \Delta t_i \to 0$,

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i. \tag{4.4}$$

3. Задача про знаходження обсягу продукції. Нехай функція $z = f\left(t\right)$ описує залежність продуктивності праці z деякого виробництва від часу t. Знайдемо обсяг продукції u, виробленої за проміжок часу $[O,T]$. Якщо продуктивність не змінюється протягом часу, тобто $f\left(t\right)$ - стала величина, то обсяг продукції Δu, що вироблена за проміжок часу $\left[t, t+\Delta t\right]$,, обчислюється за формулою $\Delta u = f\left(t\right)\Delta t.$ Використовуючи наближену рівність $\Delta u = f\left(\xi\right)\Delta t$, де $\xi \in \left[t, t+\Delta t\right]$,яка буде більш точною, чим меншим буде $\Delta t.$ Виконаємо такі дії:

1. Розіб'ємо відрізок $[O,T]$ на проміжки часу

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

2. Обчислимо обсяг продукції Δu_i, що вироблено за проміжок $\left[t_{i-1}, t_i\right]$ маємо

$$\Delta u_i = f\left(\xi_i\right)\Delta t_i, \text{ де } \xi_i \in \left[t_{i-1}, t_i\right],\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1 \div n.$$

3. Визначемо наближено обсяг продукції, що вироблено за проміжок часу $[O,T]$

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta t_i. \tag{4.5}$$

4. Знайдемо границю u_n ,якщо $\max \Delta t_i$ прямує до нуля, а $n \to \infty$ і одержимо обсяг продукції , що вироблено за проміжок часу $[O,T]$

$$u = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta t_i \tag{4.6}$$

Слід зазначити, що при розв'язанні трьох якісно різних задач, було виконано одні і ті ж самі дії.

Будемо вважати, що на проміжку $\left[a;b\right]$ задана неперервна функція $y = f(x)$ і для неї аналогічно до рзглянутих задач складена сума $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x$, яку будемо називати інтегральною сумою для функції $f(x)$ на проміжку $\left[a;b\right]$.

Означення. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми S_n при $\max x_i \to 0$, $n \to \infty$, яка не залежить від способів розбиття відрізка на частки, а також вибору точок $\xi_1, \xi_2, ...$ то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{4.7}$$

при цьому сама функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, заданою на відрізку $[a;b]$. Числа a та b відповідно називаються верхньою та нижньою межами інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування.

Зазначимо, що оскільки визначеним інтегралом є границя інтегральної суми, то для існування такої границі, а тому і інтеграла достатньо неперервності функції $f(x)$.

Зауважимо також, що оскільки з означення визначеного інтеграла також випливає, що величина інтеграла залежить від вигляду функції $f(x)$ і межі інтегрування, то визначений інтеграл визначається однозначно і на відміну від невизначеного інтеграла є числом, яке не залежить від того, якою літерою позначається змінна інтегрування. Отже, можна записати:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du .$$

Повертаючись до задач, що розглянуто ,вище підкреслимо геометричний, фізичний та економічний зміст визначеного інтеграла.

1.Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо функція $f(x)$ невід’ємна на відрізку $[a;b]$, де $a<b$,

$$\int_a^b f(x)dx$$

чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y=f(x)$, відрізком $[a,b]$, і прямими $x=a$ та $x=b$.

2. Фізичний зміст визначеного інтеграла. Визначений інтеграл

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i$$

– це довжина шляху за проміжок часу $[a;b]$, якщо відома швидкість $f(t)$ в момент часу t.

– Розв’зання цих двох класичних задач призвело до поняття визначеного інтеграла.

3. За економічним змістом визначений інтеграл

$$\int_0^T f(t)dt = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i$$

– це обсяг продукції ,що вироблено за проміжок часу $[0,T]$, якщо відома продуктивність праці $f(t)$ в момент часу t.

4.2. Властивості визначеного інтеграла

За означенням визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Це границя інтегральної суми функції $f(x)$. Отже, з оначення визначеного інтегралу та з основних теорем про границі розглянемо властивості визначеного інтеграла.

1. При переставленні меж інтегрування інтеграл змінює знак .

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,, \tag{4.8}$$

Дійсно, якщо $a < b$,то в ( )$\Delta x_i > 0$.При $a > b$, $\Delta x_i < 0$

2.Визначений інтеграл від одиничної функції дорівнює

$$\int_a^b dx = b - a\,. \tag{4.9}$$

3. Визначений інтеграл $\int_a^a f(x)dx = 0$. (4.10)

4. Якщо M - константа, то $\int_a^b Mdx = M(b-a)$. (4.11)

Доведення.

Дійсно, інтегральна сума функції $f(x) = M$ для будь-якого розбиття відрізка $[a, b]$ на частки дорівнює

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = M(b-a)\,,$$

звідки

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = M(b-a)\,.$$

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b Mf(x)dx = M\int_a^b f(x)dx\,, \tag{4.12}$$

де M - константа.

Доведення.

Нехай буде дано розбиття відрізку $[a, b]$ на частки та вибір точок $\xi_1, \xi_2, ..$ на кожному з часткових відрізків, тоді

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Mf(\xi_i)\Delta x_i = M \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = M\int_a^b f(x)dx .$$

6.Інтеграл від алгебраїчної суми двох (або скінченного числа) функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx . \qquad (4.13)$$

Доведення цієї властивості аналогічне доведенню властивості 5.

7. Якщо відрізок інтегрування розбити на частки, то інтеграл на всьому відрізку дорівнює сумі інтегралів на складових цього відрізка, тобто для будь-яких чисел a, b, c буде:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \qquad (4.14)$$

Доведення.

Нехай виконується нерівність $a < c < b$. Відомо, що границя інтегральної суми не залежить від способа ділення проміжка $[a,b]$ на частинні тому припустимо, що точка c є точкою ділення $x_k = c$. Напишемо інтегральну суму відповідну проміжку $[a,b]$, у вигляді суми двох інтегральних сум, одна з яких відповідає проміжку $[a,c]$, а друга проміжку $[c,b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (4.15)$$

В рівності (4.15) перейдемо до границі при $\max \Delta x_i \to 0$, одержимо рівність (4.14). Можна довести ,що рівність (4.14) залишається при будь-якому розтошуванні точок a,c,b..

8. Якщо на відрізку $[a,b]$, де $a<b$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, задовольняють умову $f(x)\le\varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (4.16)$$

Доведення.

З нерівності $f(x)\le\varphi(x)$ випливає аналогічна нерівність для інтегральних сум:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i$$

Переходячи до границі при $\max\Delta x_i \to 0$, здобудемо $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

9. Якщо m і M – найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на $[a,b]$, тобто $m\le f(x)\le M$ і $a<b$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (4.17)$$

Доведення.

Розглядати цю властивість можна як наслідок властивості (4.16), тоді

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx,$$

при цьому

$$\int_a^b mdx = m(b-a), \text{ а } \int_a^b Mdx = M(b-a)$$

і властивість доведено.

10. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на $[a,b]$ $(a<b)$, то знайдеться таке значення $c\in[a,b]$, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (4.18)$$

Властивість 10 називають **теоремою** про середнє значення $f(x)$.

Доведення.

Якщо m - найменше, а M - найбільше значення функції і $m\le f(x)\le M$, то з формули (5) попередньої властивості, випливає

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \ .$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то з властивостей неперервної функції на відрізку x вона приймає всі проміжні значення між m та M. Отже, знайдеться така точка $c \in [a,b]$, що

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c). \tag{4.19}$$

Геометричне тлумачення теореми представлено на рис. 4.1, звідки стає зрозуміло, що площа під кривою $y = f(x)$ на $[a,b]$ дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ та основою AB, тобто прямокутника $ABCD$.

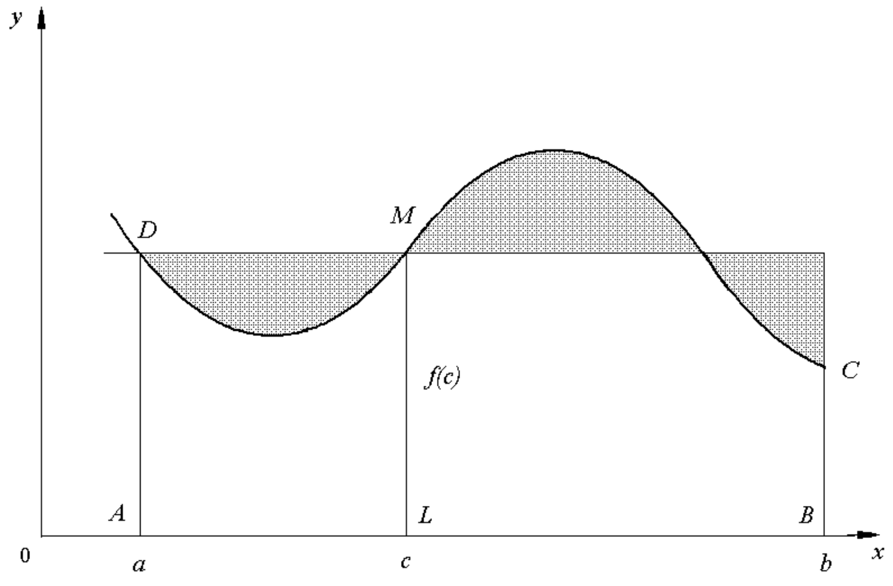


Рис 4.1.

4.3. Похідна інтеграла за змінною верхньою межею

Якщо функція $y = f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, то вона також буде інтегрованою на відрізку $[a;x]$, $x \in [a;b]$. Інтеграл від такої функції є деяка функція залежна від x. Позначимо його як

$$F(x) = \int_a^x f(u)du. \tag{4.20}$$

У цьому інтегралі нижня його межа a – фіксоване число, а верхня межа x змінюється. У останньому виразі використовується змінна інтегрування u, щоб відрізнити її від верхньої межі інтегрування. На основі теореми про середнє можна встановити також, що функція $F(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, а значить і на $[a;x]$. Чисельно вона дорівнює площі криволінійної трапеції, основою якої є проміжок $[a;x]$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то в кожній точці $x \in [a,b]$ похідна від функції $F(x)$ за змінною верхньою межею дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(u)du \right)'_x = f(x). \qquad (4.21)$$

Доведення.

Нехай x - точка неперервності $F(x)$, дамо їй деякий приріст Δx. Тоді і функція $F(x)$ також одержить деякий приріст $\Delta F(x)$. Розглянемо:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(u)du - \int_a^x f(u)du \right] =$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^x f(u)du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)du - \int_a^x f(u)du \right] = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)du.$$

Останній інтеграл було одержано за допомогою властивості(4.14) для визначеного інтеграла. Оскільки

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(u)du,$$

то застосовуючи теорему про середнє(4.19) здобудемо

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)du = \frac{f(c)(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c),$$

де $c \in [x; x+\Delta x]$. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, а також зважаючи на те, що при цьому $c \to x$, маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x).$$

Таким чином, теорему доведено.

З цієї теореми виходить, що якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то для неї існує первісна на цьому відрізку, і як одну з первісних можна взяти інтеграл з змінною верхньою межею. Звідси також випливає, що невизначений інтеграл від функції $f(x)$, неперервної на $[a,b]$ є одним з інтегралів зі змінною верхньою межею, тобто

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C, \quad x \in [a;b],$$

де C - деяка стала.

4.4.Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо $F(x)$ є яка-небудь первісна для неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4.22}$$

Доведення.

Якщо $F(x)$ є яка-небудь первісна, для функції $f(x)$, то і функція $\int_a^x f(u)du$ - також первісна для $f(x)$. Дві первісні відрізняються одна від одної лише константою, тобто

$$\int_a^x f(u)du = F(x) + C_1. \tag{4.23}$$

Остання рівність буде справедливою при відповідному виборі сталої C_1 для всіх значень x, тобто являється тотожністю. Щоб визначити C_1 покладемо в (4.23) $x = a$, тоді

$$\int_a^a f(u)du = F(a) + C_1 = 0,$$

звідки $C_1 = -F(a)$.Отже, $\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a)$.

Тепер, якщо взяти в (4.23) $x = b$, то одержимо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Отже формулу Ньютона-Лейбніца доведено.

Відзначимо, що оскільки всі первісні відрізняються одна від одної лише константою, то різниця $F(b) - F(a)$ не залежить від вибору $F(x)$.

Обчислення визначених інтегралів за допомогою формули Ньютона-Лейбніца проводиться в два кроки: спочатку за методами знаходження невизначеного інтеграла визначають деяку первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, а потім знаходимо її приріст на проміжку $[a;b]$. Для позначення приросту первісної вводять символ подвійної підстановки, який зручно використовувати при розв'язанні прикладів, а саме:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (4.24)$$

Розглянемо використання одержаної формули на прикладах.

Приклад 4.1.Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Розв'язання.

За формулою Ньютона-Лейбниця маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$$

Приклад 4.2.Обчислити інтеграл $\int_1^4 5x^4 dx$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_1^4 5x^4dx = 5\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^4 = x^5\Big|_1^4 = 1024-1=1023.$$

Приклад 4.3. Обчислити інтеграл $\int_1^2\left(x^2-3x+1\right)dx.$

Розв'язання.

$$\int_1^2\left(x^2-3x+1\right)dx = \int_1^2 x^2dx - 3\int_1^2 xdx + \int_1^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 +$$
$$+x\Big|_1^2 = \frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\left(4-1\right)+2-1 = \frac{7}{3}-\frac{9}{2}+1=-\frac{7}{6}.$$

Приклад 4.4. Обчислити інтеграл $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{1-x^2}.$

Розв'язання.

$$\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{1-x^2} = \int_{-2}^{-3}\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{-2}^{-3} =$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{-3-1}{-3+1}\right| - \ln\left|\frac{-2-1}{-2+1}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln 3\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3.}$$

Приклад 4.5. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx.$

Розв'язання.

Перетворюємо підінтегральну функцію

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx =$$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\frac{sin2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

Приклад 4.6.Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Розв'язання.

Виділяємо повний квадрат з квадратного тричлена в знаменнику.

$$x^2+4x+5=x^2+2\cdot 2x+4+1=(x+2)^2+1.$$

Тепер маємо

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t\Big|_2^3=$$
$$=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2.$$

Приклад 4.7.Обчислити інтеграл $\int\limits_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\limits_1^4\frac{1}{x^2}dx+\int\limits_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^4-2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4=$$
$$=-\left(\frac{1}{4}-1\right)-2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-1\right)=\frac{3}{4}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{4}.$$

Запитання для самодіагностики

1. Що називається інтегральною сумою функції $f(x)$ на $[a,b]$?
2. Дати означення визначеного інтеграла.
3. Сформулювати основні властивості визначеного інтеграла.
4. Як знайти середнє значення функції на проміжку $[a,b]$?

5. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?

6. Який фізичний зміст визначеного інтеграла?

7. Який економічний зміст визначеного інтеграла?

8. В чому полягає різниця між визначеним та невизначеним інтегралами?

9. Чому дорівнює похідна від визначеного інтеграла із змінною верхньою границею?

10. Записати формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла.

Приклади і вправи.

Приклади.

Обчислити інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

4.8. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \int\limits_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3}\,dx = \left.\frac{(11+5x)^{-2}}{-2\cdot 5}\right|_{-2}^{-1} = -\left.\frac{1}{10(11+5x)^2}\right|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{360}+\frac{1}{10}=\frac{7}{32}.$$

4.9. $\int\limits_{4}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_{4}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}} = \left.\arcsin\frac{x}{8}\right|_{4}^{4\sqrt{3}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

4.10. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання.

$$\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_{-2}^{0}=\ln 1-\ln\left|\sqrt{5}-2\right|=-\ln(\sqrt{5}-2).$$

4.11. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}.$

Розв'язання.

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\left(x+2\right)^2+1}=\operatorname{arctg}\left(x+2\right)\Big|_{0}^{1}=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2.$$

4.12. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$

Розв'язання.

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-\left(x-1\right)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{2}\Big|_{0}^{1}=$$

$$=\arcsin 0-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Вправи.

За формулами Ньютона – Лейбніца обчислити інтеграли.

4.13. $\int_{-1}^{3}x^3dx.$

4.14. $\int_{1}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

4.15. $\int_{1}^{16}\sqrt{x}dx.$

4.16. $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}}\frac{dx}{x}.$

4.17. $\int_{1}^{8}\left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$

4.18. $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}dx.$

4.19. $\int_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx.$

4.20. $\int_{0}^{8}(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx.$

4.21. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

4.22. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$.

4.23. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tgx}\, dx$.

4.24. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{25-x^2}$.

4.25. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{ctg}\, 2x dx$.

4.26. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x^2-2x+10}$.

4.27. $\int_{2}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

4.28. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.29. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 5x dx$.

4.30. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx$.

Глава 5. Методи обчислення визначеного інтеграла. Невласні інтеграли.

Методи обчислення визначеного інтеграла аналогічні з методами знаходження невизначеного інтеграла. Дійсно, при обчисленні визначеного інтеграла спочатку треба знайти будь-яку первісну, а потім вже застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца.

5.1. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай треба знайти інтеграл $\int\limits_a^b f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx$, який безпосередньо обчислити не можна, де підінтегральна функція – неперервна. Припустимо, що $t=\varphi(x)$,

тоді $\int\limits_a^b f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt$, де $dt=\varphi'(x)dx$, $\alpha=\varphi(a),\ \beta=\varphi(b)$. (5.1)

Доведення.

Нехай $\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt=F(t)\Big|_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$, де $dF(t)=F'(t)dt=f(t)dt$,

отже,

$$\int\limits_a^b f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx=F(\varphi(x))\Big|_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))=F(\beta)-F(\alpha).$$

Таким чином, формулу доведено.

Приклад 5.1 Обчислити $\int\limits_0^{3\pi}\sin^3 xdx$.

Розв'язання.

$\int\limits_0^{3\pi}\sin^3 xdx=-\int\limits_0^{3\pi}(1-\cos^2 x)(-\sin x)dx=$

$$= \int_{1}^{-1} (1-t^2)dt = -\int_{-1}^{1} (1-t^2)dt = \left(-t + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

В інтегралі було зроблено заміну: $t = \cos x, dt = -\sin x dx,$ при $x = 0, t = -1$, при $x = 3\pi, t = -1$.

Розглянемо ще один випадок заміни змінної.

Нехай функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді, якщо: 1) функція $x = \varphi(t)$ диференційована на $[\alpha;\beta]$ і відображує $[\alpha;\beta]$ на $[a;b]$ $\varphi'(t)$ неперервна на $[\alpha;\beta]$; 2) функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{5.2}$$

яка носить назву формули заміни змінної у визначеному інтегралі.

Доведення.

Для доведення достатньо продиференціювати обидві частини таких рівностей

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t)) + C.$$

Дійсно,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Отже, праві частини останніх виразів рівні, а значить будуть рівними і ліві частини,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx,$$

що й треба було довести.

Зауважимо, якщо при знаходженні невизначеного інтеграла за допомогою заміни змінної ми повинні були повернутися від нової змінної t до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла цього можна не робити, достатньо встановити нові межі інтегрування α та β для змінної t.

Приклад 5.2. Обчислити $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \ \left(a>0\right)$

Розв'язання.

Якщо покласти $x=a\sin t$, то $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t$ і $dx=a\cos tdt.$ Змінюємо межі інтегрування: при $x=0, t=0;$ при $x=a, t=\dfrac{\pi}{2}$. Отже будемо мати

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\cos tdt=a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Тут використано формулу $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$.

5.2. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Відомо, що так само, як і для невизначеного інтеграла, для визначеного інтеграла буде справедливою формула інтегрування частинами. Покажемо це.

Теорема. Нехай функції u та v диференційовані функції за своїм аргументом x, тоді

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du, \qquad (5.3)$$

де $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$, а інтеграл $\int_a^b v du$ буде більш простим при інтегруванні, ніж вихідний. Дійсно, оскільки

$$(uv)' = u'v + uv'$$

то

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx. \qquad (5.4)$$

Застосовуючи до лівої частини рівності (5.3) формулу Ньютона-Лейбніца, а також враховуючи, що $u'dx = du$, а $v'dx = dv$, здобудемо

$$(uv)\big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv,$$

звідси остаточно маємо

$$\int_a^b u dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Це і є формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Приклад 5.3. Обчислити $\int_0^1 xe^{2x} dx$.

Розв'язання.

Нехай $x = u$, тоді $dx = du$ $e^{2x}dx = dv$, тоді $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Використовуючи формулу інтегрування частинами(5.2), отримаємо:

$$\int_0^1 xe^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{1}{4}(e^2 - 1).$$

Приклад 5.4. Обчислити $\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx$.

Розв'язання

Нехай $u = \ln x$, тоді $du = \frac{1}{x}dx$, а $dv = x^2 dx$, тоді $v = \frac{x^3}{3}$. Отже

$$\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{2}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\int\limits_1^2 x^2 dx = 4\ln 2 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{3}\Big|_1^2 = 4\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 4\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Приклад 5.5.Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

. *Розв'язання*

Застосовуємо формулу інтегрування частинами(5.2)**.** Нехай

$$u = x,\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x},$$

тоді

$$du = dx,\ v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx.$$

Отже, маємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = x(-ctgx)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgx dx = -\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4} +$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = -\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} +$$

$$+\ln\sin\frac{\pi}{3} - \ln\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} -$$

$$-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \frac{\pi\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

5.3. Невласні інтеграли

1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (інтеграли I роду)

Нехай функція $f(x)$ – визначена та неперервна на проміжку $[a;+\infty]$, , тоді символ

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

будемо розуміти так

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(a)\right]. \qquad (5.5)$$

Якщо ця границя існує та скінченна, даний інтеграл існує або кажуть, що він збігається; якщо границя дорівнює нескінченності – або зовсім не існує, то інтеграл також не існує, тобто розбігається.

Нехай функція $f(x)$ – неперервна на проміжку $[-\infty;b]$, тоді визначення невласного інтеграла

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

буде аналогично даному вище: якщо існує скінченна границя, то інтеграл

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{a\to-\infty}\left[F(b)-F(a)\right]. \qquad (5.6)$$

збігається, у протилежному випадку – розбігається.

Дамо визначення невласного інтеграла від неперервної функції на проміжку $(-\infty,+\infty)$. Символ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

будемо розуміти так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} F(x)\Big|_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} \left[F(b)-F(a)\right]. \qquad (5.7)$$

Якщо ця границя існує, то інтеграл існує, тобто збігається. У протилежному випадку – не існує, тобто розбігається.

Введемо позначення

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty),\ \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(-\infty).$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty), \qquad (5..8)$$

де $F(x)$ – є первісна функція для $f(x)$.

Останню рівність треба розуміти так: якщо кожний із невласних інтегралів (5.5)і (5.6) існують , то існує (збігається) і інтеграл(5.8).

Теорема 1.Якщо для всіх $x\left(x \ge a\right)$ виконується нерівність $0 \le f\left(x\right) \le \varphi\left(x\right)$, і якщо $\int_a^{+\infty} \varphi\left(x\right)dx$ збігається, то $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ також збігається, при цьому $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi\left(x\right)dx$.

Теорема 2.Якщо для всіх $x\left(x \ge a\right)$ виконується нерівність $0 \le \varphi\left(x\right) \le f\left(x\right)$, до того ж $\int_a^{+\infty} \varphi\left(x\right)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$.

Теорема 3.Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} \left|f\left(x\right)\right|dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$. В цьому випадку останній інтеграл називається абсолютно збіжним.

Теореми приводимо без доведення.

Невласний інтеграл виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

називається інтегралом Пуассона. Доведено, що цей інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\ .$$

Виходячи з геометричного змісту визначеного інтеграла це означає, що площа під кривою e^{-x^2} і віссю Ox дорівнює $\sqrt{\pi}$.

Розглянемо невласний інтеграл вигляду

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_{1}^{+\infty} x^{-s}dx,\ (s \neq 1)\ \text{(інтеграл Діріхлє)}. \quad (5.9)$$

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-s}dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_{1}^{+\infty} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{s-1},\ s>1 \\ \infty,\quad s<1. \end{array}\right. \quad (5.10)$$

При $s=1$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{1}^{+\infty} = \infty\ .$$

Звідси можна зробити висновок: даний інтеграл збігається, якщо $s>1$ і розбігається, якщо $s \le 1$.

Приклад 5.6. Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\ .$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 5.7. Обчислити $\int_{1}^{+\infty} \cos x dx$.

$$\int_{1}^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 1)\ .$$

Ця границя не існує, отже даний невласний інтеграл розбігається.

Приклад 5.8.Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Розв'язання.
Розглянемо інтеграл. За означенням

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctgx}}{1+x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

Для обчислення останнього інтеграла скористаємося заміною

$\operatorname{arctg} x = t$, звідки $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$.

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C_1 = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C_1.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \right|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}^2 b}{2} - \frac{\operatorname{arctg}^2 0}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Приклад 5.9. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$, якщо він збігається.

Розв’язання.
За означенням

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \ln \ln x \Big|_2^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln \ln b - \ln \ln 2 \right) = +\infty,$$

тобто даний інтеграл розбігається.

2. Інтеграли від необмежених функцій (інтеграли II роду)

Невласні інтеграли II роду від функції $f(x)$, яка має розрив при $x = a$ або при $x = b$, визначаються такими формулами:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Невласний інтеграл II роду називають збіжним, якщо існують скінчені границі в правих частинах цих формул. У протилежному випадку їх називають розбіжними.

Приклад 5.10. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо він збігається.

Розв'язання.

Підінтегральна функція має розрив в точці $x=1$.

За означенням маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\Big) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Тобто даний інтеграл збігається.

Приклад 5.11.Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$, якщо він збігається.

Розв’язання.

Підінтегральна функція розривна в точці $x=0$.

За означенням маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

Таким чином, інтеграл розбігається.

Запитання для самодіагностики

1.Які методи інтегрування в визначеному інтегралі ви знаєте?

2.Сформулювати теорему про заміну змінної у визначеному інтегралі.

3. В чому особливість методу заміни змінної у визначеному інтегралі?

4.Записати формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

5.Які інтеграли називаються невласними?

6.Які невласні інтеграли є інтегралами 1 роду?

7.Які невласні інтеграли є інтегралами 2 роду?

8.Який невласний інтеграл називається інтегралом Діріхлє?

9.Які невласні інтеграли називаються збіжними? Наведіть приклад.

10.Які невласні інтеграли називаються розбіжними? Наведіть приклад.

Вправи і приклади

Приклади.

5.12.Обчислити інтеграли методом заміни змінної.

$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

Розв'язання.

Нехай $\ln x = t,$ тоді $\frac{dx}{x} = dt,\ t_1 = \ln 1 = 0,\ t_2 = \ln e = 1.$

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

5.13. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{ctgx}}.$

Розв'язання.

Нехай $ctgx = t,$ тоді

$$-\frac{dx}{\sin^2 x}=dt,\ \ t_1=ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},\ \ t_2=ctg\frac{\pi}{4}=1.$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{ctgx}}=-\int\limits_{\sqrt{3}}^{1}t^{-\frac{1}{2}}dt=\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}t^{-\frac{1}{2}}dt=2\sqrt{t}\Big|_1^{\sqrt{3}}=2\sqrt[4]{3}-2.$$

5.14. $\int\limits_{15}^{99}\frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}.$

Розв'язання.

Нехай $x+1=t^2$, тоді

$$dx=2tdt,\ \ t_1=\sqrt{15+1}=4,\ \ t_2=\sqrt{99+1}=10.$$

$$\int\limits_{15}^{99}\frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}=\int\limits_{4}^{10}\frac{2t}{3-t}dt=-2\int\limits_{4}^{10}\frac{t-3+3}{t-3}dt=$$

$$=-2\int\limits_{4}^{10}\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt=(-2t-6\ln|t-3|)\Big|_4^{10}=$$

$$=-20-6\ln 7+8+6\ln 1=-12-6\ln 7.$$

5.15. $\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$

Розв'язання.

Нехай $x=2\sin t$, тоді $dx=2\cos tdt$, $4-x^2=4\cos^2 t$,

$$t_1=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\ \ t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=\left(-\mathrm{ctg}\,t-t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+ctg\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

5.16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}.$

Розв'язання.

Нехай $tg\frac{x}{2}=t,$ тоді $x=2\operatorname{arctg} t,$ $dx=\frac{2dt}{1+t^2},$

$$t_1=\operatorname{tg}0=0,\ t_2=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$

крім того, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}=\int\limits_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\limits_0^1 \frac{dt}{8t^2+2}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg}2t\Big|_0^1=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2\,.$$

Обчислити інтеграли за допомогою формули інтегрування частинами.

5.17. $\int\limits_{-1}^{0}(2x+3)e^{-x}dx.$

5.18.

Розв'язання.

Нехай $u=2x+3,$ $dv=e^{-x}dx,$ тоді $du=2dx,$ $v=-e^{-x}$

$$\int\limits_{-1}^{0}(2x+3)e^{-x}dx=-(2x+3)e^{-x}\Big|_{-1}^{0}+2\int\limits_{-1}^{0}e^{-x}dx=$$

$$=-(2x+3)e^{-x}\Big|_{-1}^{0}-2e^{-x}\Big|_{-1}^{0}=-3+e-2+2e=3e-5.$$

5.19. $\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)dx.$

Розв'язання.

Нехай $u=\ln(x+1),$ $dv=dx,$ тоді $du=\frac{dx}{x+1},$ $v=x$

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} -$$

$$-\int_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^{e-1} =$$

$$= (e-1)\ln e - (e-1-\ln e) = e-1-e+1+1 = 1.$$

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність.

5.20. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$.

Розв'язання.

Згідно з означенням невласного інтеграла маємо

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

5.21. $\int\limits_0^{\infty} \cos x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\cos x dx = \lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty}\sin b.$$

Оскільки остання границя не існує, то даний інтеграл розбігається.

5.22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(-\operatorname{arctg} a\right) + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Інтеграл збігається і дорівнює π .

5.23. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.

Функція $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ має нескінченний розрив при $x=1.$ Тому згідно з означенням

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{2}.$

Вправи.

5.24. $\int\limits_{4}^{5} x\sqrt{x^2-16}\,dx.$

5.25. $\int\limits_{-2}^{1} x^2\sqrt{1-x^3}\,dx.$

5.26. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$

5.27. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

5.28. $\int\limits_{0}^{0,5} e^{\sin \pi x} \cos \pi x dx.$

5.29. $\int\limits_{1}^{\sqrt[4]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

5.30. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$

5.31. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx.$

5.32. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$

5.33. $\int\limits_{4}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$

5.34. $\int\limits_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}.$

5.35. $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

5.36. $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$

5.37. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}.$

5.38. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx.$

5.39. $\int\limits_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}.$

5.40. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$

5.41. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2} dx.$

5.42. $\int\limits_{0}^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx.$

5.43. $\int\limits_{1}^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx.$

5.44. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

5.45. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x} dx.$

5.46. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x dx.$

5.47. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$

5.48. $\int\limits_{1}^{e} \ln x dx.$

5.49. $\int\limits_{0}^{3} x \operatorname{arctg} x dx.$

5.50. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

5.51. $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx.$

5.52. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx.$

5.53. $\int_0^1 x \arcsin x dx.$

5.54. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}.$

5.55. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$

5.56. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}.$

5.57. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}.$

5.58. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

5.59. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$

5.60. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 9}.$

5.61. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$

5.62. $\int_0^{\infty} x \sin x dx.$

5.63. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$

5.64. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}.$

5.65. $\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{5 - x}}.$

Глава 6. Застосування визначеного інтеграла до деяких геометричних та економічних задач

6.1. Довжина дуги плоскої кривої

Означення. Довжиною дуги називається границя довжини вписаної ламоної лінії при небмеженому зменшенні довжини її ланок.

Знайдемо довжину дуги $y = f(x)$, де $y = f(x)$-неперервна диференційована функція на $[a,b]$.

Розіб'ємо $[a,b]$.на частини точками поділу x_i (Рис.6.1). Впишемо в дугу кривої ламану лінію так, щоб абсциси її вершин були x_i .Тоді довжина однієї ланки ламаної згідно з теоремою Піфагора буде:

$$A_iA_{i+1} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ .$$

За теремою Лагранжа

$$A_iA_{i+1} = \Delta x_i \sqrt{1 + y'^2(c_i)}$$

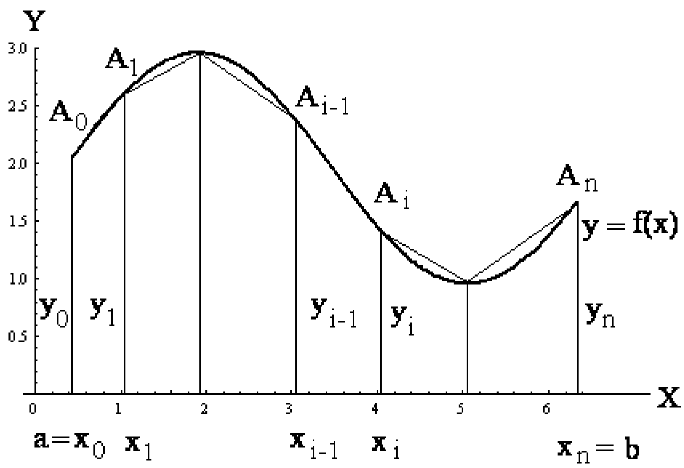


Рис.6.1.

Довжина ламаної лінії $L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + y'^2(c_i)}\Delta x_i$. Отже, довжина дуги кривої ,що обмежена $y = f(x)$ буде:

$$l=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+y'^2(c_i)}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx,\ \text{де } 1\le i\le n. \qquad (6.1)$$

Якщо крива задана рівняннями в параметричній формі $x=x(t),\ y=y(t),$ то довжина дуги кривої визначається за формулою

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt, \qquad (6.2)$$

де t_1 і t_2 – значення параметра, які відповідають кінцям дуги.

Якщо дуга задається рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$ в полярних координатах, то довжина дуги визначається

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi, \qquad (6.3)$$

де α і β – значення полярного кута, що відповідають кінцям дуги..

Приклад 6.1.Знайти довжину дуги кривої $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}.$

Розв'язання.

Щоб знайти границі інтегрування, знайдемо область визначення заданої функції, розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases}x-x^2\ge 0,\\ -1\le\sqrt{x}\le 1,\end{cases}\quad \begin{cases}x(x-1)\le 0,\\ 0\le x\le 1,\end{cases}\quad 0\le x\le 1,$$

Знайдемо

$$y'=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\frac{1-x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}};$$

$$1+\left(y'\right)^2=1+\frac{\left(1-x\right)^2}{x\left(1-x\right)}=1+\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}.$$

Отже, за формулою (6.1)

$$l=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}}dx=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2\,.$$

Приклад 6.2. Знайти довжину дуги астроїди $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$ (Рис.6.2)

Розв'язання.

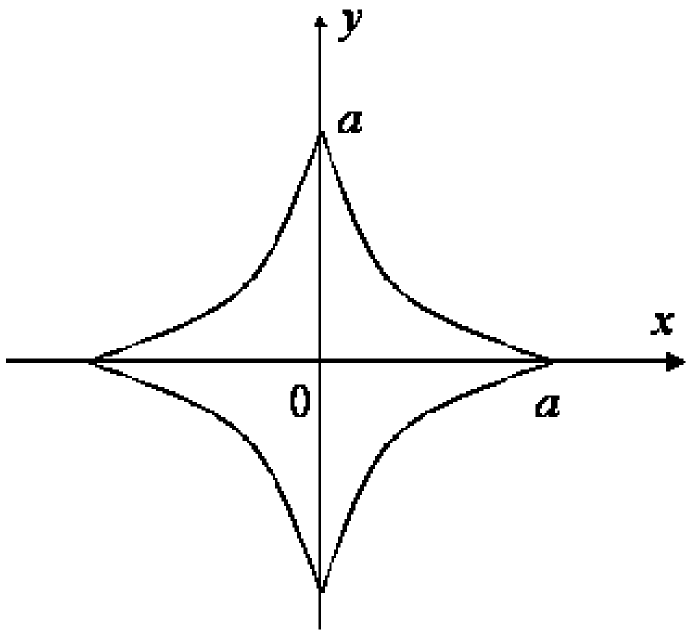


Рис.6.2

Знайдемо довжину $\frac{1}{4}$ всієї дуги, що розташована в першій чверті. Параметр t змінюється від $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

$$x'\left(t\right)=-3a\cos^2 t\sin t,\quad y'\left(t\right)=3a\sin^2 t\cos t,$$

$$(x')^2+(y')^2=9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t=$$
$$=9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)=9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

За формулою (6.2) отримуємо

$$\frac{1}{4}l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2 cos^2 t\, sin^2 t}dt=3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,t\, sin\,t dt=$$

$$=3a\cdot\frac{sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a \text{ (од.)}$$

Отже, довжина астроїди $l=4\cdot\frac{3}{2}a=6a$ (од.).

Приклад 6.3. Знайти довжину кардіоїди $\rho=2a\left(1+\cos\varphi\right)$ (Рис. 6.3).

Розв’язання.

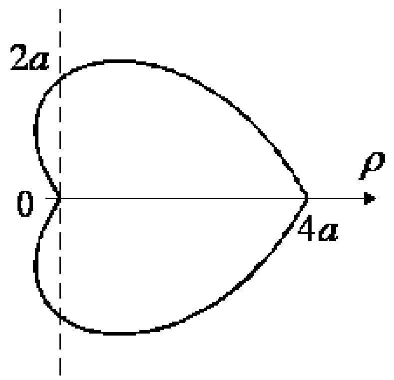


Рис.6.3

Задана крива симетрична відносно полярної осі. Тому знайдемо половину довжини її дуги, де кут φ буде змінюватися від $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$. Маємо

$$\rho'=-2a\sin\varphi,$$

$$\rho^2+(\rho')^2=4a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+4a^2\sin^2\varphi=$$

$$=4a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=8a^2\left(1+\cos\varphi\right).$$

За формулою (6.3) одержуємо

$$\frac{1}{2}l=\int_{0}^{\pi}\sqrt{8a^2\left(1+\cos\varphi\right)}d\varphi=a\int_{0}^{\pi}\sqrt{16\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi}=8a$$

Тоді довжина шуканої лінії $l=16a$ (од.).

6.2. Обчислення площ геометричних фігур.

Розглянемо декілька випадків обчислення площ геометричних фігур:

1. Відомо, що за геометричним змістом визначений інтеграл від невід’ємної неперервної функції $y=f(x)$ на $[a;b]$ чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції, обмеженою функцією $y=f(x)\geq 0$:

$$S=\int_{a}^{b}f(x)dx. \tag{6.4}$$

2. Якщо функція $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ недодатна, тобто $f(x)\leq 0$, то й визначений інтеграл від неї також буде числом недодатним, тому що він є границею інтегральних сум, а значить зберігає знак підінтегральної функції, тоді для $f(x)\leq 0$ площа криволінійної трапеції буде:

$$S=-\int_{a}^{b}f(x)dx. \tag{6.5}$$

3. Якщо функція $y=f(x)$на проміжку $[a;b]$ змінює знак, проходячи через точку c,то для знаходження площі проміжок $[a;b]$треба розбити на два проміжка $\left[\grave{a};\tilde{n}\right]$та$\left[\tilde{n};b\right]$і застосувати формули (6.4) та (6.5).

Якщо функція $y=f(x)$ кілька разів змінює знак на $[a;b]$ то площу фігури можна обчислити за формулою:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx. \qquad (6.6)$$

4. Більш складні задачі на обчислення площ розв'язують використовуючи властивість адитивності площ, тобто фігуру можна поділити на непересічні частини та обчислити площу всієї фігури як суму площ цих частин.

5. Якщо треба обчислити площу фігури, обмежену кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, заданими на відрізку $[a,b]$, причому $f_1(x)\geq f_2(x)$, то ця площа підраховується за формулою

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx. \qquad (6.7)$$

6. Якщо плоска фігура обмежена графіком неперервної на проміжку $[c,d]$ функції $x=g(y)$, прямими $y=c, y=d$ та віссю ординат, то площа S знаходиться за формулою

$$S=\int_c^d g(y)dy. \qquad (6.8)$$

Приклад 6.4. .Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y=x^3$, прямою $x=1$ та віссю Ox (рис. 6.4)

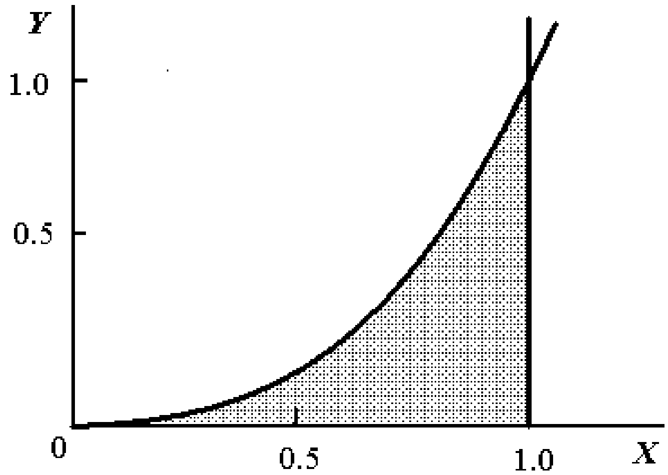


Рис.6.4.

$$S=\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

Приклад 6.5. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=x-x^2$, $y=0,\ x=1,\ x=2.$ (Рис.6.5)

$$S=-\int_1^2\left(x-x^2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$$

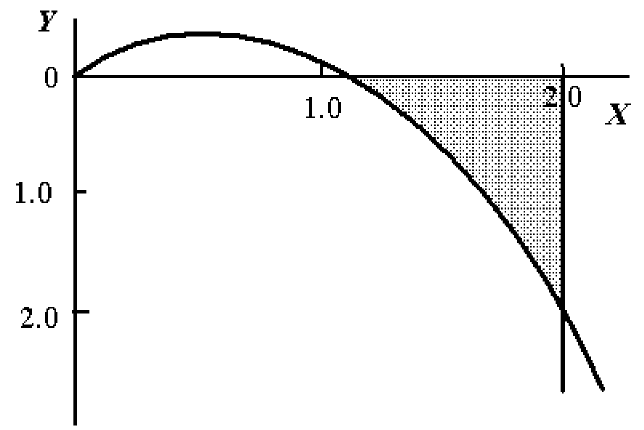


Рис.6.5.

Приклад 6.6. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y=\cos x$, $x=0$; $x=\pi$.

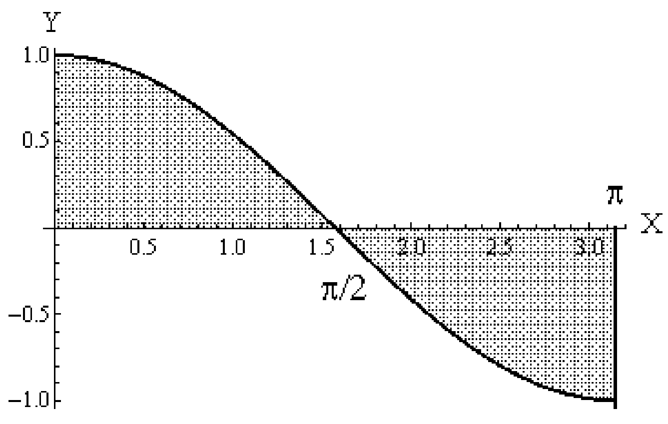


Рис.6.6.

Площа цієї фігури буде:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx.$$

Як видно з рис. 6.6, площа S, під кривою $y = \cos x$ між точками $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ - від'ємна, значить на цьому інтервалі $|\cos x| = -\cos x$, і площу можна обчислити як різницю двох площ S_1 і S_2, тобто

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \left|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 1 - 0 - 0 + 1 = 2.$$

Приклад 6.7. Знайти площу S фігури, обмеженої лініями:

$y = x$; $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$; $x = 3$.

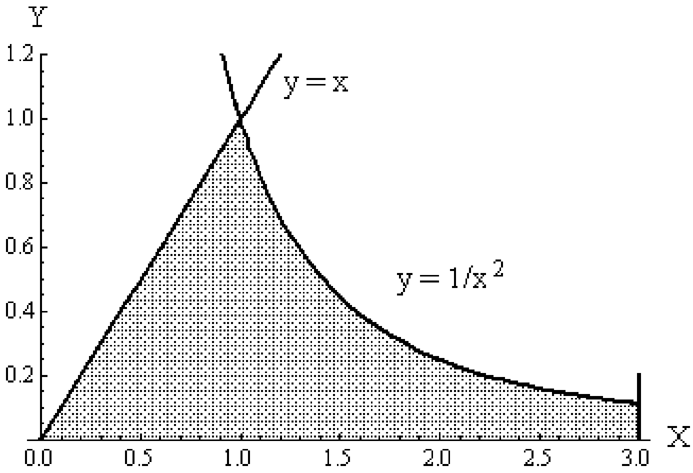


Рис.6.7.

Дану фігуру можна розглядати як дві криволінійні трапеції, обмежені віссю абсцис, прямими $x = 0$ та $x = 3$, а також графіком функції $y = x$ на відрізку $[0;1]$ і графіком $y = 1/x^2$ на відрізку $[1;3]$ (рис. 6.7). Оскільки записати первісну одноразово для цих функцій не можна, то дану криволінійну трапецію розіб'ємо прямою $x = 1$ на дві трапеції, тоді загальна площа фігури буде дорівнювати сумі площ цих трапецій, тобто

$$S = S_1 + S_2,$$

де $S_1 = \int\limits_0^1 x dx$, а $S_2 = \int\limits_1^3 \frac{1}{x^2} dx$.

Отже,

$$S = \int\limits_0^1 x dx + \int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{x}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{6}.$$

Приклад 6.8. Знайти площу фігури, обмежену кривими $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$ (рис. 6.8).

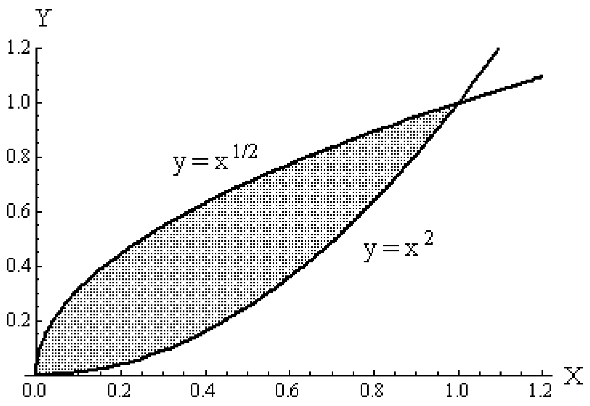


Рис.6.8.

Спочатку знайдемо точки перетину $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$. Це будуть точки $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$, тобто маємо відрізок $[0;1]$. Як бачимо, крива $y = \sqrt{x}$ проходить вище кривої $y = x^2$,тобто на цьому відрізку $\sqrt{x} \geq x^2$тоді маємо (6.7):

$$S = \int\limits_0^1 \sqrt{x} dx - \int\limits_0^1 x^2 dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 6.9. Знайти площу, обмежену кривими $x = \frac{1}{2} y^2, x = 6 - y^2$.

Знайдемо точки перетину парабол. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = y^2 / 2 \\ x = 6 - y^2. \end{cases}$$

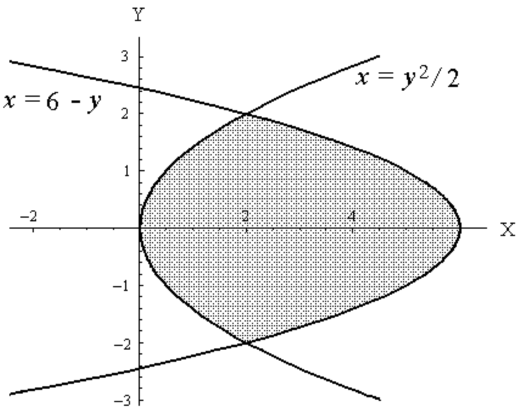


Рис. 6.9.

Точки перетину: A(2,2), B(2,-2). Таким чином, за формулами (6.7), (6.8) площа фігури обчислюється так:

$$S=\int_{-2}^{2}\left(6-y^2-y^2/2\right)dy=2\int_{0}^{2}\left(6-3y^2/2\right)dy=2\left(6y-\frac{3y^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=16.$$

7.Площа фігури, обмеженою кривою заданою рівняннями в параметричній формі.

Нехай залежність $y=f(x)$ задається параметрично а саме

$$x=x(t),\ y=y(t), \tag{6.9}$$

де $\alpha\le t\le\beta$; $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, і рівняння (6.9) визначають деяку криву $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Площа фігури, як і раніше, обчислюється за формулою (6.4), але в цій формулі робиться заміна змінної $x=x(t)$, тоді $dx=x'(t)dt$, а $y=f(x(t))=y(t)$ і

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \tag{6.10}$$

Приклад 6.10.Знайти площу, обмежену еліпсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (рис. 6.10).

Розв’язання.

Оскільки еліпс симетричний відносно осей координат, то знайдемо

$\frac{1}{4}$ частину його площі. При змінювання x від 0 до a параметр t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0 (з рівнянь $a\cos t = 0,\ a\cos t = a$).

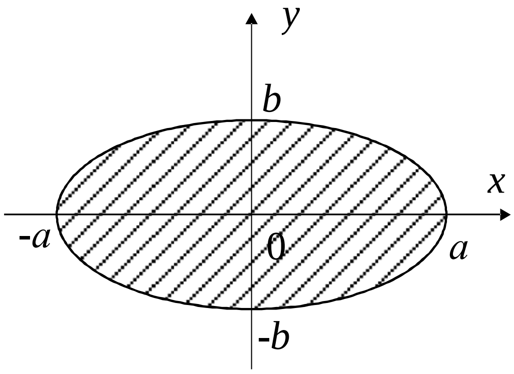


Рис.6.10.

Отже,

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\left(a\cos t\right)' dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos 2t\right)dt = -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

$S = \pi ab$ (кв. од.)

8. Площа криволінійного сектора

Розглянемо, площу геометричної фігури в полярних координатах (ρ, φ), яка обмежена лінією $\rho = \rho(\varphi)$ та двома променями $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$. Функція $\rho(\varphi)$ - неперервна при $\alpha \le \varphi \le \beta$. Таку фігуру називають криволінійним сектором. Обчислимо площу сектора, або криволінійного трикутника OAB (рис. 6.11), обмеженого лініями $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$; $\rho = \rho(\varphi)$. Розіб'ємо $[\alpha, \beta]$ на n частин довільним чином. Для i-ої частини $(i = 1 \div n)$, де, $\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ вважаємо, що $\rho(\varphi) = const = \rho(\varphi_i^*)$.

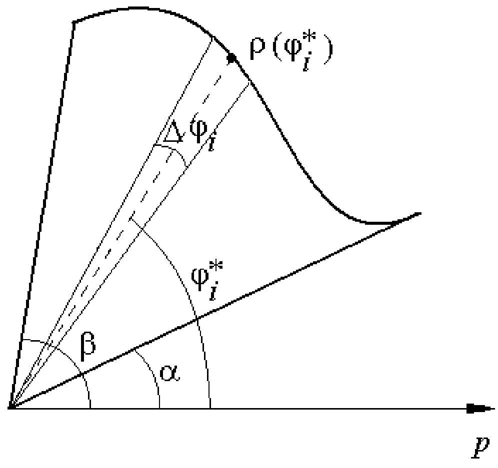


Рис. 6.11. Площа криволінійного сектора.

Таким чином, отримано n колових секторів. Площа i-го колового сектора ΔS_i за відомою із школьного курсу формулою $\left(S_{сект.} = \frac{1}{2}R^2\alpha \right)$ буде:

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i .$$

Тоді площа ступінчатого сектора

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i . \qquad (6.11)$$

Розглядаючи цю площу, як інтегральну суму для функції $\rho^2 = \rho^2(\varphi)$ на $[a, \beta]$ і переходячи до границі в (6.11) при $\max \Delta\varphi_i \to 0$, знаходимо площу криволінійного сектора:

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi . \qquad (6.12)$$

Приклад.6.11. Обчислити площу фігури, обмеженої полярною віссю та першим звієм спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$, де a - додатне число (рис.6.12). При змінюванні φ від 0 до 2π полярний радіус опише криву, що обмежує криволінійний сектор $0ABC$. Тому за формулою (6.12) маємо:

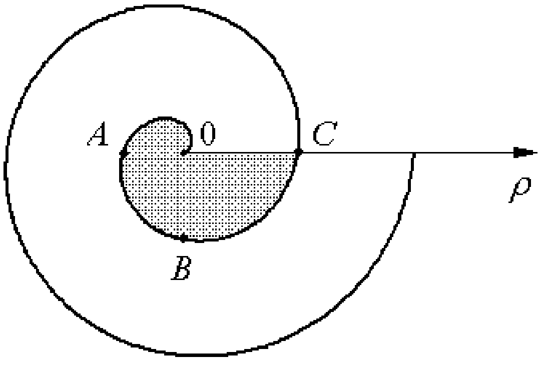
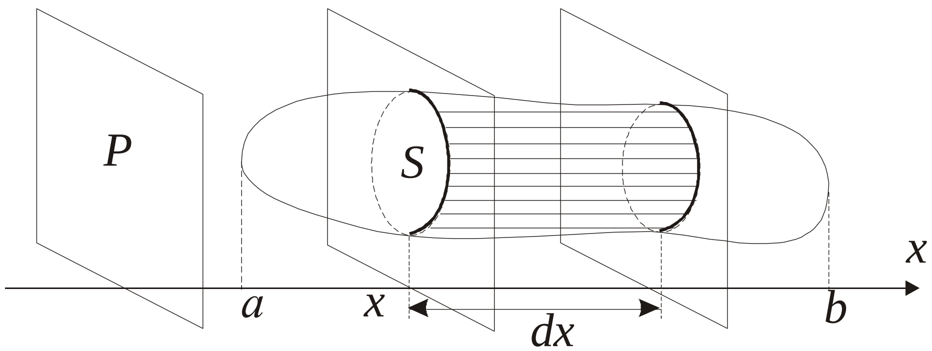


Рис. 6.12.

$$S_{0ABC}=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\frac{\alpha^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

6.3 Об'єми тіл з відомою площею паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло, причому відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, перпендикулярної до осі Ox (рис.6.13).Площа ця залежить від розташування січної площини, тобто буде функцією аргументу $x: S=S(x)$.



.

Рис.6.13.

Припустимо також, що $S(x)$ - відома неперервна функція від x. Визначимо об'єм даного тіла. Якщо провести площини $x=x_0=a$; $x=x_1$; $x=x_2,...,x_n=b$, то вони розіб'ють тіло на шари. В кожному частковому проміжку $x_{i-1}\le x\le x_i$ візьмемо довільну точку $\xi_i (i=1\div n)$ і для кожного її значення побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна до осі Ox, а напрямна – є контур перерізу тіла T площиною $x=\xi_i$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Тоді об'єм елементарного циліндра з площею основи $S(\xi_i)$ та висотою Δx_i дорівнюватиме $S(\xi_i)\Delta x_i$. Якщо взяти $\sum_{i=1}^{n} S\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ і розглядати цю суму як інтегральну, то переходячи до границі при $\max \Delta x_i \to 0$, будемо мати шуканий об'єм тіла, тобто:

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx . \qquad (6.13)$$

Приклад 6.12. Знайти об'єм піраміди з відомою висотою H, в основі якої лежить трикутник ABC (рис.6.14). Помістимо її вершину O в початок координат і сумістимо висоту з віссю Ox. Якщо відома площа основи трикутника ABC, позначимо її через S_0, то має місце відоме співвідношення:

$$\frac{S_0}{S(x)} = \frac{H^2}{x^2},$$

де $S(x)$ – площа будь-якого перерізу піраміди площиною $x = const$. Тоді

$$S(x) = \frac{S_0 x^2}{H^2}.$$

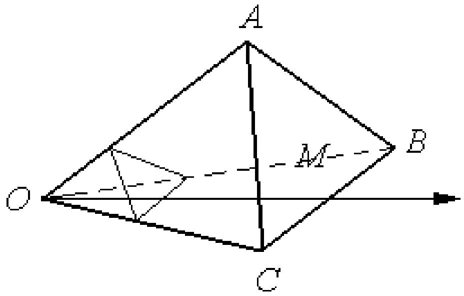


Рис. 6.14.

Підставляючи функцію для $S(x)$ у формулу (6.13), будемо мати:

$$V = \int_0^H \frac{S_0 x^2}{H^2} dx = \frac{S_0}{H^2} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^H = \frac{1}{3} S_0 H .$$

Одержали відому формулу об'єму піраміди.

Приклад 6.13. Знайти об'єм тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ і площинами $z=0$ та $z=h$.

Розв'язання.

Проведемо площину $z=l$ (рис. 6.15).

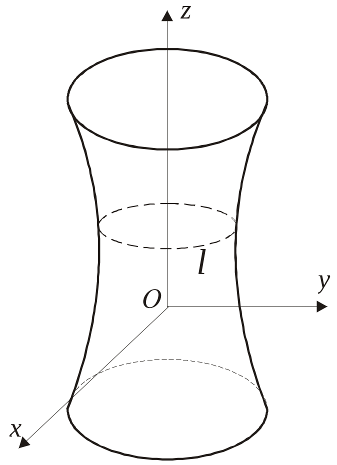


Рис.6.15.

В перерізі будемо мати еліпс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{l^2}{c^2},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2+l^2}{c^2}.$$

Знайдемо площу еліпса

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\ \text{де}\ a_1=\frac{a\sqrt{c^2+l^2}}{c}, b_1=\frac{b\sqrt{c^2+l^2}}{c},$$

$$\frac{y^2}{b_1^2}=1-\frac{x^2}{a_1^2},\quad y^2=b_1^2\cdot\frac{a_1^2-x^2}{a_1^2}.$$

$$y=\pm\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2-x^2}.$$

Спочатку обчислимо $\frac{1}{4}S$.

$$\frac{1}{4}S=\int_0^{a_1} ydx=\frac{b_1}{a_1}\int_0^{a_1}\sqrt{a_1^2-x^2}dx.$$

Для знаходження інтеграла застосовуємо підстановку $x = a_1 \sin t$, звідки $dx = a_1 \cos t dt$. Змінюємо границі інтегрування. Якщо $x = 0$, то, $t = 0$; якщо $x = a_1$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\frac{1}{4}S = \frac{b_1}{a_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_1^2 - a_1^2 \sin^2 t}\, a_1 \cos t dt = b_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_1^2\left(1 - \sin^2 t\right)} \cos t dt =$$

$$= a_1 b_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a_1 b_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a_1 b_1}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi a_1 b_1}{4}.$$

Отже, $S = \pi a_1 b_1$. Об'єм знайдемо за формулою (6.13)

$$V = \int_o^h \pi a_1 b_1 dl = \pi \int_0^h \frac{a\sqrt{c^2 + l^2}}{c} \cdot \frac{b\sqrt{c^2 + l^2}}{c} dl = \pi \frac{ab}{c^2} \int_0^h \left(c^2 + l^2\right) dl =$$

$$= \pi \frac{ab}{c^2}\left(c^2 l\Big|_0^h + \frac{l^3}{3}\Bigg|_0^h \right) = \pi \frac{ab}{c^2}\left(c^2 h + \frac{h^3}{3} \right) = \pi abh\left(1 + \frac{h^2}{3c^2} \right).$$

6.3. Обчислення об'єму тіла обертання.

Припустимо , що $f(x)$ - відома неперервна функція від x. Визначимо об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox (рис.6.16).

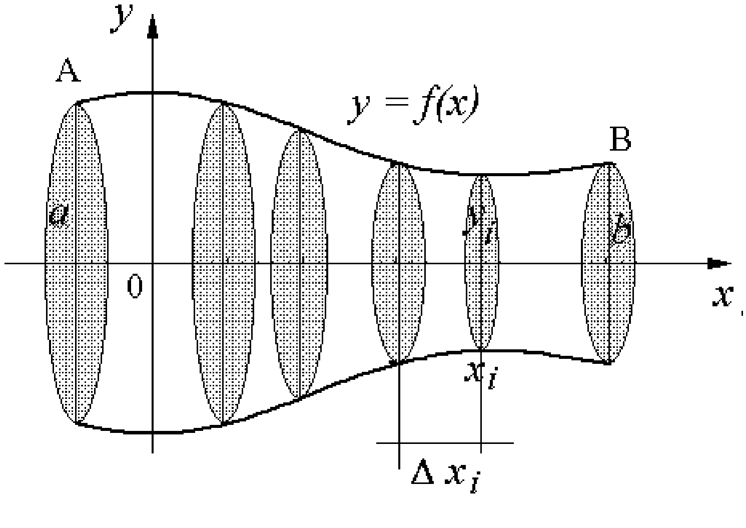


Рис.6.16.

Розіб'ємо проміжок $[a;b]$ на часткові проміжки $x = a = x_0$; $x = x_1$; $x = x_2, ..., x_n = b$. В кожному частковому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку $\xi_i (i = 1 \div n)$ і для кожного її значення побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна до осі Ox, а основою є коло з радіусом $f(\xi_i)$. Тоді об’єм елементарного циліндра з площею основи $\pi f^2(\xi_i)$ та висотою Δx_i дорівнюватиме $\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Якщо взяти $S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ і розглядати цю суму як інтегральну, то переходячи до границі при $\max \Delta x_i \to 0$ будемо мати шуканий об’єм тіла, тобто:

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (6.14)$$

Приклад.6.14. Кулю з радіусом R можна розглядати як результат обертання півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ навколо осі Ox . Тоді об’єм цієї кулі можна знайти за формулою (6.14):

$$V = \pi \int_{-R}^{R} f^2(x)dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi (R^2 x - \frac{x^3}{3})\Bigg|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Якщо замінити у формулі для V_x формально x на y, то одержимо об’єм тіла, що отримується шляхом обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x = \varphi(y)$ (де $\varphi(y)$ – функція обернена до $f(x)$), $x = 0$; $y = c$; $y = d$, тобто:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (6.15)$$

6.4. Використання інтегралів в деяких економічних задачах

Інтегрування в економіці має широке використання для знаходження функцій витрат, прибутку, споживання, якщо відомі відповідно функції граничних витрат,граничного прибутку, граничного споживання, тощо.Для визначення вільної сталої інтегрування необхідна додаткова умова. Якщо знаходиться функція витрат використується умова: при кількості продукції $x=0$ значення функції витрат дорівнює фіксованим витратам, а при знаходженні функції доходу: при кількості продукції $x=0$ значення функції дорівнює нулю (доход дорівнює нулю,якщо вироби не продано).

Приклад 6.15.Задано функцію граничного дохода

$$R'(x)=30-0,02x.$$

Знайти функцію доходу і закон попиту на продукцію.

Розв'язання.

$$R(x)=\int(30-0,02x)dx=30x-0,01x^2+C.$$

Отже, при $x=0,\quad R(x)=0$,тобто $C=0$ і функція доходу буде:

$$R(x)=30x-0,01x^2$$

Якщо кожна одиниця продукції продається за ціною p одиниць,то доход визначається формулою $R=xp.$ Отже, закон попиту буде:

$$p(x)=30-0,01x.$$

Приклад 6.16. Функція граничних витрат підприємства має вигляд:

$$f'(x)=60-0,04x+0,003x^2$$

а. Знайти функцію витрат, якщо витрати на 100 одиниць продукції складають 7 тис.гр.

б. Знайти фіксовані витрати.

в. Які витрати виробництва 250 одиниць продукції?

г. Якщо ціна складає 65,5 гр. за одиницю продукції, знайти максимальне значення прибутку.

Розв'язання.

Знайдемо функцію витрат:

$$f(x)=\int(60-0,04x+0,003x^2)dx=60x-0,02x^2+0,001x^3+C$$

Якщо $x=100$ од.,.то за умовою задачі $f(x)=7000$ тис.гр. Тобто,

$7000=60\cdot100-0,02\cdot100^2+0,001\cdot100^3+C$, або $C=200$.

Для знаходження фіксованих витрат знайдемо функцію витрат при

$x=0$. При цьому $f(0)=200$.

Таким чином, функція витрат має вигляд:

$f(x)=60x-0,02x^2+0,001x^3+200$

Витрати виробництва на 250 од. продукції одержимо

$f(250)=60\cdot 250+0,02\cdot 250^2+0,001\cdot 250^3=29575$

Прибуток підприємства визначаєм за формулою

$P(x)=px-f(x)$,де p -ціна одиниці продукції.

Отже, $P(x)=65,5x-60x+0,02x^2-0,001x^3-200$.

Розв'яжемо задачу на екстремум.

Знайдемо критичні точки, $P'(x)=5,5+0,04x-0,003x^2=0$, $x=50.$

$P''(x)=0,04-0,006x^2$, при $x=50$, $P''(50)=0,04-0,006\cdot 50=-0,26<0$,тобто функція прибутку має максимум. Значення функції прибутку в точці $P(50)=0.$

Таким чином, якщо реалізовувати продукцію за ціною 65,5гр. за одиницю підприємство не буде мати прибутку.

Приклад 6.17. Знайти середнє значення витрат, якщо обсяг виробництва змінюється від 100 до 200 грошових одиниць. Відомо, що витрати $f(x)$ в залежності від обсягу виробництва x описуються за допомогою функції $f(x)=1000+2x+0,04x^2$. Визначити обсяг виробництва, при якому витрати досягають середнього значення.

Для того, щоб визначити шуканий обсяг виробництва використаємо теорему про середнє, записавши її так:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{6.16}$$

Якщо $f(x)=1000+2x+0,04x^2$, то підставивши її під знак інтегралу з границями $a=100$, $b=200$, одержимо:

$$f(c)=\frac{1}{200-100}\int_{100}^{200}(1000+2x+0,04x^2)dx=\frac{1}{100}(1000x+x^2+0,04\frac{x^3}{3})\Big|_{100}^{200}=2700.$$

Таким чином, середні витрати виробництва складають 2700 грошові одиниці.

Розглянемо відому в економіці задачу про ступень нерівності в розподілі доходів населення. Нехай функція $y = f(x)$ – це доля сукупного доходу, яку одержує x найбільш низько оплачуєма частина населення.Наприклад, $y(0,8) = 0,6$ означає,що 80% найбільш низько оплачуємого населення одержують 60% сукупного доходу. Очевидно, що

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y \le x.$$

На рис. 6.17 наведено графік функції $y = f(x)$ - крива Лоренца. Якщо розподіл доходу рівномірний, то кривою розподілу є пряма лінія $y = x$. Відхилення реального розподілу від ідеального вимірюється відношенням площі між прямою $y = x$ і кривою Лоренца до площі, обмеженої прямими $y = x$, $x = 1$ і віссю Ox (коефіцієнт Джіні).

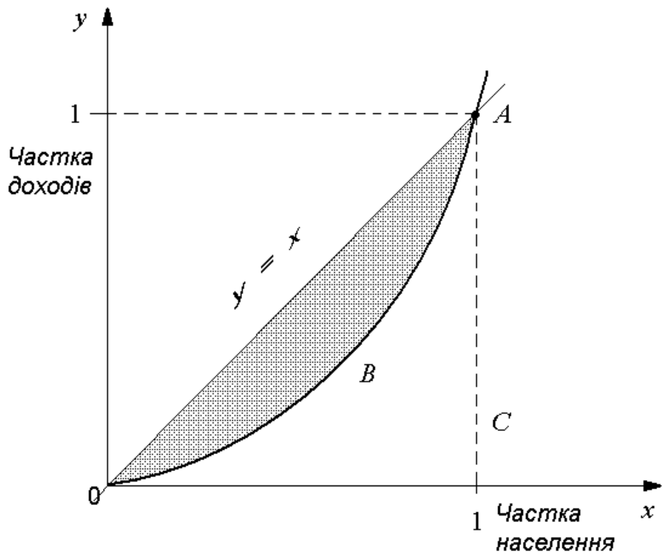


Рис.6.17.

Приклад 6.18. Нехай для однієї із держав кривая Лоренца задається рівнянням $y = x^2$,де x-частка населення, y-частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язання.

Коефіцієнт Джіні $k = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}}$, а $S_{\Delta OAC} = \dfrac{1}{2}$,

$S_{OAB} = \int\limits_0^1 (x - x^2)dx = \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{6}$. Отже, $k = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \dfrac{1}{3} > 0,3$.

Таким чином, достатньо високе значення k показує суттєво нерівномірний розподіл доходів серед населення в державі.

Приклад 6.19. Нехай функція $T = F(x)$-час, який витрачається на виробництво перших x одиниць продукції. Тоді $f(x) = F'(x)$ приблизно дорівнює часу, який витрачається на виробництво $(x+1)$-ої одиниці продукції. Звичайно використовують функції виду $f(x) = ax^b$

, де $a > 0$, $-1 \le b < 0$, a-витрати часу на перший виріб, b- показник виробничого процесу.

Графік функціі такого виду зображено на Рис.6.18 та називається кривою навчання. Дійсно, функція $f(x)$- спадає, тому що час небхідний для виконання деякої операції, спадає при зростанні числа повторів.

Час, який буде витрачено на виробництво одиниць продукції з номерами Від (n_1+1) до n_2 визначається за формулою:

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx. \tag{6.17}$$

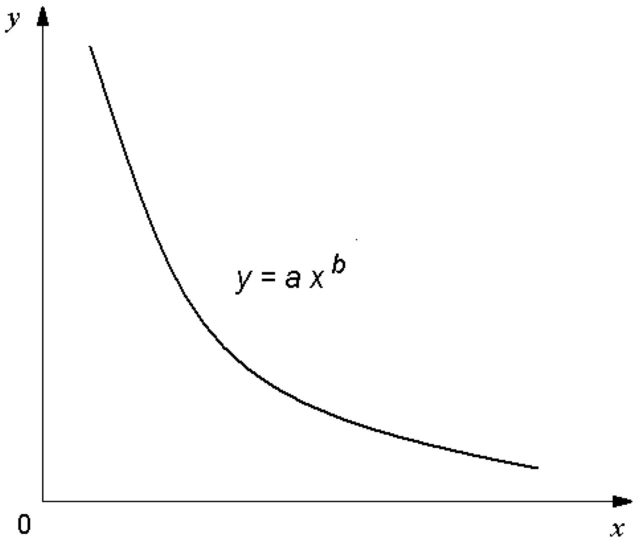


Рис. 6.18.

Нехай після виробу 100 годинників виявилось, що час, який потрібно на виробуток наступних виробів спадає відповідно з формулою $y = 15x^{-0,14}$. Знайти час, який буде потрібний на виробуток ще 20 годинніків.

Розв'язання.

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14}dx = \frac{15x^{0,86}}{0,86}\Bigg|_{100}^{120} = \frac{1500}{86}\left(120^{0,86} - 100^{0,86}\right) = 8,91.$$

Приклад 6.20. Знайти виграш споживачів та виграш постачальників, якщо $p = f(x)$- крива попиту на деякий товар (D) і $p = g(x)$-крива пропозиції (S); $(x_0; p_0)$-точка риночної равноваги (Рис.6.19)

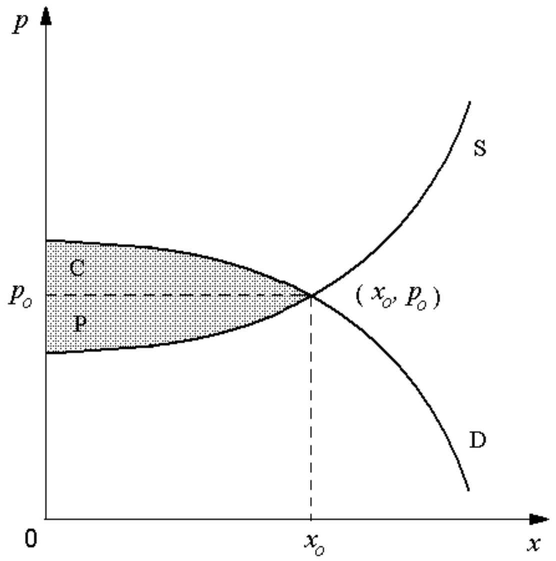


Рис.6.19.

Зрозуміло, що деякі споживачі зможуть заплатити за товар ціну $p > p_0$. Знайдемо виграш споживачів від встановленої ціни p_0.

Розіб'ємо проміжок $[0; x_0]$ на часткові проміжки $x = 0$; $x = x_1$; $x = x_2, ..., x_n = x_0$. В кожному частковому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку $u_i (i = 1 \div n)$. Виграш споживачів на цьому відрізку буде $\left(p(u_i) - p_0\right)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тоді середній виграш на проміжку $[0; x_0]$ буде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p(u_i) - p_0\right)\Delta x_i.$$

Якщо функція попиту неперервна і $n \to \infty$, а $\max|\Delta x_i| \to 0$,то ця інтегральна сума має границю:

$$\int_0^{x_0} \left(f(x) - p_0 \right) dx$$

Таким чином, виграш споживачів

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 . \qquad (6.18)$$

Аналогично знаходиться виграш постачальників

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx . \qquad (6.19)$$

Очевидно, що виграш споживачів дорівнює площі між кривою попиту D та прямою $p = p_0$. Виграш постачальників дорівнює площі між прямою $p = p_0$ та кривою пропозиції S.

Розв'яжемо задачу за умовою, якщо $f(x) = 116 - x^2$-функція попиту,а функція пропозиції-$g(x) = \frac{5}{3}x + 20$.Знайти виграші споживачів та постачальників,якщо була встановлена риночна рівновага.

Розв'язання.

Знайдемо точку риночної равноваги

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20,$$

або $$3x^2 + 5x - 288 = 0.$$

Корені квадратного рівняння $x_1 = 9$, $x_2 = -\frac{32}{3}$. Тоді при $x_0 = 9$, $p_0 = 35$.

Таким чином виграш споживача

$$C = \int_0^9 \left(116 - x^2\right)dx - 315 = \left(116x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^9 - 315 = 486 .$$

Виграш постачальника

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20 \right) dx = 315 - \left(\frac{5}{3}x^2 + 20x \right)\Bigg|_0^9 = 315 - \frac{5}{6} \cdot 81 - 180 = 67,5.$$

Приклад 6.21.Визначення початкової суми капіталовкладень за її кінцевою вартістю, одержаної протягом часу t (роки), якщо річний відсоток, або відсоткова ставка p називається *дисконтуванням*. Задачі дисконтування розглядають при визначенні економічної ефективності капіталовкладень.

Нехай K_t - кінцева сума за t років, а K - початкова, або дисконтова на сума. Якщо відсотки прості, то $K_t = K(1+it)$, де $i = \frac{p}{100}$ - питома відсоткова ставка. Тоді ясно, що $K = \frac{K_t}{(1+it)}$. У випадку складних відсотків $K_i = K(1+it)^t$, а тому

$$K = \frac{K_t}{(1+it)^t}.$$

Якщо щорічний прибуток змінюється за часом і описується формулою $f(t)$ за питомою нормою відсотку, що дорівнює i, то відсоток нараховується неперервно. В цьому випадку дисконтова ний прибуток K протягом часу T підраховується за формулою:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt \qquad (6.20)$$

Нехай треба визначити дисконтований прибуток за 5 років при відсотковій ставці 4%, якщо первісні початкові капіталовкладення складають 1 млрд. гривень, а також намічається щорічно збільшувати капіталовкладення на 1 млрд. гривень.

Якщо капіталовкладення задаються за формулою $f(t) = 1 + it = 1 + t$, тоді за формулою (6.20) дисконтова ний прибуток буде:

$$K = \int_0^5 (1+t)e^{-0,04t}dt,$$

Інтегруючи частинами, маємо:

$$K=\int_0^5 (1+t)e^{-0,04t}dt=\begin{vmatrix} 1+t=u \\ dt=du \\ e^{-0,04t}dt=dv \\ v=-\dfrac{1}{0,04}e^{-0,04} \end{vmatrix}=$$

$$=-25e^{-0,04t}(1+t)\Big|_0^5+25\int_0^5 e^{-0,04t}dt=-25\cdot 6e^{-0,2}+25-625e^{-0,04}\Big|_0^5=$$

$$=-25(6e^{-0,2}-1)-625e^{-0,2}+625=-150e^{-0,2}+25-625e^{-0,2}+625=$$

$$=-775e^{-0,2}+650=15,5.$$

Вартість $K=15,5$ говорить про те, що за 5 років при рівномірному прирості капіталовкладень від 1 до 5 млрд. гривень, щорічні капіталовкладення – рівносильні початковим вкладанням у 15,5 млрд. гривень за тією ж самою неперервно нарахованою відсотковою ставкою.

6.5.Наближене обчислення визначених інтегралів

Формула Ньютона-Лейбніца є найкращім способом обчислення визначеного інтеграла, якщо при знаходженні первісної не виникає труднощів. Але ж, коли все ж таки такі труднощі виникають, то можна використовувати так звані наближені формули, засновані на чисельних методах обчислення визначеного інтеграла, тим більше, що сучасна обчислювальна техніка дає широкі можливості в цьому напряму.

1.Формула прямокутників

Нехай треба обчислити визначений інтеграл від неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y=f(x)$.Найпростіший спосіб наближеного обчислення визначеного інтеграла випливає з його означення, як границі інтегральної суми. Тож використаємо таку суму.

Поділимо відрізок $[a;b]$ на рівні частини точками

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \qquad (i = \overline{1,n})$$

і покладемо, що

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (6.21)$$

де $x_i = 0{,}5(x_{i=1} + x_i)$ - середина i-го інтервалу, а знак $\approx$ означає наближену рівність.

Одержаний вираз називається формулою прямокутників**.** У випадку, зображеному на рис.6.20, площа фігури, що обмежена кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ та $y = 0$, якою і є визначений інтеграл, наближено дорівнює сумі площ прямокутників.

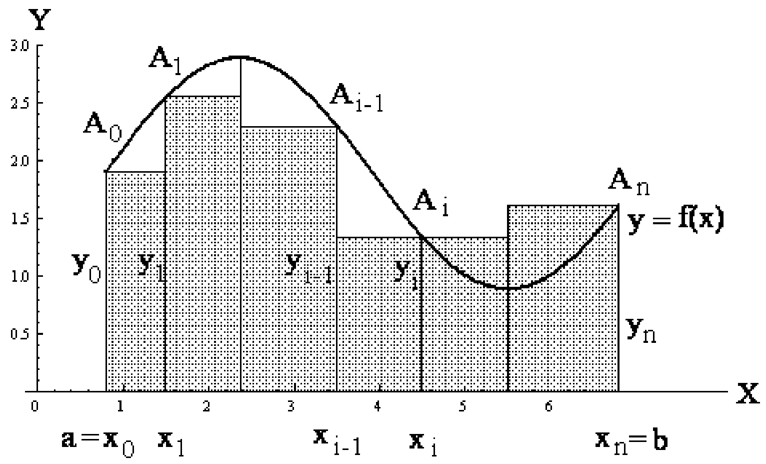


Рис. 6.20. Наближене значення визначеного інтеграла
за формулою прямокутників

Оскільки для неперервної функції на $[a;b]$ границя при $n \to \infty$ і $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \to 0$ можна стверджувати, що помилка при обчисленні інтеграла буде тим меншою, чим більше n. Абсолютна похибка Δ при цьому підраховується за формулою:

$$\Delta = \left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right|, \qquad (6.22)$$

де

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).$$

2.Формула трапецій

Розглянемо другий спосіб наближеного обчислення визначеного інтеграла, що призводить до формули трапецій. Як і в попередньому випадку відрізок $[a, b]$ ділиться на n рівних частин точками x_i і значення функції в цих точках, тобто ординати, будемо з'єднувати прямими лініями (рис. 6.21). Кожна частина площі під кривою $f(x)$ буде наближено дорівнювати площі трапеції з середньою лінією

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

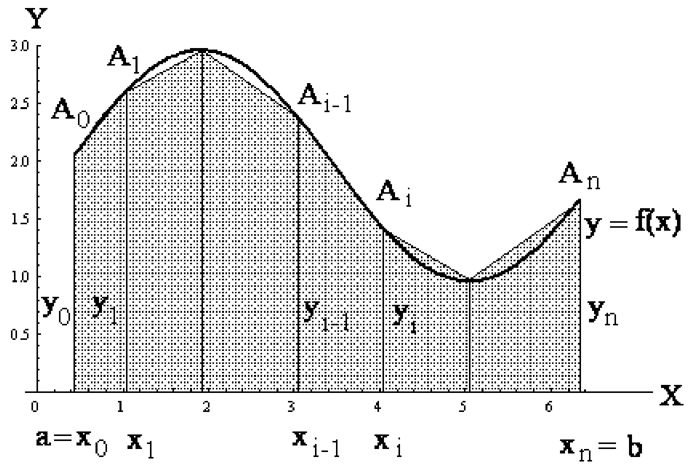


Рис. 6.21. Наближене значення визначеного інтеграла за формулою трапецій

і висотою $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$, а вся площа наближено буде дорівнювати площі під ломаною, тобто сумі площ усіх трапецій. Тоді одержимо:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_{n+1})}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right). \qquad (6.23)$$

Це і є формула трапецій. Формула, як і в попередньому випадку, буде тим точнішою, чим більше число n.

Можна довести, що якщо функція $f(x)$ має неперервну обмежену похідну $f'(x)$, яка задовольняє нерівність $|f'(x)| \le M_1$ (M_1 - число), то для обох формул (прямокутників і трапецій)абсолютна похибка визначається нерівністю $\Delta \le \frac{M_1(b-a)^2}{4n}$. Для функцій, які мають обмежену другу похідну $|f''(x)| \le M_2$, для абсолютної похибки має місце така оцінка:

$$\Delta \le \frac{M_2(b-a)^2}{12n^2}. \qquad (6.24)$$

3.Формула Симпсона.

Поділимо відрізок $[a, b]$ на парне число частин $n = 2k$. Площу криволінійної трапеції, що відповідає першим двом відрізкам $[x_0, x_1]$ та $[x_1, x_2]$, яка обмежується лінією $y = f(x)$, замінимо на площу,яка обмежена параболою, що проведена через точки $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, з віссю симетрії, паралельною до осі Oy (рис. 6.22).

Розглянемо площу криволінійної трапеції обмежену зверху параболою

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (6.25)$$

Аналогічні параболи будуємо і для всіх інших пар відрізків. Сума площ під цими параболами і дасть наближене значення інтеграла.

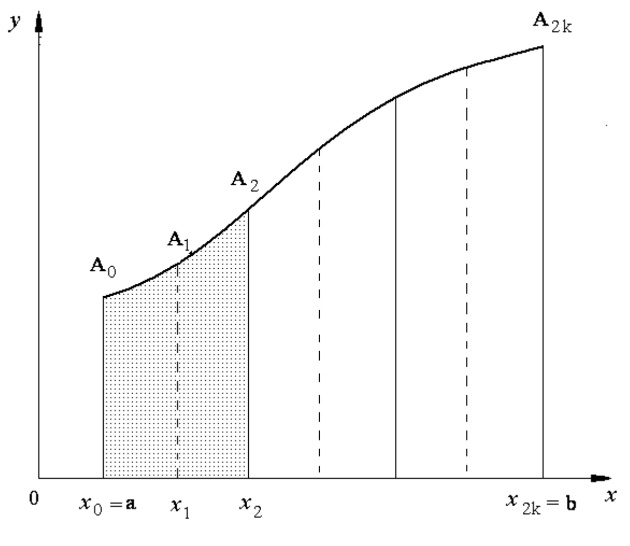


Рис.6.22

Можно довести, що площа криволінійної трапеції, яка обмежена зверху параболою (6.25), буде:

$$S = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)). \qquad (6.26)$$

де h - відстань між двома ординатами $f(x_0)$ та $f(x_2)$. Щоб довести рівність (6.26), розташуємо допоміжну систему координат так, як це зроблено на рис. 6.23.

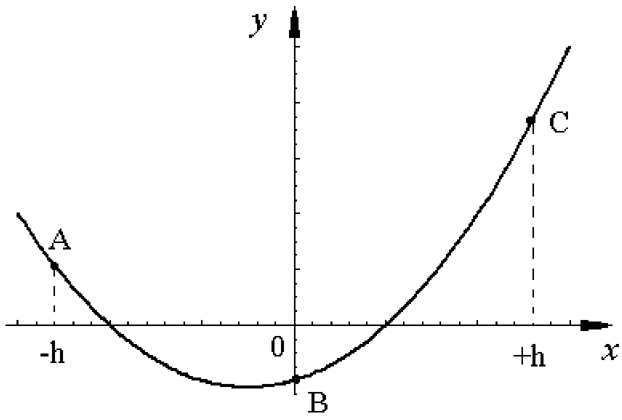


Рис.6.23.

Коефіцієнти параболи a, b, c та значення функції $y = f(x)$ в точках с абсцисами $x_{0,} x_1, x_2$ зв'язані такими співвідношеннімі:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ï ðè } x_0 = -h & f(x_0) = ah^2 - bh + c \\ \text{ï ðè } x_1 = 0 & f(x_1) = c \\ \text{ï ðè } x_2 = h & f(x_2) = ah^2 + bh + c \end{array}\right\} \qquad (6.27)$$

При відомих коефіцієнтах a, b, c площу трапеції, обмеженою параболою знаходимо за допомогою визначеного інтеграла:

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c).$$

З рівностей (6.27) випливає, що $2ah^2+6c=f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)$ Отже, $S=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))$, тобто одержали рівність (6.26). За формулою (6.26) для площі під параболою можна написати такі рівності, якщо покласти $h=\Delta x=\frac{b-a}{2k}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx=\frac{\Delta x}{3}(f(x_0+4f(x_1)+f(x_2)),\\
&\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx=\frac{\Delta x}{3}(f(x_2+4f(x_3)+f(x_4)),\\
&\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\\
&\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}=b} f(x)dx=\frac{\Delta x}{3}(f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})).
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Якщо скласти тут ліві та праві частини записаних рівностей, отримаємо:

$$\int_a^b \frac{\Delta x}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+$$
$$+2f(x_{2k-r})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2m})),$$

або

$$\int_a^b f(x)\approx\frac{b-a}{6k}[f(x_0)+f(x_{2k})+2\sum_{i=2}^{n} f(x_{2i-2})+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})]. \tag{6.29}$$

Похибка формули парабол

$$\Delta\le\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_3, \tag{6.30}$$

де M_3 – найбільше значення $\left|y^{(4)}\right|$ в інтервалі $[a,b]$.

Таким чином формула Симпсона дає найкраще наближення до шуканого інтеграла при $n=2k\to\infty$, ніж формула прямокутників чи трапецій.

Приклад 6.22.Обчислити інтеграл $\int_0^4 x^2dx$, потім для $n=10$ обчислити наближено за формулами прямокутників, трапецій, парабол. Знайти абсолютні та відносні похибки.

Розв'язання.

$$y_i = f(x_i) = x_i^2,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{10} = 0,4.$$

x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	0	0,16	0,64	1,44	2,56	4	5,76	7,84	10,24	12,96	16

За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_0^4 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3} \approx 21,33.$$

За формулою прямокутників

$$\int_0^4 x^2dx \approx 0,4(0+0,16+0,64+1,44+2,56+4+5,76+$$
$$+7,84+10,24+12,96) = 18,24.$$

За формулою прямокутників

$$\int_0^4 x^2dx \approx 0,4(0,16+0,64+1,44+2,56+4+5,76+$$
$$+7,84+10,24+12,96+16) = 24,64.$$

За формулою трапеції

$$\int_0^4 x^2dx \approx 0,4\left(\frac{0+16}{2}+0,16+0,64+1,44+2,56+4+5,76+\right.$$
$$\left.+7,84+10,24+12,96\right) = 21,44.$$

За формулою парабол

$$\int_0^4 x^2dx \approx \frac{0,4}{3}\left(0+16+4\left(0,16+1,44+4+7,84+12,96\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(0,64+2,56+5,76+10,24\right)\right)=21,33.$$

При обчисленні інтеграла за формулою абсолютна похибка

$$\Delta = \left|18,24-21,33\right| = 3,09,$$

а відносна похибка

$$\delta = \frac{3,09}{21,33}\cdot 100\% = 14,49\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою

$$\Delta = \left|24,64-21,33\right| = 3,31, \text{ а}$$

$$\delta = \frac{3,31}{21,33}\cdot 100\% = 15,52\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою

$$\Delta = \left|21,44-21,33\right| = 0,11, \text{ а}$$

$$\delta = \frac{0,11}{21,33}\cdot 100\% = 0,52\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою

$$\Delta = \left|21,33-21,33\right| = 0, \text{ а} \qquad \delta = 0\%$$

Запитання для самодіагностики

1.Записати формулу для обчислення площі фігури, що обмежена лініями

а) $y = f\left(x\right),\ y=0,\ x=a,\ x=b$;

б) $x=\varphi\left(y\right),\ x=0,\ y=c,\ y=d$.

2.Як обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ на відрізку $[a,b]$?

3.обчислюється площа фігури, яка обмежена лініями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $\alpha \le t \le \beta$?

4. Записати формулу для обчислення площі криволінійного сектора, обмеженого кривою, що задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ і полярними радіусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

5.Записати формулу для обчислення довжини дуги плоскої лінії.

6.Який вигляд має формула для об'єму тіла, якщо відомі його паралельні перерізи?

7.Записати формулу для обчислення об'єму тіл обертання навколо осі Ox.

8.Записати формулу для обчислення об'єму тіл обертання навколо осіOy .

9.Знайдіть формулу для обчислення об'єму кулі.

10.Знайдіть формулу для обчислення об'єму еліпсоїду.

11.Написати формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

а) прямокутників;

б) трапецій;

в) Симпсона.

Приклади і вправи.

Приклади

Приклад 6.23. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = x^3$, що відсікається прямою $x = 5$.

Розв'язання.

Лінія симетрична відносно осі Ox, бо маємо $y = \pm\sqrt{x^3}, x^3 \ge 0$, тому $x \ge 0$. Дуга складається з двох частин, які симетричні відносно Ox *(рис.* 6.24). Обчислимо довжину однієї з них. Застосовуємо формулу (6.1).

$$\frac{1}{2}l=\int_0^5\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx\,.$$

Шукаємо

$$y'=\left(\sqrt{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

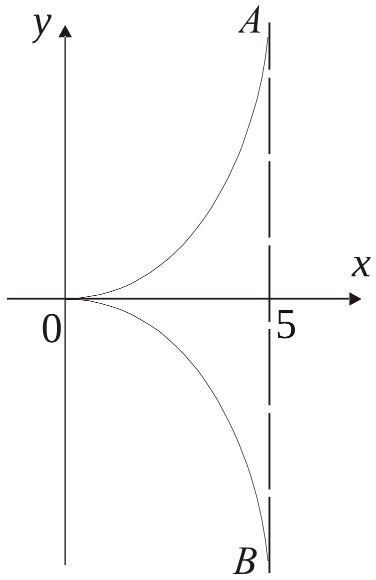


Рис.6.24

Тоді

$$\frac{1}{2}l=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{1}{2}\int_0^5\sqrt{4+9x}dx=\frac{1}{2}\int_0^5\left(4+9x\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\left(4+9x\right)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 9}\Bigg|_0^5=\frac{1}{27}\left(\left(4+9\cdot 5\right)^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{335}{27}.$$

Отже

$$l=2\cdot\frac{335}{27}=\frac{670}{27}\,.$$

Приклад 6.24. Знайти довжину кола $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання.

Шукати будемо $\frac{1}{4}l$, а потім результат помножимо на 4 (рис.6.25). Застосовуємо формулу (6.1).Знайдемо y'. Для цього шукаємо похідну від функції, що задана неявно, тобто

$$2x + 2y \cdot y' = 0, \text{ звідки } y' = -\frac{x}{y}.$$

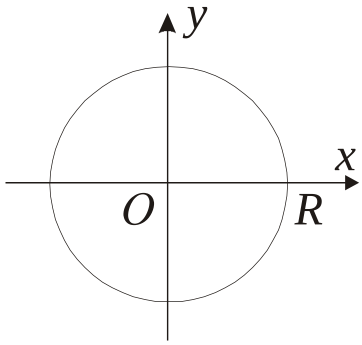


Рис. 7.21

Тоді

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}dx = \int_0^R \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}dx = \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{y^2}}dx =$$

$$= \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R =$$

$$= R\left(\arcsin\frac{R}{R} - \arcsin 0\right) = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином,

$$l = 4 \cdot \frac{\pi R}{2} = 2\pi R.$$

Приклад 6.25. Знайти довжину лінії
$x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

Розв’язання.

Застосовуємо формулу (6.2). Знайдемо

$$x_t' = R\left(-\sin t + \sin t + t\cos t\right) = Rt\cos t\,,$$

$$y_t' = R\left(\cos t - \cos t + t\sin t\right) = Rt\sin t\,.$$

Тепер маємо

$$l = \int_0^\pi \sqrt{R^2t^2\cos^2 t + R^2t^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{(Rt)^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt = \int_0^\pi Rt\,dt = R\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^\pi = \frac{R\pi^2}{2}.$$

Приклад 6.26.Знайти довжину лінії

$$x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t\,,\ \ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t$$

(від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

Розв’язання.

Застосовуємо формулу (6.2). Знайдемо

$$x_t' = 2t\cdot\sin t + \left(t^2 - 2\right)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t =$$

$$= \cos t\left(t^2 - 2 + 2\right) = t^2\cos t,$$

$$y_t' = -2t\cos t - \left(2 - t^2\right)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t =$$

$$= \sin t\left(-2 + t^2 + 2\right) = t^2\sin t.$$

Тепер маємо

$$l = \int_0^\pi \sqrt{\left(t^2\cos t\right)^2 + \left(t^2\sin t\right)^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{t^4\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt = \int_0^\pi t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}.$$

Приклад 6.27. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = e^{-2x}$, прямими $x = -0{,}5$, $x = 1$ і віссю абсцис.

Розв'язання.

Зробимо креслення до задачі (рис. 6.26.).

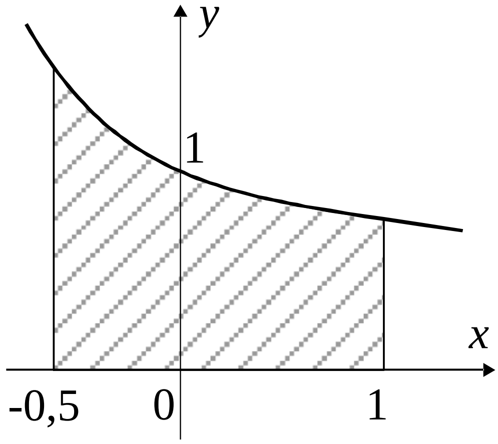


Рис.6.26.

За формулою (6.4) шукана площа

$$S = \int_{-0,5}^{1} e^{-2x} dx = \left.\frac{e^{-2x}}{-2}\right|_{-0,5}^{1} = \frac{e - e^{-2}}{2} \text{(кв. од.)}$$

Приклад 6.28. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $y = x + 4$.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину параболи і прямої, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases}$$

Звідки, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Зробимо креслення до задачі (рис. 6.27.).

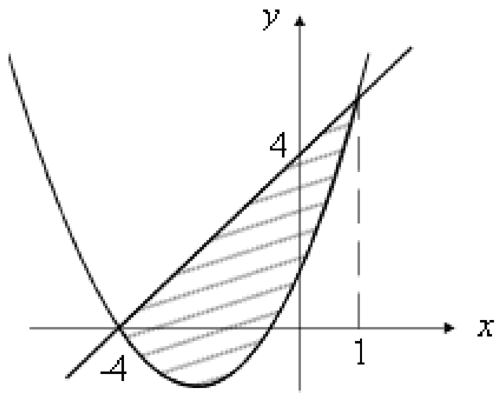


Рис.6.27.

Шукана площа фігури є

$$S=\int_{-4}^{1}((x+4)-(x^2+4x))dx=\int_{-4}^{1}(4-3x-x^2)dx=$$

$$=\left(4x-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1}=\left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-16-24+\frac{64}{3}\right)=\frac{125}{6}.$$

Приклад 6.29.Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2=2x+1$ і $x-y-1=0$.

Розв’язання.

Знайдемо точки перетину заданих ліній (рис. 6.28.).

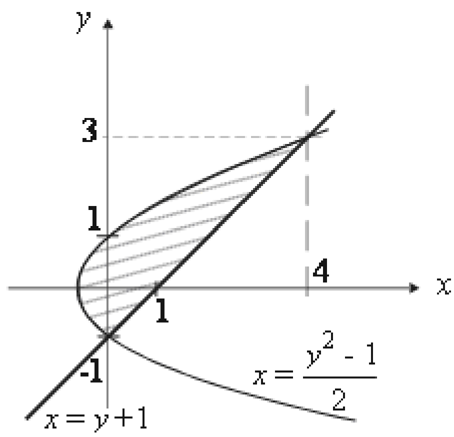


Рис. 6.28.

$$\begin{cases} y^2 = 2x+1, \\ x-y=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y - 3 = 0, \\ x = y+1, \end{cases}$$

Звідки,

$$\begin{cases} y_1 = -1, \\ x_1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 3, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Шукана площа є

$$S = \int_{-1}^{3} \left((y+1) - \frac{y^2-1}{2} \right) dy = \left(\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{3} = 5\frac{1}{3} \quad \text{(кв. од.)}$$

Приклад 6.30.Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 3$, $xy = 4$, $y = 2$, $x = 0$.

Розв'язання.

Зробимо креслення до задачі (рис. 6.29.).

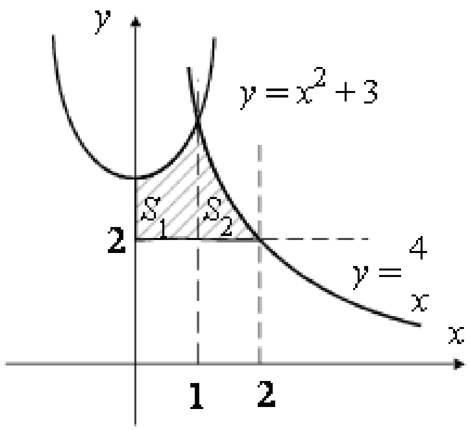


Рис.6.29.

Знайдемо точку перетину параболи $y = x^2 + 3$ і гіперболи $y = \frac{4}{x}$, розвязавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 + 3, \\ xy = 4, \end{cases}$$

з якої маємо рівняння $x(x^2+3) = 4$, або $x^3 + 3x - 4 = 0$. Розв'яжемо його

$$(x^3 - x) + (4x - 4) = 0,$$
$$x(x^2 - 1) + 4(x - 1) = 0, \quad (x-1)\big(x(x+1)+4\big) = 0,$$
$$x - 1 = 0 \text{ або } x^2 + x + 4 = 0.$$

Останнє рівняння розв'язків не має. Отже, $x = 1$, тоді $y = 4$. З рисунка видно, що шукана площа $S = S_1 + S_2$.

$$S = \int_0^1 (x^2+3)dx + \int_1^2 \frac{4}{x}dx - \int_0^2 2dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^1 + \quad \text{(кв. од.)}$$
$$+ 4\ln x\Big|_1^2 - 2x\Big|_0^2 = \frac{1}{3} + 3 + 4\ln 2 - 4 = 4\ln 2 - \frac{2}{3}.$$

Приклад 6.31. Знайти площу, що обмежена однією аркою циклоїди і прямою $y = 0$.

Розв'язання.

Циклоїда – це лінія, яку описує точка кола, що котиться без ковзання по прямій лінії. Рівняння в параметричній формі:

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t).$$

(a – радіус кола, $t = \angle MC_1B$).

Одна арка буде описана, коли коло зробить повний оберт, довжина кола $2\pi a$ (рис. 6.30).

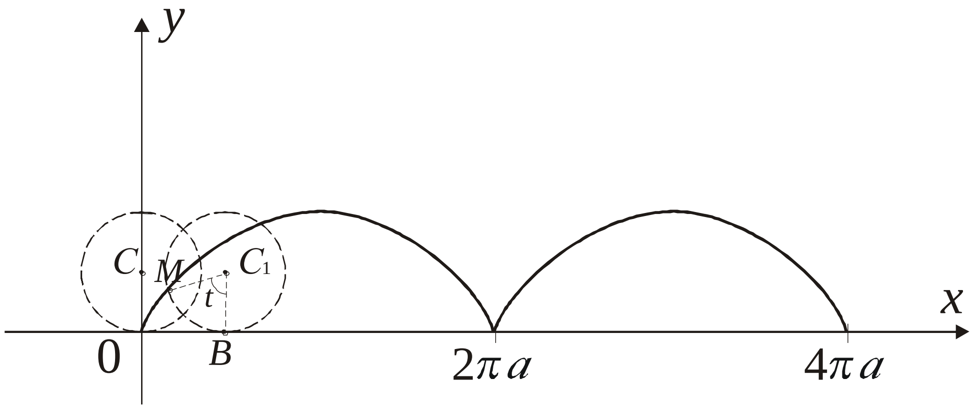


Рис. 6.30

Знайдемо границі інтегрування для t..

Якщо $x=0$, то $0=a(t-\sin t)$. Це рівняння має корінь $t=0$. Якщо $x=2\pi a$, то $2\pi a=a(t-\sin t)$. Це рівняння має корінь $t=2\pi$.Тоді $S=\int\limits_0^{2\pi} y\cdot x'dt$. Шукаємо $x'=a(1-\cos t)$. Отже

$$S=\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\left(\int\limits_0^{2\pi}dt-2\int\limits_0^{2\pi}\cos tdt+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\right)=$$

$$=a^2\left(t\Big|_0^{2\pi}-2\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}+\frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=a^2\left(2\pi-2\sin 2\pi+2\sin 0+\frac{1}{2}\cdot 2\pi+\frac{\sin 4\pi}{4}-\frac{\sin 0}{4}\right)=3\pi a^2.$$

Приклад 6.32.Знайти площу, обмежену лемніскатою Бернуллі $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ (рис. 6.31).

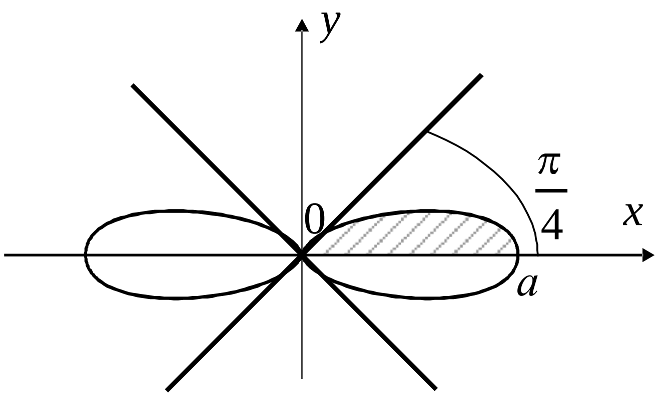


Рис.6.31.

Розв'язання.

Як і в попередньому прикладі, завдяки симетрії фігури, можна обчислити $\frac{1}{4}$ її площі. За формулою (6.12**)** знаходимо

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}$$ (кв. од.)

Тоді $S=a^2$ (кв. од.)

Приклад 6.33. Знайти об'єми тіл, утворених обертанням фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2$, $y=0$:

а) навколо осі *Ox*; б) навколо осі *Oy*.

Розв'язання.

Обертається фігура, що зображена на рис. 6.32.

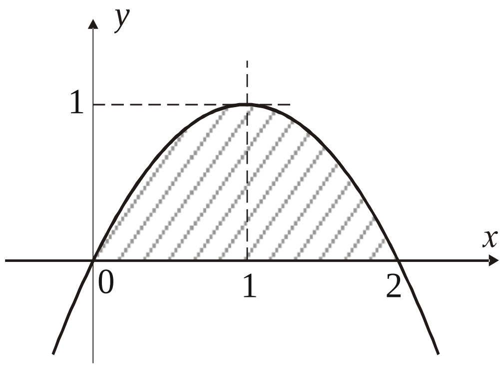


Рис.6.32.

а)
$$V_x=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=$$
$$=\pi\left(\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{15}\pi\quad(\text{êóá.î ä.})$$

б)
$$V_y=2\pi\int_0^2x(2x-x^2)dx=2\pi\int_0^2(2x^2-x^3)dx=$$
$$=2\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}\pi.\quad(\text{êóá.î ä.})$$

Приклад 6.34. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* сегмента, відрізаного прямою $x+y-2=0$ від кола $x^2+y^2=4$.

Розв'язання.

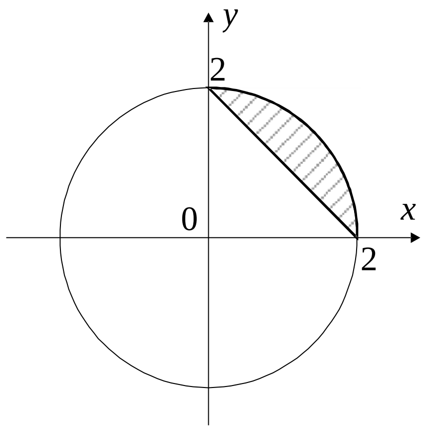


Рис.6.33.

З рис.6.33 видно, що об'єм дорівнює різниці об'ємів двох тіл. Отже

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi\int_0^2 (4 - x^2)dx - \pi\int_0^2 \left(2 - x\right)^2 dx =$$

$$= \pi\int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx = \pi\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8\pi}{3}. \quad \text{(êóá. î ä.)}$$

Приклад 6.35. Знайти об'єм тіл, утвореного обертанням фігури, обмеженою дугою кола $x^2 + y^2 = 18$ і параболою $3y = x^2$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину даних ліній:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ 3y = x^2, \end{cases} \quad y^2 + 3y - 18 = 0, \quad y_1 = 3,\ y_2 = -6 < 0.$$

Отже, $y = 3$, $x^2 = 9$, тобто $x = \pm 3$, а точки перетину: $\left(-3;3\right)$, $\left(3;3\right)$. Зробимо креслення до задачі (рис. 6.34).

а) З рисунка видно, що об'єм тіла обертання навколо осі Ox дорівнює різниці об'ємів, утворених обертанням навколо осі Ox двох криволінійних трапецій:

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi \int_{-3}^{3} (18 - x^2) dx - \pi \int_{-3}^{3} \left(\frac{x^2}{3} \right)^2 dx = 2\pi \left(18x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{9 \cdot 5} \right) \Bigg|_0^3 =$$

$$= 79{,}2\pi \text{ (êóá.î ä.).}$$

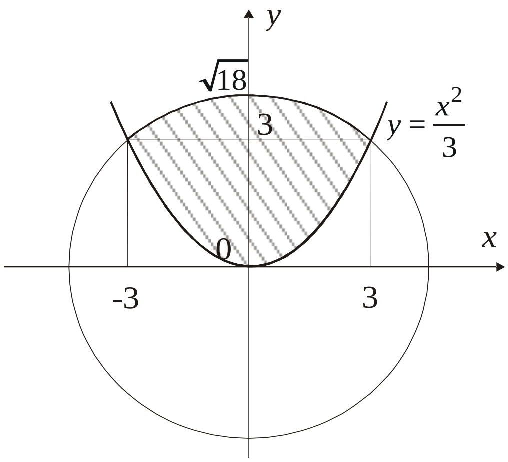


Рис. 6.34

б) Об'єм V_y дорівнює сумі об'ємів тіл, утворених при обертанні навколо осі Oy двох криволінійних трикутників. Отже

$$V_y = \pi \int_0^3 3y dy + \int_3^{\sqrt{18}} (y^2 - 18)\, dy = \left(\frac{3y^2}{2} \right) \Bigg|_0^3 + \left(\frac{y^3}{3} - 18y \right) \Bigg|_3^{\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{27}{2} + \left(18\sqrt{2} - 54\sqrt{2} \right) - 9 + 54 = 58{,}5 - 36\sqrt{2} \text{ (êóá.î ä).}$$

Вправи.

Найти довжину дуги кривих.

6.36. $y^2 = x^3, \quad 0 \le x \le \frac{4}{3}$. **6.37**. $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

6.38. $y = \ln \cos x + 2, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$. **6.39.** $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, \quad 0 \le x \le \frac{8}{9}$.

6.40. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \ \frac{1}{9} \le x \le 1$.

6.41 . $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le \frac{3}{4}$.

6.42. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

6.43. $x = 4(\cos t + t\sin t), \quad y = 4(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le 2.$

6.44. $\rho = 4(1 - \sin\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}.$

Знайти площі фігур, обмежених заданими лініями.

6.45. $y = -x^2 + 3x - 2,\ y = 0.$ **6.46.** $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \pi.$

6.47. $y = tgx, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{3}.$ **6.48.** $y = \arcsin x, \quad x = 0, \quad y = \frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{\pi}{3}.$

6.49. $y = x^2 - 2x + 2, \quad y = 2 + 4x - x^2.$ **6.50.** $y = \frac{3}{x},\ x + y - 4 = 0.$

6.51. $y = \sqrt{x},\ y = x^2.$ **6.52.** $xy = 1, \quad y = x^2 \quad x = 3, \quad y = 0.$

6.53. $y = \sqrt{1-x}, \quad y = x + 1.$ **6.54.** $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$

Знайти об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених заданими лініями.

6.55. $y = 4x - x^2, \quad y = 0.$ **6.56.** $y = \sin\frac{x}{2}, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \pi.$

6.57. $y = (x-1)^2. \quad y = \sqrt{x}.$ **6.58.** $y = tgx, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$

6.59. $y^2 = 4x,\ y = x.$ **6.60.** $x^2 + y^2 = 16, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0.$

6.61. $y = \frac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0.$ **6.62.** $y = x^2, \quad xy = 8, \quad x = 4, \quad y = 0.$

6.63. $y = x^2, \quad y = -x^2 + 4.$ **6.64.** $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0.$

6.65. $\int_1^2 \ln(x+1)\,dx. \quad x = 3.$ **6.66.** $y = 3\sin x, \quad x^2 = y. \quad 0 \le x \le \pi.$

6.67. $y = 5\cos x, \quad y = \cos x, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$ **6.68.** $y = x^2 - x, \quad y = 0, \quad x = 0, \ x = 1.$

6.69. $y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$

Знайти об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі Oy фігур, обмежених заданими лініями.

6.70. $y^2 = 4 - x, \quad x = 0.$ **6.71.** $xy = 4, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4.$

6.72. $y = x^2, \quad y = \dfrac{8}{x}, \quad x = 0, \quad y = 8.$ **6.73.** $y = x^2, \quad y = 4 - x^2, \quad x = 0.$

6.74. $y = \sqrt{x-1}, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 4.$ **6.75.** $y = x^3, \quad y = x.$

6.76. $y = x^3, \quad y = x^2.$

6.77. Обчислити $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ за формулою Ньютона-Лейбніца і за наближеними формулами прямокутників, трапецій, Симпсона, інтервал інтегрування розбити на 8 частин. Оцінити у відсотках похибку результатів.

6.78. За формулою трапецій обчислити інтеграл $\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$ і знайти π (інтервал інтегрування розбити на 10 частин).

Глава 7. Подвійний інтеграл

7.1. Означення подвійного інтеграла

Розглянемо в площині xOy область D, обмеженою замкненою лінією. Нехай в області D задано неперервну функцію $z = f(x,y)$. Розіб'ємо область D будь-якими лініями на n частинних областей: ΔD_1, $\Delta D_2, \ldots, \Delta D_n$, площі яких дорівнюють ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ відповідно.

В кожній частинній області ΔD_i $(i = 1,...,n)$. виберемо довільну точку $P_i(x_i, y_i)$ (рис. 7.1) і утворимо суму.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i . \qquad (7.1)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x,y)$в областіD.

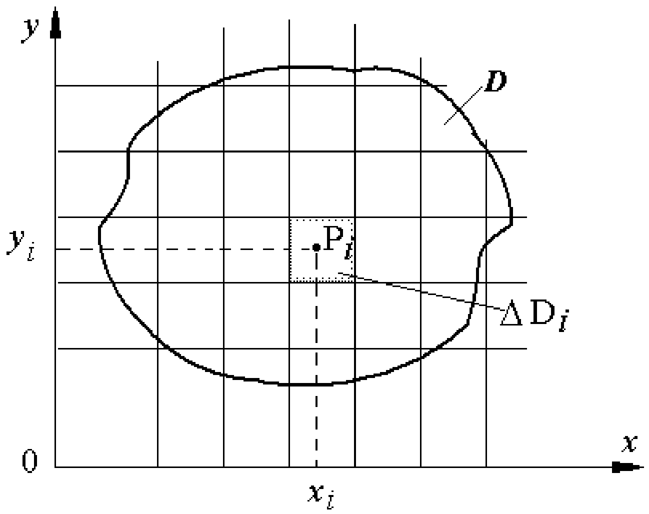


Рис. 7.1

Назвемо діаметром $d(D)$ області D найбільшу відстань між точками границі цієї області. Позначимо через $\lambda = \max d(\Delta D_i)$ – найбільший з діаметрів розбиття.

Означення. Якщо існує границя послідовності інтегральних сум (7.1) при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ і якщо вона не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області, ні від вибору точок $P_i(x_i, y_i)$ всередені частинних областей ΔD_i, то вона називається подвійним інтегралом від функції $f(x;y)$ за областю D і позначається $\iint\limits_D f(x;y)dx\,dy$. Таким чином,

$$\iint\limits_D f(x;y)dx\,dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (7.2)$$

Функція $f(x;y)$ в цьому випадку називається інтегрованою в області D, а D називається областю інтегрування.

Теорема існування подвійного інтеграла (без доведення).

Якщо функція $f(x;y)$ неперервна в обмеженій області D, то вона інтегрована в цій області, тобто подвійний інтеграл існує.

7.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла

Нехай задано тіло – вертикальний криволінійний циліндр, який побудований на області D, обмежений зверху поверхньою $z = f(x;y)$ ($f(x;y) \geq 0$в області D), знизу площиною $z = 0$ і збоку циліндричною поверхнею з твірними, які паралельні осі Oz (рис.7.2).

Розіб'ємо область D будь-яким чином на n частинних областей $\Delta D_i (i = 1, 2, ..., n)$ з площинами ΔS_i і оберемо точку $P_i(x_i; y_i)$. Через межу ΔD_i проведено циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі Oz .

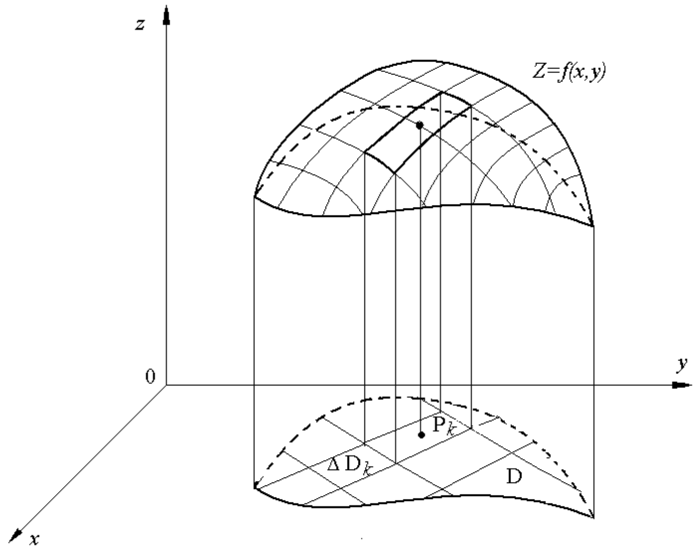


Рис.7.2.

Ці поверхні розіб'ють задане тіло на n вертикальних стовпчиків з площами ΔS_i і висотами $f(x_i; y_i)$. Об'єм кожного з цих стовпчиків наближено дорівнює

$$f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i, (i = 1, 2, ..., n),$$

а об'єм V усього тіла наближено дорівнює сумі

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i .$$

Точне значення об'єму V дорінює границі цієї суми, якщо найбільший з диаметрів розбиття $\lambda = \max d(\Delta D_i)$ прямує до нуля. Отже,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i ,$$

або

$$V = \iint_D f(x; y) dxdy \qquad (7.3)$$

Таким чином, геометричний зміст подвійного інтеграла $\iint_D f(x; y) dxdy$ полягає в тому, що він дорівнює об'єму криволінійного циліндра, обмеженого поверхнею $z = f(x;y)$, площиною xOy, областю D та циліндричною поверхнею з напрямною по границі D і твірними, які паралельні осі Oz.

7.3. Властивості подвійного інтеграла.

Після визначення подвійного інтеграла можна побачити, що конструкції визначеного інтеграла для функції однієї змінної і подвійного інтеграла однакові. Тому властивості подвійного інтеграла, а також доведення цих властивостей майже повторюють відповідні властивості визначеного інтеграла. У зв'язку з цим властивості подвійного інтеграла приведемо без доведення.

1. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми неперервних в області D функцій дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтегралів в області D від кожної функції:

$$\begin{aligned}&\iint_D (f_1(x,y)+f_2(x,y)+\cdots+f_n(x,y))dxdy = \\ &= \iint_D f_1(x,y)dxdy + \iint_D f_2(x,y)dxdy + \ldots + \iint_D f_n(x,y)dxdy.\end{aligned} \qquad (7.4)$$

2. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy \qquad (7.5)$$

3. Якщо область інтегрування D розбита на дві області D_1 і D_2 без спільних внутрішніх точок і функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \qquad (7.6)$$

4. Якщо $f(x,y)\geq 0$ в області D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0 \qquad (7.7)$$

5. Якщо в кожній точці області D функції $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ неперервні і задовольняють умову $f(x,y)\geq\varphi(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy \qquad (7.8)$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області інтегрування D і задовольняє нерівностям

$$m\leq f(x,y)\leq M\ ,$$

де m та M – найменше і найбільше значення функції $f(x,y)$ в області D, то

$$mS\leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M\cdot S \qquad (7.9)$$

де S – площа області D.

7. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то існує в цій області така точка $(\xi;\eta)$, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\cdot S \qquad (7.10)$$

де S – площа області.

Значення $f(\xi;\eta)$ називається середнім значенням функції $f(x,y)$ в області D.

7.4. Обчислення подвійного інтеграла

При обчисленні подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ будемо мати на увазі той факт, що він виражає об'єм циліндричного тіла з основою D, обмеженого поверхнею $z = f(x,y)$. Нагадаємо, що задача про обчислення об'єму тіла була розглянута в застосуванні визначеного інтеграла до задач геометрії. Тоді була одержана формула

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx\,, \tag{7.11}$$

де $S(x)$ – площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x = a$ і $x = b$ – рівняння прямих, що обмежують дане тіло. Застосуємо тепер цю формул і до обчислення подвійного інтеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy\,,$$

де $f(x,y) \geq 0$ і неперервна в області D.

1. Нехай область D на площині xOy обмежена прямими $x = a, x = b (a < b)$ та двома неперервними кривими $y_1(x)$ і $y_2(x)$ $(y_1(x) < y_2(x))$, кожна з яких перетинається довільною прямою, паралельною осі Oy, тільки в одній точці (рис.7.3 або рис.7.4).
Така область називається простою (або правільною) відносно осі Ox.

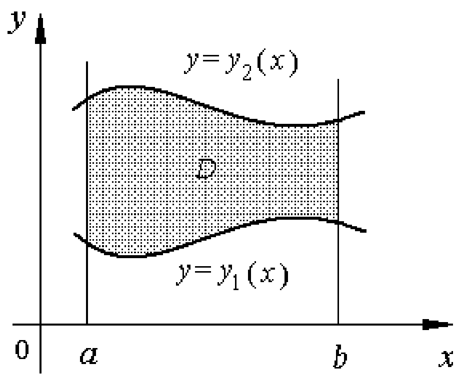


Рис. 7.3

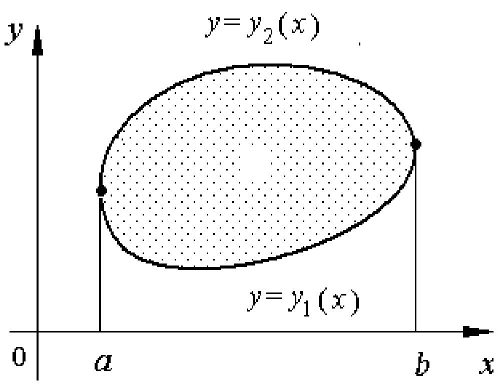


Рис. 7.4

Відповідне циліндричне тіло зображено на рис. 7.5.

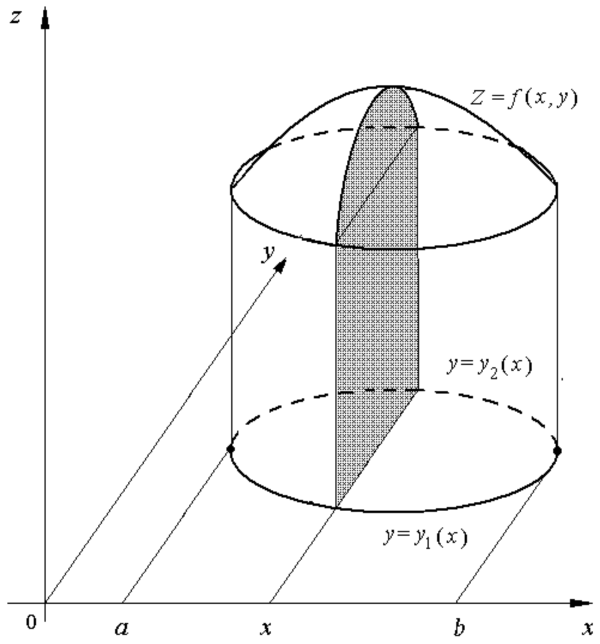


Рис.7.5

Розтинаємо дане тіло довільною площиною, паралельною площині zOy. В перерізі одержуємо криволінійну трапецію, площа якиї виражається інтегралом від функції $f(x,y)$, де x вважається сталою, а y – змінною. Таким чином, площа перерізу дорівнює

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy .$$

Згідно з формулою (7.3) об'єм даного циліндричного тіла дорівнює:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_b^a (\int_{y(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy) ,$$

або в зручнішій формулі

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (7.12)$$

Останній інтеграл в цій формулі називається двократним або повторним.

У наведеній формулі (7.12) інтегрується за змінною y спочатку внутрішній інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, в якому змінна x вважається сталою. Одержана функція від x інтегрується в межах від a до b.

2. Аналогічно область D на площині xOy називається простою (або правильною) відносно осі Oy, якщо вона обмежена прямими $y=c$ і $y=d$ $(c<d)$ та кривими $x=x_1(y)$ і $x=x_2(y)$ $(x_1(y)<x_2(y))$, а будь-яка пряма, яка паралельна осі Ox, перетинає кожну з цих кривих тільки в одній точці (рис. 7.6 або рис. 7.7).

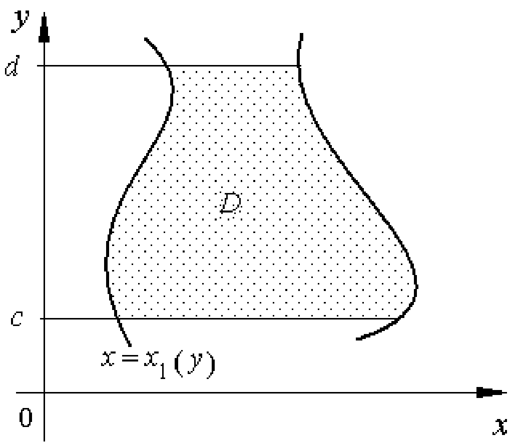


Рис. 7.6

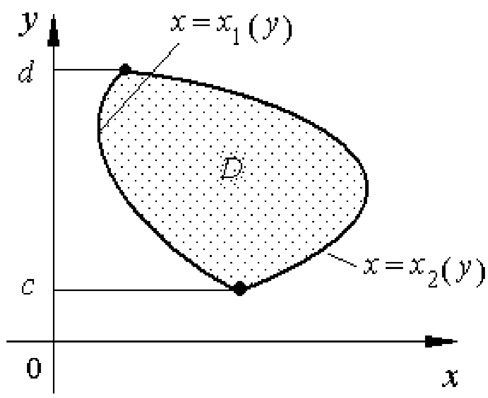


Рис. 7

Для такої області (простої відносно y) обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двократного (або повторного інтеграла) за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (7.13)$$

Для зведення подвійного інтеграла до двократного треба спочатку побудувати область інтегрування D, а потім застосовувати одну із формул (7.12) або (7.13).

Якщо границя області складається, наприклад, з двох участків, які мають різні рівняння, то область D треба розбити на дві області D_1 і D_2:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \qquad (7.14)$$

Формули зведення подвійного інтеграла до двократного приймають особливо простий вигляд, якщо область D є прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат (рис.7.8).

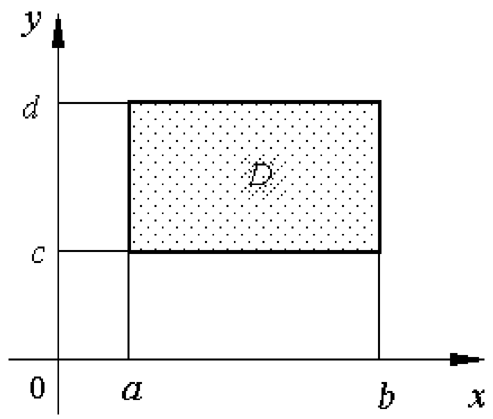


Рис.7.8

В цьому випадку межі інтегрування є сталими не тільки для зовнішнього, але і для внутрішнього інтегралів.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \qquad (7.15)$$

Приклад 7.1.Обчислити $\iint_D e^{x+\sin y}\cos y \cdot dxdy$, якщо область D – прямокутник: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

За формулою (7.15) маємо:

$$\iint_D e^{x+\sin y}\cos y\cdot dxdy=\int_0^{\pi} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x e^{\sin y}\cos y\cdot dy=\int_0^{\pi} e^x\left(e^{\sin y}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx=$$

$$=e^x\Big|_0^{\pi}\cdot\left(e^{\sin\frac{\pi}{2}}-e^{\sin 0}\right)=\left(e^{\pi}-1\right)\left(e-1\right).$$

Приклад 7.2. Обчислити $\iint_D (x^2+y\sin xy)dxdy$, якщо область D – квадрат: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

Розв'язання.

За формулою (7.15) маємо:

$$\mathcal{T}=\iint_D\left(x^2+y\sin xy\right)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1\left(x^2+y\sin xy\right)dx.$$

Спочатку, вважаючи y сталою величиною, знаходимо внутрішній інтеграл по x:

$$\int_0^1\left(x^2+y\sin xy\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\cos xy\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}-\cos y.$$

Далі від одержаної функції обчислюємо інтеграл по y.

$$\iint_D\left(x^2+y\sin xy\right)dxy=\int_0^1\left(\frac{4}{3}-\cos y\right)dy=\left(\frac{4}{3}y-\sin y\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}-\sin 1.$$

Приклад 7.3. Обчислити $\iint_D \frac{x}{y}dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=e^x$, $y=e^{2x}$ і $x=2$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 7.9).

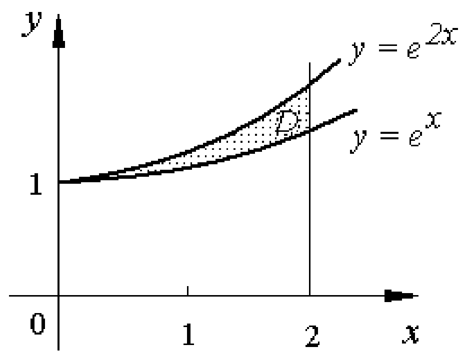


Рис. 7.9

Область D проста відносно осі Ox. Тому:

$$\iint_D \frac{x}{y}dxdy = \int_1^2 xdx \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{dy}{y} = \int_1^2 x(\ln y)\Big|_{e^x}^{e^{2x}} dx = \int_1^2 x(\ln e^{2x} - \ln e^x)dx =$$

$$\int_1^2 x(2x - x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

Приклад 7.4. Обчислити $\iint_D x\sqrt{y}\cdot dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y = x$, $y = 3x$ і $y = 1$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 7.10). Область D проста відносно осі Oy. Тому:

$$\iint_D x\sqrt{y}dxdy = \int_0^1 \sqrt{y}dy \int_{\frac{y}{3}}^{y} xdx = \int_0^1 \sqrt{y}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{y}{3}}^{y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\cdot\frac{8}{9}y^2 dy =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^1 y^{\frac{5}{2}} dy = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{63}.$$

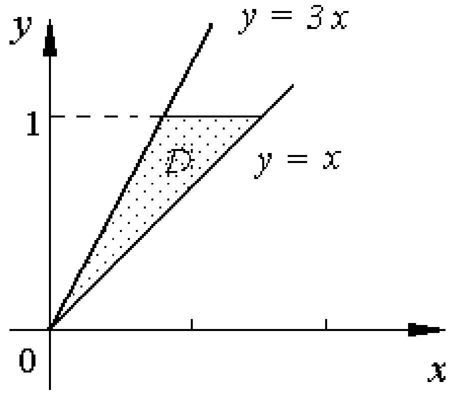


Рис. 7.10

Приклад 7.5. Обчислити $\iint\limits_D y \cdot dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x - y = 2$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 7.11):

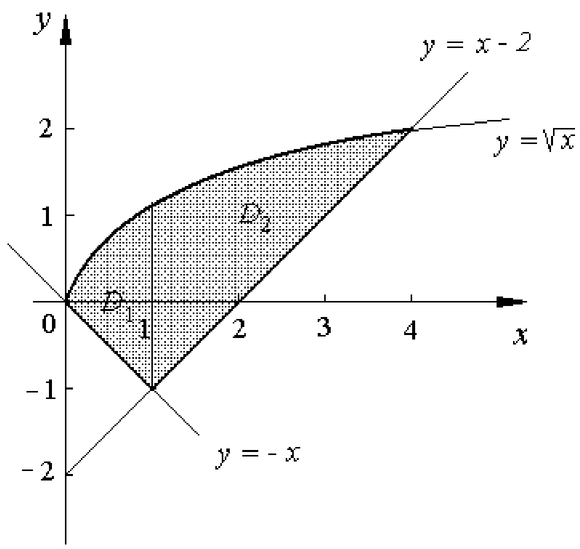


Рис. 7.11

Знайдемо точки перетину заданих ліній, розв'язуючи дві системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y = -x, \\ y = x - 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x-2; \end{cases} \begin{cases} x-2=\sqrt{x}, \\ y=x-2; \end{cases} \begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x\ge 0, \\ y=x-2; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

Область D не є простою ні відносно осі Ox, ні відносно осі Oy. Розіб'ємо її прямою $x=1$ на дві прості області D_1 і D_2. За формулою (7.13) маємо:

$$\iint\limits_D ydxdy = \iint\limits_{D_1} ydxdy + \iint\limits_{D_2} ydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{x}} ydy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} ydy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-x}^{\sqrt{x}} dx + \int\limits_1^4 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-2}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x-x^2\right)dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \left(x-(x-2)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{(x-2)^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}.$$

7.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах

При переході у подвійному інтегралі від декартових координат x і y до полярних координат ρ і φ, які пов'язані з декартовими координатами співвідношеннями.

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi,$$

має місце формула

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy = \iint\limits_D f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi, \tag{7.16}$$

де ρ і φ – полярні координати точок області D.

Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах зводиться до обчислення двократних (повторних) інтегралів по ρ і по φ в залежності від вигляда області D.

Якщо область D обмежена промінями, які утворюють з полярною віссю p кути φ_1 і φ_2, і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$, де $\rho_1 < \rho_2$, $\varphi_1 < \varphi_2$ (рис. 7.12), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \qquad (7.17)$$

Якщо область D обмежена лінією $\rho = \rho(\varphi)$ і початок координат лежить всередені області , то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \qquad (7.18)$$

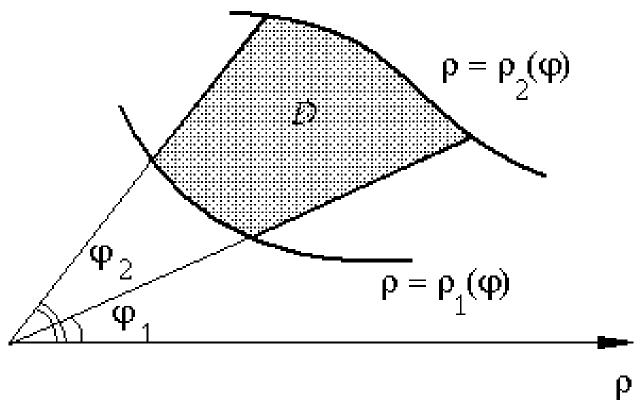


Рис. 3.12.

Приклад 7.6. Обчислити: $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, де D – круг $x^2 + y^2 \le 4x$.

Розв'язання.

Застосуємо полярні координати: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Одержимо рівняння кола у вигляді $\rho = 4\cos\varphi$. Побудуємо в декартових координатах коло $x^2 + y^2 = 4x$, або $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (рис. 7.13). Тут φ змінюється від до $-\frac{\pi}{2}$, а ρ – від $\rho = 0$ до $\rho = 4\cos\varphi$.

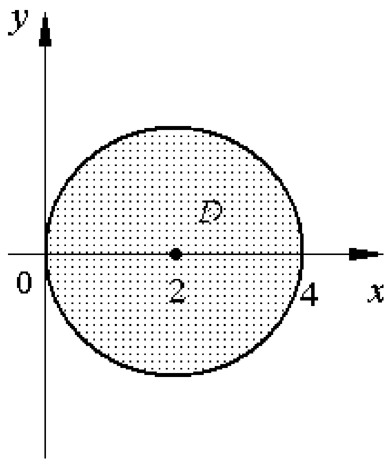


Рис.7.13.

Отже,

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{4\cos\varphi} = d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 64\cos^4\varphi d\varphi = 64\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$=16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi = 16\left(\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$16\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=24\pi.$$

Приклад 7.7. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, де D – круговий сектор $x^2+y^2 \le 1,\ y \ge \frac{x\sqrt{3}}{3},\ y \le x\sqrt{3},\ x \ge 0$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 7.14). Застосуємо полярні координати. Рівняння кола $\rho = 1$. Полярний кут змінюється від $\varphi = \frac{\pi}{6}$ до $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

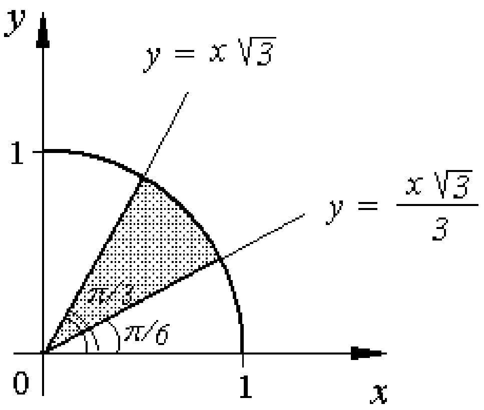


Рис. 7.14

За формулою (17.17)маємо

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\frac{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^3}}{-3}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{18}.$$

Приклад 7.8. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла в полярних координатах невластивий інтеграл – інтеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Розв'язання.

Цей інтеграл грає важливу роль теорії ймовірностей.

Позначимо $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ і $I = \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$. Знайдемо

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy,$$

де D - перша четверть декартової системи координат ($0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty$) (рис. 7.15):

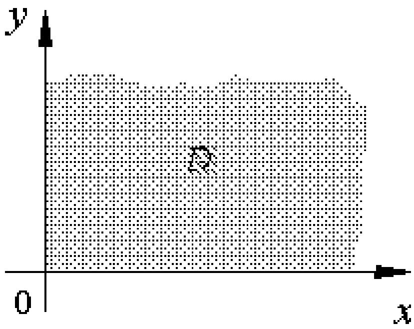


Рис.7.15.

Для обчислення I_1 перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{4}$. Якщо $I_1=\frac{\pi}{4}$, то $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, або $\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а оскільки функція e^{-x^2} парна, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

7.6. Обчислення площі плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла

Якщо у формулі (7.3)

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

покласти $f(x,y)=1$, то $V=\iint\limits_D dxdy$. Але в цьому випадку $V=S_D\cdot 1=S_D$.

Отже,
$$S_D=\iint\limits_D dxdy \tag{7.19}$$

Якщо область D визначена у полярних координатах нерівностями $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, то

$$S = \iint_D \rho d\varphi d\rho = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \tag{7.20}$$

Приклад 7.9. Знайти площу плоскої області D, обмеженої параболами $y^2 = -x + 4$ і $y^2 = 2x - 5$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис.7.16). Спочатку знайдемо точки перетину даних ліній: $\begin{cases} -x+4 = 2x-5, \\ y = -x+4, \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

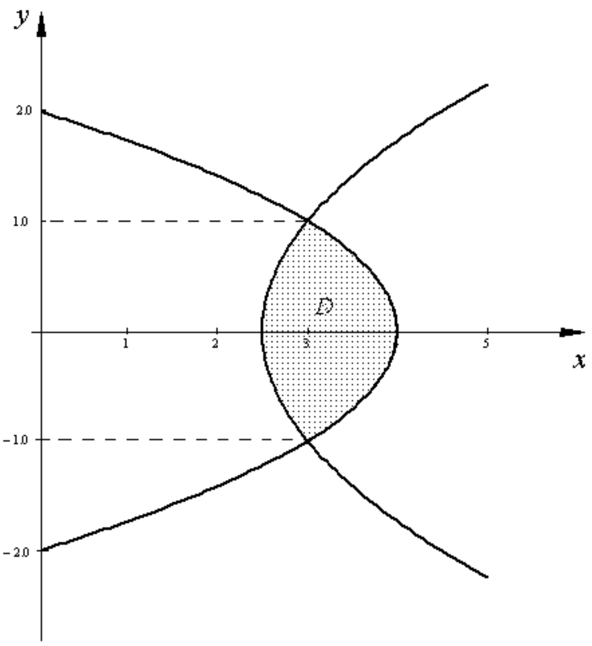


Рис.7.16.

$$S=\int_{-1}^{1}dy\int_{\frac{y^2+5}{2}}^{4-y^2}dx=\int_{-1}^{1}\left(4-y^2-\frac{y^2+5}{2}\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y^2\right)dy=\left(\frac{3}{2}y-\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2 \text{ (кв.од.)}$$

Приклад 7.10. Обчислити площину плоскої області D, обмеженої колом $x^2+y^2=2x$ і прямими $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 7.17). Рівняння кола $x^2+y^2=2x$ перетворимо до вигляду $(x-1)^2+y^2=1$.

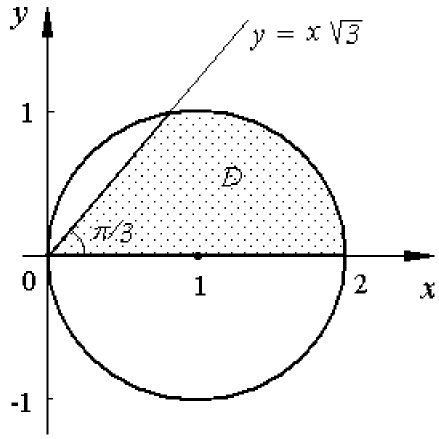


Рис. 7.17.

Площу області доцільно обчислити в полярних координатах: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Запишемо рівняння кола: $\rho^2=2\rho\cos\varphi$, або $\rho=2\cos\varphi$. Кут φ за умовою змініються від $\varphi=0$ до $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Таким чином, за формулою (7.20) маємо:

$$S=\iint_D \rho d\varphi d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\text{кв.од.}$$

Приклад 7.11. Обчислити площу плоскої області D, обмеженої замкненою лінією (кардіоїдою), рівняння якої $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання.

Побудуємо в полярних координатах задану лінію (рис. 7.18).

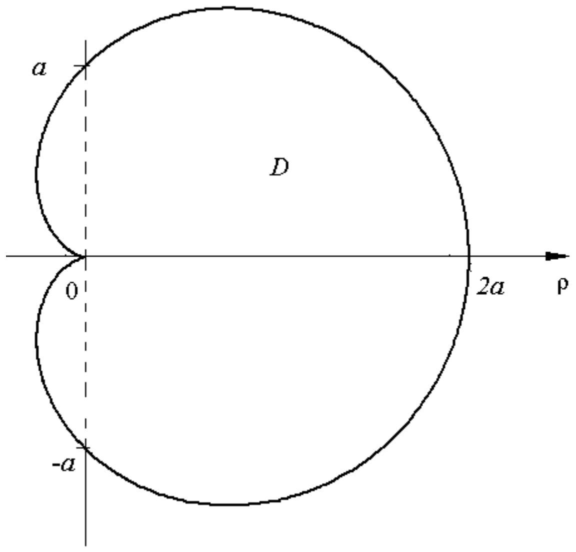


Рис.7.18

Як видно з рисунка кут φ змінюється від $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$, якщо обчислити половину площі області D.

$$\frac{1}{2}S=\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho=\int_0^{\pi}\frac{a^2}{2}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3\varphi}{2}+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3\pi a^2}{4}.$$

$$S=\frac{3\pi a^2}{4}\cdot 2=\frac{3\pi a^2}{2}\text{(кв.од.)}.$$

7.7. Обчислення об'єма тіла за допомогою подвійного інтеграла.

За означенням подвійного інтеграла і його геометричним змістом було доведено, що подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ дорівнює об'єму криволінійного циліндра, обмеженого поверхнею $z = f(x,y)$, площиною xOy, областю D площини xOy та циліндричною поверхнею з напрямною по границі D і твірними, які паралельні осі Oz.

Отже, знову запишемо вже вказану формулу (7.3):

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Приклад 7.12. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування D (рис. 7.19).

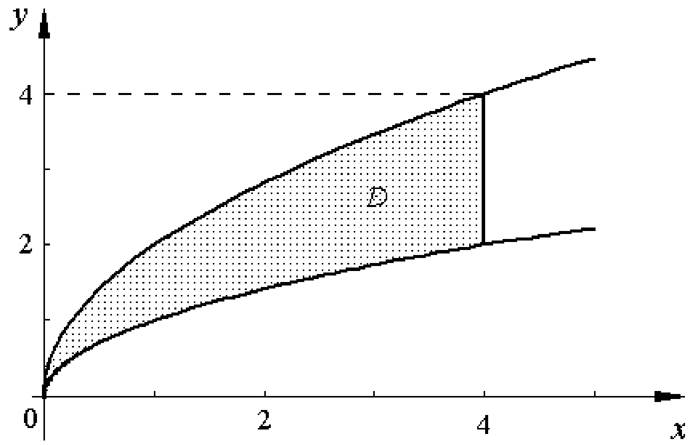


Рис. 7.19.

Задане тіло обмежено зверху поверхнею $z = 4 - x$. За формулою (7.3) одержуємо:

$$V = \iint_D (4-x)\,dxdy = \int_0^4 (4-x)\,dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx =$$

$$= \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - x\sqrt{x}\right)dx = \left.\left(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\right|_0^4 = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}(\textit{куб.од.})$$

Приклад 7.13. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:
$z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$ (в I октанті).

Розв'язання.

Побудуємо область D згідно з умовою задачі (рис. 7.20).

Визначимо об'єм V за допомогою полярних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$ має вигляд $\rho = 1$, а прямі $y = x$ і $y = 3\sqrt{x}$ утворюють кути з віссю Ox $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{3}$ відповідно.

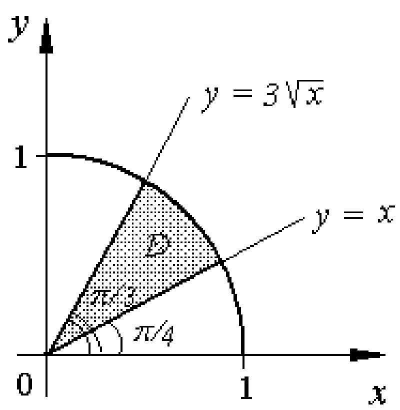


Рис. 7.20.

Отже,

$$V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \left(1 - \rho^2\right) \rho d\rho =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{48}$$

Запитання для самодіагностики.

1. Дати означення подвійного інтеграл.
2. Властивості подвійного інтеграла.
3. Як обчислюється подвійний інтеграл?
4. Який вигляд має подвійний інтеграл в полярних координатах?
5. Який вигляд має подвійний інтеграл в криволінійних координатах?
6. Як обчислюється площа за допомогою подвійного інтеграла?
7. Як обчислюється об'єм за допомогою подвійного інтеграла?

Приклади і вправи.

Приклади.

7.14. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy$ по області інтегрування D, яка обмежена прямими $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Розв'язання.

Як видно з умови, область інтегрування – прямокутник і тому за формулою (7.15) маємо:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy = \int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int\limits_0^1 arctgy\Big|_0^1 x^2dx = \left(\text{arctg}1 - \text{arctg}\,0\right)\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = $$
$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{12}.$$

7.15 Обчислити двократний інтеграл $\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\left(x+y\right)dy.$

Розв'язання.

За формулою (7.15) знаходимо:

$$\int\limits_0^{\pi} xdx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x+y\right)dy = \int\limits_0^{\pi} -\cos\left(x+y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} xdx = \int\limits_0^{\pi} x\left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right)dx =$$
$$= \int\limits_0^{\pi} x\left(\sin x+\cos x\right)dx = \int\limits_0^{\pi} x\sin xdx + \int\limits_0^{\pi} x\cos xdx$$

За формулою інтегрування частинами $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ знаходимо два останніх інтеграла:

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\cos xdx = -\pi\cos\pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos xdx = \int\limits_0^{\pi} xd\left(\sin x\right) = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\sin xdx = \pi\sin\pi + \cos x\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \cos\pi - \cos 0 = -1-1 = -2.$$

Отже, даний інтеграл дорівнює $\pi - 2$.

7.16. Обчислити двократний інтеграл $\int\limits_1^3 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$.

Розв'язання.

За формулою (7.12) маємо:

$$\int_1^3 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int_1^3 x^2\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^3 x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)dx=\int_1^3\left(x^3-x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{81}{4}-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=16.$$

7.17. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D x^3dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x$, $y=2-x^2$, $x=0$.

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування D (рис.7.21):

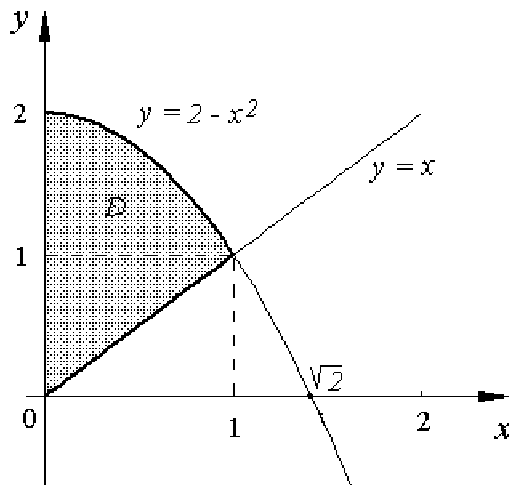


Рис.7.21.

Пряма та парабола перетинаються при $x=1$. За формулою (7.12) маємо:

$$\iint\limits_D x^3dxdy=\int_0^1 x^3dx\int_x^{2-x^2}dy=\int_0^1 x^3\,y\Big|_x^{2-x^2}=\int_0^1 x^3\left(2-x^2-x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^3-x^5-x^4\right)dx=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

7.18. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, якщо область інтегрування D обмежена лініями $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

Розв'язання.

За формулою (7.13) маємо:

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^y \left(x^2+y^2\right)dx=\int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Bigg|_0^y dy=\int\limits_1^2\left(\frac{y^3}{3}+y^3\right)dy=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_1^2 y^3dy=\frac{4}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_1^2=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}=5.$$

7.19. Знайти границі інтегрування подвійного інтеграла $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$, якщо область D обмежена двома параболами: $y=x^2$, $y=2-x^2$.

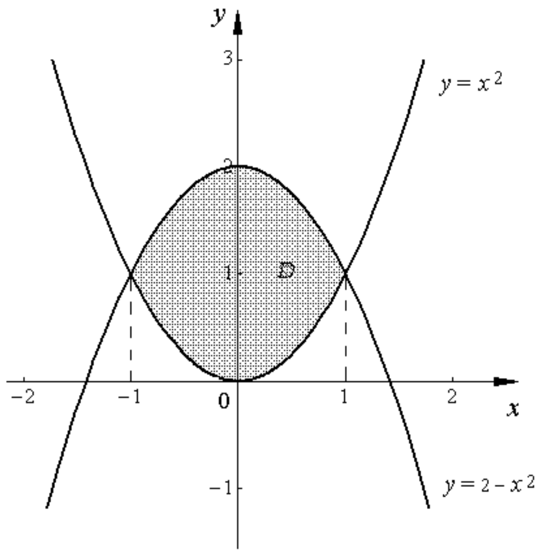


Рис. 7.22

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування D (рис. 7.22). За формулою (7.12) маємо $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2} f\left(x,y\right)dy$.

7.20. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$\int\limits_1^e dx\int\limits_0^{enx} f\left(x,y\right)dy$.

Розв'язання.

Спочатку побудуємо область інтегрування D (рис. 7.23).

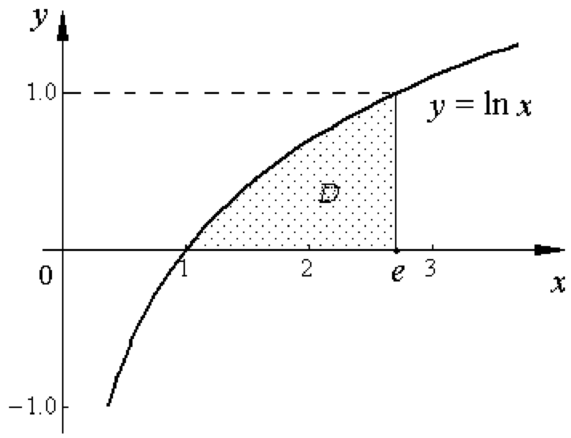


Рис. 7.23

З рівняння $y=\ln x$ маємо $x=e^y$. Тоді $\int\limits_1^e dx\int\limits_0^{enx} f\left(x,y\right)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} f\left(x,y\right)dx$.

7.21. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int\limits_{-1}^{1} dx = \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dy$$

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування D (рис. 7.24).

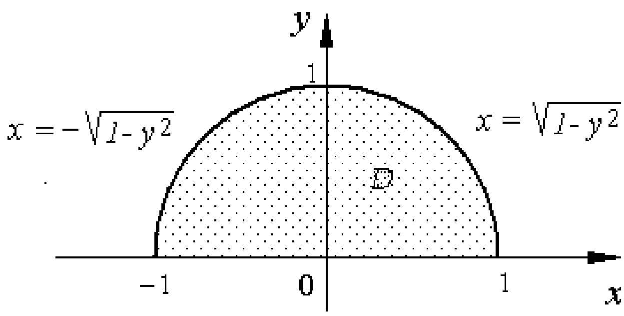


Рис. 7.24

Область D обмеження півколом $y=\sqrt{1-x^2}$ і віссю OX . З рівняння $y=\sqrt{1-x^2}$ знайдемо $x^2=1-y^2$.

Отже, $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

7.22. Змінивши порядок інтегрування, записати даний вираз у вигляді одного двократного інтеграла

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)dy.$$

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування D (рис. 7.25).

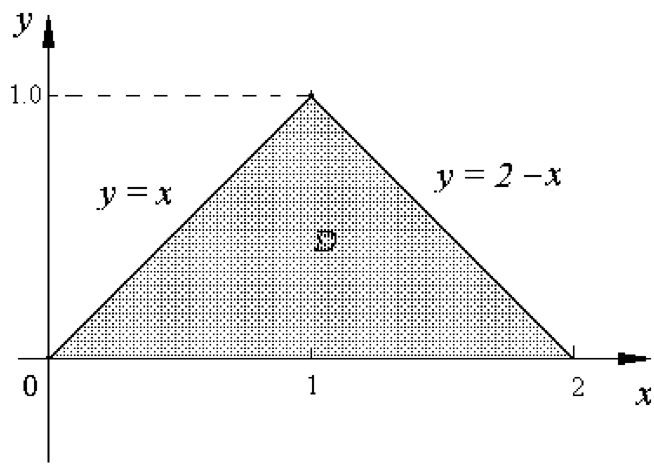


Рис. 7.25

Маємо: $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x,y)dx$.

7.23. Перейти у подвійному інтегралі $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$ до полярних координат.

Розв'язання.

Покладемо $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ і застосуємо формулу. Область D зображено на рис. 7.26.

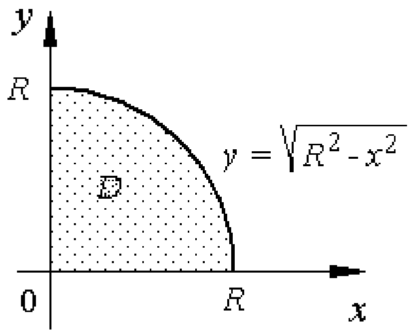


Рис. 7.26

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \int_0^R f(\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho\, d\rho .$$

7.24. Обчислити $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

де область D – кільце, обмежене колами $x^2+y^2=1$ і $x^2+y^2=4$.

Розв'язання.

Рівняння кіл $x^2+y^2=1$ і $x^2+y^2=4$ в полярних координатах мають вигляд $\rho=1$ і $\rho=2$ відповідно. Тут φ змінюється від 0 до 2π, а $x^2+y^2=\rho^2$. Отже, перейдемо до полярних координат в даному інтегралі:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2}} = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \rho\Big|_1^2 = 2\pi .$$

7.25. Знайти площу плоскої області D, обмеженої лініями:

$y=\frac{9}{x}$, $y=x$, $x=6$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 7.27).

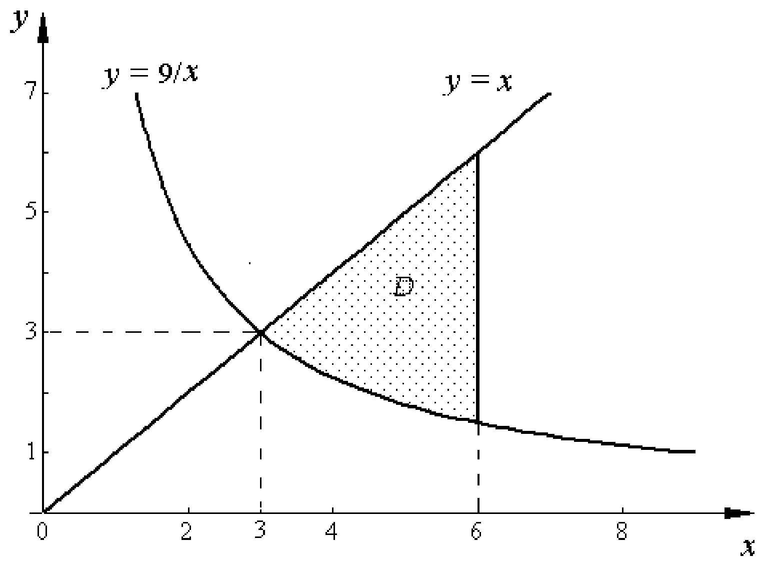


Рис. 7.27

Знайдемо точки перетину гіперболи $y=\dfrac{9}{x}$ і прямої $y=x$:

$$\begin{cases} x^2=9, \\ y=x; \end{cases} \begin{cases} x^2=3, \\ y=3. \end{cases}$$

Площу області D знайдемо за допомогою подвійного інтеграла, застосовуючи формулу

$$S=\iint\limits_D dxdy\,.$$

Таким чином,

$$S=\int_3^6 dx\int_{\frac{9}{x}}^{x} dy=\int_3^6 y\Big|_{\frac{9}{x}}^{x} dx=\int_3^6\left(x-\frac{9}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-9\ln x\right)\Bigg|_3^6=$$

$$=\left(18-9\ln 6\right)-\left(\frac{9}{2}-9\ln 3\right)=\left(13{,}5-9\ln 2\right),\left(\text{кв.од}\right).$$

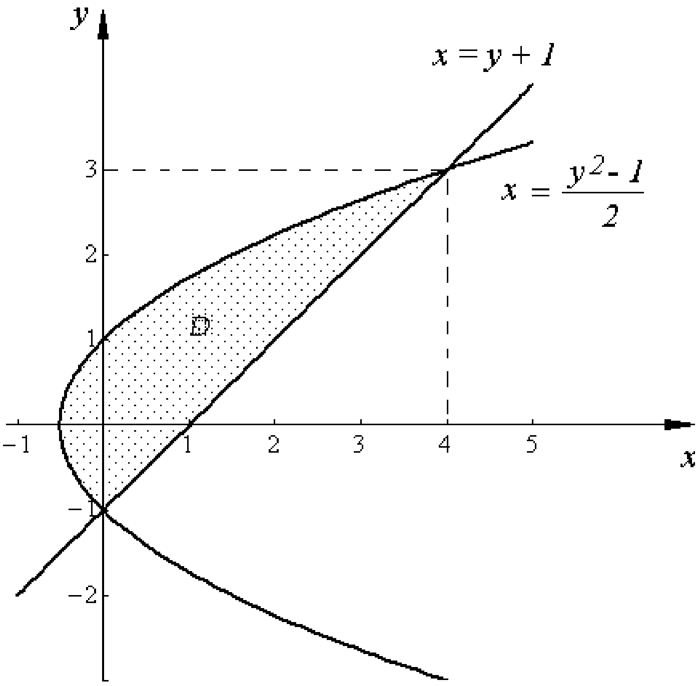


Рис.7.28

7.26. Знайти площу плоскої області D, яка обмежена лініями $y^2 = 2x+1$ і $x-y-1=0$. (рис. 7.28)

Розв'язання.

Знайдемо точку перетину графіків даних функцій:

$$\begin{cases} y^2 = 2x+1, \\ x-y-1=0, \end{cases} \begin{cases} (x-1)^2 = 2x+1, \\ y = x-1, \end{cases} \begin{cases} x^2-4x=0, \\ y=x-1. \end{cases} \quad \text{отже} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

Побудуємо область D (рис. 7.28). З заданих рівнянь знаходимо $x = \dfrac{y^2-1}{2}$ і $x = y+1$. Оскільки одержана область D проста відносно осі Oy, то шукана площа:

$$S = \int_{-1}^{3} dy \int_{\frac{y^2-1}{2}}^{y+1} dx = \int_{-1}^{3} \left(y+1-\frac{y^2-1}{2} \right) dy = \left(\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{3} = 5\frac{1}{3} \text{(кв.од)}$$

7.27. Знайти площу плоскої області D, обмеженої лініями: $y = x^2 + 3$, $xy = 4$, $y = 2$, $x = 0$.

Розв'язання.

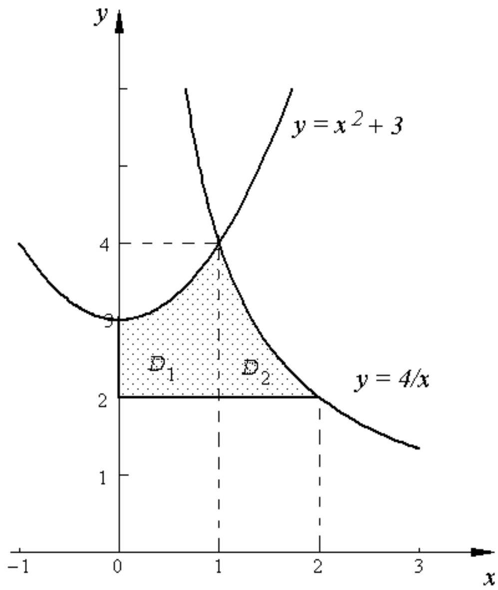


Рис. 7.29

Побудуємо область D (рис. 7.29). Спочатку знайдемо точку перетину графіків двох заданих функцій $y = x^2 + 3$ і $xy = 4$. $x\left(x^2 + 3\right) = 4$ або $x^3 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = 1$. З рисунка видно, що шукана площа S дорівнює сумі площ по з областями D_1 і D_2.

$$S = \int_0^1 dx \int_2^{x^2+3} dy + \int_1^2 dx \int_2^{\frac{4}{x}} dy = \int_0^1 (x^2 + 3 - 2)dx + \int_1^2 (\frac{4}{x} - 2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 + \left(4\ln x - 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 1 + 4\ln 2 - 4 + 2 = 4\ln 2 - \frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$

7.28. Знайти площу плоскості області D, обмеженої кривою $\left(x^2 + y^2\right) = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ (лемніската Бернулі).

Розв'язання.

Введемо полярні координати: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Рівняння заданої кривої має вигляд $\rho^4=a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)$, або $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

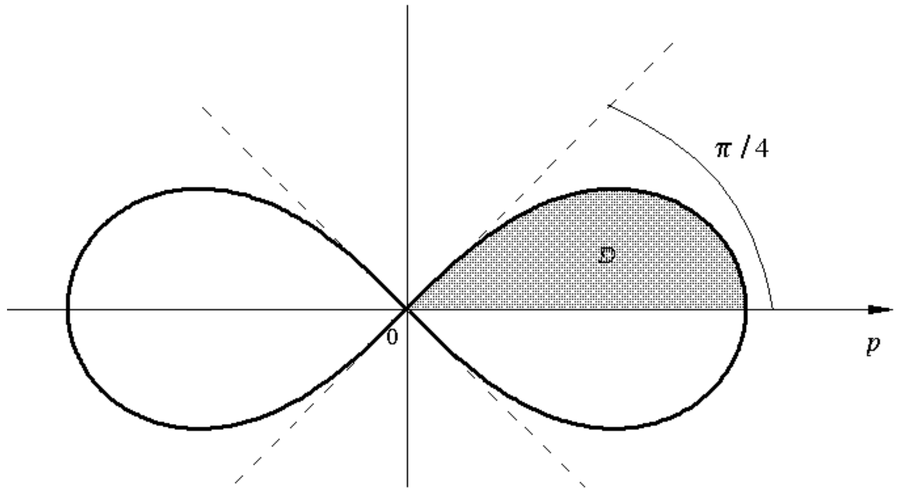


Рис.7.30

Побудуємо область D (рис.7.30).

$$\frac{1}{4}S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}du\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}du=\frac{1}{2}\cdot a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi du=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

Отже, $S=a^2$ (кв.од).

7.29. Знайти об'єм тіла, обмеженого площинами $z=0$, $z=2-y$ і циліндром $y=x^2$.

Розв'язання.

Дане тіло обмежено зверху площиною $z = 2 - y$. Тому $V = \iint\limits_D (2 - y)dxdy$.

Область D зображено на рис. 7.31.

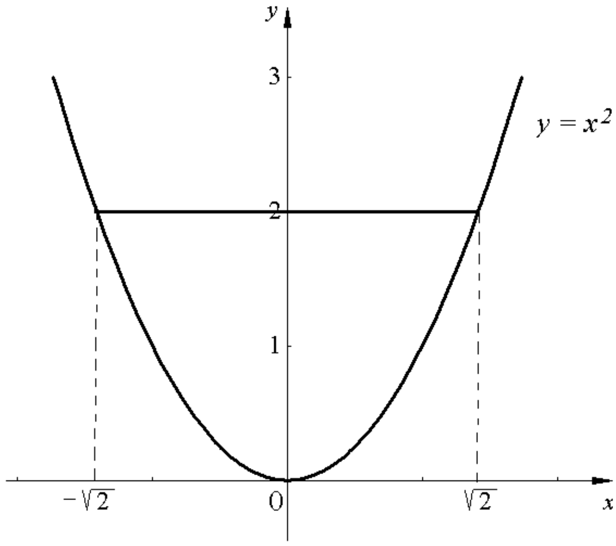


Рис.7.31.

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} (2 - y)dy = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{2} dx = \int\limits^{\sqrt{2}} \left((4-2) - \left(2x^2 - \frac{4x}{2} \right) \right) dx =$$

$$= \left(2x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$$

Отже, $V = \dfrac{32\sqrt{2}}{15}$ (куб.од).

Вправи

Обчислити подвійні інтеграли

7.30. $\iint\limits_D \left(x^2 + 2y \right) dxdy$, D – прямокутник ($0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$)

7.31. $\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy$, D – прямокутник ($0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$)

7.32. $\iint\limits_D e^{x+\sin y} \cos y dxdy$, D – прямокутник ($0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$)

Обчислити двократні (повторні) інтеграли

7.33. $\int_0^2 dx\int_0^3 \left(x^2+2xy\right)dy$; **7.34**. $\int_0^2 dx\int_x^{x^2} (2x-y)dy$;

7.35. $\int_3^4 dy\int_0^{\ln y} e^x dx$; **7.36.** $\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$;

7.37. $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}$; **7.38.** $\int_0^{2\pi} dx\int_0^a y\cos^2 xdy$ **.**

Обчислити подвійні інтеграли по області, обмеженої заданими лініями

7.39. $\iint_D \left(x^2+y\right)dxdy, y=x^2, y^2=x$ **;** **7.40.** $\iint_D \cos(x+y)dxdy,\ x=0,\ y=\pi,\ y=x$;

7.41. $\iint_D x\sqrt{y}dxdx,\ y=1,\ y=x,\ y=3x$;**7.42.** $\iint y\ln xdxdy,\ xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2$;

7.47. $\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,\ x=0,\ y=1,\ x=y^2$; **7.44.** $\iint_D dxdy,\ y=2-x,\ y^2=4x+4$.

Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах

7.45. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; **7.46**.$\int_0^4 dx\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$;

7.47. $\int_0^1 dx\int_0^{3x^2} f(x,y)dy$; **7.48.** $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

Змінити порядок інтегрування і записати даний вираз у вигляді одного двократного інтеграла

7.49. $\int_0^1 dx\int_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy+\int_1^e dx\int_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$;

7.50. $\int_{-3}^0 dx\int_{-x}^{3} f(x,y)dy+\int_0^3 dx\int_x^{3x} f(x,y)dy$;

7.51. $\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$;

7.52. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^{2} f(x,y)dy$.

Перейти до полярних координат і обчислити наступні інтеграли

7.53. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, $D:\quad x^2+y^2 \le 1$;

7.54. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D:\ x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

7.55. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, $D:\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0$;

7.56. $\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, $D:\quad x^2+y^2 \le 4$;

Знайти площі плоских областей, які обмежені заданими лініями

7.57. $y=4x-x^2,\ y=3x^2$; **7.58.** $xy=4,\ x+y-5=0$;

7.59. $y=x,\ y=5x,\ x=1$; **7.60.** $y=x^2,\ x+y=6$;

7.61. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x=4$; **7.62.** $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$.

Знайти за допомогою подвійного інтеграла об'єми тіл, обмеженими заданими поверхнями

7.63. $z=4-x^2-y^2,\ x\pm 1,\ y\pm 1,\ z=0$.

7.64. $z=6-x,\ z=0,\ y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x}$.

Розділ 2. Диференціальні рівняння

Глава 8. Основні поняття. Диференціальні рівняння першого порядку

8.1. Основні поняття та означення

Означення.Рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{8.1}$$

яке зв'язує аргумент x, невідому функцію $y(x)$ та її похідні, називається звичайним диференціальним рівнянням. Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, що містить в собі рівняння, а її степінь називається степінью диференціального рівняння. Якщо невідома функція, що входить до діференціального рівняння, є функцією більш ніж однієї змінної,то диференціальне рівняння називається рівнянням у частинних похідних. У цьому розділі розглядаються лише звичйні диференціальні рівняння першого та другого порядків.

Отже, за визначенням:

1) $y' + y \cdot x = x^2 + 1$ – диференціальне рівняння першого порядку;

2) $y'' + y' = e^{-x}$ – диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння називають функцію $y = \varphi(x)$, підстановка якої у рівняння, перетворює його у тотожність. Графік розв'язку називається інтегральною кривою. Розв'язати або зінтегрувати дане диференціальне рівняння означає знайти всі його розв'язки. Рівняння (8.1) має безліч розв'язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-ого порядку називається його розв'язок:

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{8.2}$$

який містить n незалежних довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$. Якщо загальний розв'язок задано у неявному вигляді:

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0, \tag{8.3}$$

то він називається загальним інтегралом.

Означення. Частинним розв'зок рівняння називається розв'язок, який отримується із загального розв'язку, якщо вільним сталим давати визначені числові значення.

8.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальні рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{8.4}$$

або

$$y' = f(x, y). \tag{8.5}$$

Рівняння (8.4) – це рівняння не розв'язане відносно похідної. Рівняння(8.5) – рівняння,що розв'язане відносно похідної. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y = \varphi(x, C), \tag{8.6}$$

де C – довільна стала.

Означення.Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння, яке задовольняє початкову умову: $y_0 = y(x_0)$, має назву задачі Коші.

Розв'язок диференціального рівняння (8.6) існує не для будь-якої функції $f(x, y)$ і не при будь початковій умові. Під час розв'язання задачі Коші застосовується теорема існування і єдності розв'язку.

Теорема. Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f_y'(x, y)$ неперервні в деякій замкненій області X і точка $(x_0; y_0) \in X$, то існує єдиний розв'зок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, яке задовільняє початкову умову при $x = x_0$, $y = y_0$.

Доведення теореми виходить за межі навчальної програми.

Геометричний зміст задачі Коші полягає у тому, що графік функції $y=\varphi(x)$, тобто інтегральна крива, яка проходить через точку $(x_0;y_0)\in X$, є єдина.

Якщо у точці $(x_0;y_0)$ умови теореми Коші виконуються, то початкову умову $x=x_0,\ y=y_0$ будемо називати допустимою.

Розв'язок диференціального рівняння, який можна одержати із загального розв'язку (8.6), якщо надати певні значення довільній сталій C, називається частинним розв'язком. Для знаходження розв'язку задачі Коші в загальний розв'язок рівняння (8.6) треба підставити начальну умову та розв'язати рівняння $y_0=\varphi(x_0,C)$ відносно сталої C. Тоді частинний розв'язок $y=\varphi(x,C_0)$ буде розв'язком задачі.

Приклад. 8.1. Розв'язати рівняння: $y'=\cos x$; $y(0)=1$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння у диференціалах $dy=\cos x dx$ та, інтегруючі його праву та ліву частини, одержимо: $y=\sin x+C$. Використаємо початкову умову: $y(0)=1$. Отже $1=\sin x+C,\quad C=1$.

Таким чином, $y=\sin x+1$ є розв'язком задачі Коші.

8.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Рівняння, яке має вигляд:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dy+f_2(x)\varphi_2(y)dx=0, \qquad (8.7)$$

носить назву рівняння з відокремлюваними змінними. Цей тип рівняння є самим простим, але разом з тим дуже важливим, оскільки більш складні рівняння за допомогою деяких перетворень зводяться саме до цього типу. Поділивши це рівняння на добуток $f_1(x)\varphi_2(y)\neq 0$, одержимо:

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy+\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx=0.$$

Зінтегрувавши ліву та праву частини, одержимо:

$$\int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} dy + \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx = C. \qquad (8.8)$$

Обчисливши інтеграли, одержимо розв’язок у вигляді $y = \varphi(x, C)$ або $\Phi(x, y, C) = 0$. Розв'язки рівняння ,при яких $f_1(x)\varphi_2(y) \neq 0$ називаються особливими і в даних прикладах не розглядаються.

Аналогично рівнянню (8.7) , рівняння виду:

$$y' = f(x)g(y) \qquad (8.9)$$

Є також рівнянням з відокремлюваними змінними.Це рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \ ,$$

або

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \qquad (8.10)$$

Інтегруючи обидві частини рівності (8.10), одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння (8.9):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \qquad (8.11)$$

Приклад 8.2. Розв'язати рівняння $x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0$.

Розв'язання

Поділимо обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{y^2-1}\sqrt{x^2-1}$. Одержимо

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = 0.$$

Змінні відокремлені. Інтегруючи почленно, знайдемо загальний інтеграл

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = \int 0dx,$$

Отже, загальним інтегралом рівняння буде функція:

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = C.$$

Приклад 8.3. Розв'язати рівняння $y'(1-x) = y+1$.

Розв'язання.

Переходимо в рівнянні до диференціалів. Одержимо

$$(1+y)dx + (x-1)dy = 0 \text{ або } \frac{dx}{x-1} + \frac{dy}{y+1} = 0.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dy}{y+1} = C.$$

Звідси $\ln|x-1| + \ln|y+1| = \ln|C|$, тобто $\ln\left|(x-1)(y+1)\right| = \ln|C|$,або

$$(x-1)(y+1) = C.$$

Приклад 8.4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$, який задовольняє умові $y=1$ при $x=e$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння.

$$xy' = \frac{y}{\ln x} \text{ або } x\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln x}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на dx, маємо

$$xdy = \frac{ydx}{\ln x}.$$

Відокремлюємо змінні, для цього обидві частини треба поділити на xy. Маємо:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}.$$

Інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x\ln x} + C_1.$$

Знаходимо інтеграли:

$$\ln|y| = \ln|\ln x| + \ln C.$$

Після потенціювання одержуємо:

$$y = C\ln x.$$

Знайшли загальний розв'язок. Тепер треба знайти C, використовуючи початкову умову, а саме: $y(e) = 1$. Підставляємо в розв'язок початкову умову, отримаємо:

$$1 = C\ln e, \text{ звідки } C = 1.$$

Тепер підставляємо в загальний розв'язок $C = 1$. Таким чином, частинний розв'язок

$$y = \ln x$$

8.4. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння, яке має вигляд:

$$y' = f(x, y) \qquad (8.12)$$

носить назву однорідного рівняння першого порядку, якщо його права частина, тобто функцію $f(x, y)$, можливо подати, як функцію відношення своїх аргументів: $f(x, y) = \varphi(y/x)$.

Тоді рівняння (8.12) буде мати вигляд:

$$y' = \varphi(y/x). \tag{8.13}$$

Це рівняння легко перетворити у рівняння з відокремлюваними змінними. З цією метою зробимо заміну змінної:

$$u = y/x.$$

Оскільки $y = ux$ та $y' = u + xu'$, рівняння (8.13) приймає вигляд:

$$xu' + u = \varphi(u),$$

тобто

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{8.14}$$

Це означає, що в рівнянні (8.14) змінні відокремилися. Зінтегрувавши обидві частини рівняння (8.14) одержимо:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + c.$$

З цього співвідношення знайдемо загальний інтеграл рівняння $F(u,C) = 0$. Повертаючись до початкової змінної $y = xu$, отримаємо розв'язок однорідного рівняння.

Приклад 8.5. Розв'язати рівняння: $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\operatorname{tg} y}{x}$.

Розв'язання.

Позначивши $y/x = u$, одержимо, що $y = ux$ та $y' = u + xu'$. Підставляючи одержані співвідношення в початкове рівняння, маємо:

$$u + xu' = u + \operatorname{tg} u, \quad \text{тобто} \quad \operatorname{ctg} u\,du = dx/x.$$

Зінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C; \text{ або } \ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = \ln|Cx|.$$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння є

$$\sin\frac{y}{x} = Cx.$$

Приклад 8.6. Розв’язати рівняння: $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Розв'язання.

Визначивши із даного рівняння першу похідну невідомої функції, маємо:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{2y/x}.$$

Одержане рівняння однорідне. Позначивши $y/x = u$, одержимо, що $y = ux$ та $y' = u + xu'$. Таким чином, $xu' = \dfrac{1+u^2}{2u} - u$ або $\dfrac{2udu}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Зінтегруємо обидві частини рівняння:

$$-\ln\left|1-u^2\right| = \ln|Cx|, \quad \text{або ж} \quad Cx = 1/(1-u^2).$$

Повертаючись до початкової змінної, отримаємо:

$$x^2 - y^2 = Cx.$$

Приклад 8.7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$, якщо $y(1) = 0$.

Розв'язання.

Спочатку знаходимо загальний інтеграл даного рівняння. Поділивши обидві частини рівняння на x, маємо

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 1.$$

Застосовуємо заміну $\frac{y}{x} = t$, або $y = tx$, $y' = t'x + t$. Тоді рівняння приймає вигляд

$$(t'x + t - t)\operatorname{arctg} t = 1 \text{ або } t'x\operatorname{arctg} t = 1,$$

звідки

$$\frac{dt}{dx} x \operatorname{arctg} t = 1.$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Після відокремлювання змінних одержимо

$$\operatorname{arctg} \mathrm{t}\, dt = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини

$$\int \operatorname{arctgt} dt = \int \frac{dx}{x} + C_1.$$

Знайдемо інтеграл, що знаходиться зліва, застосовуючи метод інтегрування частинами, а саме: $\int udv = uv - \int vdu$.

$$u = \operatorname{arctg} t, \; dv = dt;$$

тоді

$$du = \frac{1}{1+t^2} dt, \; v = t.$$

Отже,

$$\int \operatorname{arctgt} dt = t \operatorname{arctg} t - \int \frac{tdt}{1+t^2} = t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C_2.$$

Враховуючи цей інтеграл, маємо

$$t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| = \ln|x| + \ln C$$

або

$$t\,\mathrm{arctg}\,t = \ln Cx\sqrt{1+t^2}\ .$$

Повертаємось до старої змінної і знаходимо загальний інтеграл:

$$\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Враховуючи початкові умови, знайдемо C. Для цього в загальний інтеграл рівняння підставляємо $x=1$, $y=1$

$$\frac{0}{1}\mathrm{arctg}\frac{0}{1} = \ln C\sqrt{1+0}\ ,$$

$0=\ln C$, звідки $C=1$.

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

8.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

Означення.Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної першого порядку, а саме:

$$y' + p(x)\,y = g(x), \tag{8.15}$$

де $g(x)$ – вільний член рівняння; $p(x)$ та $g(x)$ - відомі неперервні функції незалежної змінної x (вони також можуть бути сталими). **Метод Бернуллі.** Знайдемо розв’язок рівняння у вигляді добутку двох невідомих функцій:

$$y = u(x)\,v(x).$$

Для першої похідної цього співвідношення отримаємо вираз:

$$y' = u'v + uv'.$$

Таким чином, початкове рівняння (8.15) буде мати вигляд:

$$u'v + (v' + p(x)v)u = g(x).$$

Вибравши за $v(x)$ будь-який частинний розв’язок рівняння:

$$v' + p(x)v = 0,$$

для знаходження невідомої функції $u(x)$ отримаємо рівняння:

$$u'(x)v(x) = g(x).$$

Таким чином, початкове рівняння звелось до розв’язання системи двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = 0 \\ u'(x)v(x) = g(x) \end{cases}, \tag{8.16}$$

обидва рівняння якої являють собой рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язавши перше рівняння системи, знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} + p(x) = 0, \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx, \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

оскільки нас цікавить будь-який частинний розв’язок. Підставляючи знайдений розв’язок $v(x)$ у друге рівняння системи отримаємо:

$$\frac{du}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx}, \quad du = g(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Звідки

$$u(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд:

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right). \qquad (8.17)$$

Приклад 8.8. Знайти розв'язок рівняння $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$.

Розв'язання.

Маємо рівняння вигляду (8.15). Застосовуємо підстановку $y = uv$, де u і v – функції від x.Тоді

$$y' = u'v + uv',$$

Підставляючи y і y' в дане рівняння, одержимо

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos x.$$

Згрупуємо члени, що містять u і винесемо u за дужки, а саме

$$u'v + u\left(v' - v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos x.$$

Далі функцію v вибираємо так, що

$$v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0, \text{ тоді } u'v = \cos x.$$

Отже, для знаходження u і v маємо систему:

$$\begin{cases} v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0, \\ u'v = \cos x. \end{cases} \qquad (8.20)$$

Розв'язуючи перше рівняння, знайдемо v.

$$\frac{dv}{dx} = v\,\mathrm{tg}\,x \text{ або } \frac{dv}{v} = \mathrm{tg}\,x dx.$$

Інтегруємо обидві частини

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

$$\ln|v| = -\ln|\cos x|, \quad \ln|v| = \ln|\cos x|^{-1}.$$

Звідки $v=\frac{1}{\cos x}$. Знайдену функцію v підставляємо в друге рівняння системи (8.20) і знаходимо u.

$$u'\cdot\frac{1}{\cos x}=\cos x,$$

$$\frac{du}{dx}=\cos^2 x,$$

$$du=\cos^2 x dx.$$

Інтегруємо

$$\int du=\int\cos^2 x dx+C,\ .u=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx+C.$$

Отже, $$u=\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Таким чином,

$$y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+C\right)\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

Приклад 8.8. Розв’язати рівняння $\left(y^3-xy\right)y'=1$

Розв'язання.

Дане рівняння лінійне, але відносно функції $x=x(y)$. Запишемо інакше це рівняння.

$$\left(y^3-xy\right)\frac{dy}{dx}=1 \text{ або } y^3-xy=\frac{dx}{dy},$$

звідки

$$y^3-xy=\frac{dx}{dy}.$$

Отже, $x'+xy=y^3$. Таким чином, отримали лінійне рівняння відносно $x(y)$. Розв'язок шукаємо у вигляді $x=u(y)\cdot v(y)$, звідки $x'=u'v+uv'$.В рівняння підставляємо x і x', одержимо:

$$u'v + uv' + uvy = y^3.$$

Виносячи за дужки u, маємо

$$u'v + u\left(v' + vy\right) = y^3.$$

Це рівняння замінюємо системою рівнянь

$$\begin{cases} v' + vy = 0, \\ u'v = y^3. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо v.

$$v' + vy = 0 \text{ або } \frac{dv}{dy} = -vy \text{, звідки}$$

$$\frac{dv}{v} = -ydy.$$

Інтегруючи одержане рівняння, маємо

$$\ln|v| = -\frac{y^2}{2} \text{ або } v = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

З другого рівняння системи знайдемо u.

$$u'v = y^3.$$

Підставляючи v, маємо

$$u'e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3 \text{ або } \frac{du}{dy}e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3,$$

яке можна записати так:

$$du = e^{\frac{y^2}{2}}y^3dy.$$

Інтегруємо це рівняння

$$\int du = \int e^{\frac{y^2}{2}}y^3dy + C.$$

Знайдемо інтеграл, що знаходиться справа. Для знаходження цього інтеграла застосовуємо метод інтегрування частинами.

$$u = y^2,\ dv = e^{\frac{y^2}{2}} y dy, \text{ звідки}$$

$$du = 2ydy,\ v = e^{\frac{y^2}{2}}$$

Тепер маємо

$$\int e^{\frac{y^2}{2}} y^3 dy = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - \int e^{\frac{y^2}{2}} 2ydy = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}}.$$

Отже,

$$u = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C.$$

Таким чином,

$$x = \left(y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C \right) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{або} \quad x = y^2 - 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Рівняння Бернуллі. Деякі рівняння внаслідок заміни невідомої функції можуть бути зведені до лінійного диференціального рівняння, наприклад, рівняння Бернуллі, яке має вигляд:

$$y' + p(x)\, y = y^n g(x), \tag{8.21}$$

де n – дійсне число. У цьому рівнянні $p(x)$ та $g(x)$ – деякі неперервні функції, які можуть бути і сталими. Рівняння Бернуллі являє собою нелінійне рівняння оскільки невідома функція $y(x)$ в праву частину рівняння входить нелінійно. Поділивши обидві частини рівняння, на y^n, одержимо:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\, y^{1-n} = g(x). \tag{8.22}$$

Замінимо функцію $y(x)$ на нову функцію $z(x)$ за допомогою виразу:

$$y^{1-n} = z.$$

Для першої похідної цього співвідношення отримаємо:

$$z' = (1-n)\, y^{-n}\, y'.$$

Підставимо одержані співвідношення у початкове рівняння. Будемо мати лінійне диференціальне рівняння відносно функції z, а саме, $z' + z\,p(x) = g(x)$, розв'зок якого розглянуто вище.

Приклад 8.10. Знайти розв’язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

Розв'язання.

За умовою маємо рівняння Бернуллі (8.21). Дане рівняння приводимо до лінійного, застосовуючи заміну $z = y^{1-n}$. В нашому прикладі $n = 2$, тому

$$z = y^{-1} \text{ або } y = \frac{1}{z} \text{ тоді } y' = -\frac{1}{z^2} z'.$$

Рівняння приймає вигляд

$$-\frac{1}{z^2} z' + \frac{1}{zx} = -\frac{x}{z^2}$$

або після множення на $-z^2$

$$z' - \frac{z}{x} = x.$$

Тепер маємо лінійне рівняння відносно *z*. Розв’язок цього рівняння шукаємо у вигляді $z = uv$, звідси $z' = u'v + uv'$. Підставляючи z і z' в рівняння, отримуємо

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \text{ або}$$

$$u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = x.$$

Це рівняння замінюємо системою рівнянь

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = x. \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо v.

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \text{ або } \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \text{ звідки}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Таким чином, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x|$, тобто, $v = x$. З другого рівняння системи знайдемо u:

$$u'v = x, \text{ або } u'x = x, \ \frac{du}{dx} = 1, du = dx.$$

Інтегруючи, маємо

$$u = x + C.$$

Таким чином:

$$z = uv. \qquad z = (x + C)x.$$

Повертаємося до змінної y.

$$y = \frac{1}{z} \text{ або } y = \frac{1}{x(C + x)} = \frac{1}{Cx + x^2}.$$

Запитання для самодіагностики

1.Який вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку?

2.Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку?

3. Що називається частинним розв'язком?

4.Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.

5. Які види диференціальних рівнянь першого порядку ви знаєте?

6.Який вид має диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?

7.Яке рівняння називається однорідним?

8.Яку заміну треба зробити при розв'язку однорідних рівнянь?

8.Яке рівняння першого порядку називається лінійним?

10 Як розв'язується лінійне рівняння?

11.Яким чином можна звести рівняння Бернуллі до лінійного диференціального рівняння?

Приклади і вправи.

Приклади.

8.11. Показати, що функція $y = e^{-5x}$ є розв'язком рівняння $y'' + 5y' = 0$.

Розв'язання.

Знаходимо

$$y' = -5e^{-5x},\ y'' = 25e^{-5x}.$$

і підставляємо в задане рівняння

$$y'' + 5y' = 25e^{-5x} - 25e^{-5x} = 0\ ,$$

тобто функція $y = e^{-5x}$ дійсно є розв'язком даного диференціального рівняння.

Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними

8.12. . $x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0$.

Розв'язання.

Поділимо ліву частину рівняння на $(4+x^2)\sqrt{9-y^2}$:

$$\frac{x}{x^2+4}dx - \frac{y}{\sqrt{9-y^2}}dy = 0.$$

Після інтегрування одержуємо

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{y}{\sqrt{9-y^2}}dy = 0\ ,$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\sqrt{9-y^2}=C.$$

Це і є загальний інтеграл рівняння.

8.13. $y'=2\sqrt{y}\ln x,$ яке задовольняє початкову умову $y(e)=1.$

Розв'язання.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\ln x$$

і розділимо змінні:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\ln x dx.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int\ln x dx.$$

Зліва інтеграл табличний:

$$\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}dy=\sqrt{y}.$$

Інтеграл справа знаходимо частинами:

$$\int\ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=x \end{matrix}\right|=x\ln x-\int dx=x\ln x-x.$$

Отже

$$\sqrt{y}=x\ln x-x+C.$$

Застосовуючи початкову умову, в одержаний розв'язок підставляємо $x=e,\ y=1$ і знаходимо C:

$$1 = e\ln e - e + C,\ \ C = 1.$$

Тоді частинний розв'язок має вигляд

$$y = \left(x\ln x - x + 1\right)^2.$$

8.14. $(1+x^2)\,y' = xy - y\sqrt{1+x^2}$, яке задовольняє початкову умову $y\left(0\right) = 1.$

8.15.

Розв'язання.

Перетворимо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}},$$

або

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right),\ \text{або}\ \ \frac{dy}{y} = \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx.$$

Отже, змінні поділилися і можна інтегрувати обидві частини рівняння:

$$\int\frac{dy}{y} = \int\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx,$$

звідки

$$\ln\left|y\right| + \ln C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|.$$

Це і є загальний розв'язок рівняння. Перетворимо його до простішого вигляду.

$$\ln Cy(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln\sqrt{1+x^2},$$

або

$$Cy\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \sqrt{1+x^2}.$$

Підставимо в одержаний вираз початкові умови $x = 0$, $y = 1$ і знайдемо C: $C = 1$. Тоді

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} -$$

ч

астинний розв'язок даного рівняння.

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

8.16. $2x^2dy = (x^2 + y^2)dx$.

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на x^2dx. Одержимо рівняння

$$2\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Нехай $\frac{y}{x} = u$, тоді $y = ux$, $y' = u'x + u$. Маємо

$$2(u'x+u) = 1+u^2, \quad 2x\frac{du}{dx} = 1+u^2-2u,$$

$$\frac{2du}{1-2u+u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо і, підставляючи $\frac{y}{x}$ замість *u*, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$2\int\frac{du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{x}, \quad -\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln C,$$

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1} = \ln Cx, \quad \ln Cx = \frac{2x}{x-y}, \quad Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}.$$

При відокремлюванні змінних ми поділяли на *x* і $(u-1)^2$. Це можливо при $x \neq 0$ і $u \neq 1$.

Безпосередня перевірка показує, що $x = 0$ і $u = 1$, тобто $y = x$, також є розв'язками рівняння, але вони не увійшли в загальний інтеграл.

8.17. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y^2 + x^2 y' = xyy',$$

який задовольняє початкову умову $y(1) = 1$.

Розв'язання.

Перетворимо рівняння до вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$y'(xy - x^2) = y^2, \quad y' = \frac{y^2}{xy - x^2}, \quad y' = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} - 1}.$$

Нехай $\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \; y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = \frac{u^2}{u-1}, \; u'x = \frac{u^2}{u-1} - u,$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}, \qquad \frac{u-1}{u}du = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\int \frac{u-1}{u}du = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \int \frac{dx}{x},$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C, \quad u = \ln(Cux),$$

або

$$\frac{y}{x} = \ln Cy, \quad y = x\ln Cy.$$

Отже, $y = x\ln Cy$ – загальний інтеграл рівняння. Застосовуючи початкову умову $y(1) = 1$, знайдемо *C.*

$$1 = \ln C, \; C = e.$$

Тоді, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$y = x\ln(ey).$$

8.18. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$xy' - y = x\cos^2\frac{y}{x},$$

який задовольняє умову $y(3) = 0$.

Розв'язання.

Перетворимо рівняння до вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$y' - \frac{y}{x} = \cos^2\frac{y}{x}.$$

Нехай $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$, $y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u - u = \cos^2 u, \quad x\frac{du}{dx} = \cos^2 u, \quad \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{\cos^2 u} = \int\frac{dx}{x}, \quad \operatorname{tg} u = \ln|x| + \ln C,$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln Cx.$$

З початкової умови $y(3) = 0$ знайдемо *C.*

$$\operatorname{tg} 0 = \ln 3C, \quad 3C = 1, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Отже, $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln\frac{x}{3}$, $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\ln\frac{x}{3}\right)$.

$y = x\operatorname{arctg}\ln\frac{x}{3}$ – частинний розв'язок.

Відповідь можна записати й у вигляді частинного інтеграла. з рівності:

$$\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln\frac{x}{3}, \quad \frac{x}{3} = e^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}, \quad x = 3e^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}.$$

Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

8.19. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x^2+1)\,y' - xy = x^3 + x.$$

Розв'язання.

Перетворимо рівняння, поділивши обидві його частини на x^2+1.

$$y' - \frac{x}{x^2+1}\,y = x.$$

Нехай $y = u(x)v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$, і задане рівняння приймає вигляд

$$u'v + uv' - \frac{x}{x^2+1}uv = x,$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{x^2+1}v\right) = x.$$

Нехай $v' - \dfrac{x}{x^2+1}v = 0$. Знайдемо найпростіший частинний розв'язок цього рівняння (при $C=0$):

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2+1}v, \quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{xdx}{x^2+1},$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\text{ . Звідси } v = \sqrt{1+x^2}.$$

Підставимо $v = \sqrt{1+x^2}$ в рівняння, з якого знайдемо u.

$$u'\cdot\sqrt{1+x^2} = x, \quad u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$u = \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Отже, шуканий загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = uv, \quad y = \left(\sqrt{1+x^2} + C\right)\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}.$$

8.20. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' \sin x - y \cos x = 1,$$

який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Розв'язання.

Це – лінійне рівняння. Перетворимо його, поділивши його частини на $\sin x$.

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок цього рівняння.

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Отже,

$$u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x},$$

або

$$u'v + u\left(v' - v \operatorname{ctg} x\right) = \frac{1}{\sin x}.$$

Розв’язуємо рівняння $v' - v \operatorname{ctg} x = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctg} x, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctgx} dx,$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x|.$$

Звідси $v = \sin x$ – найпростіший частинний розв'язок останнього рівняння. Підставимо $v = \sin x$ в рівняння і одержимо

$$u' \sin x = \frac{1}{\sin x},, \text{ або } u' = \frac{1}{\sin^2 x},$$

тоді

$$u = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = uv = (-ctgx + C)\sin x = -\cos x + C\sin x.$$

Застосовуючи початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, знайдемо *C*:

$$1 = -\cos\frac{\pi}{2} + C\sin\frac{\pi}{2}, \ \ C = 1.$$

Частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову при $C = 1$, має вигляд

$$y = \sin x - \cos x.$$

8.21. Розв'язати рівняння Бернуллі

$$y' - xy = -e^{-x^2} y^3.$$

Розв'язання.

Це рівняння Бернуллі, де $n = 3$. Для його розв'язання застосуємо той самий спосіб, що й при розв’язанні лінійного рівняння. Нехай $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тоді

$$u'v + uv' - xuv = -u^3 v^3 e^{-x^2}, \text{ або } u'v + u(v' - xv) = -u^3 v^3 e^{-x^2}.$$

З рівняння $v' - xv = 0$ знаходимо $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} = xv, \quad \int\frac{dv}{v} = \int xdx, \ \ln|v| = \frac{x^2}{2}.$$

$v = e^{\frac{x^2}{2}}$ – частинний розв'язок рівняння $v' - xv = 0$. Підставимо $v = e^{\frac{x^2}{2}}$ в рівняння :

$$e^{\frac{x^2}{2}} u' = -u^3 e^{\frac{3x^2}{2}} e^{-x^2}, \ \ u' = -u^3, \ \ \frac{du}{dx} = -u^3,$$

$$-\int \frac{du}{u^3} = \int dx, \quad \frac{1}{2u^2} = x + C,$$

$$u^2 = \frac{1}{2(x+C)}, \quad y^2 = u^2 v^2 = \frac{e^{x^2}}{2(x+C)}.$$

Отже, $2y^2(x+C) = e^{x^2}$ – загальний інтеграл рівняння.

Вправи.

Перевірити, чи є розв’язком даного диференціального рівняння вказана функція:

8.22. $y'' + 4y' = 0, \qquad y = \sin 2x.$

8.23. $y'' = x^2 + y^2, \qquad y = \frac{1}{x}.$

8.24. $y'' + y' = 0, \qquad y = 3\sin x - 4\cos x.$

8.25. $y'' - 2y' + y = 0, \qquad y = x^2 e^x.$

8.26. $y'x^3 = 2y, \qquad y = 2e^{-\frac{1}{x^2}}.$

8.27. $xdy - 2ydx = x^3 \ln x dx, \qquad y = x^3(\ln x - 1) + 2x^3.$

8.28. $yxdx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, \qquad y = e^{\sqrt{1-x^2}}.$

Розв’язати рівняння з відокремлюваними змінними (знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл)

8.29. $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0.$

8.30. $(y-1)^2 dx = (x-1)^3 dy.$

8.31. $\ln x \sin^2 y dx + x \cos y dy = 0.$

8.32. $xydx + \sqrt{4-x^2}dy = 0.$

8.33. $e^{1-2x}(y^2 - 1)dy = dx.$

8.34. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$

8.35. $(xy^2 - y^2)dx + (x^2 y + x^2)dy = 0.$

8.36. $xyy' = 1 - x^2.$

8.37. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$

8.38. $(\sqrt{xy}-2\sqrt{x})\,y'=y$.

8.39. $y'=\dfrac{y\ln y}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$.

Знайти частинні розв'язки (частинні інтеграли), які задовольняють вказані початкові умови.

8.40. $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$, $y(0)=1$.

8.41. $\sin^2 x\cos^2 y dx=\cos^2 x dy$, $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

8.42. $y'e^{-x}=x-1$, $y(1)=-e$.

8.43. $y'\sin x=y\ln y\cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=e$.

8.44. $y'+\cos(x+2y)=\cos(x-2y)$, $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

8.45. $y'(x+\sqrt{x})=\sqrt{1-y}$, $y(0)=1$.

8.46. $3x\sqrt[3]{y}dx+(1-x^2)dy=0$, $y(0)=0$.

8.47. $x(y^6+1)dx+y^2(x^4+1)dy=0$, $y(0)=1$.

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння.

8.48. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$.

8.49. $(xy-x^2)\,y'=y^2$.

8.50. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

8.51. $(x+y)dx+2xdy=0$.

8.52. $(3x^2+xy-y^2)dx+x^2dy=0$.

8.53. $x^2dy=(9x^2+y^2+xy)dx$.

8.54. $xy'-y=\sqrt{y^2+2x^2}$.

8.55. $xy'+y=2y(\ln y-\ln x)$.

8.56. $xy'-y=\dfrac{x}{\sin\dfrac{y}{x}}$.

Знайти для заданих рівнянь частинні розв'язки (частинні інтеграли), які задовольняють вказані початкові умови.

8.57. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}, \qquad y(1) = \dfrac{\pi}{2}.$

8.58. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y,, \qquad y(1) = 0.$

8.59. $xy' = y(3 + \ln y - \ln x), \qquad y(1) = \dfrac{1}{e}.$

8.60. $(2x - 3y)dx + xdy = 0, \qquad y(1) = -1.$

8.61. $(x^2 + y^2)dx = 2xydy, \qquad y(4) = 0.$

8.62. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, \quad y(2) = 1..$

Розв’язати лінійні диференціальні рівняння

8.63. $y' + \dfrac{y}{x+1} = x^2.$

8.64. $y' - \dfrac{y}{x} = 3x.$

8.65. $y' - 2y = e^{2x}.$

8.66. $xy' + y = e^x.$

8.67. $y'(x^2 + 4) - xy = \sqrt{x^2 + 4}.$

8.68. $xy' - y = x^2 \cos x.$

8.69. $(1 + x^2)\,y' + y = \mathrm{arctg}\,x.$

8.70. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

8.71. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x.$

8.72. $y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$

8.73. $y' + 2y = y^2 e^x.$

8.74. $y' + \dfrac{2y}{x} = y^2 x.$

Знайти для заданих рівнянь частинні розв'язки, які задовольняють вказані початкові умови.

8.75. $y' + 3y = xe^{-3x}, \qquad y(0) = 0.$

8.76. $(1 + x^2)\,y' - 2xy = (1 + x^2)^2, \qquad y(3) = 40.$

8.77. $xy' - y = x^2 \sin x, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi.$

8.78. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, \qquad y(e) = \dfrac{e^2}{2}.$

8.79. $xy'\ln x - y = \ln x, \qquad y(e^2) = 2\ln 2.$

8.80. $(1-x^2)\,y'+2xy=xy^2, \quad y(0)=\dfrac{1}{2}.$

8.81. $y'x+y=-xy^2, \qquad\qquad y(e)=\dfrac{1}{e}.$

Глава 9. Диференціальні рівняння другого порядку

9.1. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

Означення. Рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{9.1}$$

називається диференціальним рівнянням другого порядку.
Рівняння, розв'язане відносно похідної y'', має вигляд:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{9.2}$$

Загальним розв’язком диференціального рівняння другого порядку називають функцію:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{9.3}$$

яка залежить від аргументу x та від двох довільних стали C_1 та C_2. Якщо визначити функцію y явним способом неможливо, розв’язок, що його отримують у цьому випадку, називають загальним інтегралом диференціального рівняння:

$$\Phi\left(x, y, C_1, C_2\right) = 0. \tag{9.4}$$

Частинний розв’язок (частинний інтеграл) знаходять із загального розв'язку при будь -яких значеннях довільних сталих. Якщо до рівняння задаються начальні умови, то частинний розв'зок можна знайти відповідно до цих умов. Начальні умови для рівняння другого порядку будуть

$$y(x_0) = y_0; \qquad y'(x_0) = y_0'. \tag{9.5}$$

Задача Коші. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння(9..1) $y = f(x)$,що задовольняє начальним умовам (9.5). Отже для знаходження розв'язку задачі Коші треба спочатку знайти загальний розв'язок рівняння (9.3) або (9.4) та визначити сталі C_1, C_2 із початкових умов (9.5)

Геометричне тлумачення початкових умов для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що крім точки $M_0(x_{0,}\, y_0)$, через яку проходить інтегральна крива, ми задаємо кутовий коефіцієнт дотичної y_0' до цієї кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$. Оскільки загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку залежить від двох довільних сталих, через дану точку проходить безліч інтегральних кривих, та лише одна з них має даний кутовий коефіцієнт:

$$y_0' = \operatorname{tg}\alpha = y'(x_0).$$

Довільні сталі C_1 та C_2 одержують із системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2). \end{cases}, \qquad (9.6)$$

Розглянемо найпростіші випадки диференціальних рівнянь другого порядку, які припускають зниження порядку.

1. Напростішим рівнянням такого вигляду є рівняння:

$$y'' = f(x),$$

тобто рівняння, права частина якого залежить лише від незалежної змінної x. Зінтегрувавши ліву та праву частини рівняння, одержимо:

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

де C_1 - довільна стала інтегрування. Зінтегрувавши одержаний вираз ще раз, отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$y(x)=\int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2. \tag{9.7}$$

Таким чином, диференціальне рівняння другого порядку має безліч розв'язків. Як відмічено вище ,щоб знайти частинний розв'язок, необхідно задовольнити початковим умовам, тобто визначити довільні сталі C_1, C_2

Приклад. 9.1. Розв'язати рівняння: $y''=\cos x$.

Розв'язання.

Оскільки $y''=(y')'$, то $(y')'=\cos x$, тобто $d(y')=\cos dx$. Зінтегрувавши обидві частини цього рівняння, ми отримаємо:

$$y'=\sin x+C_1.$$

Таким чином, $dy=(\sin x+C_1)dx$. Зінтегрувавши обидві частини одержаного виразу, ми отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y(x)=-\cos x+C_1x+C_2.$$

Приклад. 9.2.Знайти частинний розв'язок рівняння $y''=3x^2$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

Розв'язання.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок рівняння $y''=3x^2$, який має вигляд (9.7).Треба послідовно проінтегрувати дане рівняння. Беручи до уваги, що $y''=\dfrac{dy'}{dx}$, маємо $\dfrac{dy'}{dx}=3x^2$ або $dy'=3x^2dx$. Беремо інтеграл від обох частин

$\int dy'=\int 3x^2dx+C_1$ або $y'=x^3+C_1$,тобто

$$\frac{dy}{dx}=x^3+C_1$$

Помножимо на dx обидві частини рівняння $dy=\left(x^3+C_1\right)dx$. Інтегруємо

$$\int dy = \int \left(x^3 + C_1 \right) dx + C_2 ,$$

$$y = \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2 .$$

Тепер треба знайти C_1 і C_2, враховуючи початкові умови. За умовою $y(0) = 2$ і $y'(0) = 1$, тоді

$$\begin{cases} 2 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 1 = 0 + C_1. \end{cases}$$

Отже, $C_2 = 2$, $C_1 = 1$. Таким чином, частинний розв'язок

$$y = \frac{x^4}{4} + x + 2 \text{ , або } 4y = x^4 + 4x + 8.$$

2. Диференціальне рівняння, яке припускає зниження порядку, є рівняння вигляду:

$$y'' = f(x, y'). \tag{9.8}$$

Права частина рівняння не містить в собі невідомої функції. В цьому випадку рівняння може бути розв'язане за допомогою підстановки:

$$y' = p(x), \qquad y'' = p'(x). \tag{9.9}$$

Внаслідок застосування цієї підстановки, рівняння(9..8) набуває вигляду:

$$p'(x) = f(x, p), \tag{9.10}$$

тобто його порядок знижується. Отже маємо диференціальне рівняння першого порядку.

Приклад 9.3.Розв'язати рівняння: $y'' = x - \dfrac{y'}{x}$.

Розв'язання.

Оскільки рівняння не містить в собі невідомої функції $y(x)$ (9.8), для його розв'язання використаємо підстановку: $y' = p(x)$ та $y'' = p'(x)$. Одержимо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$p'(x) + \frac{p(x)}{x} = x.$$

Для його розв'зання зробимо заміну $p(x) = u(x)v(x)$:

$$u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = x.$$

Прирівнявши вираз, що стоїть в останьому рівнянні у дужках, до нуля, ми отримаємо:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \text{або} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Зінтегрувавши ліву та праву частини останнього співвідношення отримаємо: $v = 1/x$. Отже, для знаходження невідомої функції $u(x)$ маємо диференціальне рівняння:

$$u'/x = x, \quad \text{тобто} \quad du = x^2 dx.$$

Ми визначили, що функція $u(x)$ дорівнює: $u(x) = x^3/3 + C_1$.
Тепер знайдемо функцію $p(x)$:

$$p(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Оскільки $p(x) = dy/dx$, звідси маємо:

$$dy = (x^2/3 + C_1/x)dx.$$

Зінтегрувавши обидві частини останнього рівняння, отримаємо остаточний розв'язок початкового рівняння:

$$y(x) = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

Приклад 9.4.Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2 y'' = (y')^2$.

Розв'язання.

Маємо рівняння вигляду (9.8), тому застосовуємо заміну $y' = p(x)$, звідки $y'' = p'$. Після цього дане рівняння приймає вигляд $x^2 p' = p^2$. Отримали рівняння з відокремлюваними змінними

$$x^2 \frac{dp}{dx} = p^2, \text{ або } \frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2}.$$

Беремо інтеграл від обох частин

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int \frac{dx}{x^2} - C_1,$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} - C_1, \text{ або } \frac{1}{p} = \frac{1}{x} + C_1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1 + C_1 x}{x}.$$

Звідки

$$p = \frac{x}{1 + C_1 x}.$$

Враховуючи, що $p(x) = y'$, маємо

$$y' = \frac{x}{1 + C_1 x}, \quad \text{або } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 + C_1 x}, \text{ отже } dy = \frac{xdx}{1 + C_1 x}.$$

Інтегруємо обидві частини останьої рівності

$$\int dy = \int \frac{xdx}{1 + C_1 x} + C_2.$$

Для знаходження $\int \frac{xdx}{1+C_1x}$ треба виділити цілу частину, бо підінтегральна функція є неправильний раціональний дріб. Для цього треба поділити чисельник на знаменник.

$$\begin{array}{r|l} x & 1+C_1x \\ \cline{2-2} -\;\; x+\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ \cline{1-1} -\frac{1}{C_1} & \end{array}$$

Інтеграл приймає вигляд

$$\int \frac{xdx}{1+C_1x} = \int \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1\left(C_1x+1\right)} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{C_1}x - \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{C_1} \ln\left|C_1x+1\right| + C_2.$$

Таким чином,

$$y = \frac{1}{C_1}x - \frac{1}{C_1^2}\ln\left|C_1x+1\right| + C_2$$
$$\frac{1}{C_1}\ln\left| C_1y + \sqrt{C_1^2y^2-1} \right| = \pm(x+C_2).$$

3. Рівняння, яке не містить явно аргументу.

$$y'' = f(y, y'). \tag{9.11}$$

Права частина рівняння у цьому разі не містить в собі незалежної змінної x, і розв’язок можна одержати за допомогою підстановки:

$$\begin{cases} y' = p(y) = \dfrac{dy}{dx} \\ y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p'p. \end{cases} \tag{9.12}$$

Підставляючи невідому функцію $p(y)$ та її похідну $p'(y)$ у початкове рівняння (9.11) отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно p, як функції від y:

$$p \cdot p'(y) = f(y, p). \tag{9.13}$$

Приклад 9.5. Розв’язати рівняння:

$$y''y = 1 + y'^2.$$

Розв'язання.

Позначивши $y' = p(y)$ та $y'' = p(y)y' = p(y)p'(y)$ і підставивши ці вирази у початкове рівняння, одержимо: $pp'y = 1 + p^2$ – диференціальне рівняння із відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні, отримаємо:

$$p\frac{dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Звідси:

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = \ln|\,y\,| + \ln C_1 = \ln|\,C_1 y\,|,$$

або

$$1 + p^2 = C_1^2 y^2, \qquad p = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1},$$

або

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm\, dx.$$

Зінтегрувавши обидві частини одержаного рівняння, отримаємо загальний інтеграл початкового диференціального рівняння:

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right| = \pm(x + C_2)$$

9.2. Однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Означення. Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n n -го порядку із сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (9.14)$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ - дійсні числа. Частинним випадком рівняння є рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (9.15)$$

де коефіцієнти *p* та *q* – сталі.

Розглянемо властивості розв'язку рівняння (9.15) і зупинимось на різних випадках знаходження його розв'язків.

Теорема 1. Якщо $y = y_1$, є розв'зком рівняння $y'' + py' + qy = 0$, то і $y = Cy_1$, де C – вільна стала, теж буде розв'язком цього рівняння.

Доведення.

За умовою теореми

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0.$$

Тепер підставимо в рівняння (9.15) $y = Cy_1$,одержимо:

$$Cy_1'' + Cpy_1' + Cqy_1 = C(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0 \quad ,$$

а це і означає,що $y = Cy_1$ також є розв'язком рівняння ()

Теорема 2. Якщо y_1 òà y_2 – розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$, то їх сума теж є розв'язком цього рівняння.

Доведення.

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = (y_1'' + py_1' + qy_2) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0.$$

Тобто, сума $y = y_1 + y_2$ також є розв'язком рівняння.

***Означення*.** Два розв'язки, y_1 òà y_2, називаються лінійно незалежними на множині X, якщо їх відношення не дорівнює сталому числу. У протилежному випадку розв'язки y_1 òà y_2 називаються лінійно залежними.

Теорема 3. Якщо y_1 òà y_2 – незалежні розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$, то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ є загальний розв'язок цього рівняння.

Доведення.

Відповідно до теорем **1** та **2** випливає, що $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ є розв'язком рівняння (9.15) і цей розв'язок залежить від двох вільних сталих C_1, C_2.

Теорема 4. Якщо розв'язки рівняння y_1 та y_2 лінійно залежні, то розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ не буде загальним розв'язком рівняння (9.15). Дійсно, якщо $y_1 = C_3 y_2$,то

$$y = C_3 C_1 y_2 + C_2 y_2 = y_2 (C_3 C_1 + C_2) = C y_2 .$$

Розв'язок $y = C y_2$ є частинним розв'язком рівняння,тому що залежить від однієї вільної сталої C. Таким чином, із теореми **3** можна зробити висновок: щоб знайти загальний розв'язок рівняння (9.15) , треба знайти два його лінійно незалежних розв'язки y_1 та y_2 і тоді $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ буде загальним розв'язком цього рівняння.

9.3. Знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння другого порядку

Будемо шукати частинний розв’язок рівняння

$$y'' + py' + qy = 0$$

у вигляді показникової функції

$$y = e^{kx} .$$

Підставивши у рівняння першу та другу похідні частинного розв'язку, та маючи на увазі, що $e^{kx} \neq 0$, після спрощення отримаємо рівняння:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (9.16)$$

Це рівняння відносно k називається характеристичним рівнянням даного однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Зауважимо, що для того, щоб одержати характеристичне рівняння, достатньо похідні y'', y' та функцію y замінити на відповідні степені величини k, розглядаючи при цьому функцію y як похідну нульового порядку. Розв'язавши характеристичне рівняння, знайдемо значення k:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (9.17)$$

Розглянемо різні випадки розв'язків характеристичного рівняння, від яких залежить вигляд частинного розв'язку:

1. Якщо $\frac{p^2}{4} - q > 0$, корені рівняння дійсні та різні: $k_1 \neq k_2$. У цьому випадку $y_1 = e^{k_1 x}$; $y^2 = e^{k_2 x}$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння. Частинні розв'язки рівняння y_1 і y_2 лінійно незалежн,і тому що їх співвідношення не є сталою величиною. Тоді відповідно теоремі 3 загальний розв'зок рівняння буде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (9.18)$$

Приклад. 9.6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - k - 6 = 0$. Це рівняння має різні дійсні корені: $k_1 = -2; k_2 = 3$. Їм відповідають два частинних розв'язки: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{3x}$. Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Якщо $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то корені характеристичного рівняння дійсні та рівні: $k_1 = k_2 = k$. У цьому випадку $y_1 = e^{kx}$ – частинний розв’язок рівняння. Другий частинний розв'зок знайдемо у вигляді $y_2 = xe^{kx}$: Тоді відповідно теоремі 3 загальний розв'зок рівняння буде

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \quad (9.19)$$

Приклад. 9.7.Знайти загальний розв’язок рівняння: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння цього диференціального рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0$. Його корені: $k_1 = k_2 = 2$. Тобто рівняння має один двократний дійсний корінь. Йому відповідають два частинних розв’язка рівняння: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$. Загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Якщо $\frac{p^2}{4} - q < 0$, рівняння має комплексно- спряжені корені:

$$k_1 = \alpha + \beta_i; \quad k_2 = \alpha - \beta_i,$$

де

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

У цьому випадку частинні розв’язки рівняння мають вигляд:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x; \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta.$$

Тоді відповідно теоремі 3 загальний розв'зок рівняння буде

$$.\, y = e^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \quad (9.20)$$

Приклад. 9.8. Знайти загальний розв’язок рівняння:

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Розв'язання.

Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Воно має комплексні корені: $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Тобто $\alpha = -1$; $\beta = 3$. Цим кореням відповідають два частинних розв’язка:

$$y_1 = e^{-x} \cos 3x, \quad \text{та} \quad y_2 = e^{-x} \sin 3x.$$

Загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Запитання для самодіагностики

1. Які диференціальні рівняння другого порядку допускають зниження порядку?

2. Як розв’язати рівняння $y^{(n)} = f(x)$?

3. Як розв’язати рівняння $F(x, y', y'') = 0$?

4. Як розв’язати рівняння $F(y, y', y'') = 0$?

5. Що називається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку?

6. Яке рівняння називається однорідним?

7. Які функції називаються лінійно незалежними?

8. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами?

9. Як складається характеристичне рівняння?

9. Як записати загальний розв'язок однорідного рівняння, коли

а) корені характеристичного рівняння дійсні і різні;

б) корені характеристичного рівняння дійсні і рівні;

в) корені характеристичного рівняння комплексні.

Приклади і вправи

Приклади.

Розв’язати рівняння, що припускають зниження порядку

9.9. $x^3 y''' = 6$.

Розв'язання.

Запишемо задане рівняння у вигляді $y'' = \dfrac{6}{x^3}$. Послідовно інтегруючи це рівняння, одержуємо

$$y' = 6\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{6}{2x^2} + C_1 = -\frac{3}{x^2} + C_1 \ ,$$

$$y = \int \left(-\frac{3}{x^2} + C_1 \right) dx = \frac{3}{x} + C_1 x + C_2 \ ,$$

Загальний розв'язок рівняння – $y = \dfrac{3}{x} + C_1 x + C_2$.

9.10. $x^2 y'' + xy' = 1$.

Розв'язання.

Рівняння не містить функцію *y*. Тому зробимо підстановку $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Одержимо рівняння

$$x^2 p' + xp = 1 , \quad \text{або} \quad p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Це лінійне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $p = uv$, звідки $p' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{1}{x^2}.$$

З рівняння $v' + \dfrac{v}{x} = 0$ знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x},\ \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\ \ln|v|=-\ln|x|,\ v=\frac{1}{x}.$$

Далі знаходимо *u* з рівняння $u'v=\frac{1}{x^2}$:

$$u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2},\ u'=\frac{1}{x},$$

$$u=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+\ln C_1=\ln(C_1x).$$

Тоді $p(x)=uv=\frac{\ln C_1x}{x}$. Але $y'=p(x)$, тобто

$$y'=\frac{\ln C_1x}{x},\text{ а }y=\int\frac{\ln C_1x}{x}dx=\frac{\ln^2(C_1x)}{2}+C_2.$$

Загальний розв'язок – $y=\frac{\ln^2(C_1x)}{2}+C_2$.

9.11. $2(y')^2=(y-1)y''$.

Розв'язання.

Рівняння не містить незалежної змінної *x*. Тому робимо підстановку $y'=p(y)$, а $y''=p\frac{dp}{dy}$. Задане рівняння приймає вигляд

$$2p^2=(y-1)p\frac{dp}{dy},\text{ або }p\left(2p-(y-1)\frac{dp}{dy}\right)=0,$$

звідки маємо $p=0$, або $2p-(y-1)\frac{dp}{dy}=0$.

З першого рівняння $p=0$, $y'=0$, одержуємо $y=C$. В другому рівнянні поділимо змінні і знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dp}{p}=\frac{2dy}{y-1},\quad \ln|p|=2\ln|y-1|+\ln C_1,$$

$$p=C_1(y-1)^2.$$

Підставляючи в останнє рівняння обернену змінну $p = \frac{dy}{dx}$, одержуємо знову рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \left(y-1\right)^2, \quad \frac{dy}{\left(y-1\right)^2} = C_1 dx .$$

Проінтегруємо:

$$\int \frac{dy}{\left(y-1\right)^2} = C_1 \int dx, \; -\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2$$

або

$(C_1 x + C_2)\left(1-y\right) = 1$ – це загальний інтеграл рівняння.

9.12. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$(1+x^2)\, y'' - 2xy' = 0 ,$$

що задовольняє початкові умови $y\left(0\right) = 0$, $y'\left(0\right) = 3$.

Розв'язання.

Після заміни $y' = p\left(x\right)$, $y'' = p'\left(x\right)$ одержуємо рівняння першого порядку з подільними змінними:

$(1+x^2)\, p' - 2xp = 0$, або $\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2}$.

Звідси

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{1+x^2}, \quad \ln p + \ln C_1 = \ln(1+x^2) ,$$

$C_1 p = 1 + x^2, \quad C_1 y' = 1 + x^2$, а тоді

$$C_1 y = \int (1+x^2) dx = x + \frac{x^3}{3} + C_2 .$$

Знайдемо C_1 і C_2 застосовуючи початкові умови: $y\left(0\right) = 0$, $y'\left(0\right) = 3$. Отже

$$C_1 \cdot 3 = 1 , \; C_1 = \frac{1}{3} ; \;\; C_1 \cdot 0 = C_2 , \; C_2 = 0 .$$

Частинний розв'язок $y = 3\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = 3x + x^3$.

Розв'язати лінійні однорідні рівняння другого порядку:

9.13. Знайти загальний розв'язок рівнянь:

а) $2y'' + 5y' + 2y = 0$; б) $y'' + 2y' + y = 0$;
в) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Розв'язання.
Для кожного з рівнянь складаємо характеристичне рівняння.

а) $2k^2 + 5k + 2 = 0$, $k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$,

$k_1 = -2$, $k_2 = -\frac{1}{2}$; $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$.

б) $k^2 + 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = -1$ $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

в) $k^2 - 4k + 5 = 0$, $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$,

$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

9.14. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = 0,$$

який задовольняє початкові умови $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

Розв'язання.

Корені характеристичного рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ мають значення $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Знайдемо $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$. Для визначення частинного розв'язку використовуємо початкові умови $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$. Одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6\ , \\ C_1 + 3C_2 = 10\ , \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} C_1 = 4\ , \\ C_2 = 2\ . \end{cases}$$

Частинний розв'язок має вигляд

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

Вправи.

Розв’язати рівняння.

9.15. $y'' = x + \sin 2x$.

9.16. $y'' = e^{-\frac{x}{4}}.$

9.17. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x}.$

9.18. $y'' = \sin^2 x$.

9.19. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

9.20. $xy'' - y' = 0$.

9.21. $x^2 y'' + xy' = 1$.

9.22. $2yy'' = (y')^2.$

9.23. $1 + (y')^2 = 2yy''.$

9.24. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

Знайти частинні розв'язки, які задовольняють вказані початкові умови.

9.25. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$ $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2},\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

9.26. $y'' = \sin 3x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{9}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

9.27. $y'' = \cos^2 x$, $\quad y(0) = \dfrac{7}{8}$, $y'(0) = 1$.

9.28. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln \dfrac{y'}{x}\right),$ $\quad y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

9.29. $y''\left(1 + x^2\right) = 2xy'$, $\quad y(1) = \dfrac{1}{3},\ y'(1) = 2.$

9.30. $y''y^3 = 1,$ $\quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1.$

9.31. $2y\left(y'\right)^3 + y'' = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -3.$

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

9.32. $y'' + y' - 2y = 0$.

9.33. $y'' - 9y = 0$.

9.34. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

9.35. $y'' + 3y' = 0$.

9.36. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

9.37. $y'' + 4y = 0$.

9.38. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

9.39. $y'' + 4y' + 29y = 0$.

9.40. $4y'' + 4y' + y = 0$.

9.41. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Знайти частинні розв'язки рівнянь при вказаних початкових умовах.

9.42. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

9.43. $y'' - 5y' + 6y = 0$. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

9.44. $y'' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

9.45. $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

9.46. $9y'' + y = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

9.47. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

9.48. $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$.

9.49. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Глава 10. Розв’язання неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

10.1. Структура розв'язку лінійних неоднорідних рівнянянь.

***Означення*.** Лінійним неоднорідим рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називається

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (10.1)$$

де коефіцієнти p òà q – сталі. Для знаходження загального розв’язку цього рівняння використаємо теорему.

Теорема. Загальний розв'язок рівняння знаходиться за формулою

$$y(x) = \tilde{y} + \bar{y}. \qquad (10.2)$$

де $\bar{y}$ – загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння, $\tilde{y}$ – частинний розв’язок, визначений виглядом правої частини неоднорідного рівняння, тобто функції $f(x)$.

Доведення.

Нехай $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, а $\tilde{y}$ – деякий частиний розв’язок того же рівняння, але із правою частиною. Таким чином:

$$\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0 \quad \text{і} \quad \tilde{y}'' + p\tilde{y}' + q\tilde{y} = f(x). \qquad (10.3)$$

Склавши почленно рівняння (10.3) і врахувавши що похідна суми дорівнює сумі похідних, одержимо:

$$(\bar{y} + \tilde{y})'' + p(\bar{y} + \tilde{y})' + q(\bar{y} + \tilde{y}) = f(x). \qquad (10.4)$$

Звідси видно, що функція $y(x) = \tilde{y} + \bar{y}$ буде розв’язком неоднорідного диференціального рівняння. Цей розв’язок є загальним, оскільки в нього входять дві незалежні довільні сталі C_1 і C_2.

Теорему доведено.

Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння треба:

1) знайти загальний розв'зок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння;
2) знайти будь-який частинний розв'зок $\tilde{y}$ неоднорідного рівняння;
3) знайдені розв'язки додати, знайдена сума і буде загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

10.2. Розв'язок лінійних неоднорідних рівнянь із спеціальними правими частинами.

Розглянемо декілька випадків знаходження частинних розв'зків рівняння із спеціальними правими частинами.

1. Нехай у правій частині рівняння функція $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-ого степеня.

У цьому випадку можливі наступні ситуації:

а) число α не являється коренем характеристичного рівняння.

Тоді частинний розв’язок знаходиться у вигляді:

$$\tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n)e^{\alpha x} \tag{10.5}$$

де $Q_n(x)$ – повний многочлен того же степеня, що і $P_n(x)$. Коефіцієнти цього многочлена невідомі і знаходяться при підстановці розв’язку у неоднорідне рівняння внаслідок прирівнювання коефіцієнтів, що стоять при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівняння (10.1). В цьому полягає суть метода невизначених коефіцієнтів;

б) число α співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння:

$$\alpha = k_1 \neq k_2.$$

Тоді частинний розв’язок знаходиться у вигляді:

$$\tilde{y} = x Q_n(x) e^{\alpha x}. \qquad (10.6)$$

в) число α співпадає з двократним коренем характеристичного рівняння:

$$\alpha = k_1 = k_2.$$

Тоді частинний розв'язок знаходиться у вигляді:

$$\tilde{y} = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}. \qquad (10.7)$$

Приклад. 10.1. Знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{2x},$$

який задовольняє початковим умовам: $y(0) = -1/3$; $y'(0) = 0$.

Визначемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, тому його загальний розв'язок складається із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Складемо його характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

Це рівняння має різні дійсні корені: $k_1 = -1$; $k_2 = 3$, яким відповідають два частинних роз'язки однорідного рівняння: $y_1 = e^{-x}$ і $y_2 = e^{3x}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Для знаходження частинного розв’язку неоднорідного рівняння застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Будемо шукати частинний розв’язок неоднорідного рівняння у вигляді: $\tilde{y} = Ae^{2x}$.

Для знаходження невідомого коефіцієнта A підставимо функцію $\tilde{y} = Ae^{2x}$ та її похідні $\tilde{y}' = 2Ae^{2x}$ та $\tilde{y}'' = 4Ae^{2x}$ у вихідне неоднорідне рівняння. Маємо: $4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x}$, звідки $A = -1/3$.

Таким чином, загальний розв’язок неоднорідного рівняння запишеться так:

$$y(x) = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 1/3e^{2x}.$$

Знайдемо частинний розв’язок неоднорідного рівняння при початкових умовах: $y(0) = -1/3$, $y'(0) = 0$. Підставимо: $x = 0$, $y = -1/3$, $y' = 0$ у виразі для y та y', якщо $y' = -C_1 e^{x} + 3C_2 e^{3x} - 2/3e^{2x}$, одержимо:

$$\begin{cases} -1/3 = C_1 + C_2 - 1/3 \\ 0 = -C_1 + 3C_2 - 2/3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -\tilde{N}_1 + 3\tilde{N}_2 = 2/3 \end{cases}.$$

Звідки: $C_1 = -1/6$, $C_2 = 1/6$.

Шуканий частинний розв’язок має вигляд:

$$y(x) = -1/6e^{-x} + 1/6e^{3x} - 1/3e^{2x}.$$

Приклад. 10.2. Найти розв'язок рівняння $2y'' - 5y' + 3y = \left(x^2 + 1\right)e^{x}$.

Розв’язання.

Для знаходження розв'язку неоднорідного рівняння знайдемо спочатку загальний розв'язок однорідного рівняння, а для цього складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$2k^2 - 5k + 3 = 0.$$

Знайдемо його корені

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = \frac{3}{2}.$$

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{\frac{3}{2}x}.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння, де $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x$, тобто $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$. Враховуючи, що $\alpha=1$ і співпадає з коренем характеристичного рівняння, складемо частинний розв'язок:

$$y=x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x \quad \text{або} \quad y=\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x.$$

Для знаходження A, B, C підставляємо $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в дане рівняння, де

$$\tilde{y}'=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)e^x+\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x,$$

$$\tilde{y}''=(6Ax+2B)e^x+\left(3Ax^2+2Bx+C\right)e^x+$$
$$+\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x+\left(3Ax^2+2Bx+C\right)e^x=$$
$$=(6Ax+2B)e^x+\left(6Ax^2+4Bx+2C\right)e^x+$$
$$+\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x.$$

Тоді, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x ,одержимо:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} -3A=1, \\ 12A-2B=0, \\ 4B-C=1. \end{cases}$$

Розв'язком системи рівнянь буде: $A=-\dfrac{1}{3}$, $B=-2$, $C=-9$.

Частинний розв'язок рівняння набуває вигляду

$$\tilde{y}=\left(-\frac{x^3}{3}-2x^2-9x\right)e^x,$$

а загальний розв'язок даного рівняння

$$y=C_1e^x+C_2e^{\frac{3x}{2}}-\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+9x\right)e^x.$$

Якщо в правій частині рівняння $y''+py'+qy=f(x)$, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то частинний розв'язок цього рівняння може бути знайдений, як сума частинних розв'язків рівнянь:

$$\tilde{y}_1''+p\tilde{y}_1'+q\tilde{y}_1=f_1(x)$$

та

$$\tilde{y}_2''+p\tilde{y}_2'+q\tilde{y}_2=f_2(x)$$

тобто $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$.

Приклад.10.3. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''-6y'+9y=3x-8e^x$.

Записавши характеристичне рівняння: $k^2-6k+9=0$, знаходимо його корені: $k_1=k_2=3$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}.$$

Права частина даного рівняння є сума $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ де $f_1(x)=3x$, $f_2(x)=-8e^x$,отже частинний розв'язок $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$, а саме

$$\tilde{y}=Ax+B+Ce^x.$$

Взявши першу та другу похідні від функції $\tilde{y}$ та підставивши їх і саму функцію в початкове рівняння, отримаємо:

$$Ce^x-6(A+Ce^x)+9(Ax+B+Ce^x)=3x-8e^x.$$

Прирівняємо коефіцієнти у подібних членів обох частин одержаного співвідношення. Отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases}9A=3,\\4C=-8,\\9B-6A=0.\end{cases}$$

розв’язком якої є: $A=1/3$, $C=-2$, $B=2/9$. Отже, $\tilde{y}=1/3x+2/9-2e^{x}$. Таким чином, загальний розв'зок буде:

$$y=C_1 e^{3x}+C_2 xe^{3x}+1/3x+2/9-2e^{x}$$

2. Розглянемо рівняння,що має правою частиною:

$$f(x)=e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x), \tag{10.8}$$

де a,b – сталі. При такому вигляді функції $f(x)$ можуть бути два випадки:

а) $\alpha\pm\beta i$ не являються коренями характеристичного рівняння.

Тоді частинний розв’язок має вигляд:

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x), \tag{10.9}$$

де A,B визначаються внаслідок прирівнювання коефіцієнтів при $\cos\beta x$ і $\sin\beta x$ в лівій та правій частинах рівняння (10.1) при підстановці в це рівняння частинного розв’язку $\tilde{y}$ та його першої та другої похідних;

б) $\alpha\pm\beta i$ співпадає з коренями характеристичного рівняння. В цьому випадку:

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}x(A\cos\beta x+B\sin\beta x). \tag{10.10}$$

При знаходженні частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння пропонуємо користуватися таблицею 1.

Таблиця 1.Частинні розв'язки неднорідного рівняння.

Права частина рівняння $ay''+by'+cy=f(x)$	**Корені характеристичного рівняння** $ak^2+bk+c=0$	**Вигляд частинного розв'язку**
$f(x)=P_n(x)$, де $P_n(x)$ – багаточлен степеня n	а) число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$y^*=Q_n(x)$ $Q_n(x)$ – багаточлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами
	б) число 0 є коренем кратності r характеристичного рівняння	$y^*=x^rQ_n(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$	а) число α не є коренем характеристичного рівняння	$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)$

	б) число α є коренем кратності r характеристичного рівняння	$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$
$f(x) = P_n(x)\cos\beta x +$ $+Q_n(x)\sin\beta x$	а) число βi не є коренем характеристичного рівняння	$y^* = U_n(x)\cos\beta x +$ $+V_n(x)\sin\beta x,$ де $U_n(x)$ і $V_n(x)$ – багаточлени з невизначеними коефіцієнтами
	б) число βi є коренем характеристичного рівняння	$y^* = x\left(U_n(x)\cos\beta x +\right.$ $\left.+V_n(x)\sin\beta x\right)$.
$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x +\right.$ $\left.+Q_n(x)\sin\beta\right)$	а) число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння	$y^* = e^{\alpha x}\left(U_n(x)\cos\beta x +\right.$ $\left.+V_n(x)\sin\beta x\right)$.
	б) число $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння	$y^* = e^{\alpha x} x\left(U_n(x)\cos\beta x +\right.$ $\left.+V_n(x)\sin\beta x\right)$.

Приклад.10.4. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + y' - 6y = \cos 2x - 3\sin 2x.$$

Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Складемо його характеристичне рівняння:

$$k^2 + k - 6 = 0.$$

Це рівняння має різні дійсні корені: $k_1 = 2; k_2 = -3$, яким відповідають два частинних роз'язки однорідного рівняння: $y_1 = e^{2x}$ і $y_2 = e^{-3x}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

В правій частині даного рівняння функція $f(x) = \cos 2x - 3\sin 2x$ є функцією виду $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$ з коефіцієнтами

$(\alpha = 0, a = 1, b = -3, \beta = 2)$, отже ,частинний розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо за формулою:

$$\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x\,.$$

Знайдемо похідні:

$$\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$
$$\tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

В задане рівняння підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}'\,\text{òà}\,\tilde{y}''$, одержимо

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 6A\cos 2x - 6B\sin 2x = \\ = \cos 2x - 3\sin 2x$$ або

$$(2B - 10A)\cos 2x - (10B + 2A)\sin 2x = \cos 2x - 3\sin 2x.$$

Звідси одержуємо систему рівнянь відносно коефіцієнтів A, B.

$$\begin{cases} 2B - 10A = 1, \\ 10B + 2A = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо

$$A = -\frac{1}{26},\ B = \frac{4}{13}.$$

Отже, частинний розв'язок даного рівняння буде

$$\tilde{y} = -\frac{1}{26}\cos 2x + \frac{4}{13}\sin 2x\,.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{26}\left(\cos 2x - 8\sin 2x\right).$$

Приклад 10.5. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y = 2xe^{x}\left(\cos x - \sin x\right)$.

Розв’язання.

Дане рівняння є неоднорідним. Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння. Складемо характеристичне рівняння

$$k^{2} - 2 = 0,\ \ k_1 = -\sqrt{2},\ \ k_2 = \sqrt{2}.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\overline{y} = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння, де $f\left(x\right) = 2xe^{x}\left(\cos x - \sin x\right)$ тобто вигляду

$$f\left(x\right) = e^{\alpha x}\left(P_n\left(x\right)\cos\beta x + Q_m\left(x\right)\sin\beta\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді(табл.1):

$$\tilde{y} = e^{x}\left(\left(Ax + B\right)\cos x + \left(Cx + D\right)\sin x\right).$$

Для знаходження A, B, C, D в дане рівняння підставляємо $\tilde{y}$, $\tilde{y}\,'$, $\tilde{y}\,''$, де

$$\tilde{y}\,' = e^{x}\left(\left(Ax + B + A + Cx + D\right)\cos x + \left(Cx + D - Ax - B + C\right)\sin x\right).$$

$$\tilde{y}\,'' = e^{x}\left(\left(2Cx + 2A + 2C + 2D\right)\cos x + \left(-2Ax - 2A - 2B + 2C\right)\sin x\right).$$

Маємо тотожність,

$$2e^{x}\left(\left(Cx + A + C + D\right)\cos x - \left(Ax + A + B - C\right)\sin x\right) -$$
$$-2e^{x}\left(\left(Ax + B\right)\cos x + \left(Cx + D\right)\sin x\right) \equiv 2xe^{x}\left(\cos x - \sin x\right).$$

Або

$$\left(Cx + A + C + D - Ax - B\right)\cos x +$$
$$+\left(-Ax - A - B + C - Cx - D\right)\sin x \equiv x\left(\cos x - \sin x\right),$$

$$\left(\left(C - A\right)x + A - B + C + D\right)\cos x +$$
$$+\left(\left(-A - C\right)x - A - B - D + C\right)\sin x \equiv x\left(\cos x - \sin x\right).$$

Складемо систему рівнянь, для цього прирівняємо коефіцієнти у подібних членів обох частин одержаного співвідношення.

$$\begin{array}{l|l} x\cos x & \\ \cos x & \\ x\sin x & \\ \sin x & \end{array}\begin{cases} C-A=1, \\ A-B+C+D=0, \\ -A-C=-1, \\ -A-B+C-D=0. \end{cases}$$

Додаючи до першого рівняння третє, маємо $A=0$. Тоді з першого рівняння одержуємо $C=1$. Далі друге і четверте приймають такий вигляд

$$\begin{cases} -B+D=-1, \\ -B-D=-1. \end{cases}$$

Звідки $B=1$, а $D=0$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\tilde{y}=e^{x}\left(\cos x+x\sin x\right),$$

а загальний розв'язок даного рівняння

$$y=C_1e^{-\sqrt{2}x}+C_2e^{\sqrt{2}x}+e^{x}\left(\cos x+x\sin x\right)$$

Приклад 10.6. Знайти розв'язок рівняння $y''+9y=\cos 3x$.

Розв'язання.

Маємо неоднорідне рівняння. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає однорідному рівнянню

$$k^2+9=0.$$

Його корені $k_{1,2}=\pm 3i$. За формулою загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$\tilde{y}=x\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right),\ \text{бо}$$

$\alpha\pm\beta i$, де $\alpha=0$, а $\beta=3$, тобто $\pm 3i$ співпадає з коренем характеристичного рівняння.

Для знаходження A, B підставляємо $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в рівняння, де

$$\tilde{y}' = A\cos 3x + B\sin 3x + x\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}'' &= -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x + \\ &+ x\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right) = \\ &= -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right).\end{aligned}$$

Одержуємо тотожність, коли розв'язок підставляємо в рівняння, а саме

$$\begin{aligned}&-6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right) + \\ &+ 9x\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) \equiv \cos 3x.\end{aligned}$$

або

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x \equiv \cos 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$ зліва і справа.

Отже, маємо систему рівнянь для знаходження A, B.

$$\begin{array}{l|l}\cos 3x & \multirow{2}{*}{$\begin{cases}6B = 1, \\ -6A = 0.\end{cases}$} \\ \sin 3x & \end{array}$$

Звідки $A = 0$, $B = \dfrac{1}{6}$. Тоді $\tilde{y} = \dfrac{1}{6}x\sin 3x$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{x}{6}\sin 3x.$$

10.3. Розв' язання рівняння методом варіації довільних сталих.

Якщо права частина $f(x)$ лінійного неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ не має спеціального вигляду, то для розв'язання такого рівняння застосовують метод варіації довільних сталих (*метод Лагранжа*).

. Для однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$ знаходиться загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \ , \tag{10.11}$$

де y_1 і y_2 – його частинні розв'язки.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{10.12}$$

де функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \tag{10.13}$$

Приклад 10.7. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + y = \mathrm{tg}\, x$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \ ,$$

де $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ – два його лінійно незалежні розв'язки.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо згідно з методом варіації довільних (10.11)сталих у вигляді

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x \ . \tag{10.14}$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \mathrm{tg}\, x. \end{cases}$$

Для розв'язання системи можна застосувати формули Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \sin x,$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \; C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \sin x .$$

Інтегруючи одержані рівності

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{\cos x}{1+\sin x}\right| + \sin x + C_3 ,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_4$$

і підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в співвідношення (10.14), одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = C_3 \cos x + C_4 \sin x + \cos x\left(\ln\left|\frac{\cos x}{1+\sin x}\right| + \sin x\right) - \cos x \sin x .$$

10.4. Системи диференціальних рівнянь

Означення.Сукупність n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з n невідомими функціями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ від однієї незалежної змінної x:

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = q_1, \\ y_2' + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = q_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = q_n, \end{cases} \qquad (10.15)$$

де коефіцієнти a_{ik} та q_i ,$(i, k = \overline{1, n}$)– функції від x, називається нормальною системою лінійних диференціальних рівнянь.

Якщо коефіцієнти системи (10.15) сталі, то така система називається системою диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Якщо

$q_i = 0\left(i=\overline{1,n}\right)$, то система називається однорідною, у противному разі – неоднорідною.

Означення. Загальним розв'язком системи (10.15) називається сукупність n функцій від незалежної змінної x та n довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\begin{array}{l} y_1 = y_1\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \\ y_2 = y_2\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = y_n\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \end{array} \qquad (10.16)$$

що задовольняють усім рівнянням системи.

Якщо незалежну змінну позначити через t, то система набуває вигляду

$$\dot{y}_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_k = q_k \quad \left(k=\overline{1,n}\right), \qquad (10.17)$$

де $\dot{y}_k$ – похідна по t.

Задача Коші. Знайти такий розв'язок (10.16) системи (10.15), який задовольняє умовам $y_1\left(x_0\right)=b_1$, $y_2\left(x_0\right)=b_2$, ... , $y_n\left(x_0\right)=b_n$.

Одним із способів розв'язку системи є **метод виключення.**

Методом виключення $(n-1)$ невідомих функцій система (10.15) може бути зведена до диференціального рівняння n-го порядку відносно однієї з невідомих функцій.

Розглянемо другий метод розв'язування системи диференціальних рівнянь.

Нехай задано систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11} y + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ \dot{y}_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dot{y}_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n, \end{cases} \qquad (10.18)$$

де a_{ij} – сталі величини, $y_i = y_i(t)$ – невідомі функції $\left(i, j=\overline{1,n}\right)$.

Систему (10.18) можна записати так:

$$\dot{Y} = A \cdot Y,$$

де

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Частинний розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{kt}, \; y_2 = \alpha_2 e^{kt}, \; ..., \; y_n = \alpha_n e^{kt}.$$

Підставляючи їх у систему (10.18), отримаємо систему лінійних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ \quad a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \qquad (10.19)$$

Визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix}.$$

Якщо k таке, що визначник $\Delta \neq 0$, , то система (10.19) має тільки тривіальний розв'язок і тоді:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0.$$

Нетривіальний розв'язок система(10.19) буде мати при таких значеннях k, при яких визначник системи дорівнює нулю.

Отже, для визначення k ми приходимо до рівняння n-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.20)$$

Це рівняння називається характеристичним рівнянням даної системи **,** його корені називаються коренями характеристичного рівняння.

Розглянемо тільки випадок, коли ***корені характеристичного рівняння дійсні і різні*** (інші випадки не розглядаються через їх складність).

Для кожного кореня k_i записується система (10.19) і визначаються коефіцієнти

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}.$$

Один з них довільний, його можна вважати рівним одиниці.

Тоді одержуємо розв'язок системи:

для k_1:

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t},\ y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t},\ \ldots,\ y_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

для k_2:

$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t},\ y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t},\ \ldots,\ y_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

… … … … … … … … … … … … …

для k_n:

$$y_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t},\ y_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t},\ \ldots,\ y_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

А загальний розв'язок системи:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ y_2 &= C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots, \\ y_n &= C_1 \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}, \end{aligned} \tag{10.21}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

.

Приклад 10.8. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y + 4z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 5z. \end{cases}$$

Розв'язання.

Маємо нормальну систему лінійних диференціальних рівнянь. Для розв'язування застосуємо метод виключення.

Продиференціюємо перше рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx}.$$

Враховуючи друге рівняння, маємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} + 4(4y + 5z) \quad \text{або}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} + 16y + 20z.$$

З першого рівняння системи

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right),$$

тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} + 16y + 5\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right), \text{ або}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

Отримали однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння якого

$$k^2 - 10k + 9 = 0.$$

Корені цього рівняння $k_1 = 1,\ k_2 = 9$.

Звідки загальний розв'язок

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

z знайдемо з першого рівняння системи, але спочатку знайдемо

$$\frac{dy}{dx} = C_1e^x + 9C_2e^{9x}.$$

$$z = \frac{1}{4}\left(C_1e^x + 9C_2e^{9x} - 5C_1e^x - 5C_2e^{9x}\right) \text{ або}$$

$$z = \frac{1}{4}\left(4C_2e^{9x} - 4C_1e^x\right) = C_2e^{9x} - C_1e^x.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи:

$$y = C_1e^x + C_2e^{9x},$$

$$z = -C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

.

Приклад 10.9. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Для знаходження розв'язку цієї системи розглянемо інший метод. Частинні розв'язки шукатимемо у вигляді $y_1 = \alpha_1 e^{kt}$, $y_2 = \alpha_2 e^{kt}$.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$(2-k)(4-k) - 3 = 0 \text{ або } k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корені рівняння $k_1 = 1$, $k_2 = 5$.

При $k_1 = 1$ система **()** набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Звідки

$$\alpha_1^{(1)} = -\alpha_2^{(1)}.$$

Покладаючи $\alpha_2^{(1)} = 1$, отримаємо $\alpha_1^{(1)} = -1$.
Тоді

$$y_1^{(1)} = -e^t, \; y_2^{(1)} = e^t.$$

При $k_2 = 5$ система **()** набуває вигляду

$$\begin{cases} -3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Звідки

$$3\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}.$$

Покладаючи $\alpha_1^{(2)} = 1$, отримаємо $\alpha_2^{(2)} = 3$.
Тоді

$$y_1^{(2)} = e^{5t}, \; y_2^{(2)} = 3e^{5t}.$$

Таким чином, маємо фундаментальну систему розв’язків:

$$y_1^{(1)} = -e^t, \; y_2^{(1)} = e^t,$$

$$y_1^{(2)} = e^{5t}, \; y_2^{(2)} = 3e^{5t}.$$

Отже, загальний розв'язок системи

$$y_1 = -C_1 e^t + C_2 e^{5t},$$

$$y_2 = C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Випадки, коли корені характеристичного рівняння дійсні і однакові, а також уявні, розглядати не будемо. В цих випадках простіше використовувати метод виключення.

Запитання для самодіагностики.

1. Сформулювати теорему про загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.
2. Який загальний вигляд лінійного неоднорідного рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами?

3. Яка структура загального розв'язку неоднорідного рівняння?

4. Як знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння, якщо права частина має вигляд:

а) $P_n(x)e^{\alpha x}$;

б) $M\cos\beta x + N\sin\beta x$;

в) $e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta\right)$?

5. Як знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння, якщо права частина $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$?

6. В чому полягає метод варіації .довільної сталої при розв'язанні диференціального рівняння другого порядку?

7. Дати поняття нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь.

8. Що називається загальним розв’язком системи?

9. Сформулювати задачу Коші.

10. Пояснити метод виключення розв'язку системи диференціальних рівнянь.

11. Пояснити метод характеристичного рівняння для знаходження розв'язку систем диференціальних рівнянь.

Приклади та вправи.

Приклади.

10.10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' = x^2 - x .$$

Розв'язання.

Як було сказано, $y = \overline{y} + \tilde{y}$.

а). Спочатку знаходимо $\overline{y}$. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Отже,

$$\overline{y} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

б). Знайдемо $\tilde{y}$. У даному випадку права частина –многочлен другого степеня і $\alpha = 0$ є коренем характеристичного рівняння. Тому згідно з табл. 1 частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)\,x = Ax^3 + Bx^2 + Cx\ ,$$

де A, B, C – невизначені коефіцієнти.

Знаходимо похідні

$$(\tilde{y})' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad (\tilde{y})'' = 6Ax + 2B\ .$$

Підставляємо їх в задане рівняння і одержуємо рівність

$$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2 - x\ .$$

Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях *x*:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} -6A = 1, \\ 6A - 4B = -1, \\ 2B - 2C = 0, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} A = -\dfrac{1}{6}, \\ B = 0, \\ C = 0. \end{array}\right.$$

Отже, $\tilde{y} = -\dfrac{1}{6}x^3$, а $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \dfrac{1}{6}x^3.$

10.11. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = 12xe^{-2x}.$$

Розв'язання.

а). Знаходимо $\bar{y}$. Характеристичне рівняння $k^2 + 3k - 10 = 0$ має корені $k_1 = -5$, $k_2 = 2$:

$$\bar{y} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}.$$

б). Частинний розв'язок $\tilde{y}$ шукаємо, враховуючи вигляд правої частини і той факт, що $\alpha = -2$ не є коренем характеристичного рівняння у вигляді

$$\tilde{y} = \left(Ax + B\right)e^{-2x}..$$

Далі знаходимо $(\tilde{y})'$ і $(\tilde{y})''$:

$$(\tilde{y})' = Ae^{-2x} - 2(Ax+B)e^{-2x} = (-2Ax + A - 2B)e^{-2x},$$

$$(\tilde{y})'' = -2Ae^{-2x} - 2(-2Ax + A - 2B)e^{-2x} =$$
$$= (4Ax - 4A + 4B)e^{-2x}.$$

Підставляємо одержані вирази $\tilde{y}$, $(\tilde{y})'$ і $(\tilde{y})''$ в задане рівняння, скорочуємо його на e^{-2x} і спрощуємо:

$$-12Ax - A - 12B = 12x .$$

Звідси

$$A = -1 ,\ \ B = \frac{1}{12} .$$

Тоді

$$\tilde{y} = \left(\frac{1}{12} - x\right)e^{-2x},$$

а $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{12} - x\right)e^{-2x}$ – загальний розв'язок.

10.12. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 8y' + 16y = e^{4x}.$$

Розв'язання.

а). Знаходимо $\bar{y}$.. Характеристичне рівняння $k^2 - 8k + 16 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 4$.

$$\bar{y} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

б). Оскільки права частина рівняння має вигляд $f(x) = e^{4x}$ і $\alpha = 4$ є двократним коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $\tilde{y}$ треба шукати у вигляді

$$\tilde{y} = Ax^2 e^{4x},$$

де *A* – коефіцієнт, який тепер треба визначити.

Знаходимо $(\tilde{y})'$ і $(\tilde{y})''$.

$$(\tilde{y})' = 2Axe^{4x} + 4Ax^2e^{4x} = (4Ax^2 + 2Ax)e^{4x},$$

$$(\tilde{y})'' = \left(2A + 8Ax\right)e^{4x} + 4(2Ax + 4Ax^2)e^{4x} =$$

$$= (16Ax^2 + 16Ax + 2A)e^{4x}.$$

Підставляючи вирази для $\tilde{y}$, $(\tilde{y})'$ і $(\tilde{y})''$ в задане рівняння, скорочуючи його частини на e^{4x}, одержуємо $A = \frac{1}{2}$.

Тоді

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^{4x}, \text{ а}$$

$$y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x} - \text{загальний розв'язок.}$$

10.13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x .$$

Розв'язання.

а) Характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ має корені $k_1 = 2$ і $k_2 = 3$. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

б) Частинний розв'язок $\tilde{y}$, враховуючи вигляд правої частини рівняння, шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = A\cos 3x + B\sin 3x .$$

Для визначення коефіцієнтів A і B знаходимо $(\tilde{y})'$, $(\tilde{y})''$ і підставляємо їх разом з $\tilde{y}$ у задане рівняння.

Отже,

$$(\tilde{y})' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x ,$$

$$(\tilde{y})'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x ,$$

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 15A\sin 3x - 15B\cos 3x +$$

$$+6A\cos 3x + 6B\sin 3x = 13\sin 3x .$$

Порівняємо коефіцієнти при $\sin 3x$ і $\cos 3x$. Одержимо систему рівнянь

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x & \left\{\begin{array}{l} -3A-15B=0, \\ 15A-3B=13, \end{array}\right. \\ \sin 3x & \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{5}{6}, \\ B=-\dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Частинний розв'язок

$$\tilde{y}=\frac{5}{6}\cos 3x-\frac{1}{6}\sin 3x .$$

Загальний розв'язок

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{5}{6}\cos 3x-\frac{1}{6}\sin 3x .$$

10.14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-4y'+3y=e^{5x},$$

що задовольняє початкові умови $y(0)=3$, $y'(0)=9$.

Розв'язання.

а) Характеристичне рівняння $k^2-4k+3=0$ має корені $k_1=1$ і $k_2=3$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}.$$

б) Частинний розв'язок неоднорідного рівняння з урахуванням вигляду його правої частини і коренів характеристичного рівняння треба шукати у вигляді

$$\tilde{y}=Ae^{5x},$$

Знаходимо $(\tilde{y})'$ і $(\tilde{y})''$:

$$(\tilde{y})'=5Ae^{5x},\quad (\tilde{y})''=25Ae^{5x}.$$

Підставляємо похідні $(\tilde{y})'$ $(\tilde{y})''$ і $\tilde{y}$ в задане рівняння, скорочуємо на e^{5x} і одержуємо $A=\dfrac{1}{8}$. Отже, $\tilde{y}=\dfrac{1}{8}e^{5x}$, а

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{8}e^{5x}.$$

Довільні сталі C_1 і C_2 знаходимо, використовуючи початкові умови $y(0)=3$, $y'(0)=9$.

Знайдемо спочатку

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} + \frac{5}{8} e^{5x}.$$

Далі

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{8}, \quad y'(0) = C_1 + 3C_2 + \frac{5}{8}.$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{8} = 3, \\ C_1 + 3C_2 + \frac{5}{8} = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{8}, \\ C_2 = \frac{11}{4}. \end{cases}$$

Розв'язок заданого рівняння, що задовольняє початкові умови, має вигляд

$$y = \frac{1}{8} e^x + \frac{11}{4} e^{3x} + \frac{1}{8} e^{5x}.$$

10.15. Вказати вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$y'' + y = xe^x + 2\cos x.$$

Розв'язання.

Розв’язуємо однорідне рівняння $y'' + y = 0$:

$$k^2 + 1 = 0, \; k = \pm i.$$

Використовуючи теорему про накладення розв’язків, коли права частина є сумою декількох функцій спеціального вигляду, треба шукати частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння у вигляді

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = (Ax + B)e^x + x(A\sin x + B\cos x).$$

10.16. Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x ,$$

де $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ – два його лінійно незалежні розв'язки.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо згідно з методом варіації довільних сталих у вигляді

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x .$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0, \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Для розв'язання системи можна застосувати формули Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1 ,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}=-tgx , \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}=1 ,$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-tgx , \quad C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1 .$$

Інтегруючи одержані рівності

$$C_1(x)=-\int tgxdx=\ln|\cos x|+C_1 ,$$

$$C_2(x)=\int dx=x+C_2$$

і підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$,в вираз $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$. одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x .$$

.

10.17.Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$$

Розв’язання.

Маємо неоднорідну систему. Розв'яжемо її методом виключення.

Перше рівняння продиференціюємо, маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + e^t + e^{-t} \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} - x = e^t + e^{-t}.$$

Отримали неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок його

$$x = x_0 + \overline{x}.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 1 = 0,$$

корені якого $k_1 = -1$, $k_2 = 1$ (дійсні і різні).

Тоді

$$x_0 = C_1 e^{-t} + C_2 e^t.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Враховуючи, що права частина $f(t) = e^t + e^{-t}$, $\alpha_1 = 1$ співпадає з коренем $k_2 = 1$, а $\alpha_2 = -1$ співпадає з коренем $k_1 = -1$, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\overline{x} = Ate^t + Bte^{-t}.$$

Для знаходження A і B розвязок підставляємо в рівняння, а для цього шукаємо похідні $\overline{x}'$ і $\overline{x}''$.

$$\overline{x}' = Ae^t + Ate^t + Be^{-t} - Bte^{-t},$$

$$\overline{x}'' = Ae^t + Ae^t + Ate^t - Be^{-t} - Be^{-t} + Bte^{-t} =$$
$$= 2Ae^t + Ate^t - 2Be^{-t} + Bte^{-t}.$$

Тепер отримаємо тотожність

$$2Ae^{t}+Ate^{t}-2Be^{-t}+Bte^{-t}-Ate^{t}-Bte^{-t}\equiv e^{t}+e^{-t}.$$

або

$$2Ae^{t}-2Be^{-t}\equiv e^{t}+e^{-t}.$$

Звідки, прирівнюючи коефіцієнти при e^{t} і e^{-t} зліва і справа, маємо

$$2A=1,\quad A=\frac{1}{2},$$

$$-2B=1,\quad B=-\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\overline{x}=\frac{1}{2}te^{t}-\frac{1}{2}te^{-t},\text{ а}$$

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{t}+\frac{1}{2}te^{t}-\frac{1}{2}te^{-t}=C_1e^{-t}+C_2e^{t}+\frac{t}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right).$$

З першого рівняння системи знайдемо y, а для цього знайдемо x'.

$$y=x'=-C_1e^{-t}+C_2e^{t}+\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)+\frac{t}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right).$$

Таким чином, загальний розвязок системи

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{t}+\frac{t}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right),$$

$$y=-C_1e^{-t}+C_2e^{t}+\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)+\frac{t}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right).$$

10.18. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{yz},\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x}{y^2}.\end{cases}$$

Розв’язання.

Поділивши перше рівняння на друге, матимемо

$$\frac{dy}{dz}=\frac{y}{z} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Після інтегрування маємо

$$\ln|y|=\ln|z|-\ln|C_1| \quad \text{або} \quad z=C_1y.$$

Підставляємо z в перше рівняння, отримаємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{C_1y^2}, \text{ звідки}$$

$$C_1y^2dy=xdx.$$

Після інтегрування маємо

$$C_1\frac{y^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{C_2}{3} \quad \text{або} \quad C_1y^3=\frac{3}{2}x^2+C_2.$$

Враховуючи, що $z=C_1y$ або $y=\dfrac{z}{C_1}$, маємо

$$zy^2=\frac{3}{2}x^2+C_2.$$

Таким чином, розв'язок даної системи

$$z=C_1y,$$

$$zy^2=\frac{3}{2}x^2+C_2.$$

10.19.Знайти частинний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0, \\ \dfrac{dy}{dt}-x+y=0, \end{cases}$$

що задовольняє початковим умовам $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

Розв’язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок даної системи.

Диференціюємо по t перше рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0.$$

Враховуючи друге рівняння, маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x-y=0.$$

З першого рівняння знайдемо y і підставляємо в отримане рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x+\frac{dx}{dt}+3x=0 \text{ , або}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=0.$$

Одержали рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2+4k+4=0,$$

корені якого $k_1=k_2=-2$.

Загальний розв'язок рівняння

$$x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-2t}.$$

З першого рівняння системи виразимо y, але спочатку знайдемо

$$x'=C_2e^{-2t}-2e^{-2t}\left(C_1+C_2t\right)=e^{-2t}\left(C_2-2C_1-2C_2t\right).$$

Отже,

$$y=-e^{-2t}\left(C_2-2C_1-2C_2t\right)-3\left(C_1+C_2t\right)e^{-2t}=$$
$$=-e^{-2t}\left(C_2-2C_1-2C_2t+3C_1+3C_2t\right)=-e^{-2t}\left(C_1+C_2+C_2t\right).$$

Таким чином, загальний розв'язок системи

$$x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-2t},$$

$$y=-e^{-2t}\left(C_1+C_2+C_2t\right).$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 і C_2. За умовою $x(0)=1$, $y(0)=-1$, тоді

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Звідки $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Отже, частинний розв'язок системи

$$x = e^{-2t},$$

$$y = -e^{-2t}.$$

Вправи.

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

10.20. $y'' - 8y' + 7y = 14$.

10.21. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

10.22. $y'' - 2y' = x^2 - 1$.

10.23. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

10.24. $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

10.25. $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

10.26. $y'' - 2y' = 3xe^{-x}$.

10.27. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

10.28. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

10.29. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.

10.30. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$.

10.31. $y'' + 4y = \sin x$.

10.32. $y'' + y = 2\sin 2x$.

Знайти розв'язки таких рівнянь, які задовольняють початкові умови

10.33. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

10.34. $y'' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

10.35. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

10.36. $y'' - 4y = e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

10.37. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

10.38. $y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 3$.

10.39. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

10.40. $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

Вказати вигляд частинних розв’язків таких рівнянь.

10.41. $y'' + 3y' - 10y = (10x^2 + 4x - 5)e^{2x}$.

10.42. $y'' - 3y' = x^2 - 2$.

10.43. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}(1 - x^2)$.

10.44. $y'' + 4y' + 3y = xe^{-3x}$.

10.45. $y'' + 2y' + y = \sin x + e^{x}$.

10.46. $y'' + 10y' = x^2 + xe^{-10x}$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь методом варіації довільних сталих.

10.47. $y'' + y = ctgx$.

10.48. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

10.49. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

10.50. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

Знайти загальний розв'язок систем:

10.51. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y - 4z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - 3z = 3x^2. \end{cases}$ **10.52.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t. \end{cases}$

Глава 11. Лінійні різницеві рівняння

11.1. Основні поняття і означення.

Аналогом диференціальних рівнянь для функції $y = f(x)$, де x – приймає натуральні значення $(x \in N)$ є різницеві рівняння. Вони часто використовуються в економіці при дослідженні еволюції економічних систем на тривалих проміжках часу, тобто в моделях екомічної динаміки з дискретним часом.

Нехай незалежна змінна x приймає значення $n, n+1, n+2$ і т.д. Позначимо $y = f(n) = y_n$; $y = f(n+1) = y_{n+1}$ і т.ін. В економічних задачах в якості незалежної змінної n, як правило виступає час t, а y_t – значення залежної змінної в момент часу t. Тоді різницевим рівнянням $k-$го порядку називається співвідношення виду

$$F(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k}) = 0.$$

або

$$F(n, y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-k}) = 0.$$

Розв'зати рівняння – це знайти загальний член послідовності y_n.

Розглянемо декілька простих задач, математичними моделями яких є різницеві рівняння.

Приклад 11.1. Нехай маємо геометричну прогресію:

$$1, u, u^2, u^3, ...$$

Її можна описати однорідним різницевим рівнянням:

$$y_n = u \cdot y_{n-1}, \quad y_0 = 1.$$

Таким чином, геометрична прогресія u^n є розв'зком простішого різницевого рівняння, де $u-$стале число. Нагадаємо, що $e^{\alpha x}-$розв'зок аналогічного диференціального рівняння

$$y' = \alpha y; \frac{dy}{dx} = \alpha y; \frac{dy}{y} = \alpha dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \alpha \int dx; \ln y = \alpha x; y = e^{\alpha x}.$$

Аналогія між розв'язком лінійного різницевого рівняння та диференціальним рівнянням розповсюджується і на рівняння будь-якого порядку. Як правило, загальний розв'язок різницевого рівняння є лінійна комбінація k геометричних прогресій, тоді як для диференціального рівняння – це є комбінація експонент.

Якщо в диференціальному рівнянні k – порядку маємо залежність між функцією $y(x)$ та її похідними $y', y'', \ldots y^{(k)}$, то в різницевих рівняннях ця залежність задається відносно загального члена послідовності y_n та членами послідовності $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+k}$, або $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-k}$ і необхідно знайти формулу для її загального члена y_n.

Приклад 11.2. Нехай маємо арифметичну прогресію

$$a, a+d, a+2d, \ldots.$$

Таку прогресію можна описати різницевим рівнянням першого порядку

$$y_{n+1} = y_n + d, \quad y_0 = a,$$

або рівнянням другого порядку

$$y_{n+2} - 2y_{n-1} + y_n = 0.$$

Дійсно,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + d, \quad d = y_{n+1} - y_n,$$

тобто

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_{n+1} - y_n, \text{ або } y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0.$$

Приклад 11.3. Нехай у банк внесена сума розміром X_0 під $p\%$ річних. Знайти, який вклад буде через n років. Це є відома формула складених процентів:

$$X_n = X_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

або

$$X_n = X_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

що є різницеве рівняння першого порядку.

11.2. Лінійне різницеве рівняння із сталими коефіцієнтами

Означення. Рівняння

$$a_k y_n + a_{k-1}y_{n-1} + a_{k-2}y_{n-2} + \ldots + a_0 y_{n-k} = f(n), \qquad (11.1)$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \ldots + a_0 y_n = f(n). \qquad (11.2)$$

де $a_{0,}a_{1,}\ldots a_{k,}$ – сталі коефіцієнті називається різницевим лінійним рівнянням $k-$го порядку із сталими коефіцієнтами.

Означення. Рівняння

$$a_k y_n + a_{k-1}y_{n-1} + a_{k-2}y_{n-2} + \ldots + a_0 y_{n-k} = 0, \qquad (11.3)$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \ldots + a_0 y_n = 0, \qquad (11.4)$$

у якому $f(n)=0$, називається різницевим лінійним однорідним рівнянням $k-$го порядку із сталими коефіцієнтами.

Означення.Розв'язок різницевого рівняння $k-$го порядку–це така послідовность y_n, при підстановці якої в рівняння отримаємо вірну тотожність.

Означення. Розв'язок y_n, що не залежить від вільної сталої, називається частинним розв'язком різницевого рівняння.

Означення. Розв'язок y_n, що залежить від k вільних сталих, називається загальним розв'язком різницевого рівняння $\bar{y}_n(C_1,C_2,\ldots,C_k)$.

Для знаходження частинного розв'язку потрібно задати k начальних умов (аналогічно диференціальним рівнянням).

Для різницевих рівнянь існують теореми, що до їх розв'язку, які аналогічні теоремам для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь.

Теорема 1. Якщо однорідне різницеве рівняння має розв'язком функцію $y_n^{(1)}$ і $y_n^{(2)}$, то розв'язком буде також функція

$$y_n^{(2)} = Cy_n^{(1)} \tag{11.5}$$

Теорема 2. Якщо однорідне різницеве рівняння має розв'язком функції $y_n^{(1)}$ і $y_n^{(2)}$, то розв'язком буде також функція

$$\bar{y}_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)}. \tag{11.6}$$

Теорема 3. Якщо $\tilde{y}_n$ – частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння, а $\bar{y}_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, то загальним розв'язком неоднорідного рівняння буде послідовність

$$y_n = \bar{y}_n(C_1, C_2, \ldots C_k) + \tilde{y}_n, \tag{11.7}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – це вільні сталі.

Для доведенні цих теорем треба підставити (11.5) , (11.6) та(11.7) у відповідні різницеві рівняння.

11.3. Однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами

Розглянемо спочатку однорідне лінійне різницеве *рівняння першого порядку.*

$$y_n - ay_{n-1} = 0. \tag{11.8}$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$y_n = a^n \tag{11.9}$$

Перевіримо чи є ця послідовність розв'язком даного рівняння. Підставимо в рівняння, отже

$$y_{n-1} = a^{n-1}$$

і рівняння має вигляд

$$a^n - aa^{n-1} = a^n - a^n = 0,$$

тобто послідовність $y_n = a^n$ є розв'язком даного рівняння.

Загальним розв'язком однорідного рівняння буде послідовність

$$y_n = Ca^n, \tag{11.10}$$

де C –довільна стала, яку треба знайти з начальної умови.

Приклад.11.4. Знайти за допомогою різницевого рівняння формулу складених процентів, якщо суму X_0 покладено під $p\%$ річних.

Розв'язання.

Різницеве рівняння має вигляд

$$X_n = X_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Це однорідне різнецеве рівняння і його розв'язком буде

$$X_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \text{ де } C = X_0.$$

Будемо знаходити розв'язок однорідного різницевого рівняння(11.3) у вигляді послідовності

$$y_n = Z^n,$$

де $Z -$ стале число. Якщо підставити $y_n = Z^n$ в рівняння (11.3) або (11.4) одержимо:

$$a_k Z^k + a_{k-1}Z^{k-1} + \dots + a_0 = 0. \tag{11.11}$$

Отримане рівняння називається характеристичним рівнянням для даного різницевого. Аналогичним чином знаходиться характеристичне рівняння і у випадку однорідних диференціальних рівнянь. Таким чином задачу зведено до розв'язання алгебраїчного рівняння k - го степеня, відносно коренів якого можливі випадки: а) усі корені дійсні та різні; б) корені рівняння дійсні, але серед них є кратні; в) серед коренів рівняння є комплексно-спряжені.

Наприклад, якщо рівняння має різні корені, то загальний розв'язок шукається у вигляді

$$y_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n + \ldots + C_k Z_k^n, \tag{11.12}$$

де $Z_1^n; Z_2^n; \ldots Z_k^n$ – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння.

Розглянемо однорідне різницеве рівняння другого порядку, а саме

$$y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = 0, \tag{11.13}$$

де p та q - сталі коефіцієнти. Характеристичним рівнянням у цьому випадку буде квадратне рівняння:

$$Z^2 + pZ + q = 0 \tag{11.14}$$

із дискриминантом $D = p^2 - 4q$. Корені цього рівняння мають вигляд:

$$Z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Для знаходження загального розв'язку різницевого рівняння розглянемо наступні три випадки $(D > 0, D = 0, D < 0)$.

Випадок 1. $D > 0$, тобто корені рівняння дійсні і різні. Загальним розв'язком такого різницевого рівняння буде

$$y_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n. \tag{11.15}$$

Приклад.11.5.Знайти розв'язок однорідного різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$Z^2 - 5Z + 6 = 0,$$

корені якого є $Z_1 = 2,\quad Z_2 = 3$. Таким чином, загальним розв'язком різницевого рівняння буде послідовність:

$$y_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Приклад. 11.6 Знайти розв'язок однорідного різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $Z^2 - 3Z + 2 = 0$ має корені $Z_1 = 1,\quad Z_2 = 2$. Тоді загальним розв'язком різницевого рівняння є послідовність

$$y_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n.$$

Випадок 2..$D = 0$. Характеристичне рівняння має кратні корені $Z_1 = Z_2 = Z$. Загальним розв'язком різницевого рівняння у цьому разі буде послідовність виду

$$y_n = C_1 Z^n + C_2 n Z^n. \tag{11.16}$$

Приклад 11.7.Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0. \tag{11.17}$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$Z^2 - 6Z + 9 = 0.$$

Корені цього рівняння є кратними $Z_1 = Z_2 = 3 \ \ (D=0)$. Отже, загальним розв'язком різницевого рівняння буде послідовність

$$y_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n .$$

Дійсно, Z_1^n –частинний розв'язок рівняння. Покажемо, що $C_2 n 3^n$ також є частинний розв'язок рівняння. Знайдемо,

$$y_{n+2} = (n+2)\cdot 3^{n+2}; \quad y_{n+1} = (n+1)\cdot 3^{n+1}.$$

Отже підставимо в рівняння (11.17):

$$\begin{aligned}&(n+2)\cdot 3^{n+2} - 6(n+1)\cdot 3^{n+1} + 9n\cdot 3^n = \\ &(n+2)\cdot 9 - 6(n+1)\cdot 3 + 9n \equiv 0.\end{aligned}$$

Випадок 3.. Характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені $Z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (D<0)$. У цьому випадку загальним розв'язком різницевого рівняння буде послідовність

$$y_n = \rho^n (C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi), \tag{11.18}$$

де $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Доведення формули виходить поза рамки програми.

Приклад.11.8. Знайти загальний розв'язок різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0.$$

Розв'язання.

Характеристичне у цьому випадку має корені: $Z_{1,2} = 1 + i\sqrt{3} \quad (D<0)$. Тобто загальний розв'язок рівняння – це є послідовність (11.18):

$$y_n = 2^n (C_1 \sin\frac{\pi}{3} n + C_2 \cos\frac{\pi}{3} n),$$

де $\rho=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$ а кут $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{\pi}{3}$.

11.4. Однорідне різницеве рівняння з початковими умовами

Загальний розв'язок різницевого рівняння, в який входять довільні сталі C_k задає множину розв'язків різницевого рівняння. Для знаходження частинного розв'язку треба знайти довільні сталі із так званих початкових умов, яким повинна задовільнити послідовність при значеннях $n=0,1,\ldots k-1$, якщо різницеве рівняння має порядок k.

Початкові умови задаються у вигляді:

$$y_n=y_n^0\ (n=0,1,2,\ldots,k-1). \tag{11.19}$$

Отже, можна надати більш повне означення загального розв'язку різницевого рівняння з початковими умовами:

Означення. Розв'язок різницевого рівняння $k-$го порядку

$$y_n=C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)}+\ldots+C_ky_n^{(k)}$$

буде загальним, якщо завдяки вибору довільних сталих $C_1,C_2,\ldots C_k$ можна задовольнити початкові умови виду (11.19). Для цього система лінійних рівнянь

$$C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)}+\ldots+C_ky_n^{(k)}=y_n^{(0)}\quad(n=0,1,\ldots k-1) \tag{11.20}$$

повинна мати єдиний розв'язок відносно сталих змінних $C_1,C_2,\ldots C_k$. Можна показати, що система має єдиний розв'язок, якщо частинні розв'язки $y_n^{(1)},y_n^{(2)},\ldots y_n^{(k)}-$ лінійно незалежні.

Приклад.11.9 Знайти частинні розв'язки різницевого рівняння

$$y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=0$$

для трьох варіантів початкових умов:

а) $y_0 = 1,\ y_1 = 3$,

б) $y_1 = 1,\ y_2 = 3$,

в) $y_0 = 2,\ y_2 = 0$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$Z^2 - 3Z + 2 = 0.$$

Корені рівняння $Z_1 = 1$, $Z_2 = 2$ і загальним розв'язком рівняння буде

$$y_n = C_1 + C_2 2^n.$$

Знайдемо сталі C_1 та C_2 із початкових умов:

а) $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases}$ Звідси $C_1 = -1$, $C_2 = 2$.

Частинним розв'язком рівняння буде послідовність $y_n = 2^{n+1} - 1$.

б) $\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = 3 \end{cases}$ Звідси $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

Частинним розв'язком рівняння буде послідовність $y_n = 2^n - 1$.

в) $\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 2 \\ C_1 + 4C_2 = 0 \end{cases}$ Звідси $C_1 = 4$, $C_2 = -1$.

Частинним розв'язком рівняння буде послідовність $y_n = 4 - 2^n$.

11.5. Неоднорідні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною

Неоднорідне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = f(n)$$

має загальний розв'язок, який є сумою загального розв'язку однорідного різницевого рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Отже, якщо розв'язок $\bar{y}_n$ однорідного рівняння відомий, а $\tilde{y}_n$ – частинний розв'язок, то загальний розв'язок буде послідовність:

$$y_n = \bar{y}_n + \tilde{y}_n .$$

Нагадаємо, що аналогічну форму загального розв'язку мають і диференціальні рівняння.

Розглянемо різницеві рівняння другого порядку.

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = f(n), \text{ якщо}$$
$$f(n) = P_m(n) \cdot b^n ,$$

де $P_m(n)$ – є поліном степені m. Частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння розшукується у вигляді

$$\tilde{y}_n = Q_m(n) \cdot n^l \cdot b^n , \tag{11.21}$$

де b є коренем характеристичного рівняння кратності l, а $Q_m(n)$ є поліном m степені від n з невідомими коефіцієнтами. Для різницевого рівняння другого порядку виду

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = P_m(n) \cdot b^n \tag{11.22}$$

можливі такі випадки:

Випадок 1. $Z^2 + pZ + q = 0, \quad Z_1 \neq b, \quad Z_2 \neq b$, тобто стала b не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y}_n = Q_m(n) \cdot b^n . \tag{11.23}$$

Випадок 2. $Z^2 + pZ + q = 0, \quad Z_1 = b, \quad Z_2 \neq 0$.

$$\tilde{y}_n = nQ_m(n) \cdot b^n . \tag{11.24}$$

Випадок 3. $Z^2 + pZ + q = 0, \quad Z_1 = Z_2 = b$. Тоді

$$\tilde{y}_n = n^2 Q_m(n) \cdot b^n. \tag{11.25}$$

Коефіцієнти невідомого поліному $Q_m(n)$ знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

Для прикладу знайдемо загальні розв'язки наступних різницевих рівнянь.

Приклад 11.10. Розв'язати рівняння: $y_{n+2} + 5y_{n+1} + 6y_n = C$ (C - стала).

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння

$$Z^2 - 5Z + 6 = 0,$$

де $Z_1 = 2;\quad Z_2 = 3$. Тобто розв'язком однорідного рівняння буде послідовність

$$\bar{y}_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Розглянемо праву частину даного неоднорідного рівняння. Бачимо, що $P_m(n) = C$, а $b = 1$. Тобто частинний розв'язок знаходимо у вигляді

$$\tilde{y}_n = A,$$

де A– стала (випадок 1). Підставимо тепер $\tilde{y}_n$ у різницеве рівняння . Отже

$$\tilde{y}_{n+2} = A;\ \tilde{y}_{n+1} = A;\ \tilde{y}_n = A.$$

Для знаходження сталої A маємо: $A - 5A + 6 = 0$, звідки $A = \dfrac{3}{2}$. Таким чином, загальний розв'язок різницевого рівняння є послідовність:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{3}{2}.$$

Приклад 11.11. Розв'язати рівняння: $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n(n-2)$.

Розв'язання.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння у вигляді

$$\tilde{y}_n = (An + B)n \cdot 2^n \text{ (випадок 2).}$$

Визначимо коефіцієнти A і B, підставивши $\tilde{y}_n$ в різницеве рівняння

$$2^{n+2}\left(A(n+2)^2 + B(n+2)\right) - \left(5A(n+1)^2 + 5B(n+1)\right)\cdot 2^{n+1} +$$
$$+\left(An^2 + Bn\right)6 = 2^n(n-2).$$

Розкриємо дужки та порівнємо коефіцієнти при однакових степенях n у лівій та правий частинах равняння:

$$\begin{array}{r|l} n^2 & 4A - 10A + 6A = 0 \\ n & 16A + 4B - 20A - 10B + 6B = 1 \\ n^0 & 16A + 8B - 10A - 10B = -2. \end{array}$$

Для знаходження A і B дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4A = 1, & A = -\dfrac{1}{4}, \\ 3A - B = -1, & B = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Отже, загальним розв'язком даного різницевого рівняння буде послідовність

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2\right)\cdot 2^n.$$

Приклад 11.12. Розв'язати рівняння: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$.

Характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння $Z^2 - 4Z + 4 = 0$ має корені $Z_1 = Z_2 = 2,$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння є послідовність

$$\bar{y}_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у такому вигляді

$$\tilde{y}_n = An^2 \cdot 2^n$$

(випадок 3). $b = 2$ є двократним коренем характеристичного рівняння $Q_m(n) = C$. Знаходимо сталу A підстановкою $\tilde{y}_n$ в рівняння:

$$A(n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4A(n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + 4An^2 = 2^n .$$

Звідки маємо $A = \dfrac{1}{8}$. Таким чином, загальним розв'язком рівняння буде послідовність

$$y_n = C_1 2^n + C_1 n 2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n .$$

11.6. Системи лінійних різницевих рівнянь

Означення. Сукупність k лінійних різницевих рівнянь першого порядку з k невідомими послідовностями $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots\, y_n^{(k)}$

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} + a_{11} y_n^{(1)} + a_{12} y_n^{(2)} + \ldots + a_{1k} y_n^{(k)} & = q_1(n) \\ y_{n+1}^{(2)} + a_{21} y_n^{(1)} + a_{22} y_n^{(2)} + \ldots + a_{2k} y_n^{(k)} & = q_2(n) \\ \vdots & \\ y_{n+1}^{(k)} + a_{k1} y_n^{(1)} + a_{k2} y_n^{(2)} + \ldots + a_{kk} y_n^{(k)} & = q_k(n), \end{cases} \qquad (11.26)$$

де a_{ij} – сталі коефіцієнти системи, $q_k(n)$-довільні члени, що є функціями натурального аргументу n називається лінійною системою різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Якщо усі $q_i(n) = 0$, система рівнянь називається *однорідною.*

Порівнюючи систему різницевих рівнянь із системою диференціальних рівнянь, бачимо повну аналогію, що до їх загального вигляду.

Означення. Загальним розв'язком системи (11.26) називається сукупність послідовностей $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots y_n^{(k)}$ від натурального аргументу n та k довільних сталих $C_1, C_2, \ldots C_k$. Тобто,

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= y_n^{(1)}(n, C_1, C_2, \ldots C_k), \\ y_n^{(2)} &= y_n^{(2)}(n, C_1, C_2, \ldots C_k), \\ &\vdots \\ y_n^{(k)} &= y_n^{(k)}(n, C_1, C_2, \ldots C_k), \end{aligned} \tag{11.27}$$

що задовольняють усі рівняння системи.

Задача з початковими умовами. Знайти такий розв'язок системи, що задовольняє умові $y_0^{(1)} = b_1, y_0^{(2)} = b_2, \ldots y_0^{(k)} = b_k$. Розв'язок системи можна знайти методом виключення, при цьому систему лінійних рівнянь буде зведено до лінійного різницевого рівняння k -го порядку.

Розглянемо розв'язок системи рівнянь на прикладах систем другого порядку.

Приклад 11.13. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = 5y_n^{(1)} + 4y_n^{(2)} \\ y_{n+1}^{(2)} = 4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)} \end{cases}. \tag{11.28}$$

Розв'язання.

Для розв'язування застосуємо метод виключення. Підставимо в перше рівняння замість n, $n+1$. Тоді $y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4y_{n+1}^{(2)}$. Ураховуючи друге рівняння , маємо

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4\left(4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)}\right), \text{ або } y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 16y_n^{(1)} + 20y_n^{(2)}.$$

З першого рівняння системи знаходимо

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)}\right),$$

тоді

$$y_{n+2}^{(1)}=5y_{n+1}^{(1)}+16y_n^{(1)}+5\left(y_{n+1}^{(1)}-5y_n^{(1)}\right), \text{ або}$$

$$y_{n+2}^{(1)}-10y_{n+1}^{(1)}+9y_n^{(1)}=0. \qquad (11.29)$$

Отримали різницеве рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, харакtристичне рівняння якого має вигляд:

$$Z^2-10Z+9=0.$$

Корені цього рівняння дорівнюють $Z_1=1; Z_2=9$. Звідси загальний розв'язок (11.29)

$$y_n^{(1)}=C_1+C_2 9^n. \qquad (11.30)$$

Послідовність $y_n^{(2)}$ знайдемо із першого рівняння, але спочатку знайдемо із загального розв'язку (11.30)

$$y_{n+1}^{(1)}=C_1+C_2 9^{n+1}.$$

Тоді

$$y_n^{(2)}=\frac{1}{4}\left(C_1+9C_2 9^n-5C_1-5C_2 9^n\right), \text{ або } y_n^{(2)}=\frac{1}{4}\left(4C_2 9^n-4C_1\right)=C_2 9^n-C_1.$$

Таким чином, загальним розв'язком системи будуть послідовності

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= \quad C_1+C_2\cdot 9^n \\ y_n^{(2)} &= \ -C_1+C_2\cdot 9^n. \end{aligned}$$

Пропонуємо порівняти розв'язок системи різницевих рівнянь(11.28) із розв'язком аналогічної системи діференціальних рівнянь.

Приклад.11.14. Розв'язати неоднорідну систему різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = & 5y_n^{(1)}-3y_n^{(2)}+2\cdot 3^n \\ y_{n+1}^{(2)} = & y_n^{(1)}+y_n^{(2)}-5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо перше рівняння системи у вигляді:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_{n+1}^{(2)} + 2\cdot 3^{n+1}.$$

Враховуючи друге рівняння маємо

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3(y_n^{(1)} + y_n^{(2)} - 5) + 2\cdot 3^{n+1},$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} - 3y_n^{(2)} + 15 + 2\cdot 3^{n+1}.$$

З першого рівняння системи отримаємо

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{3}\left(-y_{n+1}^{(1)} + 5y_n^{(1)} + 2\cdot 3^n\right)$$

тоді

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} + y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2\cdot 3^n + 15 + 2\cdot 3^{n+1}$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 6y_{n+1}^{(1)} - 8y_n^{(1)} + 4\cdot 3^n + 15.$$

Таким чином, отримали неоднорідне різницеве рівняння другого порядку відносно $y_n^{(1)}$

$$y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4\cdot 3^n + 15.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння, характреристичне рівняння якого якого

$$Z^2 - 6Z + 8 = 0$$

має корені $Z_1 = 2;\quad Z_2 = 4.$ Звідси загальний розв'язок однорідного рівняння є послідовність

$$\overline{y}_n^{(1)} = C_1 2^n + C_2 4^n.$$

Для визначення частинного розв'язку неоднорідного рівняння розглянемо два випадки:

$$1)\ y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4 \cdot 3^n,$$

$$2)\ y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 15.$$

У першому випадку шукаємо частинний розв'язок у вигляді $\tilde{y}_n^{(1)} = A \cdot 3^n$ та знаходимо A підстановкою $\tilde{y}_n$ в рівняння ()

$$A \cdot 3^{n+2} - 6 \cdot A \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot A \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n,$$

або

$$9A - 18A + 8A = 4,$$

тобто $A = -4$. Отже частинний розв'язок є послідовність $\tilde{y}_n^{(1)} = -4 \cdot 3^n$.

У другому випадку частинний розв'язок буде $\tilde{y}_n^{(1)} = A$. Підставивши $\tilde{y}_n^{(1)}$ в рівняння отримаємо $A = 5$. Звідси загальний розв'язок неоднорідного рівняння є послідовність

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5.$$

Послідовність $y_n^{(2)}$ знайдемо, якщо використаємо перше рівняння системи, а саме

$$-3y_n^{(2)} = y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2 \cdot 3^n,$$

або

$$-3y_n^{(2)} = C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot 4^{n+1} - 4 \cdot 3^{n+1} + 5 - 5 \cdot C_1 \cdot 2^n - 5 \cdot C_2 \cdot 4^n$$

$$+20 \cdot 3^n - 25 - 2 \cdot 3^n == -3 \cdot C_1 \cdot 2^n - C_2 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 20.$$

.

Отже

$$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$

Таким чином, розв'язком даної неоднорідної системи рівнянь будуть послідовності

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5,$$
$$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$

Запитання для самодіагностики.

1. Який вигляд має лінійне різницеве рівняння із сталими коефіцієнтами?
2. Що називається розв'язком різницевого рівняння?
3. Запишіть однорідне різнецеве рівняння із сталими коефіцієнтами.
4. Яке рівняння називається характеристичним для даного різнецевого?
5. У якому вигляді знаходимо загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння в залежності від коренів характеристичного рівняння ?
6. Які початкові умови задаються для однорідного різницевого рівняння?
7. Який вигляд має неоднорідні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною?
8. У якому вигляді знаходяться частинні розв'язки неоднорідного різницевого рівняння в залежності від правої частини рівняння?
9. Який вигляд мають системи лінійних різницевих рівнянь ?
10. Як задаються початкові умови для системи лінійних рівнянь?

Вправи.

Розв'язати різницеві рівняння.

11.15. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$

11.16. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$

11.17. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$

11.18.. $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 2^n$

11.19. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2n^2$

11.20. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3 \cdot 2^n$

11.21. $y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = n \cdot 5^n$

11.22. $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = n \cdot 3^n$

Розв'язати системи різницевих рівнянь.

11.25. $\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = 8y_n^{(2)} - y_n^{(1)} \\ y_{n+1}^{(2)} = y_n^{(2)} + y_n^{(1)} \end{cases}$

11.26. $\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(2)} + y_n^{(1)} \\ y_{n+1}^{(2)} = 3y_n^{(2)} - 2y_n^{(1)} \end{cases}$

11.27. $\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = -4y_n^{(2)} - 2y_n^{(1)} \\ y_{n+1}^{(2)} = 3y_n^{(2)} - y_n^{(1)} | +3x^2 \end{cases}$

11.28. $\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(2)} \\ y_{n+1}^{(2)} = 2y_n^{(1)} \end{cases}$

11.29. $\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = 3y_n^{(1)} - 4y_n^{(2)} + 2^n \\ y_{n+1}^{(2)} = -2y_n^{(2)} + y_n^{(1)} - 3\cdot 2^n \end{cases}$

11.30. $\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(2)} - y_n^{(1)} + n \\ y_{n+1}^{(2)} = y_n^{(2)} + y_n^{(1)} + 3^n \end{cases}$

Глава 12. Використання диференціальних та різницевих рівнянь в економічних задачах

Розглянемо ряд традиційних задач, математичними моделями яких є диференціальні та різницеві рівняння.

12.1. Визначення первісної для неперервної функції.

Відзначимо, що фізичним змістом похідної є швидкість змінення функції в незележності від того, який процес ця функція описує. Отже найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння виду:

$$F'(x) = f(x) \qquad (12.1)$$

Тобто операція знаходження первісної для заданої функції $f(x)$ це розв'язання рівняння (12.1). Отже,

$$F(x) = \int f(x)dx + C. \qquad (12.2)$$

Приклад 12 1. Нехай функція граничних витрат має вигляд

$$y' = 60 + 0{,}04x \qquad (12.3)$$

Знайти функцію витрат виробництва.

Розв'язання.

Проінтегруємо рівняння (12.3), а саме

$$\int dy = \int (60 + 0,04x)\,dx + C$$

Тобто, функція витрат:

$$y = 60x + 0,02x^2 + C.$$

Вільна стала величина C визначається з начальних умов.

Приклад 12.2. Функція граничного доходу має вигляд:

$$R'(x) = (5 - x)e^{-\frac{x}{5}} \qquad (12.4)$$

Знайти функцію доходу $R(x)$.

Розв'язання.

Знаходимо первісну $R(x)$ отже, інтегруючи рівність (12.4):

$$R(x) = \int (5 - x)e^{\frac{x}{5}}dx + C \qquad (12.5)$$

Начальна умова в таких задачах очевидна: при $x = 0$, $R(x) = 0$. Для обчисленняінтегралу (12.5) застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int (5 - x)e^{-\frac{x}{5}}dx = -5(5 - x)e^{-\frac{x}{5}} - 5\int e^{-\frac{x}{5}}dx = -5(5 - x)e^{-\frac{x}{5}} + 25e^{-\frac{x}{5}} + C.$$

З начальних умов: $C = 0$.Отже, функція доходу має вигляд:

$$R(x) = 5xe^{-\frac{x}{5}}$$

12.2. Еластичність функції.

Напам'ятаємо, що еластичністю функції $y = f(x)$ називається добуток аргументу x на темп змінювання функції y, а саме:

$$E_x(y) = x\frac{y'}{y}. \qquad (12.6)$$

Якщо еластичність функції задано, маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції y.

Приклад 12.3. Знайти функцію витрат, якщо еластичність цієї функції стала, тобто $E_x(y) = a$.

Розв'язання.

Відповідно з умовою задачі та за формулою (12.6) маємо рівняння:

$$a = x\frac{y'}{y}, \text{ або } y' = \frac{ay}{x}.$$

Звідси,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}; \ \frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{dy}{y} = a\int\frac{dx}{x} + \ln C. \qquad (12.7)$$

Отже, розв'язком рівняння (12.7) буде функція $y = Cx^a$.

Приклад 12.4. Знайти функцію попиту $x = x(p)$, де x – обсяг товару, а p – його ціна, якщо відомо значення ціни p в точці x та еластичність має вигляд:

$$E_p(x) = \frac{x-100}{x}; \ x = 10 \text{ при } p = 90.$$

Розв'язання.

Згідно з визначенням (12.6) еластичність попиту має вигляд:

$$E_p(x)=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x} \qquad (12.8)$$

За умовою задачі маємо рівняння:

$$\frac{x-100}{x}=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x} \qquad (12.9)$$

При початкових умовах: $x=10$, $p=90$. Отже,

$$\frac{dx}{x-100}=\frac{dp}{p},\ \int\frac{dx}{x-100}=\int\frac{dp}{p}+\ln|C|.$$

Таким чином,

$$\ln|x-100|=\ln|p|+\ln|c|,\ \text{або}\ x-100=pC. \qquad (12.10)$$

Сталу C (12.10) знайдемо з початкової умови:

$$10-100=90C,\ C=-1.$$

Функція попиту $x=x(p)$ має вигляд

$$x=100-p.$$

Приклад 12.5. Знайти ціну товару, як функцію обсягу x, якщо еластичність ціни, якщо ціна одиниці товару $p=18$, а еластичність ціни має вигляд:

$$E_x(p)=\frac{p-20}{p}.$$

Розв'язання.

Еластичність ціни:

$$E_x(p)=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{x}{p} \qquad (12.11)$$

За умови задачи:

$$\frac{p-20}{p}=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{x}{p}.$$

Звідси, $\frac{dp}{p-20}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dp}{p-20}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|$. Отже,

$$\ln|p-20|=\ln|x|+\ln|C|,\ p-20=Cx.$$

З початкової умови:

$$18-20=C,\ C=-2.$$

Ціна товару в залежності від обсягу товару буде:

$$p=20-2x.$$

12.3. Модель природного зростання.

Припустимо, що функція $y=f(t)$, в точці t змінюється пропорційно значенню функції в цій точці, тобто:

$$y'(t)=ky(t) \tag{12.12}$$

Отже, функція $y(t)$ задовільняє рівнянню з відокремлюваними змінними, розв'язком якого буде функція

$$\frac{dy}{dt}=ky,\quad ,\ \int\frac{dy}{y}=k\int dt+\ln|C|,$$

або

$$y=C\cdot e^{kt},\ C=const. \tag{12.13}$$

Відомо, що рівняння описує багато різних процесів в природі та суспільстві, а саме процеси кредитування, випуску продукції, зростання грошового внеску в банк, зростання населення, розмноження бактерій і т.д.

Приклад 12.6 (*Задача Бернуллі про кредитування).*Нехай позичальник виплачує кредитору $p\%$ від початкової суми X_0 за рік. Скільки він повинен сплатити за рік на кожну одиницю позиченої суми, якщо відсотки зростають неперервно.

Розв'язання.

За умовою задачі відсотки зростають неперервно, то швидкість зменшення боргу $y(t)$ у момент часу t пропорційна значенню цієї величині у той же момент часу з коефіцієнтом пропорційності $k=\frac{p}{100}$. Отже, маємо рівняння:

$$y'(t)=\frac{p}{100}y(t).$$

Розв'язком цього рівняння буде: $y(t)=C\cdot e^{\frac{p}{100}t}$. З начальної умови задачі $C=X_0\left(t=0;y=X_0\right)$. Таким чином, від кожної одиниці позиченої суми позичальник зобов'язан сплатити

$y(t)=e^{\frac{p}{100}}$ гр.од., а за рік ця сума складе: $y(1)=X_0\cdot e^{\frac{p}{100}}$.

Приклад 12.7. (*Модель природного зростання випуску продукції)***.** Знайти закон зростання випуску продукції при умові, що ринок не насичується.

Розв'язання.

Припустимо, що деякий товар продається за ціною p, а кількість товару на момент часу $t-y=y(t)$. Тоді прибуток, отриманий на момент часу t буде $R(t)=p\cdot y(t)$. Якщо ринок не насичується, то підприємство впродовж довгого часу буде мати прибуток і йому має сенс розширювати виробництво. Частина отриманого прибутку буде використана на розширення виробництва. Нехай на інвестиції $I(t)$ у виробництво витрачається m частина доходу, тобто:

$$I(t)=\frac{py(t)}{m} \tag{12.14}$$

В наслідок розширення виробництва буде одержан приріст доходу, m-та частина доходу якого буде використана на розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуска, а саме $y'(t)$ – швидкість випуску буде пропорційною до збільшення інвестицій. Отже, $y'(t)=aI(t)$, або $y'(t)=\frac{ap}{m}y(t)$. Позначимо   і одержимо диференційне рівняння:

$$y'(t)=ky(t) \tag{12.15}$$

розв'язком якого є функція $y=C\cdot e^{kt}$, яка показує на скільки швидко можливо здобути великих обсягів виробництва, якщо постійно вкладати частину доходу в розширення виробництва.

12.4. Модель зростання з умовою насиченості.

У наведених вище вище прикладах розв'язком диференційного рівняння природного зрісту є функція $y(t)=C\cdot e^{kt}$, яка даже швидко зростає із зростанням часу t і може буде використана тільки для обмежених проміжків часу, тобто на початок виробництва. В реальних задачах з часом ринок насичується, або зріст населення не може бути нескінченним, тощо.

Суперечність моделі () з реальністю, якщо час t – достатньо велике, врахована в моделі зростання, в якій коефіцієнт пропорційності k вважається функцією змінної $y(t)$. Наприклад, для зростання населення була запропонована залежність

$$y'(t)=a\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)\cdot y(t), \text{ де } a \text{ і } b \text{ – сталі.} \qquad (12.16)$$

Тобто $k=a\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)$ є спадаюча функція, що залежить від $y(t)$. Рівняння (16) є диференційне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючі змінні в рівнянні (12.16), знаходимо:

$$\frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{b}\right)}=adt.$$

Інтегруючі це відношення, дістанемо загальний розв'язок рівнянь

$$\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b-y}\right)dy=a\int dt+\ln|C|,$$

або $\ln|y|-\ln|b-y|=at+\ln|C|$, отже $\frac{y}{b-y}=Ce^{at}$, звідсі

$$y(t)=\frac{bCe^{at}}{1+Ce^{at}} \qquad (12.17)$$

Таким чином, зростання в умовах насиченості описується функцією (12.17).

Аналогичну модель можна також використати для зростання випуску продукції в умовах конкуренції.

Графік функції $y=y(t)$ (12.17) називається логістичною кривою.

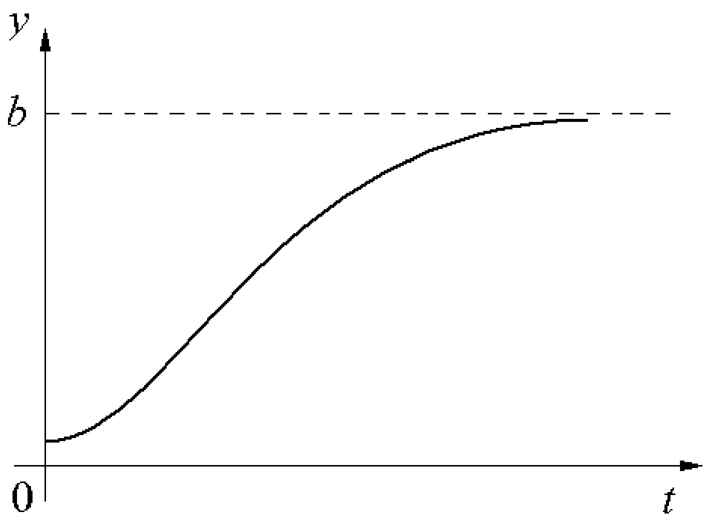


Рис.

Пряма $y(t)=b$ – є прямою насичeності.

Приклад.12.8. Кількість населення деякої держави задовільняє рівнянню

$$\frac{dy}{dt}=0,2y\left(1-\frac{y}{10^4}\right),$$

де t – час

У початковий момент часу $(t=0)$ населення складало 1000 од. Через скільки років населення зросте у 4 рази.

Розв'язання.

За умовою задачі $a=0,2$; $b=10^4$ (12.16). Тобто, одержимо (12.17):

$$y(t)=\frac{10^4 Ce^{0,2t}}{1+Ce^{0,2t}}.$$

Визначаємо сталу c з начальних умов ($t=0$; $y(0)=1000$):

$$10^3=\frac{10^4 Ce^{0,2t}}{1+Ce^{0,2t}}, \text{ або } 1+Ce^{0,2t}=C10e^{0,2t}.$$

Звідси: $C = \frac{1}{9}$. Частинним розв'язком диференціального рівняння

$$y(t) = \frac{10^4 \cdot 9^{-1} e^{0,2t}}{1 + 9^{-1} e^{0,2t}} \tag{12.18}$$

За умовою задачі треба визначити при якому значенні аргументу t функція (19) $y(t) = 4 \cdot 10^3$. Розв'яжемо рівняння:

$$4 = \frac{10^4 \cdot 9^{-1} e^{0,2t}}{1 + 9^{-1} e^{0,2t}}, \text{ або } 2 = \frac{5}{9e^{0,2t} + 1}.$$

З останньої рівності маємо:

$$18e^{0,2t} = 3, \text{ або } e^{0,2t} = 6^{-1}.$$

Таким чином, $0,2t = \ln 6$, $t = 8,95$. Отже, населення держави зросте в 4 рази приблизно через 9 років.

12.5. Динаміка ринкових цін

Попит та пропозиція є основними економічними категоріями ринкових відносин. Позначимо через $x = x(p)$ – функцію попиту в залежності від ціни товару p, а через $y = y(p)$ – відповідну пропозицію, яка також є функцією ціни товару.

Розглянемо найпростішу модель, в якій попит та пропозиція є лінійними функціями ціни товару, а саме:

$$\begin{aligned} x(p) &= a - bp, \\ y(p) &= np + m, \end{aligned} \quad (a,b,n,m > 0). \tag{12.19}$$

Дійсно, попит в залежності від ціни товару повинен спадати із зростанням p, а пропозиція, навпаки, – зростати. У випадку низьких цін попит буде перевіщувати пропозицію, $x(p) > y(p)$, а якщо ціна буде занадто великою – навпаки, пропозіція перевищуватиме попит, $y(p) > x(p)$. Ринок буде збалансований, якщо попит та пропозіція співпадатимуть, тобто $y(p) = x(p)$. Відповідне значення ціни p_0 у цьому випадку називається ціною рівноваги, або рівноважною ціною, а попит та пропозіція – рівноважними.

Знайдемо рівноважну ціну із умови $x(p) = y(p)$. За формулою(12.19) маємо

$$a - bp_0 = np_0 + m,$$

звідки

$$p_0 = \frac{a-m}{n+p}. \tag{12.20}$$

При рівноважній ціні ринок в залежності від часу є збалансований і ціна на товар лишається сталою.

В дійсності попит далеко не завжди знаходиться у відповідності із пропозіцією, тобто $x(p) > y(p)$, або $y(p) > x(p)$ і виникає потреба розглянути динамічну модель, у якій ціна товару змінюється із часом t: $p = p(t)$ і дати відповідь на питання за який проміжок часу ціна буде прямувати до ціни рівноваги.

Визначимо $p = p(t)$ в припущенні, що швидкість зміни ціни в будь-який момет часу t є прямо пропорційна різниці між попитом та пропозицією у той же самий момент часу. Отже

$$\frac{dp}{dt} = k\big(x(p) - y(p)\big), \quad (k > 0).$$

Відповідно із (12.19) одержимо рівність

$$\frac{dp}{dt} = k(a - bp - np - m) = k(a - m - p(b+n)). \tag{12.21}$$

Запишемо рівність (12.21) у вигляді

$$\frac{dp}{dt} + p \cdot k(b+n) = k(a-m). \tag{12.22}$$

Таким чином динамічна модель описується неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Розв'язок рівняння (12.22) знайдемо як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Однорідне рівняння

$$\frac{dp}{dt} + p \cdot k(b+n) = 0$$

є рівнянням з відокремлюваними змінними, тому перепишемо його наступним чином:

$$\frac{dp}{p} = -k(b+n)dt. \qquad (12.23.)$$

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (12.23)

$$\int \frac{dp}{p} = -k(b+n)\int dt + C', \text{ або}$$

$$\ln|p| = -k(b+n) + \ln|C|, \text{ а}$$

$$p(t) = C\, e^{-k(b+n)t}. \qquad (12.24)$$

Частинний розв'язок рівняння (12.22) будемо шукати у вигляді $\tilde{p} = A$, де $A -$ стала. Підставимо $\tilde{p} = A$ в рівняння (12.22) та одержимо

$$kA(b+n) = k(a-m),$$

звідки $A = \dfrac{a-m}{b+n}$ і загальний розв'язок рівняння є функція $p(t) = \bar{p}(t) + \tilde{p}$, тобто

$$p(t) = C\, e^{-k(b+n)t} + \frac{a-m}{b+n}. \qquad (12.25)$$

Знайдемо сталу *C* із начальної умови – ціни $p(0)$ в початковий момент часу $t = 0$. Отже

$$p(0) = C + \frac{a-m}{b+n} \text{ і } C = p(0) - \frac{a-m}{b+n}.$$

Таким чином,

$$p(t) = \left(p(0) - \frac{a-m}{b+n} \right) e^{-k(b+n)t} + \frac{a-m}{b+n}. \qquad (12.26)$$

Розглянемо поведінку $p(t)$ в залежності від часу. Припустимо, що $t \to \infty$, тоді $p(t) \to \frac{a-m}{b+n}$, тобто $p(t)$ прямує до ціни рівноваги і ринок динамічно стабільний. В залежності від співвідношення ціни в початковий момент часу $p(0)$ рівноважної ціни маємо такі випадки:

1) $p(0) = \frac{a-m}{b+n}, \quad p(t) = \frac{a-m}{b+n}$ і ринок стабільний;

2) $p(0) > \frac{a-m}{b+n}$, крива $p(t)$ буде розміщена вище прямої рівноваги

3) $p(0) < \frac{a-m}{b+n}$, крива $p(t)$ буде розміщена низче прямої рівноваги.

На рис 12.2 показана крива $p(t)$ для наведених вище випадків.

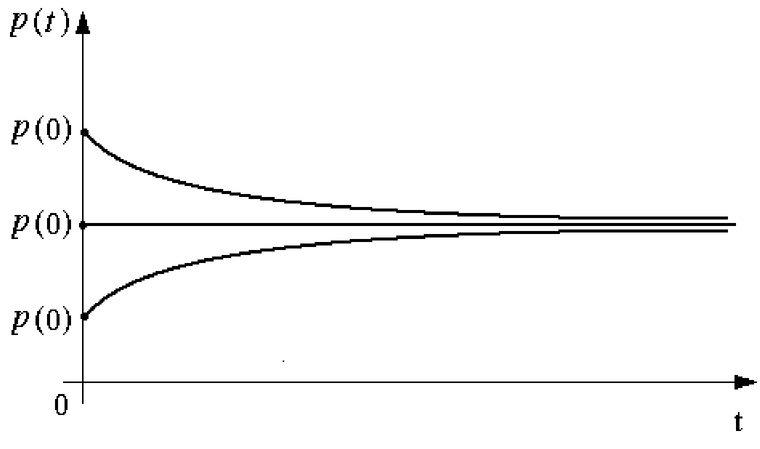


Рис.12.2. Динаміка ринкової ціни.

Таким чином, в усіх розглянутих випадках для динамічної стабілізації ринку повинна задовольнятись умова $k(b+n) > 0$

Розглянемо задачу *попиту і пропозиції* в іншій постановці.Як відзначалося раніше ,попит $x = x(p)$ і пропозиція $y(p)$ – економічні категорії товарного виробництва, які функціонують на ринку. При цьому і попит і пропозиція є функціями ціни товару p і основна проблема ринкових відносин – це приведення до відповідності попиту і пропозиції в залежності від часу. Необхідно знайти таку залежність ціни від часу, щоб між попитом і пропозицією зберігалась рівновага.

Якщо позначити функцію ціни $p = p(t)$, то її похідна $p' = p'(t)$ – це тенденція формування ціни на ринку. Залежно від різних факторів попит і пропозиція можуть бути різними функціями ціни та тенденцій формування ціни. Найпростіший випадок це лінійна залежність:
попит:

$$x(p, p') = a_1 p' + b_1 p + c; \; y = (p, p') = a_2 p' + b_2 p + c_2$$

Отже, із умови рівності $x(p, p') = y(p, p')$ одержимо диференціальне рівняння з відокремлюванними змінними

$$(a_1 - a_2) p' + (b_1 - b_2) p + c_1 - c_2 = 0,$$

або $$(a_1 - a_2)\frac{dp}{dt} = (b_2 - b_1) p + c_2 - c_1.$$

Розв'язком цього рівняння є:

$$(a_1 - a_2)\int \frac{dp}{(b_2 - b_1) p + c_2 - c_1} = \int dt + C$$

Отже,

$$\frac{(a_1 - a_2)}{b_2 - b_1} \ln\left|(b_2 - b_1) p + c_2 - c_1\right| = t + C, \qquad (12.27)$$

де C – стала величина, що визначається з начальних умов $(t = 0; \; p = p_0)$.

Приклад.12.9. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд

$$x = 30 - p - 4\frac{dp}{dt},$$

$$y = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p = 7$ при $t = 0$.

Визначимо рівноважну ціну в залежності від часу з умови $x(p, p') = y(p, p')$.

Отже, $30 - p - 4\frac{dp}{dt} = 20 + p + \frac{dp}{dt}$, або $-2p + 10 = 5\frac{dp}{dt}$. Тобто $\frac{dp}{p-5} = -\frac{2}{5}dt$, а $\int \frac{dp}{p-5} = -\frac{2}{5}\int dt + C$ – є розв'язком одержаного диференціального рівняння. нтегруючи знаходимо

$$\ln|p-5| = -0{,}4t + c, \text{ або } p = e^{-0{,}4t+c} + 5.$$

Знайдемо сталу c із початкових умов $(t = 0; p = 7)$. Тоді рівноважна ціна в залежності в часу має вигляд $p = 2e^{-0{,}4t} + 5$.

Відмітемо, що при $t \to \infty$, рівноважна ціна має границею $\lim\limits_{t\to\infty} p = 5$, тобто є стійкою.

Приклад.12.10. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$x(p, p') = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt};$$

$$y(p, p') = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}.$$

а) Знайти залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p = 10$, $t = 0$

б) Знайти $\lim\limits_{t \to \infty} p$. Чи є рівноважна ціна стабільною.

озв'язання.

Для знаходження рівноважної ціни $\left(x(p, p') = y(p, p')\right)$ маємо рівняння:

$$50 - 2p - 4\frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}, \text{ або}$$

$$\frac{dp}{dt} = 20 + 4p.$$

Звідси, $\dfrac{dp}{20 + 4p} = dt$, або $\int \dfrac{dp}{20 + 4p} = \int dt + C$.

Отже, $+\dfrac{1}{4}\ln|20 + 4p| = t + C$, або $20 + 4p = e^{4t + 4C}$

З начальних умов: $60 = e^C$, $20 + 4p = 60e^{4t}$, та $p = 15e^{4t} - 5$

б) Знайдемо $\lim\limits_{t \to \infty} 15 \cdot e^{4t} - 5 = \infty$. Тобто рівноважна ціна є нестійкою.

12.6. Використання різницевих рівнянь в економіці.

Розглядемо економічні задачі, математичними моделями яких є різницеві рівняння. Відзначемо, що в задачах які зводяться до диференціальних рівнянь розглядається функція $y = f(x)$, або $y = f(t)$ на даному етапі часу t, в незалежності від того, який процес ця функція описує. Одначе можливі випадки, коли математичною моделлю задачі є співвідношення між функцією, яку треба визначити на даному етапі часу та її значеннями на попередніх етапах часу $y(t-1)$, $y(t-2)$ і таке інше. Задача у такій постановці зводиться не до диференціальних, а різницевих рівнянь. Традиційними моделями задач такого роду є повуттина модель ринку, та економічна модель розвитку Самюельсона – Хікса.

12.6.1. Павутинна модель ринку

Розглянемо задачу щодо попиту та пропозиції декілька в іншій постановці. Припустимо, що ціна товару на ринку є функцією часу, пропозиція $y(p)$ береться в залежності від ціни товару на попередньому часовому етапі, а попит $x(p)$ залежить від ціни товару в даний момент часу $p(t)$.

Тобто ціни описуються рівняннями

$$y(t) = m + np(t-1),$$
$$x(t) = a - bp(t).$$

Виходячи з умов відповідності попиту та пропозиції маємо різницеве рівняння для знаходження рівноважності ціни у момент часу t:

$$a - bp(t) = m + np(t-1),$$

або

$$p(t) + \frac{n}{b} p(t-1) = \frac{a-m}{b}. \qquad (12.28)$$

при початковій умові $p(t) = p(t-1) = p_0$, де $p_0 = \dfrac{a-m}{b+n}$ є рівноважна ціна, яка від часу не залежить.

Загальний розв'язок різнецевого рівняння першого порядку є сума загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$p(t) = p_{\text{îäí.}}(t) + \frac{a-m}{n+b} \qquad (12.29)$$

Однорідне рівняння: $p(t)-\frac{n}{b}p(t-1)=0$ має характеристичне

$$z+\frac{n}{b}=0, \text{ і } z=-\frac{n}{b}.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння є послідовність

$$p(t)=C\left(-\frac{n}{b}\right)^t+\frac{a-m}{b+n}. \qquad (12.30)$$

Якщо $n<b$, то послідовність p_t має коливальний характер і сходиться до ціни рівноваги. Якщо $n=b$, то p_t періодично коливається відносно ціни рівноваги. Якщо $n>b$, то $\left(-\frac{n}{b}\right)^t\to\infty$ (рівновага нестійка). В дійсності нескінченно зростаючі коливання неможливі тому, що при великих відхиленнях від рівноваги лінійні залежності попиту і пропозиції від ціни – нереалістичні.

12.6.2. Модель розвитку Самюельсона – Хікса.

Нехай функція $y=y(t)$ – національний доход, $c=c(t)$ – функція споживання на данному етапі t. Припускається, що споживання на данному етапі запізнюється від національного доходу, тобто залежить від національного доходу $y(t-1)$ на попередньому етапі часу, тобто

$$c(t)=my(t-1)+A. \qquad (12.31)$$

де m - гранична швидкість до споживання (показує на скільки збільшеться споживання при зростанні дохода на одиницю: $m = \frac{\Delta c}{\Delta y}$),

а A - постійні витрати.

Припускається також, що підприємці вкладають інвестиції після того, як впевняться, що приріст національного доходу стійкий. Тобто

$$i(t) = a\big(y(t-1) - y(t-2)\big), \tag{12.32}$$

коефіцієнт $a > 0$ - фактор акселерації. Умова рівності попиту та пропозиції має вигляд

$$y(t) = c(t) + i(t),$$

або

$$y(t) = (a+m)\,y(t-1) - ay(t-2) + \mathrm{A}. \tag{12.33}$$

Рівняння (12.33) називається рівнянням Хікса. Якщо величини a, m, A - сталі, рівняння Хікса є лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичним рівнянням для різницевого (12.33) буде

$$Z^2 - (a+m)Z + a = 0. \tag{12.34}$$

Найцікавішим для досліджень є випадок комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння (розв'язок має коливальний.. характер), коли

$$\frac{(a+m)^2}{4} - a < 0.$$

Отже, коренями характеристичного рівняння є комплексно-спряжені числа:

$$Z_{1,2} = \frac{a+m}{2} \pm i\sqrt{-D} .$$

Таким чином, загальними розв'язком однорідного різницевого є послідовність:

$$\bar{y}_t = \rho^t \left(c_1 \cos\varphi t + c_2 \sin\varphi t \right), \qquad (12.35)$$

де

$$\rho = \sqrt{\frac{(a+m)^2}{4} - D} = \sqrt{\frac{(a+m)^2}{4} - \frac{(a+m)^2}{4} + a} = \sqrt{a} ,$$

$$\varphi = arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{-D}}{\frac{a+m}{2}} = \sqrt{\frac{4a}{(a+m)^2} - 1} .$$

Знайдемо частинний розв'язок різницевого рівняння (12.33). Послідовність $\tilde{y}_n = C$ підставимо в рівняння і визначим сталу A.

$$C = \frac{A}{1-(a+m)+a} = \frac{A}{1-m} .$$

Загальним розв'язком різницевого рівняння Хікса є послідовність

$$y_t = \left(\sqrt{a}\right)^t \left(c_1 \cos t\varphi + c_2 \sin t\varphi\right) + \frac{A}{1-m} . \qquad (12.36)$$

В реальній економіці $m<1$; $a>1$. При таких значеннях граничної швидкості к споживанню m і акселератора a розв'язок рівняння Хікса не стійкий і має коливальний характер. Це означає, що навіть при сталому темпі капіталовкладень економіка має нестійкий характер і періоди зростання чередується з періодами спаду.

Приклад.12.11. Розв'яжемо рівняння Хікса, якщо $a = 1,22$; $m = 0,98$; $n = 0,05$.

Рівняння Хікса (12.33) має вигляд:

$$y_t - 2,2y_{t-1} + 1,22y_{t-2} = 0,05. \tag{12.37}$$

Знайдемо частинний розв'язок данного рівняння. $\tilde{y}_t = C$. Підставимо $\tilde{y}_t$ в рівнянні (), одержимо:

$$C - 2,2C + 1,22C = 0,05, \text{ звідси } C = 2,5.$$

Частинний розв'язок рівняння $\tilde{y}_t = 2,5$.

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Складемо характеристичне рівняння

$$Z^2 - 2,2Z + 1,22 = 0$$

Корені характеристичного рівняння

$$Z_{1,2} = 1,1 \pm 0,1i$$

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\bar{y}_t = \left(\sqrt{a}\right)^t \left(C_1 \cos\varphi t + C_2 \sin\varphi t\right), \tag{12.38}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{0,1}{1,1} = 0,78. \tag{12.39}$$

Отже, $\bar{y}_t = \left(\sqrt{1,22}\right)^t \left(C_1 \cos 0,78t + C_2 \sin 0,78t\right)$.Таким чином, загальним розв'язком неоднорідного рівняння буде

$$y_t = (1{,}1)^t \left(C_1 \cos 0{,}78t + C_2 \sin 0{,}78t\right) + 2{,}5 \qquad (12.40)$$

Запитання для самодіагностики.

1. Наведіть приклади економічних задач, в яких невідома функція визначається на основі її еластичності.
2. Моделлю яких економічних задач є модель природного зростання ?
3. Які особливості має модель зростання з умовою насиченості.?
4. Якщо задані функції попиту і пропозиції, яка ціна на продукцію називається рівноважною?
5. Яка математична модель враховує динаміку ринкових цін?
6. Поясніть поняття павутинної моделі ринку.
7. Запишіть різнецеве рівняння Хікса.
8. Моделлю яких економічних задач є модель Самюельсона-Хікса?

Приклади і вправи

12.12. Функція граничного доходу деякого підприємства має вигляд:
$R'(x) = 45 - 0{,}04x - 0{,}003x^2$
Знайти функцію доходу.

12.13. Функція граничних витрат на деяку продукцію має вигляд:
$C'(x) = 30xe^{0{,}001x^2}$.
Знайти функцію витрат,якщо фіксовані витрати складають 20 тис. гр.

12.14.Знайти функцію попиту, якщо її еластичність стала $E_p(x) = -2,$ при початковій умові $x = 4$ при $p = 10$.

12.15. Знайти функцію попиту, якщо її еластичність

$E_p(x) = \dfrac{x-300}{x}$, $0 < x < 300$, $x = 12$ при $p = 36$

12.16. Сума X_0 внесена в банк під 10% річних. Через скільки років ця сума зросте в три рази, якщо приріст нараховується неперервно?

12.17. Чисельність населення деякого регіону задовольняє диференціальному рівнянню $y'(t) = 0,05y(1-10^{-6}y)$, де час t вимірюється роками. В початковий момент населення складало 10 тис. громадян. Через скільки років населення зросте в 10 разів?

12.18. Функції попиту та пропозиції мають вигляд

$x(p) = 54 - 4p - 3p'$,

$y(p) = 26 + 3p + 2p'$.

Знайти залежність равноважної ціни від часу якщо $p = 6$ при $t = 0$. Чи є равноважна ціна стійкою?

12.19.Функції попиту та пропозиції мають вигляд

$x(p) = 100 - 3p + 4p'$,

$y(p) = 120 + 2p + p'$.

Знайти залежність равноважної ціни від часу якщо $p = 10$ при $t = 0$. Чи є равноважна ціна стійкою?

12.20. Знайти розв'язок різницевого рівняння Хікса:

$y(t) - 2,2y(t-1) + 1,25y(t-2) = 0,1$.

Який економічний зміст параметрів даного рівняння? Проаналізуйте поведінку загального розв'язку рівняння.

Розділ 3: Ряди

Глава 13. Основні поняття та означення. Збіжність ряду, необхідна ознака збіжності ряду.

13.1.Числовий ряд та його збіжність

Припустимо, що задана числова послідовність:

$$\{u_n\},\ n = 1\ , 2,\ 3, \dots .$$

Означення. Вираз виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \qquad (13.1)$$

називається числовим рядом. Числа u_1, u_2, $u_3, \dots, u_n$ мають назву членів ряду, u_n називається *загальним* членом ряду. Числовий ряд вважаємо заданим, якщо відома формула загального члену ряду, або будь-яке правило за котрим можна знайти довільний член ряду.

Приклад 13.1 . Задано загальний член ряду. Записати ряд у вигляді суми його членів.

$$\text{а).}\ u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}. \qquad (13.2)$$

Розв'язання.

Підставляємо в загальний член ряду (13.2) послідовно $n = 1, 2, \dots$ Запишемо ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} + \dots$$

б) $u_n = 2^n$ (13.3)

Підставляємо в загальний член ряду(13.3)послідовно $n = 1, 2, \ldots$

Запишемо ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots$$

в) $u_n = (-1)^{n-1}$. (13.4)

При $n = 1, 2, \ldots$ ряд має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

г) $u_n = \dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$. (13.5)

Відповідний ряд буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \left(n+1\right)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot \left(n+1\right)} + \cdots$$

У всіх приведених прикладах ряди було записано ,якщо відома формула загального члену ряду. Іноді по декількох членам ряда пропонується знайти загальний член ряду. Така задача розв'язується неоднозначно і знаходять загальний член по можливості найбільш простого виду

Приклад 13.2. Написати формулу загального члена ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 7} - \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} - \frac{1}{7 \cdot 13} + \ldots$$

Розв'язання.

Кожний член ряду в чисельнику має 1, а в знаменнику –непарні числа, а саме: другий множник на шість одиниць більше першого. Враховуємо, що знаки членів ряду чергуються, тому

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$$

Означення. Сума n перших членів ряду називається частковою сумою ряду. Тобто,

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n, \ldots$$

Послідовність часткових сум може мати скінченну границю, нескінченну границю, або не мати границі в загалі.

Означення. Числовий ряд називається збіжним, якщо послідовність його часткових сум збігається, тобто існує скінченна границя:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{13.6}$$

Число S називається сумою ряду.

Означення. Ряд називається розбіжним, якщо границя S_n не існує, або ж вона дорівнює нескінченності.

Якщо ряд збігається і його сума дорівнює S, записують:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i \tag{13.7}$$

Приклад 13. 3. Дослідити ряд на збіжність.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots$$

Знайдемо суму n перших членів даного ряду

$$2 + 4 + \cdots + 2^n$$

За форулою суми n членів арифметичної прогресії маємо:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n \text{ ,тоді } \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n = \infty ,$$

тобто ряд розбігається.

Приклад 13. 4. Дослідити ряд на збіжність.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$$

Очевидно,щс загальний член ряду можна записати так:

2) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,

тоді

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} ,$$

та

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 ,$$

тобто ряд збігається.

Приклад 13.5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

Розв'язання.

Послідовність часткових сум цього ряду

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots$$

В даному прикладі, послідовність часткових сум обмежена, але не має границі, отже, цей ряд розбігається.

13.2. Ряд геометричної прогресії

Розглянемо нескінченну геометричну прогресію з загальним членом: $a_n = a \cdot q^{n-1} \ (n = 1, 2, \dots)$ та відповідний числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots aq^{n-1} + \dots . \qquad (13.8)$$

Часткова сума такого ряду має вигляд:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \qquad (13.9)$$

Візьмемо границю цього співвідношення:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty 1} \frac{a}{1 - q} - \lim_{n \to \infty} \frac{aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} \lim_{n \to \infty} q^n .$$

В залежності від числового значення знаменника прогресії часткова сума S_n при $n \to \infty$ буде збіжною або розбіжною. Розглянемо можливі випадки.

1). $|q| < 1$. Границя часткової суми ряду при $n \to \infty$ існує, тобто:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} = S, \quad \text{оскільки} \quad \lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Отже, ряд, що побудовано з членів нескінченно спадної геометричної прогресії, збігається:

2). $|q| > 1$. Границя часткової суми ряду при $n \to \infty$ нескінченна, тобто:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty, \quad \text{оскільки} \quad \lim_{n \to \infty} q^n = \infty.$$

Отже ряд в цьому випадку є розбіжним:

3). $q = 1$. В цьому випадку часткова сума ряду може бути обчислена таким чином: $S_n = a + a + \dots + a = na$. Отже $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, тобто, відповідний ряд є розбіжним;

4). $q = -1$. Часткову суму ряду можна обчислити таким чином:

$$S_n = a - a + a - a + \ldots + a - a\,.$$

Отже,

$$S_n = 0\,,\quad \text{якщо } n - \text{парне},$$

$$S_n = a\,,\ \text{якщо } n - \text{ непарне}.$$

Тобто, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, а це значить, що відповідний ряд є розбіжним.

Отже, ряд збігається при $|q| < 1$ та розбігається при $|q| \geq 1$.

13.3. Гармонійний ряд

Дослідимо на збіжність ряд із загальним членом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \qquad (13.10)$$

Цей ряд має назву гармонійного. Запишемо цей ряд більш детально:

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots.$$

Порівняємо даний ряд з рядом виду:

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots.$$

Для всіх $n > 2$ має місце співвідношення:

$$S_n^{(1)} > S_n^{(2)}\,.$$

Обчислимо n-у часткову суму, де $n = 2k$ (к-число дужок у частковій сумі) допоміжного ряду:

$$S_{2k}^{(2)} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}.$$

Якщо $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}^{(2)} = \infty$. Тобто, ряд є розбіжним. Оскільки має місце співвідношення $S_n^{(1)} > S_n^{(2)}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \infty$. Отже, гармонійний ряд (13.10) є рядом розбіжним.

13.4. Властивості числових рядів.

Означення. Ряд, що отриманий з даного відкиданням перших n членів

$$R_n = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i} = u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m} + ... \qquad (13.11)$$

називається n-им залишком ряду. У залишка першим членом є $(n+1)$ член початкового ряду.

Теорема 1. Якщо ряд (13.1) збігається, то збігається і його залишок і,навпаки, якщо збігається залишок ряду, то збігається і даний ряд.

Доведення.

Нехай збігається ряд (13.1), доведемо, що збігається його залишок. Напишемо часткову суму $n+m$ членів даного ряду:

$$S_{n+m} = S_n + (u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m}). \qquad (13.12)$$

Зафіксуємо номер n і нехай $m \to \infty$, тоді границя лівої частини рівності існує і дорівнює сумі ряду S. В правій частині рівності границя першого доданку стала ($n-$фіксоване), тоді границя другого доданку існує і скінченна при $m \to \infty$,тобто залишок збігається і його сума дорівнює R_n . Таким чином,

$$S = S_n + R_n. \qquad (13.13)$$

Нехай у рівності (13.12) збігається другий доданок, тобто існує границя R_n.Тоді границя правої частини рівності існує, тобто існує і границя лівої частини. Із рівності (13.13) випливає, що залишок ряда, що збігається прямує до нуля при $n \to \infty$.Отже,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

Наслідок. Збіжність або розбіжність ряду не порушується, якщо вилучити з нього або додати до цього ряду скінченну кількість членів.

Теорема 2. Якщо ряд збігається, то збігається і ряд ,що одержан із даного добутком на стале число.

Теорема 3*.* Якщо ряди із загальними членами u_n та v_n збіжні та

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A, \text{ а } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = B,$$

то для будь-яких чисел α та β ряд із загальним членом: $\alpha u_n + \beta v_n$ є збіжним, а його сума дорівнює:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha u_n + \beta v_n\right) = \alpha A + \beta B.$$

Теореми легко доводяться на основі властивостей границь.

13.5. Необхідна ознака збіжності ряду.

Необхідна ознака збіжності ряду грунтується на наступній теоремі.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя загального члена ряду при $n \to \infty$ дорівнює 0, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Під останнім співвідношенням ми розуміємо необхідну ознаку збіжності ряду.

Доведення.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – збігається і його сума дорівнює S. Оскільки $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, то можна записати, що $u_n = S_n - S_{n-1}$. Візьмемо границю останнього співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорему доведено.

Треба мати на увазі, що коли необхідна умова не виконується, то досліджуваний ряд є розбіжним. Тобто умова:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

є достатньою ознакою розбіжності числового ряду. Дійсно, якщо ряд збігається, то границя загального члена цього ряду дорівнює нулю. Таким чином, ряд розбігається.

Отже,якщо необхідна ознака виконується, то це не означає, що відповідний ряд є збіжним. Тобто питання залишається відкритим і потребує подальшого дослідження. Наприклад, в гармонійному ряді необхідна ознака виконується, а ряд є розбіжним.

Приклад 13.6. Дослідити на збіжність ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-3}$.

Розв'язання.

Знайдемо границю загального члену ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0,$$

тобто необхідна ознака не виконується і ряд розбігається.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = 1/e \neq 0\,.$$

Це значить, що необхідна ознака збіжності ряду не виконується та даний ряд є розбіжним.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot\frac{1}{3^n}+3\cdot\frac{1}{2^{n-1}})$.

Розв'язання.

Загальний член цього ряду має вигляд:

$$2\cdot\frac{1}{3^n}+6\cdot\frac{1}{2^n}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Розглянемо допоміжні ряди: $u_n=\left(1/3\right)^n$ та $v_n=(1/2)^n$. Кожен з рядів із загальними членами u_n та v_n збігається, оскільки ці ряди утворюються нескінченними спадними геометричними прогресіми. Внаслідок застосування теореми 3, досліджуваний ряд збігається і його сума дорівнює доданку сум першого та другого допоміжних рядів.

Запитання для самодіагностики

1. Що називається рядом?
2. Які ряди називаються числовими,а які функціональними?
3. Який ряд вважається заданим?
4. Який ряд називається збіжним,а який розбіжним?
5. Сформулювати властивості збіжних рядів.
6. У яких випадках збігається або розбігається ряд,члени якого утворюють геометричну прогресію?
7. Що можна сказати про збіжність або розбіжність гармонійного ряду?
8. В чому полягає необхідна ознака збіжності ряду?

9. Що можна сказати про поведінку ряду, якщо його загальний член не прямує до нуля?

10. Що можна сказати про поведінку ряду, якщо його загальний член прямує до нуля?

Приклади та вправи.

Приклади.

13.7. Записати n-й член ряду за його першим членом

а) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$;

б) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2}-\frac{\sqrt{3}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\sqrt{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$;

г) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$.

Розв’язання.

а) Перепишемо

$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}, \text{ тобто } u_n=\frac{n}{2^{n-1}};$$

б) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$, $\quad u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt{3}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\sqrt{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2!}+\frac{\sqrt{3}}{3!}+\frac{\sqrt{4}}{4!}-\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n!}$,

$u_n=\frac{\sqrt{n}}{n!}$, де $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n$;

г) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

$u_n=\frac{1}{n^2}$.

Дослідити ряди на збіжність за допомогою необхідної ознаки:

13.8. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$$

Розв'язання.

Застосуємо необхідну ознаку. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+1}=\frac{1}{1000}\neq 0 - \text{ряд розбігається.}$$

13.9. Довести розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ за допомогою необхідної ознаки.

Розв'язання.

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^3\neq 0,$$

то ряд розбігається.

Вправи.

13.10. Записати ряд за заданим його загальним членом u_n.

а) $u_n=\frac{3n+1}{5n+2}$; б) $u_n=\frac{3^n}{n!}$; в) $u_n=(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; г) $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

13.11. За заданим загальним членом u_n записати числовий ряд і знайти його суму.

а) $u_n=\frac{1}{n(n+3)}$; б) $u_n=\frac{1}{2^n}$; в) $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Написати 4 члени ряду за його загальним членом.

13.12. $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. **13.13.** $u_n=\frac{2^n}{n}$.

13.14. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

13.15. $u_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

13.16. $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2n-1}$.

13.17. $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n!}$.

13.18. $u_n = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

13.19. $u_n = (-1)^n \cdot \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

Написати формулу загального члена ряду:

13.20. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots$

13.21. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \ldots$

13.22. $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \ldots$

13.23. $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{6}{11} + \dfrac{8}{14} + \ldots$

13.24. $\dfrac{1}{e} + \dfrac{8}{e^2} + \dfrac{27}{e^3} + \dfrac{64}{e^4} + \ldots$

13.25. $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16} + \ldots$

За допомогою необхідної ознаки довести розбіжність заданих рядів.

13.26. $1 + \dfrac{2}{3} + \ldots + \dfrac{n}{2n-1} + \ldots$.

13.27. $\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{13} + \dfrac{9}{17} + \ldots + \dfrac{n^2}{4n+5} + \ldots$.

13.28. $\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2}} + \ldots + \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} + \ldots$.

13.29. $\dfrac{4}{7} + \dfrac{7}{12} + \dfrac{10}{17} + \ldots + \dfrac{3n+1}{5n+2} + \ldots$.

13.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$.

13.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^n$.

13.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n \cdot 2^n}$.

13.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+2}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Глава 14. Достатні умови збіжності числових рядів

Розглянемо спочатку ряди члени яких не змінюють знаки в залежності від n,тобто його номера. Такі ряди називають знакопостійними. Доведемо достатні умови збіжності для рядів,члени яких невід'ємні.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається знакододатним, якщо всі члени даного ряду $u_n \geq 0$.

14.1.Ознака порівняння.

Розглянемо ряди члени яких не змінюють знаки в залежності від n,тобто його номера. Припустимо, що члени ряда $u_n \geq 0$

Теорема. Нехай маємо два знакододатні ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad . \tag{14.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \quad . \tag{14.2}$$

Якщо для всіх членів цих рядів виконуються нерівності:

$$u_n \leq v_n . \tag{14.3}$$

то із збіжності ряду з загальним членом v_n випливає збіжність ряду u_n, а їз розбіжності ряду з загальним членом u_n випливає розбіжність ряду з v_n.Вважаємо, що нерівність (14.3) виконується з $n=1$, інакше скінченне число членів ряду можна відкинути.

Доведення.

Розглянемо часткові суми рядів :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \, , \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \, .$$

Із умови $u_n \le v_n$ випливає, що $S_n \le \sigma_n$. Доведемо, що із збіжності ряду з v_n випливає збіжність ряду з u_n. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ існує ,то $S \le \sigma$. Ми маємо послідовність часткових сум S_n, яка з ростом n монотонно зростає і обмежена зверху. Внаслідок теореми Вейєрштрасса вона має границю, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Отже ряд з загальним членом u_n збігається. Перша частина теореми доведена.

Доведемо другу її частину, тобто якщо ряд з u_n розбігається, то і ряд з v_n також розбігається. Оскільки, внаслідок умови $u_n \le v_n$,$S \le \sigma$, а часткові суми ряду (14.1) монотонно зростають ($u_n \ge 0$) і не мають скінченної границі, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, тобто ряд з v_n розбігається. Теорему доведено.

Відмітимо,що при застосуванні ознаки порівняння зручно використовувати ряд нескінченної спадної геометричної прогресії як приклад збіжного ряду та гармонійний ряд як приклад розбіжного ряду.

При розв'язанні задач зручно використовувати ознаки порівняння рядів в граничній формі,а саме, якщо існує скінчена та відмінна від нуля границя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \qquad (0 < k < \infty), \tag{14.4}$$

то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно. ійсно, якщо виконується умова (14.4) ,то починая з деякого номера, тобто виконується ознака порівняння.

Приклад 14.1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{3^n} \, .$$

Розв’язання

Запишемо очевидну нерівність: $3^n < (n+1)\cdot 3^n$, яка має місце при $n \geq 1$. Перейдемо до оберненої нерівності: $\frac{1}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n}$. Розглянемо два ряди: $u_n = \frac{1}{(n+1)3^n}$ та $v_n = \frac{1}{3^n}$.

Ряд із загальним членом v_n збігається, як нескінчинна геометрична прогресія зі знаменником менше одиниці. Отже, за ознакою порівняння збігається і ряд з загальним членом u_n.

Приклад 14.2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n^2+5}\right)$$

Розв’язання.

Для порівняння візьмемо ряд з загальним членом $v_n = \frac{1}{n}$ Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot n}{5n^2+3} = \frac{2}{5}$, отже ряди поводять себе однаково, а саме даний ряд розбігається, тому що ряд $v_n = \frac{1}{n}$ розбігається як гармонійний.

Приклад 14.3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Розв'язання.

Маємо ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}+\ldots$$

Порівняємо даний ряд з гармонійним рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Перевіряємо виконання умови, що кожній член даного ряду, починаючи з деякого номера, не менше відповідного числа гармонійного ряду

$$\sqrt{1\cdot 2}<\sqrt{2\cdot 2}=2, \text{ тоді } \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}>\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2\cdot 3}<\sqrt{3\cdot 3}=3, \text{ тоді } \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}>\frac{1}{3},$$

і взагалі

$$\sqrt{n(n+1)}<\sqrt{(n+1)(n+1)},$$

тоді

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}.$$

Якщо в гармонійному ряді відбросити перший член, що дорівнює 1, то це не вплине на розбіжність ряду. Враховуючи, що члені даного ряду більше відповідних членів гармонійного ряду $\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}\right)$, а гармонійний ряд розбігається, то за ознакою порівняння розбігається і даний ряд.

14.2. Ознака Даламбера

Теорема. Нехай для ряду із знакододатними членами $u_n>0$ існує границя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l. \qquad (14.5)$$

Тоді:

1) якщо $l<1$, ряд збігається;
2) якщо $l>1$, ряд розбігається;
3) якщо $l=1$, ознака не дає відповіді.

Доведення.

Нехай $l < 1$. Із означення границі для будь-якого додатного $\varepsilon > 0$ існує N, що при $n > N$ буде вірна нерівність:

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon .$$

Позначимо $l + \varepsilon = r$ і виберемо ε таким, щоб r залишалось меншим за 1. Тоді:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < r , \; \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < r, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < r, \ldots .$$

Звідси маємо:

$$u_{N+1} < r \cdot u_N$$
$$u_{N+2} < r \cdot u_{N+1} < r^2 \cdot u_N$$
$$u_{N+3} < r \cdot u_{N+2} < r^3 \cdot u_N$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Побудуємо ряд:

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots = \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i ,$$

який є $N-$им залишком ряду, що досліджується. Члени цього залишку менше відповідних членів нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$ru_N + r^2 u_N + r^3 u_N + \ldots .$$

Внаслідок ознаки порівняння ряд,який є $N-$им залишком ряду , що досліджується, збігається, отже збігається і даний ряд.

Нехай $r > 1$, тоді $\varepsilon > 0$ можна взяти настільки малим, що $l - \varepsilon = r$ буде також більше за 1. При достатньо великих n, , будемо мати:\

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \quad \text{або } u_{n+1} > u_n .$$

В цьому випадку кожний наступний член ряду буде більше за попереднього і, оскільки всі вони невід’ємні, не може виконуватись необхідна умова збіжності ряду. Отже, при $l > 1$ ряд розбігається. Теорему доведено.

Приклад 14.4. Дослідити на збіжність ряд: .

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$$

Розв'язання.

Позначимо $u_n=\frac{n}{3^n}$, тоді $u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$. Знайдемо відношення наступного члена ряду до попереднього:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}}=\frac{(n+1)}{3n}$$

і візьмемо його границю. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1.$$

Таким чином, за ознакою Даламбера ряд збігається.

Приклад 14.5. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

Розв'язання.

$$u_n=\frac{2^n}{n!}.,\ u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Запишемо відношення:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}=\frac{2}{n+1}$$

та знайдемо його границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Таким чином, за ознакою Даламбера ряд збігається.

Приклад 14.6. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$$

Розв'язання.

Позначимо $u_n = \dfrac{n!}{5^n}$, тоді $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{5^{n+1}}$. Знайдемо відношення $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!\,5^n}{n!\,5^{n+1}} = \dfrac{(n+1)}{5}$ та візьмемо його границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5} = \infty > 1,$$

тобто за ознакою Даламбера ряд розбігається.

Приклад 14.7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Розв'язання.

Застосовуємо ознаку Даламбера. Запишемо n-й та $(n+1)$-й члени ряду

$$u_n = \frac{n^2}{2^n},\; u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}.$$

За ознакою Даламбера розглядаємо границю відношення наступного члена до попереднього.

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{n^2}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2\cdot n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $l = \dfrac{1}{2} < 1$, то за ознакою Даламбера ряд збігається.

14.3. Радикальна ознака Коші

Теорема. Нехай для знакододатнього ряду $u_n > 0$ існує границя:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \tag{14.6}$$

Тоді

1) якщо $l < 1$, ряд збігається;
2) якщо $l > 1$, ряд розбігається;
3) якщо $l = 1$, ознака Коші не дає відповіді про збіжність ряду.

Теорему приводемо без доведеня

Приклад 14.8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+3} \right)^n$$

Розв'язання.

Відповідно з ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n+3} = \frac{3}{5} < 1,$$

отже ряд збігається.

Приклад 14.9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)} \quad .$$

Розв'язання.

Знайдемо границю виразу:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

Отже, ряд збігається.

Приклад 14.10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3} \right)^{n^2}$$

Розв'язання.

Відповідно з ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}=\infty>1,$$

тобто ряд розбігається.

14.4. Інтегральна ознака Коші.

Теорема. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty}u_n -$ знакододатний ряд, члени якого не зростають, тобто $u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots\geq u_n\geq\ldots$.І нехай $f(x)$ неперервна функція, така що

$$f(1)=u_1,\quad f(2)=u_2,\cdots,f(n)=u_n.$$

Тоді:

якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$;

якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Покажемо застосування інтегральної ознаки Коші на прикладах.

Приклад 14.11. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ s=const(s\subset R).$$

Розв'язання.

Цей ряд називають рядом Діріхле, або узагальненим гармонійним рядом. Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші. Обчислимо інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{x^s}=$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-s}\right)\cdot x^{1-s}\Big|_1^N = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-s}\right)N^{1-s}+\dfrac{1}{(s-1)}=\begin{cases}1/(s-1), & s>1\\ \infty & s<1\end{cases} \\ \lim\limits_{N\to\infty}\ln|x|\Big|_1^N = \lim\limits_{N\to\infty}\ln N=\infty, \quad s=1. \end{cases}$$

Таким чином, при $s>1$ інтеграл збіжний, при $s\le 1$ розбіжний. Отже, і ряд Діріхле збіжний при $s>1$ і розбіжний при $s\le 1$. При $s=1$ ряд Діріхле називають гармонійним рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}++\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Відзначимо, що ряд Діріхле, як і гармонійний ряд, використовують в ознаці порівняння рядів як еталонний ряд, тобто ряд, про який відомо, збігається він чи розбігається.

Приклад 14.12. Дослідити ряд на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Розв'язання.

Використуємо интегральну ознаку Коші. Нехай

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Тоді

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}dx=-\frac{1}{\ln(x+1)}\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Таким чином, невласний інтеграл збігається. Отже збігається і відповідний ряд.

Приклад 14.13. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

Знайдемо невласний інтеграл.

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to\infty} 2e^{\sqrt{x}}\Big|_1^b = 2\lim_{b\to\infty}\left(e^{\sqrt{b}} - e\right) = \infty.$$

Невласний інтеграл розбігається, тому і відповідний ряд теж розбігається.

14.5. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

Означення. Знакозмінним називається ряд, членами якого є дійсні числа довільного знаку.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду базується на дослідженні ряду, що утворений із абсолютних величин членів початкового ряду.

Теорема*.* Нехай маємо знакозмінний ряд:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad ,(14.7)$$

який є таким, що ряд, утворений із абсолютних величин його членів

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \quad (14.8)$$

збігається, то збігається і початковий ряд.

Доведення.

Позначимо *n*-у часткову суму знакозмінного ряду через $S_n^{(1)}$. Тоді $S_n^{(1)} = S_n^{(1)+} - S_n^{(1)-}$, де $S_n^{(1)+}$ – сума усіх додатних членів, а $S_n^{(1)-}$ – сума абсолютних величин від'ємних членів часткової суми $S_n^{(1)}$. Тоді *n*-а часткова сума ряду, який складено із абсолютних величин членів даного ряду, буде: $S_n^{(2)} = S_n^{(1)+} + S_n^{(1)-}$. За умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S$ існує, тобто існують границі $S_n^{(1)+}$ і $S_n^{(1)-}$ та $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)+} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)-}$. Таким чином, даний знакозмінний ряд є рядом збіжним.

Ця ознака є достатньою ознакою збіжності, але не є необхідною. Існують збіжні знакозмінні ряди, для яких ряди, що утворені з абсолютних величин членів початкового ряду, є розбіжними.

Означення. Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, утворений з абсолютних величин його членів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо даний ряд збігається, а ряд, утворений із абсолютних величин його членів розбігається, то він називається умовно збіжним.

Ознаки абсолютної збіжності знакозмінного ряду є такими же, як і для збіжності ряду з додатними членами. Тому для дослідження збіжності цього ряду можна використати ознаки порівняння, ознаки Даламбера або Коші. Виникає запитання, як дослідити збіжність знакозмінного ряду, який має нескінченну множину як додатних, так і від'ємних членів. В цьому випадку використовуємо таку теорему, якає ознакою абсолютної збіжності ряду. За її допомогою дослідження збіжності знакозмінного ряду зводиться до дослідження знакододатнього ряду..

Приклад14.14. Дослідити на збіжність ряди.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4},$$

де $\alpha -$ довільне дійсне число. Оскільки $|\sin n\alpha| \le 1$, то $\left|(\sin n\alpha)\cdot\frac{1}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$.

В правій частині останньої нерівності маємо загальний член ряду Діріхле, для якого $s = 4$. Цей ряд збігається. Отже,за ознакою порівняння рядів, ряд, що утворений з модулів членів досліджуваного ряду, збігається. Таким чином, досліджуваний ряд збігається абсолютно.

14.6. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду

Окремим випадком знакозмінного ряду є ряд, у якого будь-які сусідні члени і мають різні знаки. Він має назву знакопереміжного ряду. Тобто:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n\to\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \,, \qquad u_n > 0 .$$

Теорема. Нехай для знакопереміжного ряду виконуються умови:

$$u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge u_4 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots \text{та} \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \,, \qquad (14.9)$$

тобто кожний наступний член знакопереміжного ряду за абсолютним значенням менше попереднього, а границя загального члена ряду при $n \to \infty$ дорівнює 0. Тоді ряд збігається, його сума невідємна і не перевищує першого члена ряду: $0 \le S \le u_1$

Доведення. Нехай $n = 2m$, тобто n є парне число. Тоді

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Перепишемо це співвідношення таким чином:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Із умови теореми випливає, що вираз в кожній дужці невід'ємний. Отже, сума $S_{2m} \ge 0$ і зростає із зростанням m. Запишемо цю суму інакше:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

отже $S_{2m} \le u_1$. аким чином, послідовність S_{2m} монотонно зростає і обмежена зверху. Звідси випливає, що вона має границю, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S \,,$$

та S знаходиться в проміжку $0 \le S \le u_1$ Таким чином, доведено, що послідовність парних часткових сум S_{2m} має границю S.

Доведемо, що непарні часткові суми також мають своєю границею число S. Розглянемо для цього суму n перших членів ряду, де $n = 2m+1, S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ Знайдемо границі лівої і правої частин цього співвідношенні при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1} = S,$$

оскільки за умовою теореми $\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. Доведено, що $\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = S$, тобто відповідний ряд збігається.

Наслідок. Якщо знакопереміжний ряд збігається, то збігається і його n-ий залишок

$$(-1)^n \left(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots\right)$$

і його сума не перевищує за абсолютною величиною першого члена ряду, тобто u_{n+1}. Таким чином, похибка при зміні S на S_n не перевищує за абсолютною величиною першого із відкинутих членів ряду, тобто:

$$\left|S - S_n\right| \le u_{n+1} \qquad (14.10)$$

Приклад 14.15. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad .$$

Перевіряємо виконання першої та другої умов збіжності знакопереміжного ряду:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots,$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Отже, обидві умови виконуються, тобто ряд збігається за Лейбніцем. Ряд збігається умовно, тому що ряд, який складено із абсолютних величин членів даного ряду $|u_n| = \frac{1}{n}$ розбігається як гармонійний.

Приклад 14.15.Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

Маємо знакопереміжний ряд. Цей ряд збігається, бо задовольняється ознака Лейбніца. Перевіряємо тепер, збігається він абсолютно та умовно. Для цього утворимо ряд із абсолютних величин членів досліджуваного ряду:

$$|u_n| = \frac{1}{n^2},$$

Ряд збігається за інтегральною ознакою Коші $(s > 1)$. Таким чином даний ряд збігається абсолютно.

Запитання для самодіагностики

1. формулювати достатні ознаки збіжності числових рядів:

а) ознака порівняння;

б) ознака Даламбера;

в) радикальна ознака Коші;

г) інтегральна ознака Коші.

2. Які ряди називаються знакозмінними?

3. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

4. Які ряди називаються знакопереміжними?

5. У чому полягає ознака Лейбніца?

6. яка ознака Лейбніця використовується при оцінки похибки при заміні суми ряда сумою його n перших членів?

7. Який ряд називається абсолютно збіжним?

8. Який ряд називається умовно збіжним?

Приклади та вправи

Приклади.

За допомогою ознаки порівняння дослідити на збіжність ряди:

14.16. $\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^3}+...+\frac{1}{4\cdot 3^n}+...$

Розв'язання.

Порівняємо цей ряд з рядом

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}+...,$$

який збігається, бо його члени утворюють геометричну прогресію з знаменником $q=\frac{1}{3}$. Як видно, члени заданого ряду не перевищують членів нового ряду, тобто для всіх значень n $\frac{1}{4\cdot 3^n}<\frac{1}{3^n}$. А оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ збігається, то збігається і заданий ряд .

14.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Розв'язання.

Загальний член u_n заданого ряду задовольняє нерівність

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}>\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}=v_n .$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається як гармонічний і $u_n > v_n$, то заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

14.18. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$

Розв'язання.

Порівняємо цей ряд з рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots .$$

Як відомо

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{2}, \; \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{3}, \; \ldots$$

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1} = v_n \; .$$

Оскільки при всіх значеннях *n* $u_n > v_n$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається, то розбігається і даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

14.19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

(використати граничну ознаку порівняння).

Розв'язання.

а) Як відомо,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0 \; .$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, то розбігається і заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

б) Для порівняння вибираємо ряд з $v_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$, де α – різниця найбільших показників знаменника і чисельника, тобто в даному випадку $v_n=\frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збігається. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^3}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=1.$$

Оскільки найдена границя відмінна від нуля і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, то збігається і заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

Дослідити за ознакою Даламбера збіжність рядів:

14.20. $3+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+...+\frac{3^n\cdot n!}{n^n}+...$

Розв'язання.

Тут $u_n=\frac{3^n n!}{n^n}$, тоді $u_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n!(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1,$$

бо $e\approx 2,7$, і тому заданий ряд розбігається.

14.21. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

Розв'язання.

Тут $u_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$, тоді $u_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}$.

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{3}{n}}=\frac{2}{3}<1$$

– ряд збігається.

За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити збіжність ряду:

14.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання.

Тут, безумовно, треба застосувати ознаку Коші, бо

$$u_n=\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\ \text{а}\ \sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{3e}<1,$$

тобто, ряд збігається.

За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити збіжність рядів:

14.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+3}$.

Розв'язання.

Тут $u_n=\dfrac{n}{n^2+3}$. Введемо функцію $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+3}$. Вона додатна, неперервна і монотонно спадає. За інтегральною ознакою знаходимо

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2+3}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{xdx}{x^2+3}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+3)\Big|_1^b=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln(b^2+3)-\ln 4)=\infty\ .$$

Таким чином, заданий ряд розбігається.

14.24. $\dfrac{1}{2\ln^3 2}+\dfrac{1}{3\ln^3 3}+\dfrac{1}{4\ln^3 4}...+\dfrac{1}{\left(n+1\right)\ln^3\left(n+1\right)}+...$.

Розв'язання.

Застосуємо тут інтегральну ознаку збіжності. Введемо функцію

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\left(x+1\right)\ln^3\left(x+1\right)}\ .$$

Вона задовольняє всі умови інтегральної ознаки Коші: додатна, неперервна і монотонно спадна. Знаходимо невластивий інтеграл

$$\int\limits_2^{\infty}f\left(x\right)dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{\left(x+1\right)\ln^3\left(x+1\right)}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_2^{b}\frac{dx}{\left(x+1\right)\ln^3\left(x+1\right)}=$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2\ln^2\left(x+1\right)}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2\ln^2\left(b+1\right)}+\frac{1}{2\ln^2 2}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}\ .$$

Отже, збігається невластивий інтеграл, а тоді збігається й заданий ряд.

Дослідити на умовну та абсолютну збіжність ряди:.

14.25. а) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+...$;

б) $\sqrt{\frac{1}{101}}-\sqrt{\frac{2}{201}}+\sqrt{\frac{3}{301}}-...+(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{n}{100n+1}}+...$;

в) $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+...$;

г) $\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+...+\frac{\sin n}{n^2}+...$;

д) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+...+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+...$.

Розв'язання.

а) Заданий ряд – знакопереміжний і він збігається за ознакою Лейбніца, бо

$$1>\frac{1}{2!}>\frac{1}{3!}>... \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0 .$$

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин заданого ряду:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+... .$$

За ознакою Даламбера цей ряд збігається, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1 .$$

Таким чином, заданий ряд збігається абсолютно.

б) За ознакою Лейбніца заданий ряд розбігається, бо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{100n+1}}=\frac{1}{10}\neq 0\ .$$

в) Заданий знакопереміжний ряд збігається за теоремою Лейбніца, оскільки

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\ldots\quad \text{і}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0\ ,$$

а ряд його абсолютних величин

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots\ \text{розбігається}\ \left(u_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}},\ \alpha=\frac{1}{3}<1\right),$$

і тому початковий ряд збігається умовно.

г) Заданий ряд знакозмінний, оскільки він містить спочатку додатні члени

$$\left(\frac{\sin 1}{1^2},\frac{\sin 2}{2^2},\frac{\sin 3}{3^2}\right),$$

потім – від'ємні

$$\left(\frac{\sin 4}{4^2},\frac{\sin 5}{5^2},\frac{\sin 7}{7^2},\ldots\right),$$

потім – знову додатні.

Складемо ряд його абсолютних величин

$$\frac{|\sin 1|}{1^2}+\frac{|\sin 2|}{2^2}+\frac{|\sin 3|}{3^2}+\ldots+\frac{|\sin n|}{n^2}+\ldots\ .$$

Цей знакосталий ряд збігається за ознакою порівняння, бо усі його члени не перевершують членів збіжного ряду

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ .$$

Отже, даний ряд збігається абсолютно.

д) Як видно з умови, заданий ряд – знакозмінний. Складемо ряд його абсолютних величин:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots\ .$$

Застосуємо для цього ряду радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1\,.$$

Отже, ряд абсолютних величин збігається. Таким чином, заданий знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Вправи

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаки порівняння.

14.26. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots\ .$

14.27. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots\ .$

14.28. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots\ .$

14.29. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots\ .$

14.30. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 4^n}+\ldots\ .$

14.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n^2-5}\,.$

14.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+1}\,.$

14.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-7n+10}{3n^5+10n-12}$.

14.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+7}{3n^3+11}$.

14.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^5+10}$.

14.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^5+3}}{n^3-7n-1}$.

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаки Даламбера або Коші.

14.37. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$.

14.38. $1+\frac{3}{1}+\frac{3^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots$.

14.39. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$.

14.40. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$.

14.41. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$.

14.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

14.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2}{5^n}$ ..

14.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ ..

14.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$.

14.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(3n)^n}$.

14.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^{2n}$.

Дослідити збіжність таких рядів за допомогою інтегральної ознаки Коші.

14.48. $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\ldots$.

14.49. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{2n^2+1}+\ldots$.

14.50. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$.

Дослідить збіжність таких рядів, користуючись відомими ознаками.

14.51. $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots$.

14.52. $\frac{1}{9}+\frac{9}{9}+\frac{3}{28}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$.

14.53. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$.

14.54. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots$.

14.55. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots+\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots$.

14.56. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$.

14.57. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$.

14.58. $\frac{\operatorname{arctg}1}{2}+\frac{\operatorname{arctg}2}{5}+\frac{\operatorname{arctg}3}{10}+\ldots+\frac{\operatorname{arctg}n}{1+n^2}+\ldots$.

14.59. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

14.60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{(n!)^2}$.

14.61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$.

14.62. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

14.63. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

14.64. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди.

14.65. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\ldots$.

14.66. $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}+\ldots$.

14.67. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$.

14.68. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$.

14.69. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$.

14.70. $\frac{3}{4}-\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^3-\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots$.

Глава 15. Степеневий ряд та його збіжність. Ряди Тейлора і Маклорена

15.1. Функціональні ряди. Степеневий ряд.

Означення. Ряд називається функціональним,якщо його члени є функціями змінної x на деякий множині X , тобто ряд вигляду:

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots. \tag{15.1}$$

$u_n(x)$-загальний член ряду.

Означення. Точка x називається точкою збіжності ряду,якщо при підстановці її в ряд, відповідний числовий ряд є рядом збіжним. ***Означення.*** Множина значень змінної x,для яких ряд збігається, називається областю збіжності функціонального ряду.

Отже, сума ряду є функцією від x,яку можно позначити через $S(x)$.

Означення.

Степеневим рядом називається ряд:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{15.2}$$

членами якого є степеневі функції x^n із зростаючими цілими показниками, числа $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ – коефіцієнти даного ряду. Вираз $u_n=a_nx^n$ є загальним членом степеневого ряду.

Іноді розглядають степеневий ряд більш загального вигляду:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots. \tag{15.3}$$

Цей ряд легко звести до попереднього, якщо покласти $x-a=z$.

15.2. Область збіжності, радіус збіжності.

З'ясуємо питання про збіжність степеневого ряду (15.2). Надаючи x певні числові значення, ми одержимо різні числові ряди, які (в залежності від x) можуть бути розбіжними або збіжними. У зв'язку з цим введемо поняття області збіжності степеневого ряду.

Означення.Областю збіжності степеневого ряду називається сукупність тих значень x, за яких степеневий ряд збігається.

Областю збіжності степеневого ряду завжди є деякий числовий проміжок, який в частинному випадку може вироджуватись в точку. Відзначимо, що ряд (15.2) по степеням x завжди збігається при $x=0$, а ряд (15.3) по степеням $(x-a)$ – при $x=a$.

Для дослідження степеневих рядів на збіжність використовують теорему наступну теорему.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається для деякого значення x_0, що не дорівнює 0, то він збігається абсолютно для всіх значень x, для яких виконується умова:

$$|x|<|x_0|. \qquad (15.4)$$

Якщо степеневий ряд розбігається для деякого значення x_0, то він розбігається для всіх значень x, для яких виконується умова:

$$|x|>|x_0|. \qquad (15.5)$$

Доведення.
За умовою теореми при $x=x_0$ ряд (15.2) збігається, тобто числовий ряд

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0{}^2+a_3x_0{}^3+\ldots+a_nx_0{}^n+\ldots,$$

Збігається і тоді за необхідною умовою збіжності ряду його загальний член $a_nx_0^n\to 0$ при $n\to\infty$.Звідси, загальний член ряду є величиною обмеженою, тобто знайдеться таке число M, що для будь-яких значень n буде виконуватись нерівність $\left|a_nx_0^n\right|<M$.

Зробимо оцінку абсолютної величини загального члену ряду (15.2)

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^n < Mq^n \qquad (n = 0,1,2,...)\text{, де } q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Таким чином, одержали нерівність

$$\left|a_n x^n\right| < Mq^n. \tag{15.6}$$

Отже, члени ряду (15.2)менш за членів ряду геометричної прогресії , який збігається при $q<1$ (15.6).

Звідси за ознакою порівняння абсолютно збігається і даний ряд .

Доведемо другу частину теореми. Нехай в точці $x = x_0$ степеневий ряд (15.2) розбігається, тоді він розбігається для усіх $|x|>|x_0|$. Дійсно,припустимо, що ряд збігається при будь-якому значенні $x > x_0$,
але на основі першої частини теореми ряд буде збігатися і в точці x_0, що протиречить умові теореми. Теорему доведено.

Із теореми Абеля випливає, що для довільного степеневого ряду існує додатнє число R (скінченне або нескінченне), таке, що для всіх $|x|<R$ ряд збігається, причому абсолютно, а при $|x|>R$ ряд розбігається.

Означення. Інтервал $(-R,R)$ у всіх точках якого степеневий ряд збігається, а у точках , що не належать даному інтервалу степеневий ряд розбігається називається інтервалом збіжності даного ряду.

Половина інтервалу збіжності називається **радіусом збіжності** степеневого ряду. Якщо $R=+\infty$, то інтервал збіжності являє собою всю числову вісь $(-\infty < x < +\infty)$. Якщо $R=0$, то степеневий ряд збігається лише при $x=0$, тобто інтервал збіжності вироджується в точку.

Для розв’язання питання про збіжність степеневого ряду застосовують ознаку Даламбера до ряду, що складено з абсолютних величин його членів, тобто обчислюють границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l, \quad \left(u_n = a_n x^n\right)$$

і порівняють її з одиницею. Множина значень x, для яких $l<1$, утворює область абсолютної збіжності степеневого ряду (15.2). Множина значень x, для яких $l>1$, утворює область розбіжності. Отже

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

а

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R,$$

де R – радіус збіжності степеневого ряду.

Тобто,
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{15.7}$$

Приклад 15.1. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Розв'язання.

Позначимо $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, тоді $u_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Далі одержуємо:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right|.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 < 1.$$

Остання нерівність виконується для будь-якого $x \in R$, тобто ряд збігається на всій числовій осі: $-\infty < x < +\infty$.

Можна відразу знайти R, оскільки степеневий ряд містить всі степені x.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Таким чином ряд збігається на всій числовій осі.

Приклад 15.2. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n-1}}{2n+1}.$$

Розв'язання.

В цьому степеневому ряді коефіцієнти при парних степенях x дорівнюють нулю, тобто $a_{2n}=0$. Безпосереднє застосування ознаки Даламбера дає:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x)^{2n+3}(2n+1)}{(2x)^{2n+1}(2n+3)}\right|=4x^2<1,$$

Звідки отримуємо, що $|x|<1/2$, отже $x\in(-1/2;1/2)$.

Дослідимо поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності. Нехай $x=-1/2$. Підставимо це значення в степеневий ряд та отримаємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1},$$

поведінка якого визначається поведінкою гармонійного ряду. Отже цей ряд розбіжний за ознакою порівняння в граничний формі.

Нехай $x=1/2$. При цьому значенні x степеневий ряд перетворюється у числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Цей ряд, як ми уже з'ясували є розбіжним.Таким чином область збіжності ряду є інтервал $x\in(-1/2;1/2)$.

. **Приклад 15.3**. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^2}.$$

Розв'язання.

Позначимо $x-5=z$. Отже $u_n=\frac{z^n}{n^2}$, тоді $u_{n+1}=\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$. Для знаходження радіуса збіжності тепер можна застосувати формулу:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$$

Дослідимо поведінку ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $z=-1$ отримаємо числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Цей ряд збігається згідно з ознакою Лейбніца.

При $z=1$ числовий ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Він збігається, як ряд Діріхле при $s=2$. Отже областю збіжності ряду буде проміжок $-1\le z\le 1$. Повертаючись до змінної x, отримаємо $-1\le x-5\le 1$, або $4\le x\le 6$.

Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[4,6]$.

15.3. Властивості степеневого ряду

Сформулюємо властивості степеневих рядів, які можуть бути використані при дослідженні цих рядів.

1. Сума членів степеневого ряду є функція неперервна в інтервалі збіжності.

2. Степеневі ряди можна почленно додавати або віднімати. Радіус збіжності результативного ряду буде не менш, ніж найменший із радіусів збіжності вихідних рядів.

3. Степеневий ряд можна почленно диференціювати на інтервалі збіжності. Сума цього нового ряду дорівнює похідній від суми початкового ряду, а радіус збіжності нового ряду дорівнює радіусу збіжності початкового ряду.

4. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності. Його сума при цьому дорівнює сумі інтегралів від членів початкового ряду. Радіус збіжності нового ряду дорівнює радіусу збіжності початкового ряду.

Приклад. 15.4. Проінтегрувати ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ при $x\in(-1;1)$.

Роз'вязання.

Отже ряд:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=1/(1+x)$$

є нескінченна спадна геометрична прогресія, сума якої дорівнює $1/(1+x)$. Зінтегруємо почленно ліву та праву частини наведеної рівності в межах від 0 до деякого x, що належить інтервалу збіжності:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots . \qquad (15.8)$$

Ми отримали ряд, загальний член якого $u_n=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$, а сума дорівнює $\ln(1+x)$. Згідно з властивостями степеневих рядів, інтервал збіжності цього ряду є $(-1;1)$. Дослідимо поведінку нового ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Нехай $x=-1$. В цьому випадку маємо числовий ряд, загальний член якого $u_n=(-1)^n\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)}=-\dfrac{1}{n+1}$, тобто ряд розбіжний.

Нехай $x=1$. Одержимо числовий ряд, загальний член якого $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$. Цей ряд за ознакою Лейбніца є збіжним. Отже інтервалом збіжності ряда є інтервал $(-1;1]$

На цьому прикладі ми бачимо, що інтегрування степеневого ряду розширило його область збіжності на одне значення.

Приклад.15.5. Проінтегрувати ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots=\frac{1}{1+x^2},\ x\in(-1;1).$$

Розв'язання.

Як і в попередньому прикладі, ми маємо ряд, утворений із членів нескінченно спадної геометричної прогресії, для якого відомі інтервал збіжності і сума в будь-якій точці цього інтервалу. Зінтегрувавши в інтервалі збіжності цей ряд та його суму, одержимо:

$$\int_0^x \frac{dx}{\left(1+x^2\right)} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \; . \qquad (15.9)$$

Дослідимо поведінку одержаного ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Нехай $x=-1$. В цьому випадку загальний член степеневого ряду набуває вигляду: $u_n = \left(-1\right)^{n-2}\frac{1}{2n-1}$. Відповідний йому ряд за ознакою Лейбніца є збіжним.

Нехай $x=1$. В цьому випадку маємо числовий ряд із загальним членом $u_n = \left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$, який є збіжний за тією ж ознакою.

Отже $x \in \left[-1;1\right]$. Тобто інтегрування степеневого ряду розширило його область збіжності до замкненого проміжку.

15.4. Степеневі ряди Тейлора і Маклорена, необхідна і достатня умова збіжності.

Степеневі ряди широко використовуються в наближених обчисленнях при складанні таблиць елементарних функцій (таблиці Брадіса), при обчисленні інтегралів, що не беруться в аналітичному вигляді, при розв'язку диференційних рівнянь і таке інше.

Покажемо, що якщо довільна функція $f(x)$ задана на множині X і в околі точки $x=a$ має безліч похідних і є сумою степеневого ряду:

Продовжуючи цю процедуру *n* разів отримаємо

$$a_n = \frac{f^{n}\left(a\right)}{n!}.$$

Таким чином, отримали степеневий ряд виду

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (15.10)$$

який називається рядом Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки $x=a$. Частинним випадком ряду Тейлора є ряд Маклорена при $a=0$.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots \quad .(15.11)$$

Залишок ряда Тейлора (Маклорена) отримується відкиданням від основних рядів *n* перших членів і позначається, як $R_n(x)$. Тоді функцію $f(x)$ можна записати як суму *n* перших членів ряда $S_n(x)$ та залишку $R_n(x)$:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x). \quad (15.12)$$

Тобто

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

Залишок звичайно $R_n(x)$ виражають різними формулами, напишемо одну з них у формі Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad , \text{ де } \ c=a+\theta(x-a). \quad \theta<0<1.$$

Помітимо,що на практиці частіше використується ряд Маклорена (15.11). Таким чином, для того щоб записати функцію $f(x)$ у вигляді суми степеневого ряду необхідно

1). Знайти коефіцієнти ряда Маклорена (Тейлора),

2). Знайти область збіжності отриманого степеневого ряда,

3). Довести, що даний ряд збігається до функції $f(x)$.

Теорема 1. (необхідна і достатня умова збіжності ряду Маклорена). Нехай радіус збіжності ряда $R>0$. Для того, щоб цей ряд збігався в інтервалі $(-R, R)$ до функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

в указаному інтервалі.

Доведення.

Для функції $f(x)$ запишемо формулу Маклорена у вигляді

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad \text{àáî} \quad f(x) - S_n(x) = R_n(x).$$

Нехай ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$$

збігається до функції $f(x)$ в указаному інтервалі $(-R, R)$, тобто $S_n(x) \to f(x)$ ïðè $n\to\infty$, тоді видно, що $R_n(x) \to f(x)$ ïðè $n\to\infty$ в цьому інтервалі. Якщо, навпаки, в інтервалі $(-R, R)$ $R_n(x) \to 0$ ïðè $n\to\infty$, то $S_n(x) \to f(x)$ ïðè $n\to\infty$ у цьому інтервалі. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо похідні будь-якого порядку функції $f(x)$ у деякому проміжку $[-b, b]$ обмежені по абсолютній величині одним і тим же числом M, тобто $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, то у цьому проміжку функцію $f(x)$ можна розвинути у ряд Маклорена.

Доведення.

Запишемо абсолютну величину залишкового члена у формі Лагранжа та зробимо його оцінку:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

При $n\to\infty$ вираз $\dfrac{b^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, звідси

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

отже умова розвинення функції $f(x)$ виконана.

Приклад 15.6. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x = -4$ функцію $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$.

Розв'язання.

Знаходимо значення функції і її похідних при $x = -4$.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, $\quad f(-4) = -64 - 32 + 20 - 2 = -78$;

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$, $\quad f'(-4) = 48 + 16 - 5 = 59$;

$f''(x) = 6x - 4$, $\quad f''(-4) = -28$;

$f'''(x) = 6$, $\quad f'''(-4) = 6$;

$f^{IV}(x) = 0$, $\quad f^{IV}(-4) = 0$;

....

$f^{(n)}(x) = 0$, $\quad f^{(n)}(-4) = 0$;

....

Підставляємо ці значення у ряд (15.10). Одержуємо

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + \frac{59}{1!}(x+4) - \frac{28}{2!}(x+4)^2 + \frac{6}{3!}(x+4)^3,$$

або

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3.$$

Область збіжності $-\infty < x < \infty$.

Приклад 15.7. Розкласти функцію e^x в ряд Тейлора в околі точки $x = 2$.

Розв'язання.

Знаходимо значення функції і її похідних при $x=2$.

$$f(x)=e^x, \qquad f(2)=e^2;$$

$$f'(x)=e^x, \qquad f'(2)=e^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=e^x, \qquad f^{(n)}(2)=e^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Підставляємо ці значення у ряд (15.10) **.** Одержуємо

$$e^x=e^2+\frac{e^2}{1!}(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{e^2}{n!}(x-2)^n+\ldots,$$

або

$$e^x=e^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}\right).$$

Знайдемо область збіжності цього ряду. За ознакою Даламбера ряд збігається, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)}{n+1}\right|=|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Отже, при будь-якому x ця границя менше 1, а тому, область збіжності ряду буде: $-\infty<x<\infty$.

Запитання для самодіагностики

1. Який ряд називається функціональним?

2. Що називається областю збіжності ряду?

3. Що таке степеневий ряд?

4. Сформулювати теорему Абеля.

5. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?

6. Як використати ознаку Даламбера при знаходженні радіуса збіжності степеневого ряду?

7. Які властивості степеневого ряду вам відомі?

8. Що таке ряд Тейлора?

9. Який вигляд має ряд Маклорена?

10. Яка умова збіжності ряду Тейлора до функції $f(x)$?

11. Сформулювати теорему про розвинення функції у ряд Тейлора.

Приклади і вправи.

Приклади.

15.8. Знайти інтервали збіжності степеневих рядів.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 3^n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(x-1)^n.$$

Розв'язання.

а) Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$$3|x| + 3^2|x|^2 + \ldots + 3^n|x|^n + \ldots \ .$$

і застосуємо до нього радикальну ознаку Коші.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n|x|^n} = \lim_{n\to\infty} 3|x| = 3|x| \ .$$

Ряд збігається згідно з ознакою Коші, якщо $3|x| < 1$, тобто

$$|x| < \frac{1}{3}, \ -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \ .$$

Проміжок $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ є проміжком збіжності ряду. Дослідимо його збіжність на кінцях цього проміжку. ри $x=\frac{1}{3}$ маємо числовий ряд

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots,$$

який, звісно, розбігається.

При $x=-\frac{1}{3}$ отримуємо знакоочережний ряд

$$-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots,$$

який теж розбігається.

Отже, ряд збігається при $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

б) Тут $u_n=\frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n}$.

Застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot(x+1)^n}\right|=\frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x+1|}{3}.$$

Згідно з ознакою Даламбера ряд збігається, якщо $\frac{|x+1|}{3}<1$, звідки

$$|x+1|<3,\quad -3<x+1<3,\quad -4<x<2.$$

Отже, заданий ряд абсолютно збігається при $x\in(-4;2)$.

Дослідимо його збіжність на кінцях отриманого проміжку.

При $x=2$ маємо гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

який, як відомо, розбігається.

При $x=-4$ маємо знакоочережний ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

який за ознакою Лейбніца збігається, оскільки

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Отже, інтервал збіжності заданого ряду $[-4;2)$.

в) Маємо за умовою $u_n=\frac{3^n}{n!}(x-1)^n$.

За ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(x-1)^{n+1}\,n!}{(n+1)!\cdot 3^n\,(x-1)^n}\right|=|x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0.$$

Для будь-якого значення x за ознакою Даламбера ряд збігається абсолютно. Тому проміжок збіжності заданого ряду – вся числова вісь.

Вправи.

Знайти інтервали збіжності степеневих рядів.

15.9. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$.

15.10. $10x+100x^2+\ldots+10^n x^n+\ldots$.

15.11. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^n}{3^n(n+1)}+\ldots$.

15.12. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$.

15.13. $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}}+\ldots$.

15.14. $(2x-5)-\frac{(2x-5)^2}{3}+\frac{(2x-5)^3}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2x-5)^n}{2n-1}+\ldots$.

15.15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

15.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.

15.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2}$.

15.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$.

15.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

15.20. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

15.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

15.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$.

Глава 16. Розвинення у ряд основних елементарних функцій. Використаня рядів у наближенних обчисленнях.

16.1. Розвинення у ряд Маклорена основних елементарних функцій.

Розглянемо декілька прикладів розвинення у ряд Маклорена основних елементарних функцій. Нагадаємо, що ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad .$$

збігається в інтервалі $(-R, R)$ до функції $f(x)$. Отже, його сума $S(x) = f(x)$, якщо виконується умова: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ в цьому інтервалі. Аналогично ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

збігається в інтервалі $(a-R, a+R)$ до функції $f(x)$, якщо для ряду виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ в цьому інтервалі.

Розглянемо на прикладах розвинення в ряд Маклорена деяких функцій. Відмітемо, що для розвинення функції в ряд необхідно:
а).знайти коефіцієнти ряду Маклорена для даної функції;
б) обчислити радіус збіжности для отриманого ряду;
в) довести,що отриманий ряд збігається до функції $y = f(x)$.

Приклад 16.1. Розлянемо функцію $f(x) = e^x$.

Обчислемо значення функції і її похідних при $x = 0$.

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x.$$

Тоді числові коефіцієнти ряду (16.1)мають вигляд:

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ldots,\ f^{(n)}(0)=1$$

для будь-якого *n.*

Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд Маклорена та отримаємо:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots. \qquad (16.1)$$

Знайдемо радіус збіжності отриманого ряду ,а саме

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Отже ряд збігається в інтервалі $(-\infty,+\infty)$.

Цей ряд збігається до функції e^x при будь-яких значеннях x, тому що в будь- якому проміжку $[-b,b]$ функція e^x та її похідні за абсолютною величиною обмежені числом e^b ( )

Приклад 16.2. Розглянемо функцію $f(x)=\sin x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x=0$:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=\sin x, & f(0)=0; \\
f'(x)=\cos x; & f'(0)=1; \\
f''(x)=-\sin x; & f''(0)=0; \\
f'''(x)=-\cos x; & f'''(0)=-1; \\
f^{\mathrm{iv}}(x)=\sin x; & f^{\mathrm{iv}}(0)=0.
\end{array}$$

Неважко помітити, що похідні парного порядку $f^{(2n)}(0)=0$, а похідні непарного порядку $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$ $\quad (n=1,2,3,\ldots)$. Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд Маклорена та одержимо розвинення сінуса:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \qquad (16.2)$$

Знайдемо інтервал збіжності даного ряду. За ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!x^{2n-1}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1.$$

для будь-якого x. Отже ряд збігається в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Цей ряд збігається до функції $\sin x$ тому що всі її похідні обмежені одиницею ( )

Приклад 16.3. $f(x) = \cos x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x, & f(0) = 1; \\ f'(x) = -\sin x; & f'(0) = 0; \\ f''(x) = -\cos x; & f''(0) = -1; \\ f'''(x) = \sin x; & f'''(0) = 0; \\ f^{\text{iv}}(x) = \cos x; & f^{\text{iv}}(0) = 1. \end{array}$$

Таким чином, коефіцієнти даного ряду: $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ та $f^{(2n-1)}(0) = 0$, отже

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots. \qquad (16.3)$$

Аналогічно з попереднім рядом область збіжності $(-\infty, +\infty)$. Ряд збігається до функції $\cos x$, тому що всі його похідні обмежені одиницею.

Звернемо увагу, що функція $\sin x$ непарна та розвинута в ряд за непарними степенями, функція $\cos x$ – парна та розвинута в ряд за парними степенями.

Приклад 16.4.Біноміальний ряд : $f(x) = (1+x)^m$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$f(x)=(1+x)^m; \qquad f(0)=1;$$
$$f'(x)=m(1+x)^{m-1} \qquad f'(0)=m;$$
$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}; \qquad f''(0)=m(m-1);$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}; \quad f'''(0)=m(m-1)(m-2).$$

Звідси видно, що

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots\big(m-(n-1)\big)(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots\big(m-(n-1)\big).$$

Підставимо ці значення коефіцієнтів в ряд Маклорена та одержимо розвинення даної функції в степеневий ряд.

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots m(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (16.4)$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряда:

$$|a_n|=\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\right|;|a_{n+1}|=\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}\right|;$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{n!m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right|=1.$$

Отже, ряд збігається на інтервалі $(-1,1)$. В граничних точках при $x=-1$ та $x=1$ ряд може збігатись чи ні в залежності від показника степеня m.

Досліджений ряд збігається на інтервалі $(-1,1)$ до функції $f(x)=(1+x)^m$,тобто сума ряда $S(x)=(1+x)^m$ при $|x|<1$ (без доведення)

Приклад 16.5. Розвинемо в ряд Маклорена функцію:

$$f(x) = \ln(1+x).$$

Для розвинення в ряд цієї функції використаємо біноміальний ряд при $m = -1$. Одержимо

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^n + \ldots$$

На основі властивості степеневих рядів (степеневий ряд можна інтегрувати в області його збіжності) знайдемо інтеграл від лівої та правої частин даного ряду.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots . \qquad (16.5)$$

Знайдемо область збіжності даного ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

тобто областю збіжності даного ряду є інтервал $(-1, +1)$.

Дослідемо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = -1$ одержимо числовий ряд із загальним членом $u_n = (-1)^{2n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. Цей ряд є гармонійним рядом, тобто розбігається. При $x = +1$ одержимо числовий ряд із загальним членом $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Ряд за ознакою Лейбніца збігається. Таким чином, область збіжності даного ряду є проміжок $(-1, +1]$.

Приклад 16.6. Розвинемо в ряд Маклорена функцію: $f(x) = \mathrm{arctg}\, x.$

Використуємо біноміальний ряд при $m = -1$, а замість x підставимо x^2. Одержимо

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n} + \ldots \qquad (16.6)$$

Інтегруючи цей ряд на проміжку його збіжності $(-1,1)$ одержуємо ряд

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad (16.7)$$

Можна перевірити, що цей ряд на кінцях інтервала збігається, тобто його областю збіжності є проміжок $[-1,+1]$.

Приклад 16.7. Знайти розкладання в ряд $\int \frac{\cos x}{x} dx$.

Розв'язання.

Розкладаємо в ряд $\cos x$ за формулою (16.3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Тоді

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} + \ldots$$

Тепер виконуємо почленне інтегрування.

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{2!} + \int \frac{x^3 dx}{4!} - \ldots + \int \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} dx + \ldots =$$

$$= C + \ln|x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} + \ldots$$

Знайдемо область збіжності, враховуючи, що $x \neq 0$, . Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2} \cdot 2n \cdot (2n)!}{(2n+2)\cdot(2n+2)! \cdot x^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2 \cdot 2n}{(2n+2)^2 \cdot (2n+1)}\right| = 0.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається на всій числовій осі, за винятком $x = 0$.

16.2. Використання рядів у наближенних обчисленнях.

У наближених обчисленнях степеневі ряди грають винятково велику роль. За їх допомогою складені таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів, таблиці значень інших функцій, які використують в різних областях знань, наприклад, в теорії ймовірностей та математичній статистиці. Крім того, розвинення функцій у степеневий ряд корисне для їх теоретичного дослідження. Головним питанням при використанні степеневих рядів в наближеному обчисленні є питання оцінки похибки при заміні суми ряда сумою його перших *n* членів.

Розглянемо два випадки:

1) функція розвинена в знакопереміжний ряд;
2) функція розвинена в знакопостійний ряд.

16.2.1. Обчислення за допомогою знакопереміжних рядів.

Нехай функція $f(x)$ розвинена в знакопереміжний степеневий ряд. Тоді при обчисленні цієї функції для конкретного значення x отримуємо числовий ряд, до якого можна застосувати ознаку Лейбніца. Відповідно цієї ознаки, якщо суму ряда замінити сумою його перших *n* членів, то абсолютна похибка не перевищує першого члена залишку цього ряда, тобто

$$|S - S_n| < u_{n+1} \qquad (16.8)$$

Приклад 16.8.Обчислити $\cos 5^\circ$ с точністю до 0,0001.

Будемо використовувати ряд Маклорена для $f(x) = \cos x$,(16.3) підставивши значення кута в радіанах:

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} - \ldots.$$

Якщо порівняти перший та другий члени ряду із заданою точністю, то .

$u_1 = 1 > 0.0001; \quad u_2 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} \approx 0,0038 > 0,0001.$ Третій член розвиненння

$$u_3 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} < \frac{(0.1)^4}{4!} = \frac{1}{24\cdot 10000} < \frac{1}{10\cdot 10000} = 0,00001,$$

що менше за задану точність обчислення. Отже, для обчислення $\cos 5^\circ$ достатньо залишити два члени ряду, тобто

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} = 1 - 0,0038 = 0,9962.$$

Таким чином, $\cos 5^\circ \approx 0,9962$, що співпадає із значенням $\cos 5^\circ$, яке наведено у справочних таблицях.

Приклад 16.9. Обчислити $\sqrt[3]{9}$ с точністю 0,001.

Будемо використовувати формулу біноміального ряда (16.4). Для цього запишемо $\sqrt[3]{9}$ у вигляді

$$\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{\frac{9}{8}} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}.$$

У цьому виразі $m = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{8}$,

$$\sqrt[3]{9} = 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{1}{2!} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3 \frac{1}{3!} + \ldots\right] =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{2}{3^2\cdot 8^2\cdot 2!} + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 8^3\cdot 3!} - \ldots\right).$$

Порівняємо кожний із членів ряду з точністю, яка задана. Бачимо, що $u_4 = \dfrac{4\cdot 5}{3^3\cdot 8^3\cdot 3!} < 0,001$. Отже, для обчислення $\sqrt[3]{9}$ достатньо залишити три члени ряду.

$$\sqrt[3]{9} \approx 2\left(1+\frac{1}{24}-\frac{1}{576}\right), \qquad \text{або} \qquad \sqrt[3]{9} \approx 2,080.$$

16.2.2. Обчислення за допомогою знакододатних рядів.

Розглянемо оцінку похибки для знакододатнього ряду.

Приклад 16.10. Обчислити число e з точністю до 0,001.

В ряд для функції $f(x)=e^x$ (16.1) підставимо $x=1$. Одержимо

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

Оцінемо похибку, яка виникає при заміні суми ряду сумою перших n членів. Запишемо очевидну нерівність :

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3,$$

тобто 2<e<3. Використуємо формулу залишкового члену ряду в формі Лагранжа,

$$R_n = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \quad 0<\theta<1.$$

З умови задачі треба знайти *n* таке, щоб виконувалась нерівність

$$R_n < 0,001 \quad \text{або} \quad \frac{3}{(n+1)!} < 0,001.$$

Легко перевірити, що при *n* = 6:

$$R_6 = \frac{e^{\theta}}{7!} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} \approx 0,0006 < 0,001.$$

Отже,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

Звідси

$$e \approx 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181.$$

Приклад 16.11. Обчислити $\ln 2$ з точністю $0,0001$.

Зауважимо, що для обчислення логарифмів можна було б застосувати ряд для функції $f(x) = \ln(1+x)$, але цей ряд дуже повільно збігається і для досягнення заданої точності треба було б взяти 9999 членів! Тому для обчислення логарифмів як правило використується ряд для функції

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right),$$

який збігається в інтервалі $(-1,1)$. Обчислимо $\ln 2$ за допомогою цього ряда. Нехай $\frac{1+x}{1-x} = 2$, тоді $x = \frac{1}{3}$. Отже

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \ldots\right),$$

або

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \frac{1}{(2n+1)\cdot 9^n} + \ldots\right).$$

Для того щоб обчислити $\ln 2$ з заданою точністю візьмемо суму перших чотирьох членів:

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3}\right).$$

Залишок ряда

$$R_4=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9\cdot 9^4}+\frac{1}{11\cdot 9^5}+\frac{1}{13\cdot 9^6}+\dots\right)$$

відкинемо. Оцінемо похибку. Очевидно, що

$$R_4<\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9\cdot 9^4}+\frac{1}{9\cdot 9^5}+\frac{1}{9\cdot 9^6}+\dots\right)$$

або

$$R_4<\frac{2}{3\cdot 9^5}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\dots\right).$$

Звідси

$$R_4<\frac{1}{3\cdot 9^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 9^5\cdot 8}=\frac{1}{78732}<\frac{1}{10000}=0,0001.$$

$$\ln 2\approx 0,66667+0,02469+0,00165+0,00006=0,69307\approx 0,6931.$$

Таким чином, у ряді, який було використано для обчислення, достатньо було взяти тільки чотири перших доданка замість 9999 в ряді для функції $f(x)=\ln(1+x)$.

16.2.3. Обчислення визначених інтегралів.

Розглянемо наближене обчислення визначених інтегралів за допомогою розвинення в ряд підінтегральної функції.

Приклад 16.12. Обчислити з точністю до 0,001 значення інтегралу

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

Підінтегральну функцію розвинемо в ряд Маклорена. В ряді для функції $f(x)=e^x$ (16.1) замінемо x на $-x^2$, одержимо:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots.$$

Знайдемо інтеграл від лівої та правої частин цього ряду, отже

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}+\cdots\right)\Bigg|_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(n-1)!}.+\cdots.$$

Отриманий ряд є знакопереміжний. Оцінемо похибку, яка виникає при заміні суми ряду сумою перших n членів, за ознакою Лейбниця. Легко бачити, що якщо суму ряда замінити сумою перших п'ятьох членів,то похібка не перевищить $u_6=\dfrac{1}{11\cdot 5!}<0.001.$Отже,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}=1-0.3333+0.1-0.0238+0.0046=0.7475.$$

Таким чином:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0.7475.$$

Замітимо, що цей інтеграл в аналітичної формі не береться.

Приклад 16.13. Обчислити наближено: $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ с точністю 0,001.

Візьмемо ряд Маклорена для функції $\cos x$:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}+\ldots$$

і змінимо x на $\sqrt{x}$. Тоді дістанемо:

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots\ .$$

Цей ряд збігається на всій числовій осі, в чому можна переконатися за допомогою ознаки Даламбера стосовно степеневих рядів. Інтеграл від лівої та правої частини останньої рівності в межах від 0 до 1 дає:

$$\int_0^1\cos\sqrt{x}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(n+1)(2n)!}+\ldots .$$

Оцінемо похибку, яка виникає при заміні суми ряду сумою перших n членів, за ознакою Лейбниця. Обчислюємо послідовно члени ряда та порівнюємо їх значення із заданою точністю.

$$u_0=1,\quad u_1=0,25,\quad u_2=0,0139,\quad u_3=0,0003<0,001.$$

Тобто для обчисленя інтегралу із заданою точністю достатньо залишити три члени ряду. Отже,

$$\int_0^1\cos\sqrt{x}dx\approx 1-0.25+0,0139\approx 0,764.$$

16.2.4. Використання рядів при розв'язку диференціальних рівнянь

Якщо інтегрування диференціального рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається знайти, то його розв'язок в деяких випадках можна шукати у вигляді степеневого ряду

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(x-x_0\right)^n .$$

Коефіцієнти C_n знаходяться шляхом підстановки ряду в задане рівняння і прирівнянням коефіцієнтів при однакових степенях x в лівій і правій частинах одержаної рівності.

Можна також шукати розв'язок рівняння у вигляді ряду Тейлора

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n ,$$

де $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=f\left(x_0,y_0\right)$ і подальші похідні $y^{(n)}\left(x_0\right)$ $\left(n=2,3,\ldots\right)$ послідовно знаходяться за допомогою диференціювання даного рівняння і підстановки замість x числа x_0.

Приклад 16 .14.Знайти розв'язок рівняння $y'=y+x^2$**,** $y\left(0\right)=-2$**.**

Розв'язання.

Знайдемо розв’язок цього рівняння у вигляді степеневого ряду

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots .$$

Треба знайти коефіцієнти $C_n\left(n=0,1,2,\ldots\right)$, $C_0=y_0=-2$. Підставляємо цей ряд в дане рівняння, але спочатку знайдемо y':

$$y'=C_1+2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+\ldots$$

Тепер маємо

$$C_1+2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+\ldots=x^2+C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах одержаної рівності. Отримуємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів.

$$\begin{array}{l|ll} x^0 & C_1 = C_0, & C_1 = -2, \\ x^1 & 2C_2 = C_1, & C_2 = -1, \\ x^2 & 3C_3 = 1 + C_2, & C_3 = 0, \\ x^3 & 4C_4 = C_3, & C_4 = 0, \\ x^4 & 5C_5 = C_4, & C_5 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x^{n-1} & nC_n = C_{n-1}, & C_n = 0. \end{array}$$

Отже, $y = -2 - 2x - x^2$.

Приклад 16.15.Знайти розв'язок рівняння $y'' = xy$ при почат**ко**вих умовах $y(0) = 1$**,** $y'(0) = 0$**.**

Розв'язання.

1 спосіб.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді степеневого ряду:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

Тепер треба знайти коефіцієнти $C_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$C_0 = y(0) = 1.$$

Диференціюємо степеневий ряд

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + nC_n x^{n-1} + \ldots$$

Звідки знайдемо

$$C_1 = y'(0) = 0.$$

Диференціюємо ще раз степеневий ряд

$$y'' = 2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \ldots + n(n-1)C_n x^{n-2} + \ldots$$

Підставляємо в дане рівняння y, y'', маємо

$$\begin{aligned} &2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \ldots + n(n-1)C_n x^{n-2} + \ldots = \\ &= C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + \ldots + C_n x^{n+1} + \ldots \end{aligned}$$

Тепер прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2C_2 = 0, \\ x^1 & 2\cdot 3C_3 = C_0, \\ x^2 & 3\cdot 4C_4 = C_1, \\ x^3 & 4\cdot 5C_5 = C_2, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Звідки

$$C_2 = 0,\ C_3 = \frac{1}{3!},\ C_4 = 0,\ C_5 = 0,\ C_6 = \frac{C_3}{5\cdot 6} = \frac{4}{6!},$$

$$C_7 = \frac{C_4}{6\cdot 7} = 0,\ C_8 = \frac{C_5}{7\cdot 8} = 0,\ C_9 = \frac{C_6}{8\cdot 9} = \frac{4\cdot 7}{9!},\ \ldots$$

Отже,

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \ldots$$

Запитання для самодіагностики

1. Записати розкладання у ряд Маклорена функції $y = e^x$
2. Записати розкладання у ряд Маклорена функції $y = \sin x$
3. Записати розкладання у ряд Маклорена функції $y = \cos x$
4. Записати розкладання у ряд Маклорена функції $y = (1+x)^m$
5. Записати розкладання у ряд Маклорена функції $y = \ln(1+x)$
6. Вказати області збіжності розглянутих рядів.
7. Як зробити оцінку похибки при наближених обчислюваннях за допомогою знакопереміжного ряду?
8. Як зробити оцінку похибки при наближених обчислюваннях за допомогою знакопостійного ряду ряду?

Приклади та вправи.

Приклади.

16.16. Розкласти в ряд Тейлора по степенях $(x-1)$ функцію $f(x) = \ln x$.

Розв'язання.

Обчислимо значення заданої функції і її послідовних похідних при $x = 1$:

$$f(x) = \ln x, \qquad f(1) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(1) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2x^3}, \qquad f'''(1) = \frac{1}{2},$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{1}{3x^4}, \qquad f^{IV}(1) = -\frac{1}{3},$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot x^n}, \qquad f^{(n)}(1)=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

. . . .

Шуканий ряд Тейлора для заданої функції $f(x)=\ln x$ має вигляд

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+... ,$$
$0<x\le 2$.

16.17. Використовуючи розкладання в ряд елементарних функцій, записати розкладання в степеневий ряд функціЇ

$$f(x)=x\ln(1+x^2).$$

Розв'язання.

Оскільки

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+..., \quad (-1<x\le 1),$$

то, заміняючи у цієї рівності x на x^2, одержуємо

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+..., \ (-1\le x\le 1),$$

а тому

$$x\ln(1+x^2)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n}+... , \ (-1\le x\le 1).$$

16.18. Розкласти в степеневий ряд функцію

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Розв'язання.

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-...\right)=$$

$$=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+...+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+..., \qquad (-1<x<1).$$

16.19. Знайти наближено з точністю до 0,01 суму ряду.

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}+... \, .$$

Розв'язання.

Щоб обчислити суму заданого знакопочережного ряду з точністю до 0,01, треба взяти стільки його членів, щоб наступний член ряду був за модулем менший, ніж 0,01. Отже,

$$S=1-0{,}125+0{,}016-0{,}005+...\approx 1-0{,}13+0{,}02=0{,}89\,.$$

16.20. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання.

Наближене обчислення коренів здійснюється за допомогою біноміального ряду.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...,$$
$$(-1<x<1).$$

Отже,

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\frac{1}{9^2}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\frac{1}{9^3}+\ldots\right)=$$

$$=3\left(1+\frac{1}{27}-\frac{1}{729}+\frac{5}{9^5}-\ldots\right)=3+\frac{1}{9}-\frac{1}{243}+\frac{5}{9^4}-\ldots$$

Одержаний ряд – знакоочережний. Його похибка менша за модулем, ніж перший відкинутий член. Оскільки $\frac{5}{9^4}<0{,}001$, то

$$\sqrt[3]{30}\approx 3+\frac{1}{9}-\frac{1}{243}=\frac{755}{243}=3{,}107 \text{ з точністю до } 0{,}001.$$

16.21. Знайти наближене значення e^2 з точністю до $0{,}01$ обмежуючись першими восьма членами ряду Маклерена для e^x.

Розв'язання.

Застосуємо формулу

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\quad (-\infty<x<\infty).$$

При $x=2$ маємо

$$e^2\approx 1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+\frac{2^7}{7!}.$$

Припустима при цьому похибка оцінюється таким чином:

$$R_8=\frac{2^8}{8!}+\frac{2^9}{9!}+\ldots=\frac{2^8}{8!}+\frac{2^9}{8!9}+\frac{2^{10}}{8!9\cdot 10}+\ldots=$$

$$=\frac{2^8}{8!}\left(1+\frac{2}{9}+\frac{2^2}{9\cdot 10}+\frac{2^3}{9\cdot 10\cdot 11}+\ldots\right)<\frac{2^8}{8!}\left(1+\frac{2}{9}+\frac{2^2}{9\cdot 9}+\frac{2^3}{9\cdot 9\cdot 9}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2^8}{8!}\left(1+\frac{2}{9}+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^3+\ldots\right)=\frac{2^8}{8!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{2^8\cdot 9}{8!\cdot 7}<0{,}008<0{,}01.$$

Отже,

$$e^2 \approx 1+2+2+1,333+0,667+0,267+0,089+0,025 \approx 7,38$$

з точністю до $0{,}01$.

16.22. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання.

Цей інтеграл, як і багато інших необхідних інтегралів, не можна обчислити за формулою Ньютона – Лейбніца. Але його можна обчислити наближено.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad (-\infty < x < \infty);$$

Інтегруючи почленно цей ряд, одержуємо

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} - \ldots =$$

$$= 0,25 - 0,00521 + 0,000098 - \ldots$$

Одержаний числовий ряд є рядом Лейбніца. Оскільки його третій член за абсолютною величиною менший заданої похибки $0{,}0001$, то

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx 0,25 - 0,0052 = 0,2448.$$

Вправи.

Розкласти задані функції в ряд Тейлора.

16.23. $f(x) = \frac{1}{x}$ по степенях $(x-1)$.

16.24. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ по степенях $(x+1)$.

16.25. $f(x)=e^{5x}$ по степенях $(x-2)$.

16.26. $f(x)=\cos x$ по степенях $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

16.27. Обчислити наближено $\frac{1}{\sqrt{e}}$ з точністю до 0,001.

16.28. Обчислити наближено $\ln 1{,}04$ з точністю до 0,0001.

16.29. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,0001.

16.30. Обчислити $\cos 18^\circ$ з точністю до 0,0001.

16.31. Обчислити $\sqrt[10]{1027}$ з точністю до 0,001.

16.32. Обчислити $\cos 20^\circ$, обмежуючись двома першими членами степеневого ряду функції $\cos x$, і оцінити похибку.

16.33. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю до 0,0001.

16.34. Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ з точністю до 0,001.

16.35. З якою точністю буде знайдене число $\frac{\pi}{4}$, якщо скористатися рядом $\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$ і взяти суму його перших п'яти членів при $x=1$?

16.36. Скільки треба взяти членів ряду $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$, щоб обчислити $\sin 15^\circ$ з точністю до 0,0001?

16.37. Обчислити $\sin 18^\circ$ взявши три члена розкладання в ряд Маклорена функції $f(x)=\sin x$, та оцінити похибку.

16.38. Обчислити $\sqrt[3]{e}$ взявши три члена розкладання в ряд Маклорена функції $f(x)=e^x$, та оцінити похибку.

16.39. Знайти розв'язок рівняння $(1-x)y'=1+x-y$, якщо $y(0)=0$.

Відповіді до вправ

Відповіді до глави 1.

1.23. $\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+x^2+C.$ **1.24.** $3x^3-8\sqrt[4]{x^5}+2\sqrt{x^3}+C.$

1.25. $-\frac{2}{3\sqrt{x^3}}-e^x+\ln x+C.$ **1.26.** $-\frac{16}{x}+\frac{48}{\sqrt{x}}+9\ln|x|+C.$

1.27. $x^6+\frac{3x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+2x+C.$ **1.28.** $\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+C.$

1.29. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right|+C.$ **1.30.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$

1.31. $3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-x+C.$ **1.32.** $-tgx-ctgx+C.$

1.33. $tgx-ctgx+C.$ **1.34.** $x-tgx+C.$

1.35. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}ctgx+C.$ **1.36.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C.$

1.37. $3tgx-2x+C.$ **1.38.** $-5ctgx-2x^2+C.$

1.39. $tgx+C.$ **1.40.** $2\sin x+C.$

1.41. $-\cos 2x+C.$ **1.42.** $\frac{\cos 4x}{2}+C.$

1.43. $\frac{(1-3x)^{18}}{-54}+C.$ **1.44.** $\frac{-3}{4(2x-3)^2}+C.$

1.45. $\frac{-\sqrt{(8-2x)^3}}{3}+C.$ **1.46.** $\frac{\sqrt[4]{(12x-5)^7}}{21}+C.$

1.47. $\frac{1}{3}e^{3x-5}+C.$ **1.48.** $-\frac{\ln|\cos 3x|}{3}+C.$

1.49. $-\frac{\cos 5x}{5}+C.$ **1.50.** $-\frac{\ln|11-4x|}{4}+C.$

1.51. $\frac{1}{20}\mathrm{arc}\,tg\frac{5x}{4}+C.$ **1.52.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C.$

1.53. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right|+C.$ **1.54.** $-\frac{1}{7}ctg(7x-2)+C.$

1.55. $\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+C.$ **1.56.** $\ln\left|e^x-3\right|+C.$

1.57. $\ln(x^2-3x+8)+C.$ **1.58.** $3\ln\left|\ln x\right|+C.$

1.59. $\frac{3}{2}\ln\left|1-2\cos x\right|+C.$ **1.60.** $\frac{3}{8}\ln(2x^4+3)+C.$

Відповіді до глави 2.

2.43. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2)^2}+C.$ **2.44.** $\frac{1}{3}arctgx^3+C.$

2.45. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}+C.$ **2.46.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4}+C.$

2.47. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{3+4x^2}\right|+C.$ **2.48.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|+C.$

2.49. $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+\sqrt{4+x^8}\right)+C.$ **2.50.** $-\frac{1}{2}e^{-\left(x^2+1\right)}+C.$

2.51. $\frac{1}{4}e^{4\sin x}+C.$ **2.52.** $-\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C.$

2.53. $\frac{\sin^4 x}{4}+C.$ **2.54.** $\frac{5}{11}\sqrt[5]{\ln^{11} x}+C.$

2.55. $\frac{1}{18}\ln^6\left(3x-2\right)+C.$ **2.56.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{e^{3x}+2}{e^{3x}-2}\right|+C.$

2.57. $\frac{5}{8}\sqrt[5]{tg^8 x}+C.$ **2.58.** $-2\cos\sqrt{x}+C.$

2.59. $\frac{1}{2}\sin(x^2-1)+C.$ **2.60.** $-e^{\frac{1}{x}}+C.$

2.61. $3\sqrt[3]{1+tgx}+C.$ **2.62.** $e^{tgx}+C.$

2.63. $\frac{1}{12}(x^2+1)^6+C.$ **2.64.** $2\sqrt{5+\sin x}+C.$

2.65. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(1+\ln x\right)^4}+C.$ **2.66.** $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

2.67. $-\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2+C.$ **2.68.** $\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}+C.$

2.69. $e^{\sqrt{2x-1}}+C.$ **2.70.** $\frac{2}{3}\sqrt{arctg^3(e^x)}+C.$

2.71. $-\frac{1}{\ln|\sin x|}+C.$ **2.72.** $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3|x|}-6\sqrt{\ln|x|}+C.$

2.73. $-\frac{1}{3\arcsin^3 x}+C.$ **2.74.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arc}tg\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}+C.$

2.75. $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$ **2.76.** $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+C.$

2.77. $(7-x)\cos x+\sin x+C.$ **2.78.** $\frac{1-3x}{2}\sin 2x-\frac{3\cos 2x}{4}+C.$

2.79. $\frac{1}{2}e^x\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$ **2.80.** $xtgx+\ln|\cos x|+C.$

2.81. $-\frac{xctg3x}{3}+\frac{l\,n|\sin 3x|}{9}+C.$ **2.82.** $\frac{3x-11}{9}e^{-3x}+C.$

2.83. $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C.$ **2.84.** $x\ln(1+x^2)-2x+2arctgx+C.$

2.85. $\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C.$ **2.86.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

2.87. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$

2.88. $e^{-x}(x^2-4x-4)+C.$ **2.89.** $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C.$

2.90. $\frac{1}{2}x(\sin\ln x+\cos\ln x)+C.$ **2.91.** $\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2}+\frac{\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|}{2}+C.$

2.92. $\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2}+2\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+C.$

2.93. $\frac{1}{3}\mathrm{arc}tg\frac{x-3}{3}+C.$ **2.94.** $\frac{1}{3}\arcsin(3x+5)+C.$

2.95. $\frac{1}{2}\mathrm{arc}tg\frac{x+1}{2}+C.$ **2.96.** $\frac{1}{4}\mathrm{arc}tg\frac{2x+1}{2}+C.$

2.97. $\arcsin(x-2)+C.$ **2.98.** $\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+28}\right|+C.$

2.99. $\frac{2}{\sqrt{11}}\mathrm{arc}tg\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+C.$ **2.100.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x-5}{5}+C.$

2.101. $3\ln(x^2-4x+13)+\frac{11}{3}arctg\frac{x-2}{3}+C.$ **2.102.** $3\sqrt{x^2-4x+5}+C.$

2.103. $\frac{2}{3}\ln(9x^2-6x+2)+5arctg(3x-1)+C.$

2.104. $3\sqrt{2x^2-12x+15}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+7{,}5}\right|+C.$

2.105. $\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+3)+\frac{9}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$

2.106. $-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

2.107. $2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C.$ **2.108.** $2\ln|x-2|+\ln|x+5|+C.$

2.109. $3\ln|x-1|-\ln|x+2|+C.$

2.110. $4\ln|x-1|+5\ln|x-4|-7\ln|x+3|+C.$

2.111. $3\ln|x|+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$

2.112. $3\ln|x|+3\ln|x+1|-7\ln|x+2|+C.$

2.113. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$

2.114. $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$

2.115. $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C.$ **2.116.** $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln|x-1|+C.$

2.117. $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C.$ **2.118.** $2\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C.$

2.119. $\ln|x-5|-\frac{1}{x}-\frac{4}{x-5}+C.$ **2.120.** $\frac{1}{x}+\ln|x-1|+C.$

2.121. $\ln|x-2|-\frac{9}{x-2}-\frac{11}{(x-2)^2}+C.$

2.122. $\ln(x^2+9)-\ln|x-3|-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$

2.123. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{9}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{2}{x}+C.$

2.124. $\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)-3\ln|x|+2arctg\frac{x-1}{2}+C.$

2.125. $\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+13)+\frac{2}{3}arctg\frac{x-2}{3}+C.$

2.126. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}arctgx+C.$

Відповіді до глави 3.

3.30. $C-\dfrac{2}{tg\frac{x}{2}+5}.$

3.31. $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{tg\frac{x}{2}+2}{tg\frac{x}{2}-2}\right|+C.$

3.32. $\frac{2}{3}\mathrm{arc}\,tg\dfrac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}+C.$

3.33. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$

3.34. $\frac{1}{\sqrt{15}}\mathrm{arc}\,tg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}tgx\right)+C.$

3.35. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{tgx-3}{tgx+3}\right|+C.$

3.36. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C.$

3.37. $-\frac{x}{17}+\frac{1}{4}\ln|\sin x|-\frac{1}{68}\ln|\sin x+4\cos x|+C.$

3.38. $C-l\,\mathrm{n}|\cos x-\sin x|\ .$

3.39. $\frac{tg5x}{5}-x+C.$

3.40. $-\frac{ctg^2x}{2}-\ln|\sin x|+C.$

3.41. $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C.$

3.42. $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C.$

3.43. $tgx+\frac{1}{3}tg^3x+C.$

3.44. $-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x+C.$

3.45. $\frac{tg^3x}{3}+2tgx-\frac{1}{tgx}+C.$

3.46. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 2x}{16}+C.$

3.47. $\frac{\cos^6 x}{6}-\frac{\cos^4 x}{4}+C.$

3.48. $-\dfrac{1}{\sin x}-\sin x+C.$

3.49. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\sin 2x^2}{8}+C.$

3.50. $\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{\sin(2e^x)}{4}+C.$

3.51. $2\sqrt{tgx}+C.$

3.52. $-\dfrac{\cos 6x}{12}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C.$

3.53. $\dfrac{\sin 7x}{14}-\dfrac{\sin 11x}{22}+C.$

3.54. $\dfrac{3}{5}\sin\dfrac{5x}{6}+3\sin\dfrac{x}{6}+C.$

3.55. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin 16x}{16}+\dfrac{\sin 10x}{10}+\dfrac{\sin 6x}{6}+x\right)+C.$

3.56. $2\sqrt{tgx}+C.$

3.57. $4\sqrt[4]{tgx}+C.$

3.58. $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C.$

3.59. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|tgx+\sqrt{tg^2x+\dfrac{2}{5}}\right|+C.$

3.60. $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+C.$

3.61. $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}-\dfrac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x}+C.$

3.62. $2\sqrt{x+9}+3\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|+C.$

3.63. $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{9}{4}\ln(2\sqrt{x}+3)+C.$

3.64. $\dfrac{3}{20}\cdot\sqrt[3]{(2x+1)^5}-\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^2}+C.$

3.65. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\,\mathrm{arc}\,tg\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}+C.$

3.66. $2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+C.$

3.67. $\dfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)+C.$

3.68. $6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C.$

3.69. $4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4arctg\sqrt[4]{x}+C.$

3.70. $4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}+12\sqrt[12]{x}+12\ln|x|-24\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C.$

3.71. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C.$ **3.72.** $-\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}+C.$

3.73. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{x}{3}+C.$

3.74. $\dfrac{x^3}{27\sqrt{(9+x^2)^3}}+C.$ **3.75.** $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$

3.76. $\ln\left|\sqrt{x^2+4}+x\right|-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}+C.$

3.77. $\dfrac{(3x^2+50)\sqrt{(x^2-25)^3}}{15}+C.$

3.78. $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C.$ **3.79.** $-\dfrac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}+C.$

Відповіді до глави 4.

4.13. 20. **4.14.** $\dfrac{17}{6}$. **4.15.** 42. **4.16.** $\dfrac{1}{2}$. **4.17.** 125. **4.18.** $\dfrac{2}{3}$. **4.19.** $\dfrac{7}{4}$. **4.20.** $\dfrac{100}{3}$.
4.21. $\dfrac{\pi}{6}$. **4.22.** $\dfrac{2}{3}$. **4.23.** 0. **4.24.** $\dfrac{1}{10}\ln 9$. **4.25.** $\dfrac{1}{4}\ln 3$. **4.26.** $\dfrac{\pi}{12}$. **4.27.** $\dfrac{\pi}{6}$.
4.28. $\dfrac{\pi}{4}$. **4.29.** 0. **4.30.** $\dfrac{4}{45}$.

Відповіді до глави 5.

5.23. 9. **5.24.** 6.

5.25. 2. **5.26.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **5.27.** $\dfrac{e-1}{\pi}$. **5.28.** $\arcsin\dfrac{1}{4}$. **5.29.** $\dfrac{1}{4}$.

5.30. $\dfrac{1}{4}$. **5.31.** $1-\cos 1$. **5.32.** $6+4\ln 2$. **5.33.** $36+2\ln 3$.

5.34. 2. **5.35.** 1. **5.36.** $\dfrac{1}{4}\ln 3$. **5.37.** $\dfrac{2}{7}$. **5.38.** $\dfrac{\pi}{48}$.

5.39. $\frac{2-\sqrt{2}}{9}$. **5.40.** $\frac{81\pi}{8}$. **5.41.** 4. **5.42.** $\frac{1}{9}$.

5.43. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **5.44.** $1-\frac{2}{e}$. **5.45.** 4. **5.46.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$.

5.47. 1. **5.48.** $5\operatorname{arctg}3-\frac{3}{2}$. **5.49.** $\frac{\pi(4\sqrt{3}-3)}{12}-\ln\sqrt{2}$.

5.50. $\frac{e^2-5}{e}$. **5.51.** $\frac{\pi^2}{4}-2$. **5.52.** $\frac{\pi}{8}$. **5.53.** $\frac{1}{4}$.

5.54. Розб. **5.55.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **5.56.** Розб. **5.57.** Розб.

5.58. π. **5.59.** $\frac{\pi}{6}$. **5.60.** $\frac{1}{2}$.. **5.61.** Розб.

5.62. Розб. **5.63.** 8. **5.64.** 4.

Відповіді до глави 6.

6.36. $\frac{56}{27}$ **6.37.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;**6.38.** $\frac{1}{2}\ln 3$.**6.39.** $\frac{4}{3}$.$\sqrt{2}$ **6.40.** $\frac{4}{3}$.**6.41..** $2\sqrt{2}$.**6.42.** 8 **6.43.** 8. **6.44.** $8(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.**6.45** $\frac{1}{6}$.;**6.46.** 2.**6.47.** $\ln 2$.**6.48.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.**6.49.** 9.

6.50. $4-3\ln 3$.**6.51.** $\frac{1}{3}$.**6.52.** $\frac{1}{3}+\ln 3$.**6.53.** $\frac{7}{6}$.. **6.54.** 7. **6.55.** $\frac{512\pi}{15}$.**6.56.** $\frac{\pi^2}{2}$.

6.57. $\frac{3\pi}{10}$. **6.58.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.**6.59.** $\frac{32\pi}{3}$. **6.60.** $\frac{70\pi}{3}$.**6.61.** 12π. **6.62.** $\frac{112\pi}{5}$.**6.63.** $\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$. **6.64.** $\frac{\pi}{2}$. **6.65.** $\frac{20\pi}{3}$. **6.66.** $4\pi^2$.**6.67.** $6\pi^2$. **6.68.** $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$.**6.69.** $\frac{\pi(e^2-1)}{4}$.**6.70.** $\frac{512\pi}{15}$. **6.71.** 24π. **6.72.** 16π. **6.73.** 4π.

6.74. $\frac{28}{15}\pi$. **6.75.** $\frac{8}{15}\pi$. **6.76.** $\frac{1}{10}\pi$.

6.77. 38,0000; 34,8183; 40,8183; 37,8183; 37,9655. **6.78.** 0,7850; 3,1400.

Відповіді до глави 7.

Відповіді до глави 7.

7.30. $\frac{14}{3}$. **7.31**. $\frac{1}{3}$. **7.32.** $(e-1)\left(e^{\pi}-1\right)$. **7.33**. 26. **7.34.** $0{,}9$. **7.35.** $2{,}5$.

7.36. $\ln\frac{25}{24}$. **7.37**. $\frac{9}{4}$. **7.38.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **7.39.** $\frac{34}{140}$. **7.40**. -2. **7.41**. $\frac{8}{63}$. **7.42.** $\frac{5(2\ln 2-1)}{8}$.

7.43. $\frac{1}{2}$. **7.44.** $\frac{64}{3}$. **7.45.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ **7.46.** $\int\limits_0^{48} dy\int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx.$

7.47. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)dx.$ **7.48**. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$

7.49. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{1-y}}^{y} f(x,y)dx.$ **7.50.** $\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-y}^{y} f(x,y)dx.$ **7.51.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$

7.52. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x,y)$. **7.53**. $\frac{2}{3}\pi$. **7.54**. $\frac{9\pi}{2}$. **7.55.** $\frac{\pi}{2}\ln 2$. **7.56.** $\pi\left(1-e^{-4}\right)$.

7.57. $\frac{2}{3}$. **7.58.** $\frac{15}{2}-8\ln 2$. **7.59.** 2. **7.60.** $\frac{125}{6}$. **7.61**. $\frac{16}{3}$. **7.62.** a^2.

7.63. $13\frac{1}{3}$. **7.64.** $\frac{48\sqrt{6}}{5}$.

Відповіді до глави 8.

8.21. Так. **8.22.** Ні. **8.23.** Так. **8.24.** Ні. **8.25.** Так. **8.26.** Так. **8.27.** Так. **8.28.** $\sin x\cos y=C$. **8.29.** $\frac{1}{y-1}+\frac{1}{2(x-1)^2}=C$.

8.30. $\ln^2 x-ctg^2 y=C$. **8.31.** $y=Ce^{\sqrt{4-x^2}}$. **8.32.** $\frac{y^3}{3}-y=0{,}5e^{2x-1}+C$.

8.33. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. **8.34.** $\ln|xy|+\frac{y-x}{xy}=C$.

8.35. $x^2+y^2=\ln Cx^2$. **8.36.** $2\sin x+\ln\left|tg\frac{y}{2}\right|=C$. **8.37.** $\sqrt{y}=\sqrt{x}+\ln Cy$.

8.38. $y=e^{C\arcsin x}$. **8.39.** $1+y^2=\dfrac{2}{1-x^2}$.**8.40.** $tgy=1-x+tgx$.

8.41. $y=e^x(x-2)$. **8.42.** $y=e^{2\sin x}$. **8.43.** $\ln|tgy|=4(1-\cos x)$.

8.44. $\ln(\sqrt{x}+1)=-\sqrt{1-y}$. **8.45.** $y=\sqrt{\ln^3|1-x^2|}$.

8.46. $3arctgx^2+2arctgy^3=\dfrac{\pi}{2}$. **8.47.** $y=x-\dfrac{2x}{\ln Cx}$.

8.48. $y=Ce^{\frac{y}{x}}$. **8.49.** $y=xe^{Cx+1}$. **8.50.** $x(x+3y)^2=C$.

8.51. $Cx=\dfrac{y-3x}{y+x}$. **8.52.** $x^3=C\cdot e^{arctg\frac{y}{3x}}$. **8.53.** $y=\dfrac{Cx^2}{2}-\dfrac{1}{C}$.

8.54. $y=xe^{Cx^2+1}$. **8.55.** $\ln Cx=-\cos\dfrac{y}{x}$. **8.56.** $y=x\arcsin x$.

8.57. $y=-x\ln|1-\ln x|$. **8.58.** $y=x\cdot e^{x-2}$. **8.59.** $y=x-2x^3$.

8.60. $(x-2)^2-y^2=4$. **8.61.** $y=x\sqrt{1-\dfrac{3}{8}x}$. **8.62.** $\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+C\right)\cdot\dfrac{1}{x+1}$. **8.63.** $y=3x^2+Cx$. **8.64.** $y=xe^{2x}+Ce^{2x}$. **8.65.** $y=\dfrac{e^x+C}{x}$.

8.66. $y=\sqrt{x^2+4}\left(C+\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{x}{2}\right)$. **8.67.** $y=x\sin x+Cx$.

8.68. $y=arctgx-1+Ce^{-arctgx}$. **8.69.** $y=e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$.

8.70. $y=1+\dfrac{\ln\left|ctg\dfrac{x}{2}\right|}{\cos x}$. **8.71.** $y=x^4\left(\dfrac{\ln|x|}{2}+C\right)^2$.

8.72. $y=\dfrac{1}{e^x+Ce^{2x}}$. **8.73.** $y=\dfrac{-1}{x^2\ln Cx}$. **8.74.** $y=\dfrac{x^2}{2}e^{-3x}$.

8.75. $y=x^3+x^2+x+1$. **8.76.** $y=x(2-\cos x)$. **8.77.** $y=\dfrac{1}{2}x^2\ln x$.

8.78. $y=\ln x\cdot\ln|\ln x|$. **8.79.** $y=\dfrac{2(x^2-1)}{x^2-4}$. **8.80.** $y=\dfrac{1}{x\ln|x|}$.

Відповіді до глави 9.

9.15. $y=\frac{x^3}{6}-\frac{\sin 2x}{4}+C_1x+C_2$.

9.16. $y=16e^{-\frac{x}{4}}+C_1x+C_2$.

9.17. $y=-\ln\left|\sin x\right|+C_1x+C_2$.

9.18.. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{\cos 2x}{8}+C_1\frac{x}{2}+C_2$.

9.19. $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$.

9.20. $y=C_1x^2+C_2$.

9.21. $y=\frac{1}{2}\ln^2\left|x\right|+C_1\ln\left|x\right|+C_2$.

9.22. $y=(C_1x+C_2)^2$.

9.23. $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$.

9.24. $y=C_1e^{C_2x}+\frac{1}{C_2}$.

9.25. $y=-\ln\cos x$.

9.26. $y=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\sin 3x$.

9.27. $y=\frac{x^2}{4}+x+1-\frac{1}{8}\cos 2x$.

9.28. $y=\frac{1}{2}x^2$.

9.29.. $y=\frac{x^3}{3}+x-1$.

9.30. $2y^2-4x^2=1$.

9.31. $y^3-y=3x$.

9.32. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$.

9.33. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$.

9.34. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$.

9.35. $y=C_1e^{-3x}+C_2$.

9.36. $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$.

9.37. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

9.38. $y=e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$.

9.39. $y=e^{-2x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)$.

9.40. $y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}+C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$.

9.41. $y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

9.42. $y=\left(2x+1\right)e^{-x}$.

9.43. $y=e^{2x}$.

9.44. $y=2$.

9.45. $y=e^{2x}\sin x$.

9.46. $y=2\sin\frac{x}{3}$.

9.47. $y=xe^{5x}$.

9.48. $y=-\frac{1}{3}e^{x}\cos 3x$.

9.49. $y=\sin 2x$.

Відповіді до глави 10.

10.20. **10.21.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$.

10.22. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$.

10.23. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$.

10.24. $y=(C_1+C_2x)e^x+x^2e^x$. **10.25.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-xe^x$.

10.26. $y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+\left(x+\frac{4}{3}\right)e^{-x}$.

10.27. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+\left(\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{25}x\right)e^{2x}$.

10.28. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{6}{5}\sin 2x-\frac{2}{5}\cos 2x$.

10.29. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+5\sin x-2\cos x$.

10.30. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\sin x$.

10.31. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x$.

10.32. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{2}{3}\sin 2x$.

10.33. $y=e^x+x^2+1$. **10.34.** $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{7}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}\sin 2x$.

10.35. $y=e^{2x}+e^x(1-x-x^2)$. **10.36.** $y=\frac{13}{16}e^{2x}+\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{4}x\right)e^{-2x}$.

10.37. $y=\frac{1}{3}e^{-4x}-\frac{1}{3}e^{2x}+(x^2+3x)e^{2x}$.

10.38. $y=e^x\left(-6\cos 3x+\sin 3x\right)+12\cos 3x+2\sin 3x$.

10.39. $y=\frac{3}{2}x^2e^{-2x}$. **10.40.** $y=\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin x-\cos x$.

10.41. $\tilde{y}=(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{2x}$. **10.42.** $\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx$.

10.43. $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)\cdot x^2e^{5x}$. **10.44.** $\tilde{y}=\left(Ax+B\right)xe^{-3x}$.

10.45. $\tilde{y} = A\sin x + B\cos x + Ax^2e^{-x}$.

10.46. $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)\,x + \left(Ax + B\right)xe^{-10x}$.

10.47. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\ln\left|tg\,\dfrac{x}{2}\right|$.

10.48. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^x + xe^x\ln|x|$.

10.49. $y = C_1\cos x + C_2 s\,\text{in}\,x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$.

10.50. $y = C_1\cos x + C_2 s\,\text{in}\,x - \sqrt{\cos 2x}$. **10.51.** $\begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \\ z = \dfrac{1}{4}C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 3x^2 - 3. \end{cases}$

10.52. $\begin{cases} x = C_1t + C_2 + 2\sin t, \\ y = -2C_2 - C_1\left(2t + 1\right) - 2\cos t - 3\sin t. \end{cases}$

Відповіді до глави 11.

11.15. $y_n = C_1 + C_2 2^n$. **11.16.** $y_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. **11.17.**

$y_n = \sqrt{2}^n\left(C_1\cos\dfrac{\pi}{4}n + C_2\sin\dfrac{\pi}{4}n\right)$

11.18. $y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + 0{,}5\cdot 4^n$. **11.19.** $y_n = C_1 + C_2 2^n - (n+2)n$.

11.20. $y_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + \dfrac{3}{8}n^2 2^n$. **11.21.** $y_n = C_1\cos\dfrac{\pi}{3}n + C_2\sin\dfrac{\pi}{3}n + \dfrac{1}{3}(n-2)\cdot 2^n$.

11.22. $y_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n + \dfrac{1}{54}n^2(n-3)$

Відповіді до глави 12.

12.12. $R(x) = 45x - 0{,}02x - 0{,}001x^2$. **12.13.** $C(x) = 15\cdot 10^3 e^{0{,}001x^2} + 5\cdot 10^3$

12.14. $p\sqrt{x} = 20$. **12.15**. $p = 37{,}5 - 0{,}125x$.**12.16.**11 років.

12.17.48 років. **12.18.** $p = 5 + 2e^{-0{,}4t}$ **,** стійка. **12.19.** $p = 14e^{\frac{5}{3}t} - 4$ **,**нестійка .

12.20. $y_t = \left(1{,}07\right)^t\left(C_1\cos 0{,}18t + C_2\sin 0{,}0{,}18t\right) + 2$.

Відповіді до глави 13.

13.10. а) $\dfrac{4}{7} + \dfrac{7}{12} + \dfrac{10}{17} + \ldots$; б) $1 + \dfrac{3}{1} + \dfrac{3^2}{1\cdot 2} + \dfrac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$;

в) $\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-...$; г) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-...$.

13.11. а) $S=\frac{11}{18}$; б) $S=2$; в) $S=\frac{1}{2}$.

13.20. $\frac{1}{2n-1}$; **13.21.** $\frac{1}{2n}$; **13.22.** $\frac{n}{2^{n-1}}$.

13.23: $\frac{2n}{3n+2}$; **13.24.**; $\frac{n^3}{e^n}$; **13.24.**; $\frac{n^3}{e^n}$ **.**

Відповіді до глави 14.

14.26. розб. **14.27.** розб. **14.28.** розб. **14.29.** збіг. **14.30.** збіг.
14.31. розб. **14.32.** розб. **14.33.** збіг. **14.34.** збіг. **14.35.** збіг.
14.36. розб. **14.37.**збіг. **14.38.** збіг.. **14.39.** збіг. **14.40.** збіг.
14.41. збіг.. **14.42.** збіг. **14.43.**збіг.. **14.44.** розб.. **14.45.** збіг.
14.46. збіг. **14.47.** збіг. **14.48.** розб.. **14.49.** збіг. **14.50.** розб..
14.51. збіг. **14.52.** розб. **14.53.** збіг. **14.54.** збіг. **14.55.** збіг.
14.56. збіг. **14.57.** збіг. **14.58.** збіг. **14.59.** збіг. **14.60.** збіг..
14.61. збіг. **14.62.** збіг. **14.63.** розб. **14.64.**збіг. **.14.65.**ум.збіг.
14.66 .розб. **14.67.** абс.збіг. **14.68.** абс.збіг. **14.69.** абс.збіг
14.70. абс.збіг.

Відповіді до глави 15.

15.9. $(-1;1]$. **15.10.** $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$. **15.11.** $[-3;3)$. **15.12.** $[-1;1]$.

15.13. $[-5;3)$. **15.14.** $[-2;3)$. **15.15.** $(-1;1]$. **15.16.** $[-1;3)$.

15.17. $[-2;0]$. **15.18.** $(-2;2)$. **15.19.** $(1;5]$. **15.20.** $x=0$.

15.21. $\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$. **15.22.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Відповіді до глави 16.

Відповіді

16.23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$, $(0;2)$. **16.24.** $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$, $(-2;0)$.

16.25. $e^{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}(x-2)^n$, $(-\infty;\infty)$. **16.26.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$, $(-\infty;\infty)$.

16.27. 0,607. **16.28.** 0,0392. **16.29.** 5,0658.

16.30. 0,9511. **16.31**. 2,001.

16.32. 0,939, $R<0{,}001$. **16.33.** 0,4931. **16.34.** 0,748.

16.35. $|R|<\frac{1}{11}$. **16.36.** Два члени. **16.37.**0,3090, $\Delta=0{,}0001$**.**

16.38.1,39, $\Delta=0{,}01$.**16.39**. $y=x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots$

первісна для функції	
(інтеграли I роду)	
(інтеграли II роду)	
визначений інтеграл	
Властивості степеневого ряду	
Властивості визначеного інтеграла	
Геометричний зміст визначеного інтеграла	
геометричних задач	
Довжина дуги плоскої кривої	
економічним змістом визначений інтеграл	
економічних задач	
Задача про знаходження обсягу продукції.	
Задача про знаходження площі криволінійної трапеції**.**	
Задача про знаходження шляху матеріальної точки.	
закон попиту	
Заміна змінної у визначеному інтегралі	
Застосування визначеного інтеграла	
інтеграл Діріхлє	
Інтегральна сума	
Інтегрування квадратного тричлену	
Інтегрування лінійних та дробово-лінійних ірраціональностей	
Інтегрування раціональних дробів	
Інтегрування тригонометричних функцій	
криволінійна трапеція	
метод безпосереднього інтегрування	
Метод заміни змінної	
Метод інтегрування частинами	
Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі	
невизначений інтеграл	
невизначені коефіцієнти	
Невласні інтеграли	
Об’єми тіл з відомою площею паралельних перерізів	
обчислення об'єму тіла обертання	
Обчислення площ геометричних фігур	
Площа криволінійного сектора	
похідна від визначеного інтеграла із змінною верхньою границею	
Похідна інтеграла за змінною верхньою межею	
прибуток підприємства	
Раціональний неправильний дріб	
Раціональний правильний дріб	
середнє значення витрат	
середнє значення функції на проміжку	

Універсальна тригонометрична підстановка	
Фізичний зміст визначеного інтеграла	
формулу Ньютона-Лейбніца	
функцію граничного дохода	
функція граничних витрат	
крива Лоренца	
коефіцієнт Джіні	
кривою навчання	
суми капіталовкладень	
дисконтований прибуток	
Наближене обчислення визначених інтегралів	
дисконтований прибуток	
Формула трапецій	Формула: трапецій
формула трапецій	Формула: трапецій
Формула прямокутників	Формула: прямокутників
формула прямокутників	Формула: прямокутників
кривою навчання	
Абсолютна величина	
Абсолютна збіжність	
Алгебраїчна дроб	
Алгебраїчна дроб правильна,неправильна	
Архімеда спираль	
Арифметична прогресія	
Бернулі задача	
Нескінченна границя інтегралу	
Біноміальний ряд	
Варіація довільних сталих	
Обчислення наближене	
Обчислення наближене інтегралів	
Обчислення наближене суми ряду	
Геметрична прогресія	
Гиперболоід	
ознака збіжності Даламбера	
Інтеграл Діріхле	
Раціональний дроб	
Рівняння диференціальне	
Подвійний інтеграл	
Знакопереміжний ряд	
Знакododатний ряд	
Знакозмінний ряд	
Знаменник дробу	
Замкнений інтервал	
Інтегральна сума	
Частинна сума	
Загальний розв'язок	
Частинний розв'язок	
Квадратне рівняння	
Корені дійсні різні	

Формула Симпсона.

Диференціальні рівняння першого порядку.
Рівняння з відокремлюваними змінними
Однорідні диференціальні рівняння.
Лінійні диференціальні рівняння першого порядку
.Розв’язком диференціального рівняння

Рівняння Бернуллі.

задачі Коші
диференціальним рівнянням другого порядку.
що допускають зниження порядку.
частинний розв'язок
загальний розв'язок
Лінійним однорідним диференціальним рівнянням
Властивості розв'язків
характеристичне рівняння
лінійно незалежні розв’язки рівняння
корені характеристичного рівняння дійсні і різні;

корені характеристичного рівняння дійсні і рівні;

корені характеристичного рівняння уявні

лінійні неоднорідні рівняння другого порядку

Подвійний інтеграл.
Геометричний зміст подвійного інтеграла
властивості подвійного інтеграла
обчисленні подвійного інтеграла
зведення подвійного інтеграла до двократного
Лінійне різницеве рівняння із сталими коефіцієнтами
Розв'язок різницевого рівняння $k-$го порядку
Властивості розвязків лінійних різницевих рівнянь
частинний розв'язок різницевого рівняння
загальний розв'язок різницевого рівняння
Однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами
Однорідне різницеве рівняння з початковими умовами
Неоднорідні різницеві рівняння
Системи лінійних різницевих рівнянь
Еластичність функції.

.Модель природного зростання
.Модель зростання з умовою насиченості
Динаміка ринкових цін
Функції попиту та пропозиції
Модель розвитку Самюельсона – Хікса.

Павутинна модель ринку

Метод варіації довільної сталої
Лінійні системи диференціальних рівнянь
Числовий ряд
Збіжність ряду
підінтегральна функція

Гармонійний ряд

Ряд геометричної прогресії
Необхідна ознака збіжності ряду
Достатні умови збіжності числових рядів
.Ознака порівняння**.**
Ознака Даламбера
Радикальна ознака Коші
. Інтегральна ознака Коші.
Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.
. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду
Знакопостійні ряди
Знакопереміжні ряди
Абсолютно збіжний ряд
Умовно збіжність ряду
Ряд Тейлора
Ряд Маклорена
Степеневий ряд
Теорема Абеля
Радіус збіжності
Властивості степеневого ряду
необхідна і достатня умова збіжності
функціональний ряд
коефіцієнти ряду Маклорена
коефіцієнти ряду Тейлора
Використання рядів у наближенних обчисленнях.
Обчислення за допомогою знакопереміжних рядів
Обчислення за допомогою знакододатних рядів
Обчислення визначених інтегралів
Використання рядів для розв'язку диференціальних рівнянь
Використання рядів для обчислення інтегралів
Ряд Тейлора
Ряд Маклорена
Комплексно –спряжені корені
Корені рівні
Лагранжа
Многочлен з невизначеними коефіцієнтами
Площа криволінійної трапеції
Об'єм тіла обертання
Первісна функції
Система диференціальних рівнянь
Система різницевих рівнянь
Характеристичне рівняння
Об'єм тіла
Фізичний зміст визначеного інтегралу
Похідна від невизначеного інтеграла
Диференціал від невизначеного інтеграла
Таблиця основних інтегралів

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Навч. посіб.– К.: НАУ, 1997, 1999.-448 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа.– М.: Наука, 2002.-384 с.
3. Валуєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посіб. У 2-х ч.–К.КНЕУ, 2002.-452 с.
4. Васильченко І.П.Вища математика для економістів.Підручник.-К.:Знання-Прес,2001.-454 с.
5. Вища математика: Навч. посіб. для самост. вивч. дисципліни. Під ред. Валуєва К. Г.– К.: КНЕУ, 1999.-453 с.
6. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н. Ш. Кремера.– М.: "ЮНИТИ", 2002.-440 с.
7. Высшая математика: Сборник задач /Под ред. П. Ф. Овчинникова.– К.: Вища школа, 1999.-350 с.
8. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.– М.: ВШ, 2000, 2003.-720 с.
9. Клетеник А. В. Сборник задач по аналитической геометрии.– М.: Наука, 2001, 2002.-240 с.
10. Малярець Л.М.,Ігначкова А.В. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах: Навчальний посібник.- Х.: ВД "ІНЖЕК",2006.-544 с.
11. Малярець Л.М.,Широкорад Л.Д. Математика для економістів: Практ. посібник до розв'язання задач.-Х.ВД ХНЕУ,2008.-476 с.
12. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике.– М.: Наука, 1999, 2002.-354 с.
13. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. . В. И. Ермакова.– М., 1999, 2003.-656 с.
14. Тевяшев А. Д., Литвин А. Г. Высшая математика. Сборник задач и упражнений.– Х.: ХТУРЭ, 1999.-192с.
15. Травкін Ю.І., Малярець Л.М. Математика для економістів: Підручник. – Х.: ВД "ІНЖЕК", 2005. – 816 с.
16. Травкін Ю. І., Малярець Л. М. Основи лінійної алгебри і її застосування.– Х.: Основа, 2001.

385