МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ СЕМЕНА КУЗНЕЦА

Высшая и прикладная математика в примерах и задачах. Раздел «Математическое программирование»

Учебно-практическое пособие для иностранных студентов

Авторы: Железнякова Э. Ю.,
Игначкова А.В.

Ответственный за выпуск Малярец Л.М.

Харьков. Изд. ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2014

УДК
ББК
Ж.
Рекомендовано к изданию решением ученого совета Харьковского национального университета им. С. Кузнеца
Протокол № 3 от 28. 10. 2013 г.

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики и менеджмента Харьковского национального университета радиоэлектроники *Дорошенко В. А.*; канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Харьковского национального университета строительства и архитектуры *Аршава Е. А.*

Железнякова Э. Ю.
Высшая и прикладная математика в примерах и задачах. Раздел «Математическое программирование»: учебно-практическое пособие пособие для иностранных студентов / Э. Ю. Железнякова, А. В. Игначкова. – Х. : Изд. ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2013. – 129 с. (Русск. яз.)

Рассмотрены основные классы задач математического программирования и методы их решения. Основной акцент сделан на приобретении студентами навыков построения экономико-математических моделей и нахождении их оптимального решения. В каждой теме приведена методика решения типовых задач, основные теоретические сведения, необходимые для их решения. В конце каждой темы предложены задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля.

УДК
ББК
© Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца, 2014
© Железнякова Э. Ю.
Игначкова А. В.
2014

Введение

Математическое программирование – это раздел учебной дисциплины «Высшая и прикладная математика», который является теоретической основой для изложения многих экономических дисциплин. Его математический аппарат наиболее эффективно используется при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании. Сегодня для принятия обоснованного и эффективного решения необходимо обработать большое количество информации, произвести достаточно сложные расчеты и из всех возможных способов решения выбрать наиболее экономически выгодное, оптимальное, которое лучше всего соответствовало бы поставленной задаче. Рыночные условия предъявляют повышенные требования к качеству подготовки, как экономистов, так и менеджеров. Студенты должны владеть новейшими достижениями науки и уметь находить наиболее эффективные управленческие решения.

Основной целью изучения математического программирования является формирование системы теоретических знаний, приобретение компетентностей в использовании аппарата высшей математики, теории вероятностей и математической статистики для построения математических моделей экономических процессов.

В данном учебно-практическом пособии в доступной форме рассмотрены основные классы задач математического программирования и методы их решения. Основной акцент сделан на приобретении студентами навыков построения экономико-математических моделей и нахождении их оптимального решения. В каждой теме приведена методика решения типовых задач, основные теоретические сведения, необходимые для их решения. В конце каждой темы предложены задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля. Учебно-практическое пособие составлено в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Высшая и прикладная математика», которая является составной частью учебного плана направления подготовки «Менеджмент» отрасли знаний 0306 «Менеджмент и администрирование».

1. Элементы линейной алгебры

1.1. Решение систем линейных уравнений методом Жордана – Гаусса

Общий вид системы m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Решение такой системы – набор n действительных чисел, подстановка которых в систему обращает каждое ее уравнение в верное равенство.

Система называется ***совместной***, если у нее есть решение. В противном случае система называется ***несовместной***.

Совместная система может иметь единственное решение или бесчисленное множество решений.

Среди известных методов решения систем линейных уравнений следует выделить метод Жордана – Гаусса, или метод полного исключения неизвестных.

Этот метод основан на элементарных преобразованиях. Под элементарными преобразованиями понимается прибавление к одному из уравнений другого уравнения, умноженного на какое-нибудь число. Необходимо заметить, что элементарные преобразования удобно проводить в таблице – схеме Гаусса.

Можно рассмотреть этот метод на следующих примерах.

Пример 1.1.

Решить систему методом Жордана – Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение. Все элементарные преобразования будут проводиться в табл. 1.

Таблица 1

Решение системы уравнений методом Жордана – Гаусса

№ строки	x_1	x_2	x_3	Свободные члены	Примечание	Номер итерации
1	4	3	2	33		Исходная система
2	3	2	1	23		
3	1	1	2	12		
4	0	–1	–6	–15	стр. $3\cdot(-4)+$ стр. 1	I
5	0	–1	–5	–13	стр. $3\cdot(-3)+$ стр. 2	
6	1	1	2	12	стр. 3	
7	0	1	6	15	стр. $4\cdot(-1)$	II
8	0	0	1	2	стр. 7 + стр. 5	
9	1	0	–4	–3	стр. $7\cdot(-1)+$ стр. 6	
10	0	1	0	3	стр. $11\cdot(-6)+$ стр. 7	III
11	0	0	1	2	стр. 8	
12	1	0	0	5	стр. $11\cdot 4+$ стр. 9	

После III итерации из последних строк следует решение:

$$x_1 = 5,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2.$$

Таким образом, система имеет единственное решение.

Пример 1.2.

Решить систему уравнений методом Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 \qquad\quad - x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4, \\ \qquad\ \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Все элементарные преобразования приведены в табл. 2.

Таблица 2

Решение системы уравнений методом Жордана – Гаусса

№ строки	x_1	x_2	x_3	x_4	Свободный член	Примечание	Номер итерации
1	2	1	2	1	10		Исходная система
2	2	0	–1	–1	7		
3	2	-1	–4	–3	4		
4	0	1	3	2	3		
5	2	1	2	1	10	стр. 1	I
6	2	0	–1	–1	7	стр. 2	
7	4	0	–2	–2	14	стр. 1 + стр. 3	
8	–2	0	1	1	–7	стр. $1\cdot\left(-1\right)+$стр. 4	
9	6	1	0	–1	24	стр. $12\cdot\left(-2\right)+$стр. 5	II
10	0	0	0	0	0	стр. 12 + стр. 6	
11	0	0	0	0	0	стр. $12\cdot 2+$стр. 7	
12	–2	0	1	1	–7	стр. 8	
13	6	1	0	–1	24		III
14	–2	0	1	1	–7		

После второй итерации второе и третье уравнение обратились в тождественные равенства. По последним строкам можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 24, \\ -2x_1 \qquad + x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений.

Следует найти её общее решение. Пусть x_2 и x_3 будут базисными неизвестными, а x_1 и x_4 – свободными. Тогда можно выразить базисные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_2 = 24 - 6x_1 + x_4, \\ x_3 = -7 + 2x_1 - x_4. \end{cases}$$

Это и есть общее решение системы. Если свободные значения примут значения $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, то получим $x_2 = 24$, а $x_3 = -7$.

Базисным называется такое решение, которое получается из общего путем приравнивания свободных неизвестных значений нулю.

Итак, $X = (0; 24; -7; 0)$ – базисное решение.

Базисное решение, в котором переменные неотрицательны, называется ***опорным***. Полученное базисное решение не является опорным, так как $x_3 = -7 < 0$.

1.2. Определение базисных решений

Базисные решения легко находить, если система приведена к единичному базису. Поэтому отыскание всех базисных решений сводится к последовательному преобразованию системы ко всевозможным единичным базисам.

Такое преобразование можно проводить с помощью очень простого алгоритма, который получил название ***преобразование однократного замещения базиса***. Основан этот алгоритм на идее метода Жордана – Гаусса.

Найдем этим методом все базисные решения системы, которая была получена в результате преобразований в примере 1.1.

Пример 1.3. Найти все базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_4 = 24, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$$

Решение. В системе две свободные неизвестные и две – базисные. Всевозможные пары неизвестных, которые могут быть свободными, таковы:

$$(x_1, x_2),\ (x_1, x_3),\ (x_1, x_4),\ (x_2, x_3),\ (x_2, x_4),\ (x_3, x_4).$$

Будем строить последовательность преобразований так, чтобы перебрать все эти группы неизвестных.

В исходной системе, которая приведена к единичному базису, x_1 и x_4 – свободные неизвестные, а x_2 и x_3 – базисные.

Решение задачи удобно оформить в виде таблицы. Первые две строки соответствуют коэффициентам и свободным членам решаемой системы. В качестве разрешающего столбца выбран 4-й, а в качестве разрешающей строки – 2-я. Разрешающий элемент находится на их пересечении и показывает, что переменную x_4 нужно ввести в базис вместо x_3. В примечании указано заполнение строк 3-й и 4-й, а также всех последующих, и полученных при этом опорных решений.

Таблица 3

Нахождение базисных решений системы уравнений

№ строки	Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Свободный член	Примечание	Базисное решение
1	x_2	6	1	0	–1	24	Исходная система	$\vec{X}_1=(0,24,-7,0)$
←2	x_3	–2	0	1	1	–7		
←3	x_2	4	1	1	0	17	стр. $4+$ стр. 1	$\vec{X}_2=(0,17,0,-7)$
4	x_4	–2	0	1	1	–7	стр. 2	
←5	x_3	4	1	1	0	17	стр. 3	$\vec{X}_3=(0,0,17,-24)$
6	x_4	–6	–1	0	1	–24	стр. $5\cdot(-1)+$ стр. 4	
7	x_1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{17}{4}$	стр. $5\cdot 1/4$	$\vec{X}_4=\left(\frac{17}{4},0,0,\frac{3}{2}\right)$
←8	x_4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	стр. $7\cdot 6+$ стр. 6.	
9	x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	стр. $10\cdot\left(-1/4\right)+$ стр. 7	$\vec{X}_5=\left(\frac{7}{2},3,0,0\right)$
←10	x_2	0	1	3	2	3	стр. $8\cdot 2$	
11	x_1	1	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	4	стр. $12\cdot 1/2+$ стр. 9	$\vec{X}_6=(4,0,1,0)$
12	x_3	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	стр. $10\cdot 1/3$	

В таблице кружком обозначен разрешающий элемент, стоящий на пересечении переменной, вводимой в базис, и переменной, выводимой из базиса. Стрелками показаны переменные, которые выводятся из базиса.

В результате перебора пар базисных переменных получено шесть базисных решений. Среди них есть три опорных решения $\vec{X}_4$, $\vec{X}_5$, $\vec{X}_6$.

1.3. Симплекс-преобразования и опорные решения

В задачах линейного программирования особое значение имеют опорные решения, то есть те базисные решения, у которых переменные принимают неотрицательные значения. Конечно, опорные решения можно выделить, если найдены все базисные решения. Так, в примере 1.2, который рассмотрен выше, среди базисных решений оказалось три опорных решения. Но такой путь ведет к чрезвычайно сложным расчетам,

Оказывается, что если разрешающий элемент выбирать, используя дополнительные условия, то тем же методом однократного замещения базиса будем переходить не просто к базисным, а к опорным решениям.

Эти дополнительные условия заключаются в следующем:

1) разрешающий столбец, соответствующий вводимой в базис переменной, выбирается так, чтобы в нем находился хотя бы один положительный элемент;

2) разрешающая строка, соответствующая выводимой из базиса переменной, выбирается так, чтобы ей соответствовало наименьшее отношение элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.

Преобразования однократного замещения, при которых выбор разрешающего элемента производится по указанному правилу, следует называть симплекс-преобразованиями.

Как и при определении базисных решений, здесь также необходимо следить за тем, чтобы на какой-нибудь итерации не вернуться к найденному ранее опорному решению.

Пример 1.4. Найти все опорные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad = 12, \\ 2x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Система приведена к единому базису. Базисные переменные x_2 и x_4. Первое опорное решение получим, приняв $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$.

Тогда $\vec{X}_1 = (0;\ 12;\ 0;\ 12)$.

Симплекс-преобразования для нахождения опорных решений удобно провести с помощью табл. 4.

Таблица 4

Нахождение опорных решений системы уравнений

№ строки	Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Свободный член	Примечания	Опорные решения
←1	x_2	–1	1	4	0	12		$\vec{X}_1 = (0;\ 12;\ 0;\ 12)$
2	x_4	2	0	1	1	12		
3	x_3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	3	стр. $1 \cdot 1/4$	$\vec{X}_2 = (0;\ 0;\ 3;\ 9)$
←4	x_4	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	9	стр. $3 \cdot (-1) +$ стр. 2	
←5	x_3	0	$\frac{2}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	4	стр. $6 \cdot 1/4 +$ стр. 3	$\vec{X}_3 = (4;\ 0;\ 4;\ 0)$
6	x_1	1	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	4	стр. $4 \cdot 4/9$	
7	x_2	0	1	$\frac{9}{2}$	2	18	стр. $5 \cdot 9/2$	$\vec{X}_4 = (6;\ 18;\ 0;\ 0)$
←8	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	6	стр. $7 \cdot 1/9 +$ стр. 6	

На исходном этапе разрешающим выбран 3-й столбец (переменная x_3 вводится в базис), имеющий два положительных элемента. Для выбора разрешающей строки следует вычислить отношения свободных членов к элементам этого столбца и из них выбрать наименьшее: $\min\left(\frac{12}{4};\frac{12}{1}\right) = \min(3;12) = 3$. Наименьшее отношение соответствует стр. 1, то есть переменной, которая выводится из базиса. Заполнение стр. 3 и стр. 4 указано в примечании табл. 4. В результате получен новый опорный план $\vec{X}_2$.

Далее на второй стадии в качестве разрешающего столбца выбран 1-й столбец, соответствующий переменной x_1, которая вводится в базис. Так как в первом столбце есть только один положительный элемент в стр. 4, то из базиса следует вывести переменную x_4. После заполнения 5-й и 6-й строк получено третье опорное решение $\vec{X}_3$. В качестве разрешающего столбца теперь выбран второй (переменная x_2 вводится в базис). Выводится из базиса x_3, так как во втором столбце только один положительный элемент в стр. 5.

После заполнения 7-й и 8-й строк получено опорное решение $\vec{X}_4$.

Больше опорных решений нет.

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Найдите с помощью симплексных преобразований все опорные решения систем уравнений:

1.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 28, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 21. \end{cases}$

1.5. Контрольные вопросы

1. Какая система уравнений называется совместной?
2. Какая система уравнений называется несовместной?
3. В чем суть метода Жордана – Гаусса решения систем линейных уравнений?
4. Какое решение называется базисным?
5. Какое решение называется опорным?
6. Какая строка считается разрешающей?
7. Какой столбец считается разрешающим?

2. Линейное программирование

2.1. Постановка задач линейного программирования

Линейное программирование (планирование) (ЛП) – это математический метод нахождения максимума или минимума линейных функций *Z* (целевой функции) при ограничениях, заданных в виде линейных уравнений или неравенств.

Математическая модель задачи ЛП имеет вид: найти такое неотрицательное решение $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

при котором целевая функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

принимает минимальное (максимальное) значение.

Такая форма записи задачи ЛП называется ***канонической***.
Система уравнений – это система ограничений.

Оптимальным решением (планом) задачи ЛП называется любой вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности $x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, ..., n)$.

Если ограничения, которые наложены на переменные, заданы в виде системы неравенств, то для преобразования их в равенства к левой части неравенства вида "≤" прибавляют неотрицательную переменную, а из левой части неравенства вида "≥" вычитают неотрицательную переменную.

Эти неотрицательные переменные, преобразующие неравенства в равенства, называются ***дополнительными*** переменными. В целевую функцию дополнительные переменные входят с коэффициентом 0.

Пример 2.1. Приведите задачу ЛП к каноническому виду.

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \;(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0,\; x_3 \ge 0.$$

Решение. Из левой части первого неравенства вычтем дополнительную переменную x_4, а к левой части второго неравенства прибавим дополнительную переменную x_5.

Каноническая форма данной задачи имеет вид:

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \;\; (\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = 1, \dots, 5).$$

2.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Пусть требуется найти максимум (минимум) функции

$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \ \ge \ 0, \ x_2 \ \ge \ 0.$$

Если система этих неравенств совместна, то областью ее решений является выпуклый многоугольник (замкнутый или открытый), который называется ***многоугольником решений.*** Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из системы ограничений путем замены знака неравенства на знак точного равенства.

Наибольшее или наименьшее значение целевой функции, если оно существует, достигается или в вершине построенного многоугольника (единственное решение), или на его стороне (множество решений). Чтобы найти точку максимума или минимума нужно построить вектор $\vec{N}(c_1;c_2)$, а затем ***линию уровня*** – прямую, перпендикулярную вектору $\vec{N}$ и пересекающую область.

Затем линию уровня нужно передвигать параллельно себе в направлении вектора $\vec{N}$ в задаче на максимум и в противоположную сторону в задаче на минимум до касания с областью многоугольника.

В результате либо находят единственную точку или множество точек, в которых функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо показывают, что целевая функция не ограничена.

Пример 2.2. Решите графическим методом задачу линейного программирования:

$$Z = x_1 + 2x_2 (\max)$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ \quad x_1 \quad + x_2 \le 9, \\ \ \ 3x_1 - 2x_2 \le 12 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ \ge 0$$

Решение. Строим многоугольник решений, ограниченный прямыми:

$$-2x_1 + 3x_2 = 12(I), x_1 + x_2 = 9(II), 3x_1 - 2x_2 = 12(III).$$

Областью решений системы неравенств является многоугольник *ОАВСД*, (рис. 1). Строим вектор $\overline{N} = (1;2)$, а затем линию уровня перпендикулярно вектору $\overline{N}$. Передвигаем линию уровня параллельно себе в сторону вектора $\overline{N}$ до касания с областью. Линия уровня касается области в точке B. Точка B – это и есть та точка, в которой функция Z принимает максимальное значение.

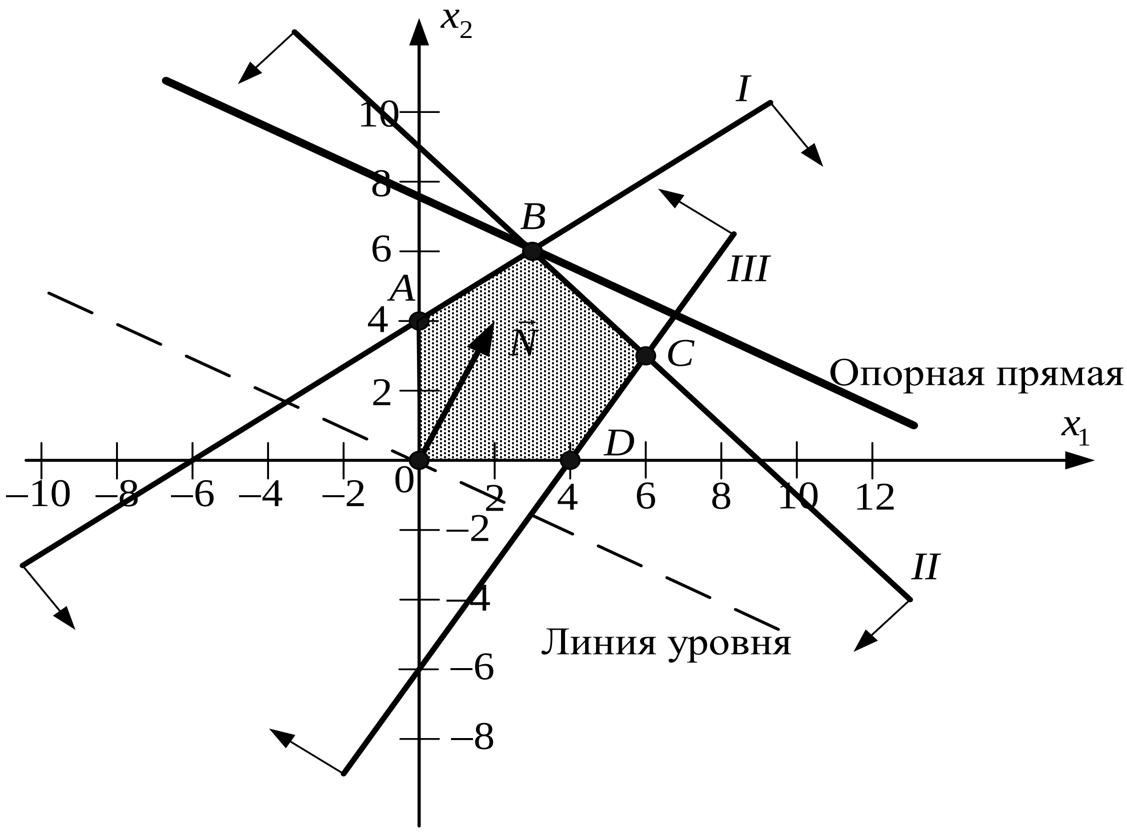


Рис. 1. **Решение задачи графическим методом**

Найдем координаты точки B, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Это и будет оптимальное решение данной задачи, которому соответствует максимальное значение функции $Z_{\max} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 15.$

Пример 2.3. Решите задачу линейного программирования:

$$Z = 4x_1 + 2x_2 (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ \ge \ 0, x_2 \ \ge \ 0$$

Решение. Строим многоугольник решений. Это открытая область *АВСД* (рис. 2). Проведем вектор $\overline{N}(4;2)$ и линию уровня. Передвигая ее в сторону противоположную вектору $\overline{N}$, получаем точку B, в которой функция Z принимает минимальное значение.

Для определения координат точки B решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ -3x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

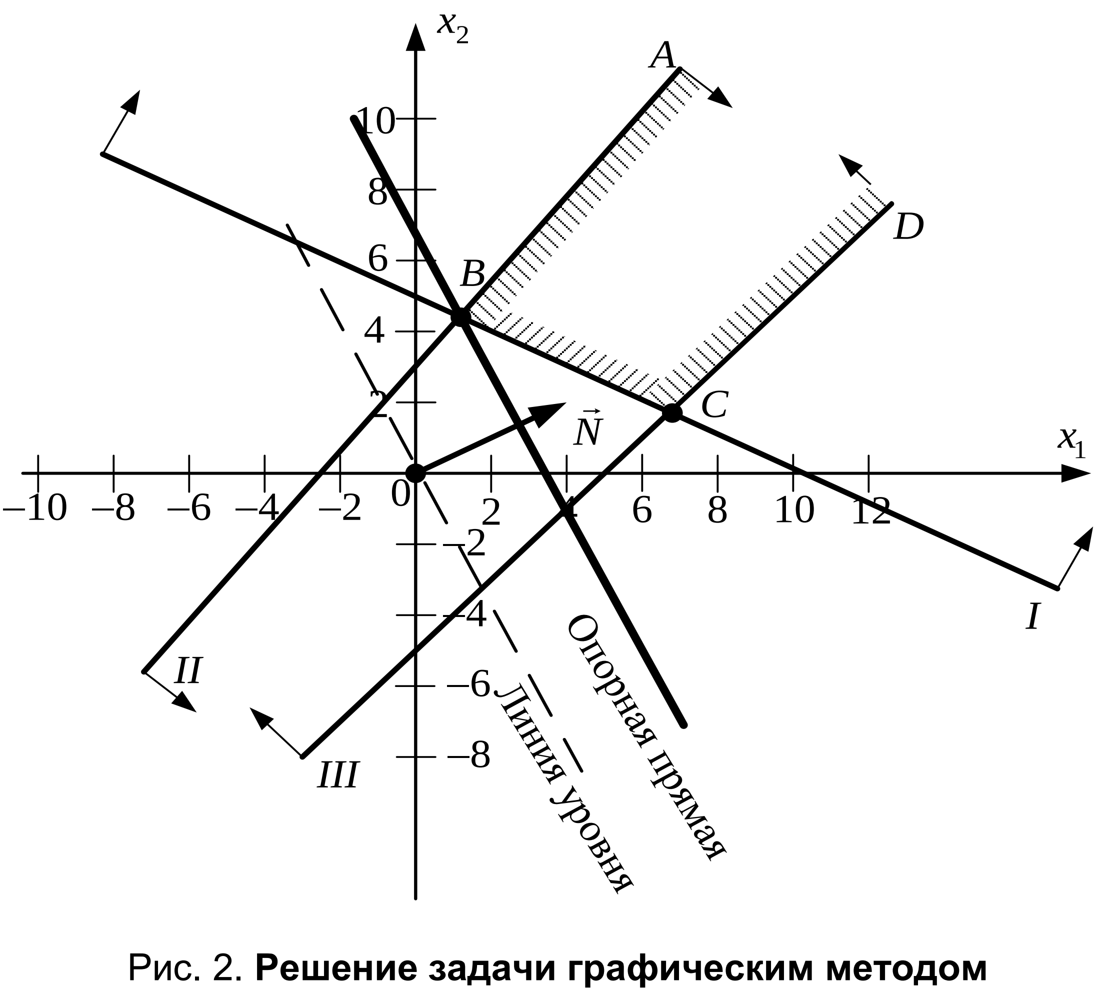


Рис. 2. **Решение задачи графическим методом**

Получаем $x_1 = 1;\ x_2 = 4,5.$ Это и есть оптимальное решение задачи. Итак, $X_{опт} = (1;4;5),\quad Z_{\min} = 4\cdot 1 + 2\cdot 4,5 = 13.$

Следует отметить, что максимальное значение данная функция не принимает: $Z_{\max} = \infty.$

Если система ограничений задана в виде уравнений и при этом $n - m = 2$, где n – число неизвестных, а m – число линейно независимых уравнений, то задачу можно решить графическим методом.

Рассмотрим алгоритм графического метода на конкретном примере.

Пример 2.4. Решите графическим методом задачу:

$$Z = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 (max).$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 5).$$

Решение. Здесь $n = 5$, $m = 3$, тогда $n - m = 2$.

Выразим базисные неизвестные x_3, x_4 и x_5 и целевую функцию через x_1 и x_2:

$$x_3 = 10 - 2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = 6 + 2x_1 - 3x_2,$$

$$x_5 = -8 + 2x_1 + 4x_2,$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

Так если $x_3, x_4, x_5 \geq 0,$ то приходим к следующей задаче:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 (\max),$$

$$\begin{cases} 10 - 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 6 + 2x_2 - 3x_2 \ge 0, \\ -8 + 2x_1 + 4x_2 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решаем задачу графически (рис. 3).

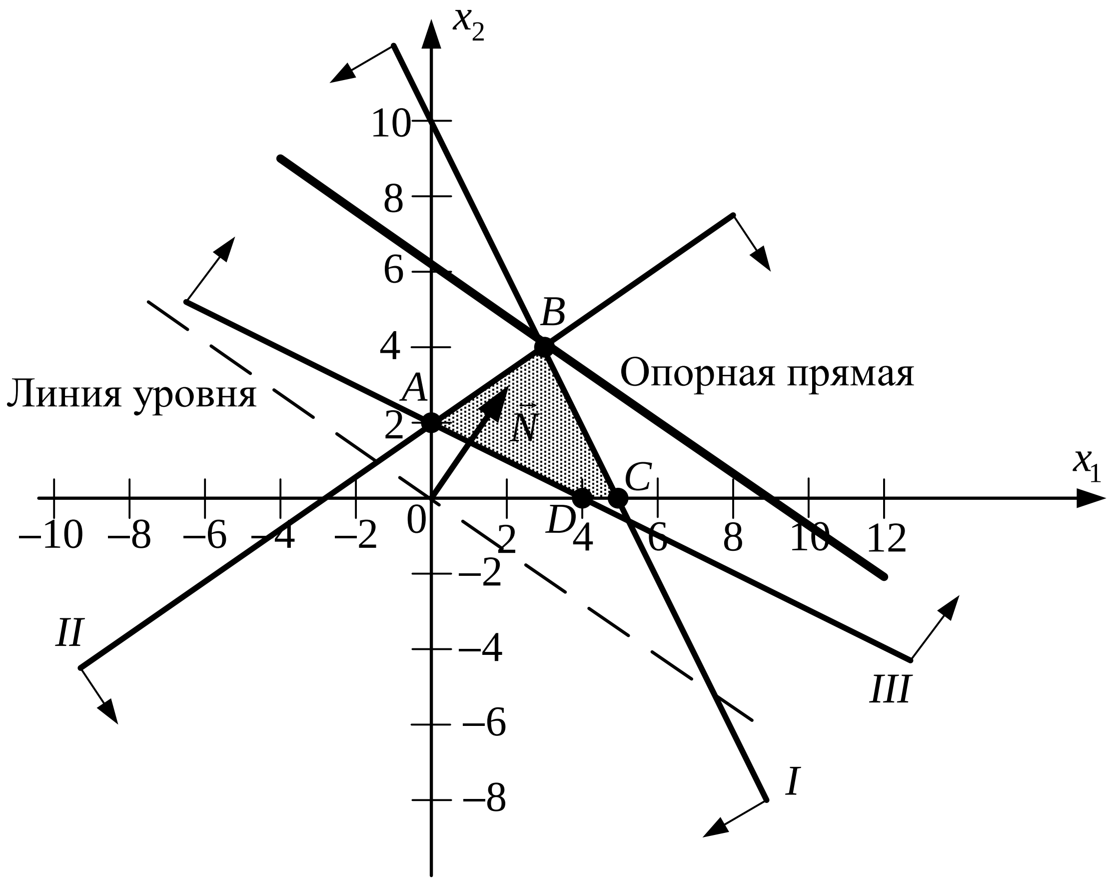


Рис. 3. **Решение задачи графическим методом**

$ABCD$– многоугольник решений. Как видно из рис. 3, функция Z принимает максимальное значение в точке B, координаты которой находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в целевую функцию и в выражения для x_3, x_4, x_5, получаем: $x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 14,\ Z_{\max} = 18.$

Итак, оптимальный план

$$X_{опт} = (3;\, 4;\, 0;\, 0;\, 14) \text{ и } Z_{\max} = 18.$$

2.3. Симплекс-метод

Симплексный метод – это метод целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет через конечное число шагов расчета либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимальное решение не существует.

Симплексный метод является универсальным методом, которым можно решать любую задачу линейного программирования.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. Найти минимум функции:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + \cdots \qquad + a_{1m+1} + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \qquad x_2 + \cdots \; + a_{2m+1} + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_m + a_{2m+1} + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, ..., n), \quad b_i > 0, \quad (i = 1, ..., m).$$

Систему ограничений можно записать в более компактной форме

$$x_1 \cdot \overline{p}_1 + x_2 \cdot \overline{p}_2 + ... + x_n \cdot \overline{p}_n = \overline{p}_0,$$

где $\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \overline{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; \overline{p}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \; \overline{p}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \; \overline{p}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Векторы $\overline{p}_1,\ \overline{p}_2, ..., \overline{p}_m$ – единичные и поэтому образуют базис, а переменные $x_1,\ x_2, ..., x_m$ – базисные переменные.

Опорное решение системы уравнений имеет вид:

$$x_0 = \left(b_1; b_2; ...; b_m; 0; 0; ...; 0\right).$$

Это решение является опорным планом рассматриваемой задачи линейного программирования.

Решение задачи начинается с нахождения опорного плана. Этот план проверяют на оптимальность по следующему критерию:

опорный план $x_0 = \left(b_1; b_2; ...; b_m; 0; 0; ...; 0\right)$ является оптимальным, если все оценки $\Delta_j \le 0$, где $\Delta_j = z_j - c_j$, $(z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \quad j = 1, ..., n)$

Если среди оценок Δ_j есть хотя бы одна положительная, то план не является оптимальным и переходят с помощью симплекс-преобразований к новому плану, который снова проверяют на оптимальность. Процесс перехода от одного опорного плана к следующему удобно проводить с помощью симплекс-таблицы (табл. 5)

Таблица 5

Симплекс-таблица

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	c_j	c_1	c_2	…	c_m	…	c_n
			$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	…	$\overline{p}_m$	…	$\overline{p}_n$
1	$\overline{p}_1$	c_1	b_1	1	0	…	0	…	a_{1n}
2	$\overline{p}_2$	c_2	b_2	0	1	…	0	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m	$\overline{p}_m$	c_m	b_m	0	0	…	1	…	a_{mn}
$m+1$	$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$		z_0	z_1	z_2	…	z_m	…	z_n
$m+2$	$\Delta_j = z_j - c_j$			Δ_1	Δ_2	…	Δ_m	…	Δ_n

Алгоритм решения задачи симплексным методом можно рассмотреть на следующем примере.

Пример 2.5. $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \quad \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,...,6).$$

Решение. Здесь $x_2,\ x_4,\ x_5$ – базисные переменные, а $x_1,\ x_3, x_6$ – свободные.

Свободным переменным даем значения: $x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_6 = 0$, а тогда $x_2 = 2,\ \ x_4 = 9,\ \ x_5 = 6$.

Исходный опорный план имеет вид: $X_0 = (0;\ 2;\ 0;\ 9;\ 6;\ 0)$.

Проверим план на оптимальность, заполняя симплекс-таблицу (табл. 6).

Таблица 6

Симплекс-таблица. План $\overline{X}_0$

№ стр	Базис	$C_{баз}$	C_j	1	–1	1	1	1	–1
			$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$	$\overline{p}_4$	$\overline{p}_5$	$\overline{p}_6$
1	$\overline{p}_4$	1	9	1	0	0	1	0	6
2	$\overline{p}_2$	–1	2	3	1	–4	0	0	2
3←	$\overline{p}_5$	1	6	1	0	2	0	1	2
4	z_j		13	–1	–1	6	1	1	6
5	$\Delta_j = z_j - c_j$			–2	0	5	0	0	7

Базис образуют единичные векторы $\overline{p}_4,\ \overline{p}_2,\ \overline{p}_5$.

Они записаны в столбец «базис». В столбце «$C_{баз}$» записаны значения C_j, соответствующие базисным векторам.

Подсчет значений z_j (строка 4) производится по формуле

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}:$$

$$z_0 = 1 \cdot 9 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 13;\; z_1 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -1;$$

$z_2 = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1$ и т. д.

В строке 5 записаны оценки Δ_j, которые вычислены по формуле $\Delta_j = z_j - c_j$:

$\Delta_1 = -1 - 1 = -2$; $\Delta_2 = -1 - (-1) = 0$; $\Delta_3 = 6 - 1 = 5$ и т. д.

Строка оценок Δ_j (строка 5) позволяет сделать вывод, что опорный план $X_0 = (0;\, 2;\, 0;\, 9;\, 6;\, 0)$ не является оптимальным, так как там имеются две положительные оценки $\Delta_3 = 5$ и $\Delta_6 = 7$.

Переходим к новому опорному плану.

В базис нужно ввести один из векторов $\overline{p}_3$ и $\overline{p}_6$. Чтобы узнать, какой, нужно для каждой положительной оценки Δ_j найти величину:

$$\theta_j = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}, \quad (a_{ij} > 0),$$

то есть найти минимальное отношение элементов столбца $\overline{p}_0$ к положительным элементам столбца $\overline{p}_j$.

Следует отметить, что если в столбцах векторов, соответствующих значениям $\Delta_j > 0$, нет положительных элементов, то задача не имеет оптимального решения.

Итак, для $\Delta_3 = 5 \quad \theta_3 = \min\left\{\frac{6}{2}\right\} = 3$,

а для $\Delta_6 = 7 \quad \theta_6 = \min\left\{\frac{9}{6}; \frac{2}{2}; \frac{6}{2}\right\} = \min\left\{\frac{3}{2}; 1; 3\right\} = 1.$

Далее находим произведения $\Delta_3 \cdot \theta_3 = 5 \cdot 3 = 15$ и $\Delta_6 \cdot \theta_6 = 1 \cdot 7 = 7$ и из них выбираем наибольшее: это $\Delta_3\theta_3$, а вектор $\overline{p}_3$, соответствующий ему, вводится в базис.

Из базиса выводится вектор $\overline{p}_5$, соответствующий наименьшему отношению элементов $\overline{p}_0$ к положительным элементам вектора $\overline{p}_3$.

Составляем новую симплекс-таблицу (табл. 7).

Таблица 7

Симплекс-таблица. План $\overline{X}_1$

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	C_j	1	–1	1	1	1	–1	Примечание
			$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$	$\overline{p}_4$	$\overline{p}_5$	$\overline{p}_6$	
6←	$\overline{p}_4$	1	9	1	0	0	1	0	6	стр. 1
7	$\overline{p}_2$	–1	14	5	1	0	0	2	6	стр. $8 \cdot 4$ + стр. 2
8→	$\overline{p}_3$	1	3	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{1}$	0	$\frac{1}{2}$	1	стр. 3 : 2
9	z_j		–2	$-\frac{7}{2}$	–1	1	1	$-\frac{3}{2}$	1	
10	Δ_j			$-\frac{9}{2}$	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	2	

Получен новый план $\overline{X}_1 = (0; 14; 3; 9; 0; 0)$, $Z_1 = -2$, который легко выписывается из симплекс-таблицы по элементам столбца $\overline{p}_0$.

План $\overline{X}_1$ также не является оптимальным, так как в строке оценок есть одна положительная оценка $\Delta_6 = 2$. Ей соответствует вектор $\overline{p}_6$, который вводится в базис.

Для определения вектора, выводимого из базиса, найдем для элементов вектора $\overline{p}_6$ число $\theta_6 = \min\left(\frac{9}{6}; \frac{14}{6}; \frac{3}{1}\right) = \frac{3}{2}$, а значит, вектор $\overline{p}_4$ выводится из базиса.

Заполняем новую симплекс-таблицу (табл. 8).

Таблица 8

Симплекс-таблица. План $\overline{X}_2$

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	C_j	1	–1	1	1	1	–1	Примечание
			$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$	$\overline{p}_4$	$\overline{p}_5$	$\overline{p}_6$	
11	$\overline{p}_6$	–1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	1	стр. 6 : 6
12	$\overline{p}_2$	–1	5	4	1	0	–1	2	0	стр. $11\cdot(-6)$+стр. 7
13	$\overline{p}_3$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	стр. $11\cdot(-1)$+стр. 8
14	Z_j		–5	$-\frac{23}{6}$	–1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	–1	
15	Δ_j			$-\frac{29}{6}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{2}$	0	

Получен оптимальный план (все $\Delta_j \le 0$)

$$\overline{X}_{опт} = \left(0;\, 5;\, \frac{3}{2};\, 0;\, 0;\, \frac{3}{2}\right),\ \ Z_{\min} = -5$$

Проведем оформление следующей задачи более компактно.

Пример 2.6. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6, \\ \qquad\quad x_2 \ \ - x_3 + x_4 \le 2, \\ x_1 \ \ - x_2 + 2x_3 \qquad\quad \le 5. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1; ...; 4)$$

Решение. Прежде всего, нужно привести задачу к каноническому виду. Для этого преобразуем неравенства в равенства, вводя дополнительные переменные, x_5, x_6, x_7 и будем искать минимум функции:

$$z' = -z = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4.$$

Получим: $z' = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 (\min)$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1; ...; 4)$$

Исходным является базис $\overline{p}_5$, $\overline{p}_6$, $\overline{p}_7$.

Этому базису соответствует исходный опорный план $\overline{X}_0 = (0; 0; 0; 0; 6; 2; 5)$. Для проверки этого плана на оптимальность необходимо заполнить одну симплекс-таблицу (табл. 9), записав все таблицы для каждого опорного решения друг под другом.

В строке 5 есть четыре положительные оценки, а значит, план X_0 не является оптимальным.

Для перехода к новому базису применим упрощенный метод выбора вектора, вводимого в базис: из всех положительных оценок Δ_j выбираем наибольшую – это $\Delta_2 = 3$, и вектор $\overline{p}_2$, соответствующий этой оценке, вводим в базис. Для этого вектора вычисляем значение $\theta_2 = \min\left(\frac{6}{2}; \frac{2}{1}; -\right) = 2$, то есть из базиса выводится вектор $\overline{p}_6$.

Таблица 9

Симплекс-таблица

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	C_j	–2	–3	–2	–1	0	0	0	Примечание
			$\bar{p}_0$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_3$	$\bar{p}_4$	$\bar{p}_5$	$\bar{p}_6$	$\bar{p}_7$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\bar{p}_5$	0	6	2	2	–3	1	1	0	0	Исходный план X_0 $\bar{X}_0 = (0; 0; 0; 0; 6; 2; 5)$ не оптимальный
←2	$\bar{p}_6$	0	2	0	1	–1	1	0	1	0	
3	$\bar{p}_7$	0	5	1	–1	2	0	0	0	1	
4	Z'_j		0	0	0	0	0	0	0	0	
5	$\Delta_j = Z'_j - C_j$			2	3	2	1	0	0	0	
6	$\bar{p}_5$	0	2	2	0	–1	–1	1	–2	0	стр. $7 \cdot (-2) +$ стр. 1
→7	$\bar{p}_2$	–3	2	0	1	–1	1	0	1	0	стр. 2
←8	$\bar{p}_7$	0	7	1	0	1	1	0	1	1	стр. 7 + стр. 3
9	Z'_j		–6	0	–3	3	–3	0	–3	0	План $\bar{X}_1 = (0; 2; 0; 0; 2; 0; 7)$ не оптимальный
10	$\Delta_j = Z'_j - C_j$			2	0	5	–2	0	–3	0	
11	$\bar{p}_5$	0	9	3	0	0	0	1	–1	1	стр. 13 + стр. 6
12	$\bar{p}_2$	–3	9	1	1	0	2	0	2	1	стр. 13 + стр. 7
13 →	$\bar{p}_3$	–2	7	1	0	$\boxed{1}$	1	0	1	1	стр. 7
14	Z'_j		–41	–5	–3	–2	–6	0	–8	–8	План $\bar{X}_2 = (0; 9; 7; 0; 9; 0; 0)$ оптимальный
15	$\Delta_j = Z'_j - C_j$			–3	0	0	–5	0	–8	–8	

Далее заполняем строки 6 – 10 в соответствии с действиями, которые указаны в примечании.

Получен новый план $\overline{X}_1 = (0;\, 2;\, 0;\, 0;\, 2;\, 0;\, 7)$, который также не является оптимальным, так как в строке 10 есть две положительные оценки. Выбираем из них наибольшую $\Delta_3 = 5$ и вводим в новый базис вектор $\overline{p}_3$. Выводим вектор $\overline{p}_7$, так как в столбце $\overline{p}_3$ есть только один положительный элемент.

Заполняем строки 11 – 15. В строке 15 все оценки $\Delta_j \le 0$. Это означает, что план $\overline{X}_2 = (0;\, 9;\, 7;\, 0;\, 9;\, 0;\, 0)$ является оптимальным.

С учетом тех переменных, которые были даны в условии задачи, оптимальный план имеет вид $\overline{X}_{опт} = (0;\, 9;\, 7;\, 0)$, $Z_{max} = 41$.

2.4. Метод искусственного базиса

Многие задачи линейного программирования не содержат в системе ограничений единичных векторов, из координат которых можно составить единичную матрицу. В этом случае для построения исходного базисного решения вводят искусственные переменные. Искусственные переменные вводятся в левую часть ограничений и в целевую функцию с коэффициентами М, где М – сколь угодно большое положительное число.

По отношению к исходной задаче составляется расширенная М-задача, которая может быть решена симплекс-методом.

Пусть исходная задача имеет вид:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\ (min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\ \ (j = \overline{1, n}), \quad b_i \ge 0\left(i = 1, \ldots, m\right).$$

Расширенная М-задача имеет вид:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m}\left(min\right),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\left(j = 1,\ldots n + m\right).$$

Между М-задачей и исходной задачей существует определенная зависимость: если М-задача не имеет решения, то либо исходная задача не имеет решения, либо ее целевая функция не ограничена; если в оптимальном решении М-задачи все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение, получаемое из оптимального решения М-задачи отбрасыванием нулевых искусственных переменных; если же в оптимальном решении М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения.

Пример 2.7. Решить методом искусственного базиса задачу:

$$Z = x_1 + 4x_2 + x_3\left(min\right),$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11, \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \ge 0.$$

Решение. Составляем расширенную М-задачу.

$$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 + Mx_4 + Mx_5\left(min\right),$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_5 = 11, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\left(j = 1, \ldots, 5\right),$$

где x_4 и x_5–искусственные переменные.

Исходный опорный план: $X_0 = \left(0;\, 0;\, 0;\, 9;\, 11\right)$.

Заполним симплекс-таблицу (табл. 10).

При заполнении таблицы векторы, соответствующие искусственным переменным, после выведения из базиса исключаются из рассмотрения.

Таблица 10

Симплекс-таблица

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	C_j	1	4	1	M	M	Примечание
			$\bar{p}_0$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_3$	$\bar{p}_4$	$\bar{p}_5$	
1	$\bar{p}_4$	M	9	5	12	2	1	0	Исходный план
2	$\bar{p}_5$	M	11	3	4	4	0	1	$X_0=(0;0;0;9;11)$
3	z_j		$20M$	$8M$	$16M$	$6M$	M	M	
4	$\Delta_j=z_j-c_j$			$8M-1$	$16M-4$	$6M-1$	0	0	
5	$\bar{p}_4$	M	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	10	0	1		стр.2 · (-2)+стр.1
6	$\bar{p}_3$	1	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	1	0		стр. 2 : 4.
7	z_j		$\frac{7}{2}M+\frac{11}{4}$	$\frac{7}{2}M+\frac{3}{4}$	$10M+1$	$\boxed{1}$	M		
8	$\Delta_j=z_j-c_j$			$\frac{7}{2}M-\frac{1}{4}$	$10M-3$	0	0		$X_1=\left(0;0;\frac{11}{4};\frac{4}{2};0\right)$
9	$\bar{p}_1$	1	1	$\boxed{1}$	$\frac{20}{7}$	0			стр. 5. $:\frac{7}{2}$
10	$\bar{p}_3$	1	2	0	$-\frac{8}{7}$	1			стр.9 $\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+$ стр.6
11	z_j		3	1	$\frac{12}{7}$	1			
12	$\Delta_j=z_j-c_j$			0	$-\frac{16}{7}$	0			$X_2=(1;\,0;\,2;\,0;\,0)$

План $X_0 = (0; 0; 0; 9; 11)$ не является оптимальным, так как в четвертой строке есть три положительные оценки:

$$\Delta_1 = 8M - 1; \Delta_2 = 16M - 4; \Delta_3 = 6M - 1.$$

Для каждой оценки найдем число θ:

$$\theta_1 = min\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{3}\right) = \frac{9}{5};$$

$$\theta_2 = min\left(\frac{9}{12}; \frac{11}{4}\right) = \frac{9}{12};$$

$$\theta_3 = min\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{4}\right) = \frac{11}{4}.$$

Далее найдем произведения:

$$\Delta_1 \cdot \theta_1 = (8M - 1) \cdot \frac{9}{5} = \frac{72}{5}M - \frac{9}{5};$$

$$\Delta_2 \cdot \theta_2 = (16M - 4) \cdot \frac{9}{12} = 12M - 3;$$

$$\Delta_3 \cdot \theta_3 = (6M - 1) \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{2}M - \frac{11}{4}$$

и выберем среди них наибольшее. Это $\Delta_3 \cdot \theta_3 = \frac{33}{2}M - \frac{11}{4}$, так как *M*, согласно сказанному ранее, – очень большое положительное число. Вектор $\overline{p}_3$ вводится в базис, а $\overline{p}_5$– выводится, что видно при вычислении θ_3. В столбце вектора $\overline{p}_5$ на последующих итерациях ничего не пишем.

Далее получаем план, $\overline{X}_1 = \left(0; 0; \frac{11}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$, который также не является оптимальным, так как в строке 8 есть две положительные оценки: $\Delta_1 = \frac{7}{2}M - \frac{1}{4}$ и $\Delta_2 = 10M - 3$.

Вычислим теперь параметры θ_1 и θ_2:

$$\theta_1 = min\left(\frac{7/2}{7/2};\frac{11/4}{3/4}\right) = 1,\ \theta_2 = min\left(\frac{7/2}{10};\frac{11}{4}\right) = \frac{7}{20}.$$

Соответствующие им произведения равны

$$\theta_1 \cdot \Delta_1 = \frac{7}{2}M - \frac{1}{4} \text{ и } \theta_2 \cdot \Delta_2 = \frac{7}{2}M - \frac{21}{20},$$

где $\theta_1 \cdot \Delta_1$ имеет наибольшее значение.

В базис вводится вектор $\overline{p}_1$, а искусственный вектор $\overline{p}_4$ выводится из базиса и из рассмотрения.

Наконец, после заполнения 9 –12-й строк получен оптимальный план, так как все $\Delta_j \le 0$:

$$X_{опт} = (1;0;2), \quad z_{min} = 3.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 2.8. $Z = -2x_1 - x_2 + x_3 (max)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 \qquad \le 2, \\ x_1 + x_2 \qquad \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z' = -Z = 2x_1 + x_2 - x_3 (min),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = 1, ..., 5).$$

Поскольку, в системе ограничений содержатся только два единичных вектора $\overline{p}_3$ и $\overline{p}_4$, то для образования базиса введем искусственную переменную x_6.

Тогда задача принимает вид

$$Z' = -Z = 2x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot x_6 \left(min\right),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = 1, ..., 6\right).$$

Исходный опорный план $\overline{X}_0 = \left(0; 0; 4; 2; 0; 1\right)$.

Далее заполняем симплекс-таблицу (табл. 11).

Таблица 11

Симплекс-таблица

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	C_j	2	1	–1	0	0	M	Примечание
			$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$	$\overline{p}_4$	$\overline{p}_5$	$\overline{p}_6$	
1	$\overline{p}_3$	–1	4	1	2	1	0	0	0	
2	$\overline{p}_4$	0	2	1	1	0	1	0	0	
3	$\overline{p}_6$	M	1	1	1	0	0	–1	1	
4	z'_j		$M-4$	$M-1$	$M-2$	–1	0	$-M$	M	
5	$\Delta_j = z'_j - c_j$			$M-3$	$M-3$	0	0	$-M$	0	
6	$\overline{p}_3$	–1	3	0	1	1	0	1		стр. 1 – стр. 8
7	$\overline{p}_4$	0	1	0	0	0	1	1		стр. 2 – стр. 8
8	$\overline{p}_1$	2	1	1	1	0	0	–1		стр. 3
9	z'_j		–1	2	1	–1	0	–3		
10	$\Delta_j = z'_j - c_j$			0	–2	0	0	–3		

В строке 5 две положительные оценки $\Delta_1 = \Delta_2 = M - 3$.

Им соответствуют $\theta_1 = min(4;\,2;\,1) = 1$ и $\theta_2 = min(2;\,2;\,1) = 1$.

Так как $\Delta_1 \cdot \theta_1 = \Delta_2 \cdot \theta_2$, то в базис вводится любой из векторов $\overline{p}_1$ или $\overline{p}_2$.

Введем вектор $\overline{p}_1$, а выведем искусственный вектор $\overline{p}_6$ в соответствии со значением θ_1.

После заполнения следующих 6 –10-й строк получен оптимальный план $\overline{X}_{опт} = (1;0;3), \quad Z_{max} = 1$.

Этот план расширенной М-задачи является оптимальным планом для исходной задачи.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

Постройте область решений системы неравенств

2.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} -\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - x_2 \ge 4. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \\ 0 \le x_2 \le 7. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ 4x_1 + x_2 \le 2, \\ 2 \le x_2 \le 6. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le -1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 0. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

Решите графическим методом задачи линейного программирования.

2.9. $z = 2x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases}$$

2.10. $z = -2x_1 + x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.11. $z = -3x_1 + 2x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.12. $z = x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.13. $z = 2x_1 - 4x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.14. $z = 2x_1 + 5x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.15. $z = 3x_1 + 2x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \ge 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

2.16. $z = 2x_1 + 2x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -6, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 5. \end{cases}$$

Решите симплексным методом задачи линейного программирования.

2.17. $z = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \ (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 \le 0, \quad x_2 \le 0, \\ x_3 \le 0, \quad x_4 \le 0. \end{cases}$$

2.18. $z = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 \le 0, \quad x_2 \le 0, \\ x_3 \le 0, \quad x_4 \le 0. \end{cases}$$

2.19. $z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \ (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

2.20. $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \ (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \\ x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0. \end{cases}$$

2.21. $z = -x_1 + x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решите задачи линейного программирования методом искусственного базиса.

2.22. $z = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \ (\min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

2.23. $z = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \ (\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

2.24. $z = x_1 + 2x_2 - x_3 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 & \geq \ 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = \ 8, \\ -x_1 + 3x_2 & \geq \ 3, \\ \qquad x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

2.25. $z = 2x_1 + x_2 - x_3 \ (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 & = \ 3, \\ x_1 + 3x_2 & \leq \ 5, \\ x_1 + \ \ x_2 & \geq \ 2, \\ \qquad x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

2.26. $z = 2x_1 + x_2 - x_3 \ (\max)$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = \ 9, \\ 3x_1 + \ 4x_2 + 4x_3 = 11, \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

2.6. Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет математическая модель задачи линейного программирования?

2. Какая форма записи задачи называется канонической?

3. Что называется оптимальным планом задачи линейного программирования?

4. Какие переменные называются дополнительными?

5. Что называется многоугольником решений?

6. Какая прямая называется линией уровня?

7. В чем заключатся суть симплексного метода?

8. Опишите в каких случаях необходимо составлять и решать расширенную М-задачу?

3. Двойственные задачи линейного программирования

3.1. Построение двойственных задач

Любой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* к исходной задаче или *сопряженной*.

Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач линейного программирования. Каждая из задач считается двойственной по отношению к другой.

Пусть дана задача линейного программирования:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad (max),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, ..., n).$$

Двойственная к ней задача имеет вид:

$$f = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \quad (min),$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases}$$
$$y_i \ge 0 \quad (i = 1, ..., m).$$

Исходная задача по отношению к двойственной является прямой. Между ними существует прямая связь.

В прямой задаче на максимум ограничения вида "$\le$", а в двойственной задаче на минимум ограничения вида "$\ge$". В прямой задаче n неизвестных и m ограничений, а в двойственной – m неизвестных и n ограничений.

Коэффициенты целевой функции прямой задачи являются величинами в правых частях системы ограничений двойственной задачи и наоборот.

Матрица ограничений двойственной задачи получается путем транспонирования матрицы ограничений прямой задачи.

Переменные в обеих задачах должны быть неотрицательными.

Пример 3.1. Составьте задачу, двойственную к данной.

$$z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \quad (min),$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Решение. Преобразуем первое неравенство к виду "≥", умножив обе его части на (-1):

$$z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \quad (min)$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 \ge -5, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 2, \end{cases} \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Двойственная задача имеет вид:

$$f = -5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \quad (max),$$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \le 2, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \le -4, \\ -y_1 - 2y_3 \le 3, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

3.2. Основные теоремы двойственности

Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить отсутствие оптимального решения.

Первая теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем оптимальные значения целевых функций совпадают, то есть $z_{\max} = f_{\min}$.

Вторая теорема двойственности. Если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i -ое ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, то i-я координата двойственной задачи равна нулю, и наоборот, если i-я координата оптимального решения двойственной задачи положительна, то i-ое ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как равенство.

Пример 3.2. Используя графический метод и теоремы двойственности, найдите оптимальные решения пары двойственных задач.

$$z = 4x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 6x_4 \quad (min),$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \qquad \geq 2, \\ \quad x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,\dots,4).$$

Решение. Составим двойственную задачу к данной. Так как исходная задача имеет два ограничения, то двойственная будет содержать две переменные y_1 и y_2.

Двойственная задача имеет вид.

Целевая функция:

$$f = 2y_1 + 5y_2 \quad (max),$$

система ограничений:

$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 \le 4, \\ 3y_1 + 2y_2 \le 24, \\ 5y_1 - 4y_2 \le 20, \\ y_2 \le 6. \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \;\; y_2 \ge 0.$$

Решим эту задачу графически.

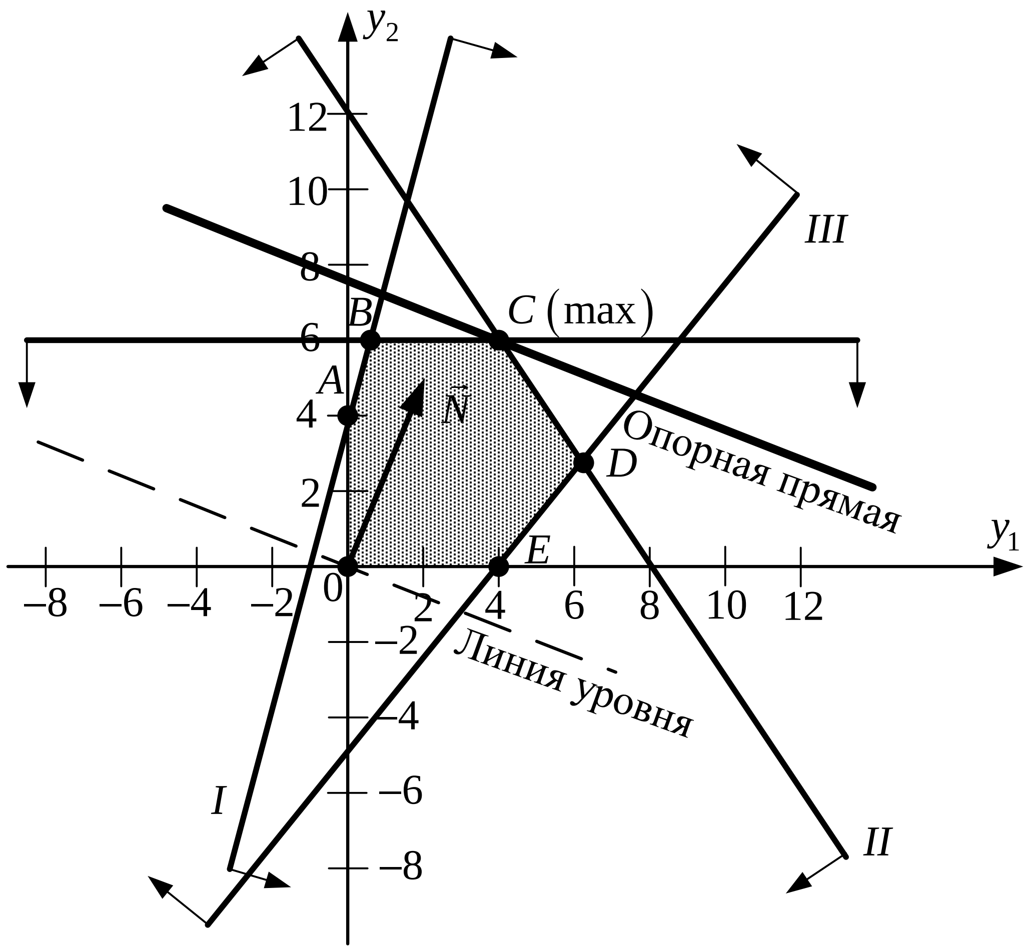


Рис. 4. **Решение задачи графическим методом**

$OABCDE$ – многоугольник решений.

Как видно из рис. 4, функция f принимает максимальное значение в точке *C*. Координаты точки *C* легко найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 = 24, \\ y_2 = 6. \end{cases}$$

Получаем $y_1 = 4$; $y_2 = 6$ и тогда оптимальное решение двойственной задачи $\overline{Y}_{опт} = (4; 6)$, $f_{max} = 38$.

Используя вторую теорему двойственности, найдем решение исходной прямой задачи.

А) Подставим $y_1 = 4$ и $y_2 = 6$ в ограничения двойственной задачи:

$$\begin{cases} -4 \cdot 4 + 6 \quad < 4, \\ 3 \cdot 4 \quad + 2 \cdot 6 = 24, \\ 5 \cdot 4 \quad - 4 \cdot 6 < 20, \\ \qquad\qquad 6 = 6. \end{cases}$$

Так как первое и третье ограничения выполняются как строгие неравенства, то в оптимальном решении прямой задачи $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$.

А так как второе и четвертое ограничения выполняются как равенства, то $x_2 > 0$ и $x_4 > 0$.

Б) Так как в $\overline{Y}_{опт}$ $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$, то ограничения прямой задачи выполняются как равенства:

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \qquad = 2, \\ \quad x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$, найдем x_2 и x_4:

$$\begin{cases} 3x_2 \qquad = 2, \\ 2x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \text{ откуда } x_2 = \frac{2}{3};\ x_4 = \frac{11}{3}.$$

Итак, $\overline{X}_{опт} = \left(0; \frac{2}{3}; 0; \frac{11}{3}\right)$, а

$$z_{min} = 24 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{11}{3} = 38.$$

Первая теорема двойственности выполняется:

$$z_{\min} = f_{\max}.$$

3.3. Экономическая интерпретация двойственных задач

Экономическую интерпретацию двойственных задач и двойственных оценок можно рассмотреть на примере задачи об использовании сырья.

Пример 3.3. Для производства двух видов изделий A и B используется три вида различного сырья. Каждый вид сырья может быть использован в количестве, соответственно, не большем чем 741,741и 822 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена реализации единицы изделий A и B приведены в табл. 12.

Таблица 12

Исходные данные

Вид сырья	Изделия		Запас сырья
	A	B	
1	11	21	741
2	13	15	741
3	13	3	822
Цена 1 изд.	5	3	

Составьте план производства изделий A и B, который обеспечит предприятию максимальную прибыль. Оцените с помощью двойственной задачи каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Решение. Обозначим через x_1 количество изделий вида A, а через x_2 – вида B.

Составим математическую модель задачи.

Для этого запишем систему ограничений в виде неравенств, которые показывают, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить количество имеющихся запасов.

$$\begin{cases} 11x_1 + 21x_2 \le 741, \\ 13x_1 + 15x_2 \le 741, \\ 13x_1 + \ 3x_2 \le 822. \end{cases}$$

Кроме того, $x_1 > 0,\ x_2 > 0.$

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли – математически можно выразить в виде целевой функции:

$$z = 5x_1 + 3x_2.$$

Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2, при которых функция z достигает максимума. Построенная функция z вместе с системой ограничений образует математическую модель решаемой экономической задачи. Для решения задачи симплекс-методом преобразуем систему ограничений в равенства, прибавляя к левым частям неотрицательные дополнительные переменные $x_3,\ x_4,\ x_5$.

$$\begin{cases} 11x_1 + 21x_2 + x_3 = 741, \\ 13x_1 + 15x_2 + x_4 = 741, \\ 13x_1 + 3x_2 + x_5 = 822. \end{cases}$$

$$z = 5x_1 + 3x_2\left(max\right).$$

Введем функцию $z_1 = -z = -5x_1 - 3x_2\left(min\right).$

Заполним симплекс-таблицу (табл. 13).

Исходный план $\overline{X}_0 = \left(0;\ 0;\ 741;\ 741;\ 822\right)$ не является оптимальным, так как все оценки $\Delta_j \ge 0.$

Для каждой положительной оценки Δ_j следует вычислить величину θ_j, чтобы узнать, какой вектор вводится в базис.

Таблица 13

Симплекс-таблица

№ стр.	Базис	$c_{баз}$	c_j	–5	–3	0	0	0	Примечание
			$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$	$\overline{p}_4$	$\overline{p}_5$	
1	$\overline{p}_3$	0	741	11	21	1	0	0	План $\overline{X}_0 = (0; 0; 741; 741; 822)$ неоптимальный, так как $\Delta_1 = 5 > 0,\ \Delta_2 = 3 > 0$
2	$\overline{p}_4$	0	741	13	15	0	1	0	
3	$\overline{p}_5$	0	822	13	3	0	0	1	
4		z'_j	0	0	0	0	0	0	
5	$\Delta_j = z'_j - c_j$			5	3	0	0	0	
6	$\overline{p}_3$	0	114	0	$\frac{108}{13}$	1	$-\frac{11}{13}$	0	стр. $[7]\cdot(-11)+$ стр. $[1]$
7	$\overline{p}_1$	–5	57	1	$\frac{15}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	0	стр. $[2]:13$
8	$\overline{p}_5$	0	81	0	–12	0	–1	1	стр. $[7]\cdot(-13)+$ стр. $[3]$
9		z'_j	–285	–5	$-\frac{75}{13}$	0	$-\frac{5}{13}$	0	
10	$\Delta_j = z'_j - c_j$			0	$-\frac{36}{13}$	0	$-\frac{5}{13}$	0	

$$\theta_1 = min\left(\frac{741}{11}; \frac{741}{13}; \frac{822}{13}\right) = \frac{741}{13} = 57,$$

$$\theta_2 = min\left(\frac{741}{21}; \frac{741}{15}; \frac{822}{3}\right) = \frac{741}{21} \approx 35,$$

$$\theta_1 \cdot \Delta_1 = 57 \cdot 5 = 285; \quad Q_2 \cdot \Delta_2 = \frac{741}{21} \cdot 3 \approx 106.$$

Максимальному произведению $\theta_1 \cdot \Delta_1$, соответствует вектор $\overline{p}_1$, которому соответствует число 57.

Строим новый план $\overline{X}_1 = (57; 0; 114; 0; 81)$.

Этот план является оптимальным, так как все оценки $\Delta_j \le 0$.

Ему соответствует $z_{max} = 285$.

Итак, получим: предприятие должно изготовлять изделия вида A и совсем не изготовлять изделия вида B, чтобы получить максимальную прибыль.

Решим задачу графически (рис. 5).

Построим многоугольник планов. Для этого построим сначала прямые, соответствующие уравнениям:

$$\begin{cases} 11x_1 + 21x_2 = 741, \\ 13x_1 + 15x_2 = 741, \\ 13x_1 + 3x_2 = 822. \end{cases}$$

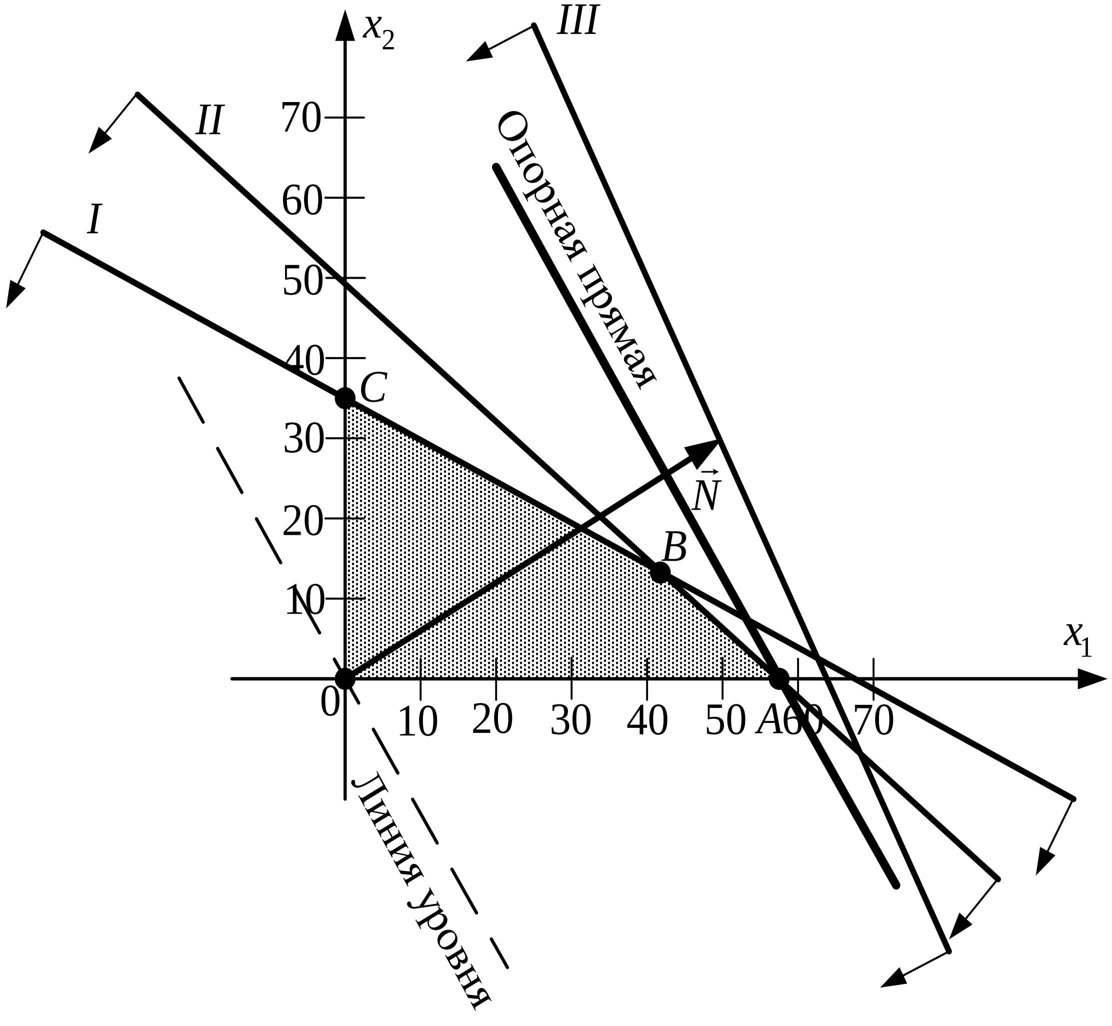


Рис. 5. **Решение задачи графическим методом**

А затем отмечаем область, соответствующую каждому неравенству. Получили многоугольник $OABC$ (рис. 5).

Для того, чтобы найти, в какой точке границы этого многоугольника функция z достигает своего максимального значения, проведем вектор градиент z $(grad\, z)$.

$$\overline{N} = grad\, z = (5; 3).$$

Можно построить вектор $\overline{N} = (50; 30)$, так как важно только направление этого вектора, а не его длина. Затем через начало координат проводим линию уровня – прямую, перпендикулярную вектору $\overline{N}$, и передвигаем ее параллельно себе в сторону градиента до тех пор, пока она не будет касаться границы области. Такой точкой в нашей задаче является точка A. Она находится на пересечении второй прямой с осью OX_1. Найдем ее координаты: $A(57, 0)$.

Оценим имеющиеся у предприятия ресурсы. С помощью двойственной задачи припишем каждому из видов сырья, используемого для производства изделий, двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2 и y_3.

Тогда общая оценка сырья составит

$$f = 741y_1 + 741y_2 + 822y_3 (min).$$

Двойственные оценки должны быть таковы, чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше цены продукции данного вида, то есть y_1 и y_2 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 11y_1 + 13y_2 + 13y_3 \ge 5, \\ 21y_1 + 15y_2 + \ 3y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

Найдём оптимальное решение двойственной задачи, используя оптимальное решение прямой $\overline{X}_{опт} = (57; 0; 114; 0; 81)$ и вторую теорему двойственности.

Так как $x_1 = 57 > 0$, то первое ограничение двойственной задачи выполняется как точное равенство, то есть $11y_1 + 13y_2 + 13y_3 = 5.$

С другой стороны, подставим оптимальное решение прямой задачи $x_1 = 57$ и $x_2 = 0$ в её ограничения, получаем условия:

$$\begin{cases} 11 \cdot 57 + 21 \cdot 0 < 741, \\ 13 \cdot 57 + 15 \cdot 0 = 741, \\ 13 \cdot 57 + \ \ 3 \cdot 0 < 822. \end{cases}$$

Из которых следует, что $y_1 = 0;\ y_2 > 0;\ y_3 = 0.$

Окончательно для определения оптимального решения двойственной задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1 = 0; \quad y_3 = 0, \\ 11y_1 + 13y_2 + 13y_3 = 5, \end{cases}$$

откуда получаем $\overline{Y}_{опт} = \left(0; \dfrac{5}{13}; 0\right).$

Следует заметить, что это оптимальное решение, взятое с противоположными знаками, находится в строке оценок Δ_j окончательной симплекс-таблицы прямой задачи в столбцах векторов $\overline{p}_3$, $\overline{p}_4$, $\overline{p}_5$, соответствующих дополнительным переменных x_3, x_4, x_5.

Проверить правильность полученного результата следует также по первой теореме двойственности, согласно которой должно выполняться равенство $z_{\max} = f_{\min}$.

Найдём $f_{min} = 0 \cdot 741 + \dfrac{5}{13} \cdot 741 + 0 \cdot 822 = 285.$

Раннее найдено $z_{\max} = 285$

Итак, получены оптимальные решения прямой и двойственной задач: $\overline{X}_{опт} = (57; 0; 114; 0; 81)$, $\overline{Y}_{опт} = \left(0; \dfrac{5}{13}; 0\right).$

Значения $x_3 = 114$ и $x_5 = 81$ показывают, что сырьё I и III вида оказалось недоиспользованным в количествах 114 и 81 кг. Оценки этих ресурсов в $\overline{Y}_{опт}$ равны нулю $(y_1 = 0;\ y_3 = 0)$.

Значение $x_4 = 0$ означает, что сырьё II вида использовано полностью, а его оценка $y_2 = \frac{5}{13}$ положительна. Итак, положительную оценку имеет только то сырьё, которое полностью используется при оптимальном плане производства. Поэтому двойственная оценка определяет дефицитность используемого сырья. Более того, величина этой оценки показывает, насколько возрастёт прибыль предприятия при увеличении этого вида сырья на 1 кг.

Так, значение $y_2 = \frac{5}{13}$ показывает, что увеличение сырья II вида на 1 кг, даёт возможность предприятию составить новый оптимальный план производства изделий, при котором прибыль увеличится на $\frac{5}{13}$ грн.

Подставим $\overline{Y}_{опт} = \left(0; \frac{5}{13}; 0\right)$ в ограничение двойственной задачи:

$$\begin{cases} 0\cdot 11 + 13\cdot\dfrac{5}{13} + 13\cdot 0 = 5, \\ 21\cdot 0 + 15\cdot\dfrac{5}{13} + \ 3\cdot 0 > 3. \end{cases}$$

Первое ограничение выполняется как строгое равенство. Это означает, что двойственная оценка изделия A точно равна его цене. Поэтому выпускать это изделие по двойственным оценкам экономически целесообразно. Производство изделия A и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи. Второе ограничение выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого для производства изделия B выше цены этого изделия и, значит, выпускать его предприятию невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом. Как видим, двойственные оценки тесно связаны с оптимальным планом прямой задачи.

3.4. Технология решения оптимизационных задач с помощью надстройки «Поиск решения» в среде Microsoft Excel

«Поиск решения» – это надстройка офисного приложения Microsoft Excel, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Для запуска «Поиска решения» необходимо выбрать команду **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения.** Если отсутствует надстройка «Поиск решения», то необходимо выполнить следующие действия: 1) нажать значок **Кнопка «Office»** $\Rightarrow$ **Параметры Excel**; 2) выбрать команду **Надстройки Excel**; 3) в окне **Управление надстройками Microsoft Office** нажать кнопку **Перейти**; 3) в окне **Доступные надстройки** включить флажок опции **Поиск решения** и нажать кнопку **OK**.

Этапы работы с надстройкой.

Алгоритм получения решения задачи с использованием офисного приложения Microsoft Excel можно рассмотреть на примере.

Для изготовления изделий видов A и B предприятие использует три разных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A и B, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 14.

Таблица 14

Исходные данные

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	*B*	
I	9	5	1 431
II	7	8	1 224
III	4	16	1 328
Цена одного изделия (грн)	3	2	

Изделия видов A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен, но производство ограничено запасами сырья каждого вида).

Необходимо составить план производства изделий таким образом, чтобы общая стоимость всей продукции, которая произведена предприятием, была максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Обозначим через x_1 и x_2 количество изделий A и B соответственно.

Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, то переменные x_1 и x_2 должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \le 1431, \\ 7x_1 + 8x_2 \le 1224, \\ 4x_1 + 16x_2 \le 1328. \end{cases}$$

Общая стоимость продукции, которую изготовило предприятие (по условию x_1 изделие вида A и x_2 изделий вида B), равна:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1 и x_2 должны принимать только положительные значения.

1. Для решения задачи необходимо создать экранную форму введения условий задачи: переменных, целевой функции, ограничений и предельных условий (рис. 6).

2. Ввести необходимые формулы в экранную форму: формулу для расчетов целевой функции, формулы для расчетов левых частей ограничений (рис. 7).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**План выпуска изделий**						
2							
3	**Вид сырья**	***Количество изделий***		**Расходы сырья на изготовление изделий**		**Запас сырья**	**Остатки сырья**
4		***А***	***В***				
5		0	0				
6		***Нормы расхода сырья на изготовление одного изделия***					
7		*А*	*В*				
8	I	9	5	0	<=	1431	1431
9	II	7	8	0	<=	1224	1224
10	III	4	16	0	<=	1328	1328
11	**Прибыль от реализации изделий**	3	2	**0**	**Максимальная прибыль**		
12	**Максимальная прибыль от реализации изделий**	0	0	**0**			

Рис 6. **Формирование шаблона исходных данных**

	A	B	C	D	E	F	G
1	**План выпуска изделий**						
2							
3	**Вид сырья**	***Количество изделий***		**Расходы сырья на изготовление изделий**		**Запас сырья**	**Остатки сырья**
4		***А***	***В***				
5		0	0				
6		***Нормы расхода сырья на изготовление одного изделия***					
7		*А*	*В*				
8	I	9	5	=СУММПРОИЗВ($B$5:$C$5;B8:C8)	<=	1431	=F8-D8
9	II	7	8	=СУММПРОИЗВ($B$5:$C$5;B9:C9)	<=	1224	=F9-D9
10	III	4	16	=СУММПРОИЗВ($B$5:$C$5;B10:C10)	<=	1328	=F10-D10
11	**Прибыль от реализации изделий**	3	2	=СУММПРОИЗВ($B$5:$C$5;$B$11:$C	**Максимальная прибыль**		
12	**Максимальная прибыль от реализации изделий**	=B11*B5	=C11*C5	=СУММ(B12:C12)			

Рис. 7. **Основные расчетные формулы**

3. Оптимизировать задачу (меню Данные ⇒ Поиск решения). Для этого в диалоговом окне **Поиск решения** задать ячейку целевой функции, направление оптимизации целевой функции, ввести ячейки со значениями переменных, изменяемые ячейки, ограничения (рис. 8).

В диалоговом окне **Поиск решения** (поле **Установить целевую ячейку**) делаем ссылку на ячейку $D$11, в которой находится формула, для оптимизации модели. Для того чтобы максимизировать значение целевой ячейки, устанавливаем переключатель в положение **Максимальному значению**. В поле **Изменяя ячейки** вводим адреса ячеек, которые изменяют свои значения, разделяя их запятыми: $B$5:$C$5.

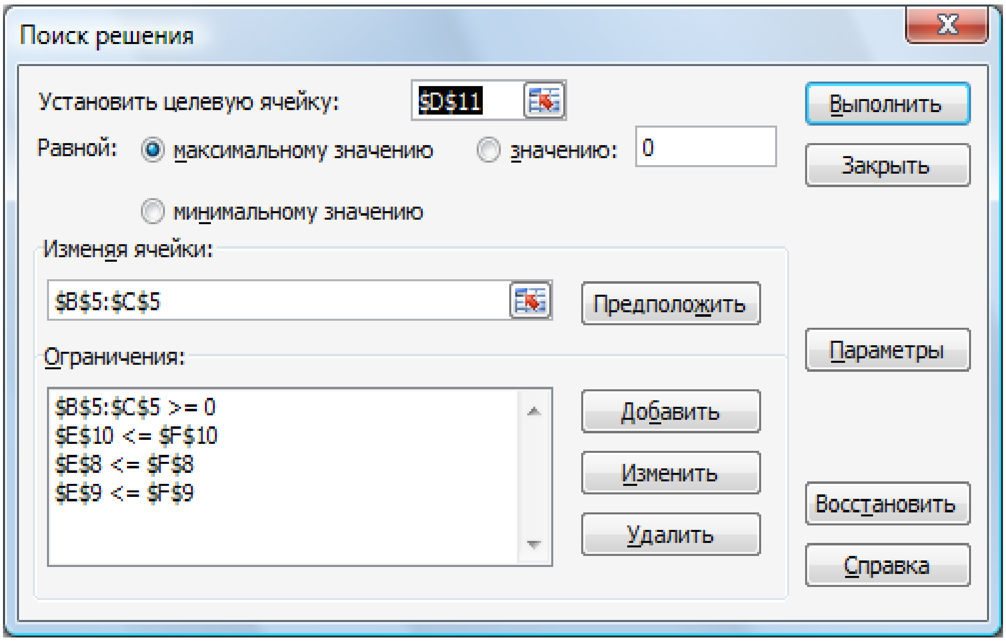


Рис. 8. **Работа в диалоговом окне *Поиск решения***

В поле **Ограничения** вводим все ограничения (рис. 9).

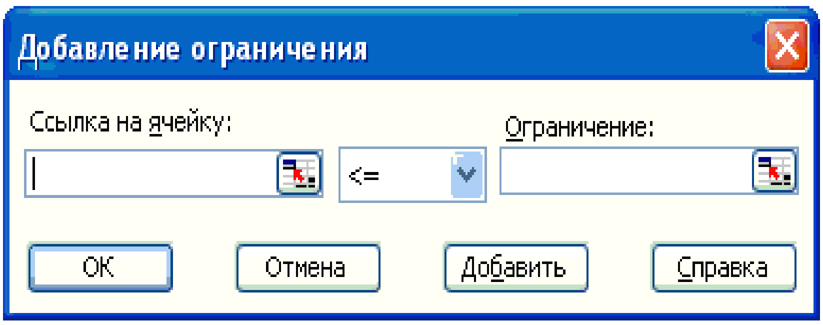


Рис. 9. **Диалоговое окно *Добавление ограничения***

В окне **Параметры** поиска решения отметить **Линейная модель, Неотрицательные значения,** что обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи.

Подтверждение установленных параметров осуществляем нажатием кнопки **OK.** Нажимаем кнопку **Выполнить** в окне **Поиск решения**. Для сохранения найденного решения устанавливаем переключатель в диалоговом окне **Результаты поиска решения** в положение **Сохранить найденное решение** (рис. 10).

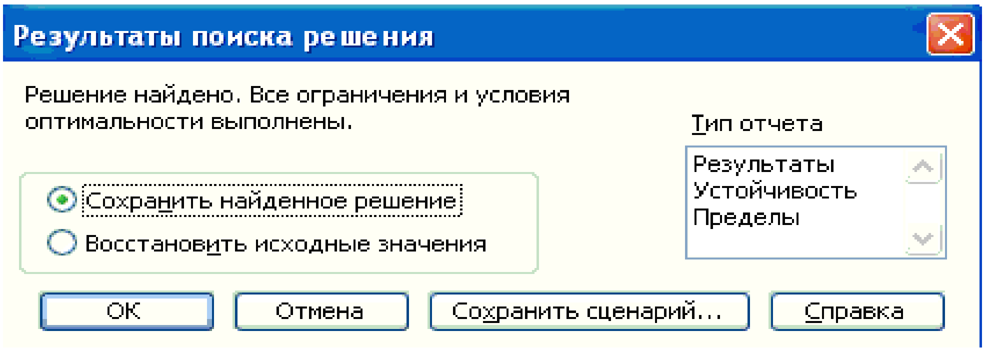


Рис. 10. **Параметры сохранения характеристик решения**

После этого в экранной форме появится оптимальное решение задачи (рис. 11).

	A	B	C	D	E	F	G
4	**Вид сырья**	***A***	***B***	**Расходы сырья на изготовление изделий**		**Запас сырья**	**Остатки сырья**
5		144	27				
6		***Нормы расхода сырья на изготовление одного изделия***					
7		*A*	*B*				
8	I	9	5	1431	<=	1431	0
9	II	7	8	1224	<=	1224	0
10	III	4	16	1008	<=	1328	320
11	**Прибыль от реализации изделий**	3	2	486	**Максимальная прибыль**		
12	**Максимальная прибыль от реализации изделий**	432	54	486			

Рис. 11. **Оптимальное решение задачи**

Вывод: для того, чтобы получить максимальную прибыль в размере 486 грн, необходимо изготовить 144 изделия вида A и 27 изделий вида B. При этом ресурсы первого и второго видов будут использованы полностью, а ресурс третьего вида будет недоиспользован на 320 кг.

Решим с помощью надстройки **Поиск решения** двойственную задачу.

1. Занесем исходные данные математической модели двойственной задачи в рабочий лист книги *MS Excel* (рис. 12).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Двойственная задача							
2	Виды сырья:	1-й	2-й	3-й				
3	Теневые цены	1	1	1	Всего			
4	Удельная прибыль	1431	1224	1328				
5	Тип продукции:	Ограничения						Излишек
6	1-й	9	7	4		≥	3	
7	2-й	5	8	16		≥	2	

Рис. 12. **Исходные данные двойственной задачи**

2. Вводим необходимые формулы в экранную форму (рис. 13).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Двойственная задача							
2	Виды сырья:	1-й	2-й	3-й				
3	Теневые цены	1	1	1	Всего			
4	Удельная прибыль	1431	1224	1328	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;B4:D4)			
5	Тип продукции:	Ограничения						Излишек
6	1-й	9	7	4	=СУММПРОИЗВ($B$3:$D$3;B6:D6)	≥	3	=E6-G6
7	2-й	5	8	16	=СУММПРОИЗВ($B$3:$D$3;B7:D7)	≥	2	=E7-G7

Рис. 13. **Расчетные формулы двойственной задачи**

3. С помощью команды **Данные ⇒ Поиск решения** вызываем на экране диалоговое окно **Поиск решения** и заполняем его поля (рис. 14).

Для установки конкретных параметров решения задачи необходимо нажать кнопку **Параметры** в окне **Поиск решения.** В окне **Параметры** поиска решения отметить **Линейная модель, Неотрицательные значения**, что обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи.

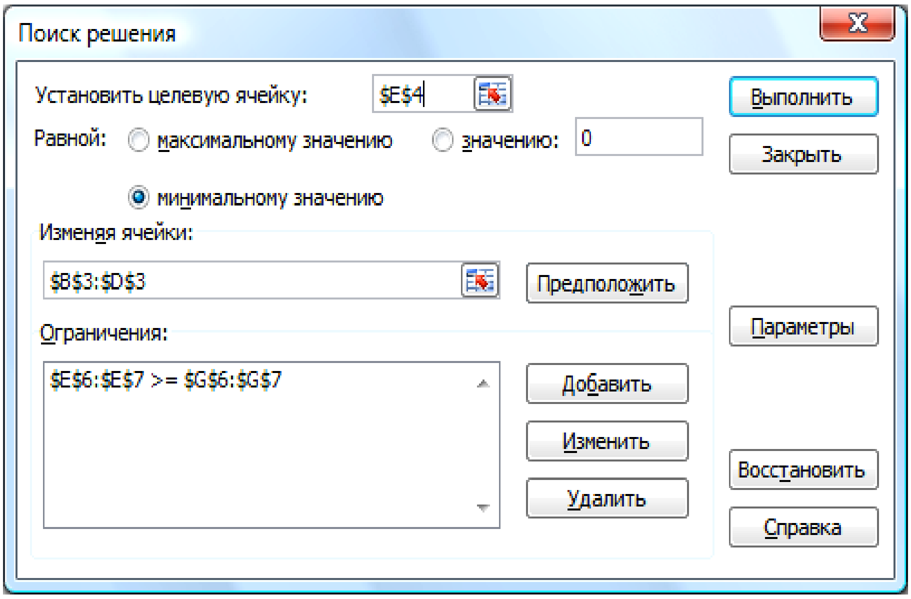


Рис. 14. **Диалоговое окно *Поиск решения***

Нажимаем кнопку **Выполнить** в окне **Поиск решения** для запуска решения задачи.

4. Полученные результаты имеют вид (рис. 15):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Двойственная задача							
2	Виды сырья:	1-й	2-й	3-й				
3	Теневые цены	0,2703	0,081	0	Всего			
4	Удельная прибыль	1431	1224	1328	486			
5	Тип продукции:	Ограничения						Излишек
6	1-й	9	7	4	3	≥	3	0
7	2-й	5	8	16	2	≥	2	0

Рис. 15. **Результаты задачи**

Получено решение $Y_{опт} = (0,2703;\ 0,081;\ 0)$, по которому теневые цены третьего типа равняются нулю. Это решение совпадает с теневой ценой оптимального плана начальной задачи. Это означает, что количество сырья 3-го типа является избыточным. Так, количество сырья 3-го типа можно уменьшить на 320 ед. При этом оптимальный план остается без изменений и значение целевой функции по этому плану составляет 486 условных единиц. Такого же значения достигает целевая функция двойственной задачи.

5. Кроме исходных данных и решения двойственной задачи получена информация об устойчивости относительно изменения коэффициентов целевой функции и изменения правых частей неравенств основной системы ограничений. Сравнение результатов, которые приведены в отчете относительно устойчивости решений исходной и двойственной задач, позволяет проиллюстрировать все положения теории двойственности (рис. 16).

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Теневые цены 1-й	0,27027027	0	1431	142,7142857	148
$C$3	Теневые цены 2-й	0,081081081	0	1224	95,48387097	111
$D$3	Теневые цены 3-й	0	320	1328	1E+30	320

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$6	1-й Всего	3	144	3	0,6	1,25
$E$7	2-й Всего	2	27	2	1,428571429	0,333333333

Рис. 16. **Отчет относительно устойчивости решения двойственной задачи**

Первый блок отчета **«Устойчивость»** содержит сведения о пределах возможного уменьшения и увеличения коэффициентов целевой функции, которые не влияют на оптимальность найденного решения.

Второй блок отчета **«Устойчивость»** содержит информацию о чувствительности к изменениям ограничений. Столбец **«Теневая цена»** содержит значение двойственных переменных, которые отвечают заданным ограничениям – это стоимость единицы ресурсов.

Таким образом, анализ устойчивости указывает на допустимые изменения во внутренней и внешней средах задачи планирования, которые не влияют на оптимальность принятого решения.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

Построить двойственные задачи к данным задачам.

3.1. $z = x_1 + 1,5x_2$ $(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.2. $z = x_1 - 10x_2$ $(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 0,5x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.3. $z = -x_1 + x_2$ $(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.4. $z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$ $(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

3.5. $z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$ $(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Для данной задачи линейного программирования составьте двойственную задачу.

Решите обе задачи, используя графический метод и теоремы двойственности.

3.6. $z = 3x_1 + x_2 + x_3 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

3.7. $z = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \ (\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

3.8. $z = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \ (\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -3, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.9. $z = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \ (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Индивидуальное задание по теме «Задача линейного программирования»

Для изготовления двух видов продукции A и B используется три вида сырья S_1, S_2 и S_3. Запасы сырья b_1, b_2 и b_3, количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого вида продукции, а также прибыль, получаемая от реализации единицы продукции каждого вида, заданы в табл. 15.

Таблица 15

Исходные данные задачи в общем виде

Вид сырья	Вид продукции		Запасы сырья (кг)
	A	B	
S_1	a_{11}	a_{12}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	b_2
S_3	a_{31}	a_{32}	b_3
Прибыль от реализации одного изделия	c_1	c_2	

Найдите такой план производства продукции видов A и B, при котором прибыль от реализации всей произведенной продукции будет максимальной.

Необходимо:

1. Составить математическую модель задачи.
2. Решить задачу графическим методом.
3. Решить задачу симплексным методом.
4. Составить двойственную задачу и решить ее, используя решение прямой задачи и теоремы двойственности.
5. Дать оценку полученным результатам.
6. Решить задачу с помощью надстройки «Поиск решения» в среде Microsoft Excel.

Значения a_{ij}, b_j, c_j приведены в табл. 16.

Таблица 16

Значения нормативних коэффициентов

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	b_1	a_{21}	a_{22}	b_2	a_{31}	a_{32}	b_3	c_1	c_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	8	1	4	20	1	0	5	1	2
2	1	5	35	2	1	16	1	0	6	2	3

Окончание табл.16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	4	28	1	1	10	1	0	7	3	5
4	1	6	24	1	2	12	1	0	8	1	1
5	1	3	30	2	3	36	1	0	9	2	4
6	1	4	36	3	2	38	1	0	10	1	1
7	1	4	36	5	3	44	1	0	7	2	3
8	1	2	15	1	3	21	1	0	5	2	5
9	2	8	48	1	2	14	1	0	6	2	7
10	1	5	35	2	3	27	1	0	7	1	1
11	1	7	63	2	1	22	1	0	9	2	3
12	1	7	56	2	1	21	1	0	8	2	3
13	1	3	30	3	1	26	1	0	7	1	1
14	3	1	12	1	2	9	1	0	4	2	2
15	1	6	42	1	1	12	1	0	8	1	2
16	2	7	49	3	2	31	1	0	9	2	3
17	1	9	81	2	1	26	1	0	10	1	1
18	1	3	21	1	1	11	1	0	8	1	2
19	1	2	14	2	1	13	1	0	5	3	4
20	1	3	24	3	1	24	1	0	7	2	5

Контрольные вопросы к индивидуальному заданию

1. Какова общая структура математической модели задачи линейного программирования (ЛП)?

2. Дайте определение выпуклого множества и сформулируйте основные свойства выпуклых множеств.

3. Что называется многоугольником планов, опорным планом, оптимальным планом?

4. Сформулируйте основные положения графического метода решения задач ЛП.

5. Симплексный метод решения канонической задачи ЛП. Алгоритм решения ЗЛП с использованием симплексной таблицы.

6. Сформулируйте критерий оптимальности плана при исследовании целевой функции на минимум симплекс-методом.

7. Охарактеризуйте основные типы задач, которые можно решить с помощью надстройки среды **Excel «Поиск решения».**

8. Каковы основные опции диалогового окна **«Поиск решения»**?

9. Алгоритм решения оптимизационных задач в среде **Excel**.

10. Каким образом определить требования максимизации или минимизации целевой функции? Как провести анализ результатов вычислений полученных в надстройке **«Поиск решения»?**

11. Дайте определение двойственной задачи. Сформулируйте теоремы двойственности.

12. Сформулируйте принципы построения математической модели двойственной задачи по модели исходной для симметричной пары сопряженных задач.

13. Сформулируйте принципы построения математической модели двойственной задачи по модели исходной для несимметричной пары сопряженных задач.

14. Как найти решение двойственной задачи по оптимальному плану исходной с помощью теорем двойственности?

15. Дайте экономическое толкование двойственных оценок в задачах линейного программирования.

16. Как провести анализ устойчивости оптимального плана относительно рыночной цены готовой продукции?

17. Как определить состояние ресурсов прямой задачи и интервалы устойчивости двойственных оценок относительно изменений запасов дефицитных ресурсов?

4. Транспортная задача

4.1. Постановка транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков $A_1, A_2, ..., A_m$ в количествах $a_1, a_2, ..., a_m$.

Этот груз нужно доставить n потребителям $B_1, B_2, ..., B_n$ потребности которых составляют соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$. Известны стоимости перевозки C_{ij} единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю ($i = 1,...,m; \quad j = 1,...,n$). Требуется составить такой план перевозок, при котором суммарные затраты на перевозку грузов будут минимальными. Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблицу (табл. 17).

Таблица 17

Исходные данные транспортной задачи

A_i \ B_j	B_1	B_2	$\dots$	B_n	Запасы груза a_i
A_1	C_{11}	C_{12}	$\dots$	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	$\dots$	C_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	$\dots$	C_{mn}	a_m
Потребности b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum a_i$ \ $\sum b_j$

Существуют открытая и закрытая модели транспортной задачи.

Модель транспортной задачи называется ***закрытой***, если суммарные запасы поставщиков равны суммарным потребностям потребителей, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i .$$

Если это равенство нарушается, то модель задачи является ***открытой***.

Для разрешения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы модель задачи была закрытой.

4.2. Математическая модель транспортной задачи

Рассмотрим закрытую модель. Обозначим через x_{ij} количество груза, которое планируется перевезти от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда функция цели Z (суммарные транспортные расходы на перевозку груза) имеет вид:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{mn}x_{mn} \quad (min),$$

а ограничения по запасам груза и его потребностям:

а) по запасам;

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \end{cases}$$

б) по потребностям;

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}.$$

Оптимальным планом транспортной задачи называется совокупность значений x_{ij}, при которых функция цели Z принимает свое минимальное значение.

Решение транспортной задачи проводится в три этапа:

1. Составление исходного опорного плана.
2. Проверка плана на оптимальность.
3. Улучшение плана, если он неоптимальный.

4.3. Составление исходного опорного плана

Метод северо-западного угла или диагональный метод

Существует ряд методов построения исходного опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла или диагональный метод.

В основу диагонального метода заложены следующие принципы. Распределение груза между потребителями начинают с левой верхней клетки (северо-западного угла) таблицы перевозок. Распределяем запасы первого поставщика A_1. Вначале удовлетворяем потребности потребителя B_1 за счет запасов поставщика A_1. Для этого в клетку x_{11} записываем меньшее из чисел a_1 и b_1, то есть $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$.

Если $x_{11} = a_1$, тогда поставщик A_1 израсходовал весь ресурс и в дальнейшем распределении груза он не может принимать участия, следовательно, этот поставщик исключается из рассмотрения. Если при этом спрос потребителя B_1 не удовлетворили в полном объеме, тогда в клетку, которая находится во второй строке первого столбца, направляют груз от поставщика A_2 в количестве: $x_{21} = \min\{a_2; b_1 - x_{11}\}$

Наоборот, если $x_{11} = b_1$, то потребитель B_1 получил нужный ему объем поставок, тогда из оставшихся ресурсов поставщика A_1 удовлетворяют нужды потребителя B_2, решая при этом следующую задачу: $x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}; b_2\}$ и т. д. Такое распределение проводят до тех пор, пока все товары не будут выведены, а все потребители не будут удовлетворены. Такое возможно, если спрос равен предложению, то есть, задача сбалансирована.

Клетки соответствующего столбца или строки, в которых потребности потребителя удовлетворены и запасы израсходованы, заполняют нулями или прочерками или оставляют пустыми.

Рассмотрим пример.

Пример 4.1. Составить исходное опорное решение (план) для транспортной задачи, исходные данные которой представлены в табл. 18.

Таблица 18

Исходные данные

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	5	4	2	70
A_2	1	6	3	4	40
A_3	3	3	1	5	40
b_j	35	25	43	47	150 \ 150

Решение. Распределяем запасы первого поставщика A_1. Сначала удовлетворим потребности потребителя B_1 за счет A_1. В клетку $(1,1)$ записывают наименьшее из чисел $a_1 = 70$ и $b_1 = 35$, то есть число 35. Так как потребности B_1 полностью удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения. У поставщика A_1 осталось 35 ед. груза.

Следующей заполняется «северо-западная» клетка $(1, 2)$. В нее помещаем $min(a_1 = 35, b_2 = 25) = 25$.

Так как потребности B_2 удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения. У поставщика A_1 еще осталось 10 ед. груза. Его мы помещаем в новую «северо-западную» клетку $(1, 3)$. А так как при этом исчерпались запасы A_1, то его исключаем из рассмотрения. Потребность потребителя B_3 составит теперь $43 - 10 = 33$ ед. груза.

Везде, где потребности потребителя удовлетворены, и запасы израсходованы, покрываем штриховкой оставшиеся клетки соответствующего столбца или строки.

Далее переходим к поставщику A_2 и заполняем клетку $(2, 3)$, куда запишем $min(33, 40) = 33$, а в клетку $(2, 4)$ запишем число $40 - 33 = 7$.

Переходим к поставщику A_3. Имеющийся у него запас $a_3 = 40$ помещаем в клетку $(3, 4)$.

Полученный опорный план представлен в табл. 19.

Проверяем невырожденность построения плана.

План является невырожденным, если число заполненных клеток таблицы равно числу $N = m + n - 1$, где m – число поставщиков, n – число потребителей.

Число заполненных равно 6 и равно $N = 3 + 4 - 1$, то есть опорный план является невырожденным.

Стоимость перевозок при этом плане составляет:

$$Z_{исх} = 3 \cdot 35 + 5 \cdot 25 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 33 + 4 \cdot 7 + 40 \cdot 5 = 597.$$

Таблица 19

Опорный план, полученный методом северо-западного угла

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3 35	5 25	4 10	2	70
A_2	1	6	3 33	4 7	40
A_3	3	3	1	5 40	40
b_j	35	25	43	47	150

Метод минимальной стоимости

При составлении опорного плана методом северо-западного угла не учитывается стоимость перевозки единицы груза, поэтому этот план может оказаться далеким от оптимального.

В отличие от метода северо-западного угла метод минимальной стоимости построен на анализе матрицы стоимости перевозок, поэтому позволяет построить опорное решение, которое является достаточно близким к оптимальному, или даже сразу найти оптимальный план.

Метод минимальной стоимости достаточно прост. Он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка, соответствующая минимальной стоимости C_{ij}.

Первой заполняется клетка, имеющая минимальную стоимость C_{ij}. В эту клетку записывают наименьшее из чисел a_i или b_j. Затем исключают строку, если запасы поставщика исчерпаны, либо исключают столбец, если потребности потребителя полностью удовлетворены, либо строку и столбец одновременно, если запасы израсходованы и потребности полностью удовлетворены.

Затем снова выбирают клетку из оставшихся с наименьшей стоимостью и снова продолжают процесс, пока все запасы будут израсходованы, а потребности удовлетворены.

В рассмотренном примере методом минимальной стоимости получен новый опорный план (табл. 20).

Таблица 20

Опорный план, полученный методом минимальной стоимости

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	5 23	4	2 47	70
A_2	1 35	6 2	3 3	4	40
A_3	3	2	1 40	5	40
b_j	35	25	43	47	150

Этот план невырожденный и он значительно ближе к оптимальному, так как суммарные затраты на перевозку груза составляют

$$Z_{исх} = 305\,(\text{у.е.}).$$

Если m и n достаточно велики, то применяют следующие разновидности метода минимальной стоимости:

метод минимальной стоимости в строке, то есть, распределяют груз a_1 последовательно по минимальной стоимости первой строки, затем груз a_2 – по минимальной стоимости второй строки и т. д.;

метод минимальной стоимости в столбце, то есть распределяют груз b_1 по минимальной стоимости в первом столбце, затем груз b_2 – по минимальной стоимости во втором столбце и т. д.;

метод двойного предпочтения, то есть выделяют клетки с минимальной стоимостью в каждой строке и клетки с минимальной стоимостью в столбце и вначале заполняют клетки с двойной отметкой, затем с одной отметкой. Остальные клетки заполняют любым другим методом.

Как правило, наиболее близкое к оптимальному решению дает метод минимальной стоимости и метод двойного предпочтения.

4.4. Метод потенциалов

Составленный опорный план необходимо проверить на оптимальность.

Для проверки плана на оптимальность используется широко распространенный метод потенциалов. Каждому поставщику A_i поставим в соответствие потенциал u_i, а потребителю B_j – потенциал v_j.

Числа u_i и v_j выбираются таким образом, чтобы для любой загруженной клетки (где $x_{ij} > 0$) выполнялось условие:

$$u_i + v_j = C_{ij},$$

а для всех незаполненных клеток (где $x_{ij} = 0$):

$$u_i + v_j \le C_{ij}.$$

Отсюда критерий оптимальности плана: опорный план является оптимальным, если для всех незаполненных клеток выполняется условие:

$$\left(u_i + v_j\right) - C_{ij} \le 0, \quad \left(x_{ij} = 0\right).$$

Числа $\left(u_i + v_j\right) - C_{ij}$ называют оценками и обозначают Δ_{ij}:

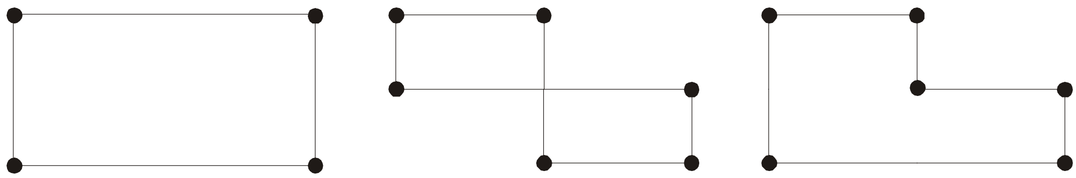
$$\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - C_{ij}.$$

Итак, опорный план оптимальный, если все оценки $\Delta_{ij} \le 0$.

Если среди оценок Δ_{ij} есть хотя бы одна положительная, то опорный план не является оптимальным и его нужно улучшить путем перехода к новому опорному плану.

Для этого выбираем клетку с наибольшей положительной оценкой Δ_{ij} (если их несколько), помещаем в нее некоторый груз θ $\left(\theta > 0\right)$ и строим замкнутый цикл, вершины которого находятся в заполненных клетках.

Цикл в транспортной задаче изображают в виде замкнутой ломаной. Простейшие циклы имеют вид:



В клетках цикла поочередно расставляют знаки "+" и "-", начиная с "+" в клетке, с наибольшей положительной оценкой. Величину θ выбирают равной наименьшему значению груза x_{ij}, из которого θ вычитается.

Далее путем перераспределения груза по вершинам цикла переходим к новому опорному плану, проверяем его невырожденность. План может оказаться вырожденным, если освобождается от груза более одной клетки. В этом случае одну из них оставляют пустой, а в остальных проставляют нули и считают эти клетки заполненными.

Новый невырожденный план снова проверяют на оптимальность, используя потенциалы u_i и v_j. Процесс продолжают до тех пор, пока все оценки будут удовлетворять критерию оптимальности

$$\Delta_{ij} \leq 0.$$

Оценка $\Delta_{ij} > 0$ показывает, насколько уменьшаются суммарные затраты на перевозки, если единицу груза перераспределить в эту клетку.

Для проверки правильности решения задачи на каждом этапе рекомендуется использовать формулу:

$$Z_{нов} = Z_{исх} - \theta \cdot \Delta_{ij}.$$

Рассмотрим методику последовательного улучшения неоптимального плана на следующем примере.

Пример 4.2. Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 21.

Таблица 21

Исходные данные транспортной задачи

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы груза a_i
A_1	27	36	35	31	29	250
A_2	22	23	26	32	35	200
A_3	35	42	38	32	39	200
Потребности в грузе b_j	120	130	100	160	140	650 \ 650

Решение. В данной задаче суммарный запас груза совпадает с суммарными потребностями. Это закрытая транспортная задача.

Составим исходный опорный план методом минимальной стоимости (табл. 22). Первой заполняется клетка $(2,1)$, затем $(2,2)$, $(1,5)$, $(1,4)$, $(3,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$.

Таблица 22

Исходный опорный план транспортной задачи, полученный методом минимальной стоимости

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	27	36	35	31 110	29 140	250
A_2	22 120	23 80	26	32	35	200
A_3	35	42 50	38 100	32 50	39	200
b_j	120	130	100	160	140	

Полученный план является невырожденным, так как число заполненных клеток (7) равно числу $m+n-1$, где m – число поставщиков, n – число потребителей.

Стоимость перевозок при этом плане составляет

$$Z = 110\cdot 31 + 140\cdot 29 + 120\cdot 22 + 80\cdot 23 + 50\cdot 42 + 100\cdot 38 + 50\cdot 35 = 19\,450.$$

Проверим составленный исходный план на оптимальность методом потенциалов. Каждому поставщику поставим в соответствие потенциал u_i, а потребителю – потенциал v_j. Для каждой заполненной грузом (то есть базисной) клетки должно выполняться равенство $u_i + v_j = C_{ij}$. А так как таких базисных клеток 7, то следует записать систему из семи уравнений. Это удобно оформить в виде таблицы (табл. 23).

Таблица 23

Система потенциалов для исходного опорного плана

План X_0	θ+			110 – θ	140
	120 θ-	80 + θ			
		50 – θ	110	50 + θ	
v_j / u_i	$v_1 = 41$	$v_2 = 42$	$v_3 = 38$	$v_4 = 32$	$v_5 = 30$
$u_1 = -1$	40 / 27	41 / 36	37 / 35	31	29
$u_2 = -19$	22	23	19 / 26	13 / 32	11 / 35
$u_3 = 0$	41 / 35	42	38	32	30 / 39

В этой таблице свободные от груза клетки делятся пополам, в нижнюю половину клетки записываются стоимости C_{ij}, а в верхнюю косвенные стоимости $C'_{ij} = u_i + v_j$. В базисные клетки записываются значения C_{ij}.

Для базисных клеток запишем систему уравнений:

$$u_1 + v_4 = 31, \qquad u_3 + v_2 = 42,$$
$$u_1 + v_5 = 29, \qquad u_3 + v_3 = 38,$$
$$u_2 + v_1 = 22, \qquad u_3 + v_4 = 32.$$
$$u_2 + v_2 = 23,$$

Система имеет множество решений, причем нас устраивает любое из них.

Предположим, что $u_3 = 0$, тогда $v_2 = 42$, $v_3 = 38$, $v_4 = 32$, $u_2 = -19$, $v_1 = 41$, $u_1 = -1$, $v_5 = 30$. Заполняем верхние половины клеток как суммы найденных значений $u_i + v_j$.

Критерием оптимальности плана транспортной задачи является условие: $\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - C_{ij} \le 0$, где Δ_{ij} – оценки свободных клеток.

Подсчитаем Δ_{ij}:

$\Delta_{11} = 40 - 27 = 13 > 0,$

$\Delta_{12} = 41 - 36 = 5 > 0$,

$\Delta_{13} = 37 - 35 = 2 > 0$,

$\Delta_{23} = 19 - 27 = -7 < 0,$

$\Delta_{25} = 11 - 35 = -24 < 0$,

$\Delta_{31} = 41 - 35 = 6 > 0$,

$\Delta_{35} = 30 - 39 = -9 < 0$.

План X_0 не является оптимальным, так как среди оценок Δ_{ij} есть положительные. Среди положительных выбираем максимальную (это $\Delta_{11} = 13$) и в клетку (1,1) плана X_0 помещаем груз θ. Строим замкнутый цикл (табл. 23), вершины которого находятся в заполненных клетках. Выбираем

$$\theta = min\left(50,120,110\right) = 50.$$

Строим новый план X_1 и проверяем его на оптимальность (табл. 24).

Таблица 24

Проверка на оптимальность плана X_1

План X_1	50 + θ			60 – θ	140
	70 – θ	130	$+\theta$		
			100 – θ	100 + θ	
u_i \ v_j	$v_1 = 27$	$v_2 = 28$	$v_3 = 37$	$v_4 = 31$	$v_5 = 29$
$u_1 = 0$	27	28 / 36	37 / 35	31	29
$u_2 = -5$	22	23	32 / 26	26 / 32	24 / 35
$u_3 = 1$	28 / 35	29 / 42	38	32	30 / 39

Решаем для базисных клеток систему уравнений

$$u_i + v_j = C_{ij}.$$

Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_4 = 31$, $v_1 = 27$, $v_5 = 29$, $u_3 = 1$, $v_3 = 37$, $u_2 = -5$, $v_2 = 28$. Заполняем верхние половины клеток, куда записываем суммы $u_i + v_j$. План X_1 также не является оптимальным, так как есть две положительные оценки

$$\Delta_{13} = 37 - 35 = 2 \text{ и } \Delta_{23} = 32 - 26 = 6.$$

Стоимость перевозок при этом плане составляет

$$Z_1 = Z_0 - \theta \cdot \Delta_{11} = 19\,450 - 50 \cdot 13 = 18\,800.$$

Переходим к новому плану. В клетку $(2, 3)$, которая соответствует наибольшей положительной оценке $\Delta_{23} = 6$ плана X_1, помещаем груз θ и строим замкнутый цикл. Выбираем $\theta = min(70, 60, 100) = 60$.

Строим план X_2 (табл. 25) и проверяем его на оптимальность.

Таблица 25

Проверка на оптимальность плана X_2

План X_2	110				140
	10	130	60		
			40	160	
u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 23$	$v_3 = 26$	$v_4 = 20$	$v_5 = 24$
$u_1 = 5$	27	28 / 36	31 / 35	25 / 31	29
$u_2 = 0$	22	23	26	20 / 32	24 / 35
$u_3 = 12$	34 / 35	35 / 42	38	32	36 / 39

План X_2 является оптимальным, так как все оценки $\Delta_{ij} \leq 0$.

Получено:

$$x_{11} = 110,\ x_{15} = 140,\ x_{21} = 10,\ x_{22} = 130,\ x_{23} = 60,\ x_{33} = 40,\ x_{34} = 160.$$

$$Z_{min} = 110 \cdot 27 + 140 \cdot 9 + 10 \cdot 22 + 130 \cdot 23 + 60 \cdot 26 + 40 \cdot 38 + 32 \cdot 160 = 18\,440.$$

Контрольная формула:

$$Z_2 = Z_1 - \theta \cdot \Delta_{23} = 18\,800 - 60 \cdot 6 = 18\,440.$$

Схема перевозок имеет вид

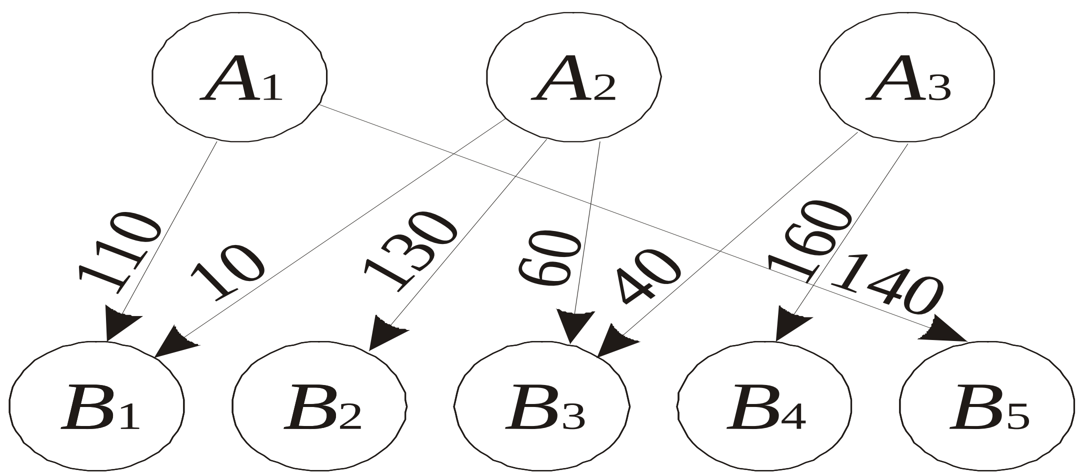


Рис. 17. **Схема прикрепления грузов**

4.5. Открытая модель транспортной задачи

Открытая модель задачи имеет место, когда нарушен баланс, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

На практике чаще встречаются именно такие задачи. Каковы особенности их решения?

2.1. Пусть суммарные запасы поставщиков превышают суммарные запросы потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Для приведения задачи к закрытой модели вводится фиктивный потребитель $B_ф$, потребность которого в грузе составляет:

$$b_ф = \sum a_i - \sum b_j .$$

2.2. Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, то есть $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного поставщика $A_ф$, запасы груза которого составляют:

$$a_ф = \sum b_j - \sum a_i .$$

Стоимость перевозки единицы груза как до фиктивного потребителя, так и от фиктивного поставщика считается равной нулю. При этом при составлении исходного опорного плана методом минимальной стоимости клетки с нулевыми стоимостями заполняются в последнюю очередь.

Решение такой задачи проводится далее как при закрытой модели. В оптимальном плане заполненные клетки у фиктивного потребителя означают, что у поставщика остался нереализованный груз, а заполненные клетки у фиктивного поставщика, что потребитель недополучит какое-то количество груза.

Пример 4.3. Решить транспортную задачу (табл. 26).

Таблица 26

Исходные данные

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1	3	2	40
A_2	6	5	1	20
b_j	15	5	10	60 / 30

Решение. Модель задачи открытая. Вводим фиктивного потребителя $B_ф$ с потребностью в грузе $b_ф = 60 - 30 = 30$. Получаем закрытую модель задачи (табл. 27).

Таблица 27

Закрытая модель задачи

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	a_i
A_1	1 15	3 5	2	0 20	40
A_2	6	5	1 10	0 10	20
b_j	15	5	10	30	60

Составляем исходный опорный план методом минимальной стоимости, исходя из минимального элемента для реальных поставщиков и потребителей, то есть $C_{11} = 1$ или $C_{23} = 1$ (табл. 28).

В последнюю очередь заполняем клетки, соответствующие фиктивному потребителю.

Полученный исходный опорный план является невырожденным, так как число занятых клеток равно 5 и равно числу $m+n-1$.

Проверяем исходный опорный план на оптимальность, используя метод потенциалов (табл. 28).

Таблица 28

Таблица потенциалов

Исходный план	15	5		20
			10	10
v_j \ u_i	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=0$	$v_4=-1$
$u_1=1$	1	3	1 / 2	0
$u_2=1$	1 / 6	3 / 5	1	0

Критерий оптимальности выполнен: все оценки $\Delta_{ij} \le 0$. Исходный опорный план является оптимальным.

4.6. Вырожденность в транспортных задачах

При построении исходного опорного плана или при нахождении промежуточных опорных планов часто возникает ситуация, когда число занятых клеток $\left(x_{ij}>0\right)$ меньше числа $m+n-1$.

В этом случае опорный план является вырожденным и разрешить систему уравнений $u_i+v_j=C_{ij}$ для определения потенциалов невозможно, то есть нельзя проверить опорный план на оптимальность методом потенциалов.

Общим методом составления исходного опорного плана в случае вырождения является метод ε-сдвига. Суть метода в следующем: прибавим к каждому значению a_i положительное число ε, а к одному из значений b_j прибавим сумму $m\varepsilon$. Далее составляем опорный план одним из методов и в полученном плане полагаем $\varepsilon = 0$. Клетка, заполненная таким нулем, считается базисной. Далее идет проверка плана на оптимальность методом потенциалов.

Пример 4.4. Применить метод ε-сдвига к составлению опорного плана транспортной задачи (табл. 29).

Таблица 29

Исходные данные

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	3	1	20
A_2	4	5	7	18
A_3	8	6	3	12
b_j	12	18	20	50 \ 50

Решение. Составим опорный план методом минимальной стоимости (табл. 30).

Таблица 30

Исходный опорный план

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	3	1 20	20
A_2	4 12	5 6	7	18
A_3	8	6 12	3	12
b_j	12	18	20	50

Число заполненных клеток равно четырем, а это меньше числа $m+n-1=5$. Полученный опорный план является вырожденным.

Для получения невырожденного плана применим метод ε-сдвига. Прибавим к каждому a_i по ε, а к b_3 прибавим 3ε. Будем составлять опорный план методом минимальной стоимости (табл. 31).

Таблица 31

Метод ε-сдвига

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	a_i	
A_1	2	3	1 20 $+\varepsilon$	20 $+\varepsilon$	
A_2	4 12	5 6 $+\varepsilon$	7	18 $+\varepsilon$	6 $+\varepsilon$
A_3	8	6 12 – ε	3 2 ε	12 $+\varepsilon$	12 $-\varepsilon$
b_j	12	18	20 +3 ε	50 +3 ε	

В полученном опорном плане получаем $\varepsilon=0$ и считаем клетку (A_3, B_3) базисной.

Далее проверим этот план на оптимальность методом потенциалов (табл. 32).

План не оптимальный, так как есть две положительные оценки $\Delta_{11}=3-2=1$ и $\Delta_{12}=4-3=1$. Переходим к новому плану.

Помещаем в клетку $(1,1)$ груз в количестве θ и строим замкнутый цикл (табл. 32); $\theta = min(20,12,12)=12$.

Так как снова получается вырожденный план, то одну из клеток $(2,1)$ или $(3,2)$ загружаем нулем и считаем ее базисной (табл. 33).

Таблица 32

Метод потенциалов

Исходный опорный план X_0	$+\theta$		20^-
	12_-	6^+	
		12_-	0^+
v_j / u_i	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$
$u_1 = -1$	3 / 2	4 / 3	1
$u_2 = 0$	4	5	2 / 3
$u_3 = 1$	5 / 8	6	3

Таблица 33

План X_1

План X_1	12^-	$+\theta$	8
	0_+	18_-	
			12
v_j / u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$
$u_1 = 0$	2	3 / 3	1
$u_2 = 2$	4	5	3 / 7
$u_3 = 2$	4 / 8	5 / 6	3

План оптимальный (табл. 33). Но так как есть одна оценка $\Delta_{12} = 0$, то можно перейти к новому оптимальному плану с той же суммарной стоимостью перевозок, что и при плане X_1. Для этого в клетку $(1, 2)$ помещаем груз θ и строим замкнутый цикл.

Находим $\theta = min(12, 18) = 12$.

Переходим к плану X_2 (табл. 34).

Таблица 34

План X_2

План X_2		12	8
	12	6	
			12
u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$
$u_1 = 0$	2 / 2	3	1
$u_2 = 2$	4	5	3 / 7
$u_3 = 2$	4 / 8	5 / 6	3

План X_2 тоже оптимальный, так как все оценки $\Delta_{ij} \le 0$.

Стоимость перевозок составляет:

при плане X_1 $\quad Z_1 = 12 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 18 \cdot 5 + 12 \cdot 3 = 158$;

при плане X_2 $\quad Z_2 = 12 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 12 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 12 \cdot 3 = 158$.

Оба плана оптимальные, при этом $Z_{min} = 158$.

Пример 4.5. На фирме имеются три должности, на которые претендуют три кандидата, причем каждый из них может работать в любой из этих должностей. Производительность каждого из кандидатов на каждой должности характеризуется матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 12 \\ 6 & 9 & 13 \\ 8 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Распределить кандидатов на должности так, чтобы их суммарная производительность была максимальной.

Решение. Применим методы решения транспортной задачи. Составим исходный опорный план распределения кандидатов методом максимального элемента. План получится вырожденным, так как будут заполнены три клетки (три кандидата и три должности). Поэтому для составления опорного плана применим метод ε-сдвига (табл. 35).

Таблица 35

Исходный опорный план

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	15 1	6	12 ε	1+ε
A_2	6	9	13 1+ε	1+ε
A_3	7	11 1	2 ε	1+ε
b_j	1	1	1+3ε	1+3ε

Полагаем ε=0. Имеем 5 заполненных клеток и число $m+n-1=5$, то есть план невырожденный.

Проверяем его на оптимальность (табл. 36), используя критерий оптимальности: если все оценки $\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - C_{ij} \geq 0$, то план оптимальный. В нашем примере все $\Delta_{ij} > 0$. Значит исходный план является оптимальным.

1-го кандидата нужно определить на 1-ю должность, второго – на третью, а третьего – на вторую. При этом суммарная производительность будет максимальной и составит: $Z_{max} = 15+13+11=39$.

Таблица 36

План X_1

План X_1	1		0
			1
		1	0
v_j / u_i	$v_1 = 15$	$v_2 = 21$	$v_3 = 12$
$u_1 = 0$	15	21 / 6	12
$u_2 = 1$	16 / 6	22 / 9	13
$u_3 = -10$	5 / 4	11	2

4.7. Технология решения транспортной задачи с помощью надстройки «Поиск решения» в среде Microsoft Excel. Этапы работы с надстройкой

Пример 4.6

Составить план перевозки однородного груза от пунктов производства A_1, A_2 и A_3 к пунктам потребления B_1, B_2, B_3 и B_4 с минимальными суммарными транспортними расходами. Если возможности поставщиков соответственно равны 180, 400, 280 условных единиц, а потребности каждого из потребителей составляют 240, 320, 120 и 180 условных единиц соответственно. Тарифы перевозок заданы в виде матрицы стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 \\ 9 & 12 & 32 & 16 \\ 11 & 38 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение Общие запасы груза всех поставщиков составляют:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 400 + 280 = 860.$$

Это совпадает с общими потребностями всех потребителей:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 240 + 320 + 120 + 180 = 860.$$

Таким образом, данная транспортная задача является закрытой.

1. Для решения задачи необходимо создать экранную форму введения условий задачи: переменных, целевой функции, ограничений и предельных условий (рис. 18).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Транспортные расходы**	Первый потребитель	Второй потребитель	Третий потребитель	Четвертый потребитель	***Производственные возможности единиц продукции***	
2	Первый поставщик	22	15	40	18	180	
3	Второй поставщик	9	12	32	16	400	
4	Третий поставщик	11	38	10	14	280	
5	***Потребности в единицах продукции***	240	320	120	180		
6							
7	**Оптимальный план поставок продукции**	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	**Транспортные расходы, min**

Рис. 18. **Исходные данные**

2. Оформить необходимые формулы (рис. 19).

Ячейки B7:E9 отведены под значения неизвестных (объёмы перевозок). В ячейки F2:F4 введены объемы производства. В ячейки B5:E5 введена потребность в продукции в пунктах распределения.

В ячейки B10:E10 введены формулы, определяющие объем продукции, ввозимой в четыре центра распределения соответственно: =СУММ(B7:B9), =СУММ(C7:C9), =СУММ(D7:D9), =СУММ(E7:E9).

В ячейки F7:F9 введены формулы =СУММ(B7:E7), =СУММ(B8:E8), =СУММ(B9:E9), вычисляющие объем вывозимой продукции. В ячейку F10 введена формула целевой функции =СУММПРОИЗВ(B2:E4;B7:E9).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Транспортные расходы**	Первый потребитель	Второй потребитель	Третий потребитель	Четвертый потребитель	***Производственные возможности единиц продукции***	
2	Первый поставщик	22	15	40	18	180	
3	Второй поставщик	9	12	32	16	400	
4	Третий поставщик	11	38	10	14	280	
5	***Потребности в единицах продукции***	240	320	120	180		
6							
7	***Оптимальный план поставок продукции***	0	0	0	0	=СУММ(B7:E7)	
8		0	0	0	0	=СУММ(B8:E8)	
9		0	0	0	0	=СУММ(B9:E9)	
10		=СУММ(B7:B9)	=СУММ(C7:C9)	=СУММ(D7:D9)	=СУММ(E7:E9)	=СУММПРОИЗВ(B2:E4;B7:E9)	**Транспортные расходы, min**

Рис. 19. **Формулы**

3. Оптимизировать задачу. Для решения задачи воспользуемся надстройкой *Поиск решения* программы *Microsoft Excel* **(**меню ***Сервис*** → ***Поиск решения)*** и в диалоговом окне *Поиск решения* (рис. 20) задать ячейку целевой функции, направление оптимизации целевой функции, ввести изменяемые ячейки, ограничения.

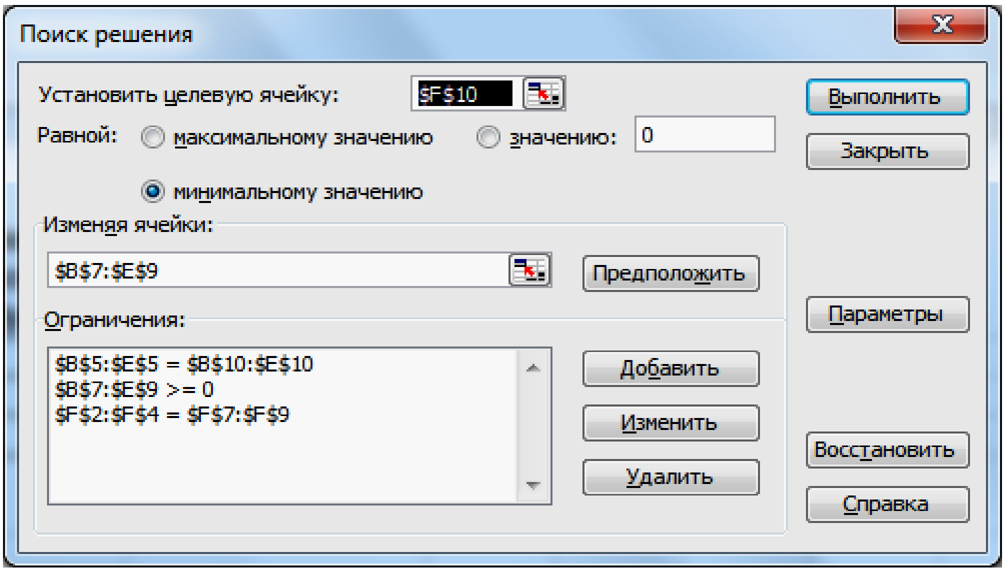


Рис. 20. **Поиск решения**

4. В диалоговом окне *Параметры поиска решения* (рис. 21) установить параметры решения задачи.

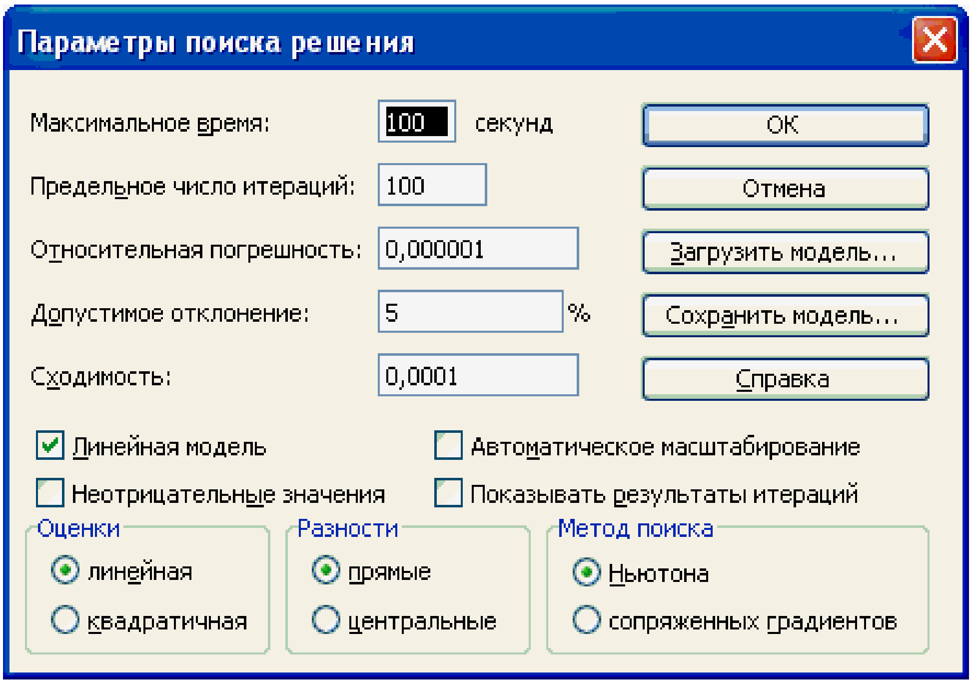


Рис. 21. **Параметры поиска решения**

5. После нажатия кнопки *Выполнить* в диалоговом окне *Поиск решения,* выбрать формат вывода в диалоговом окне *Результаты поиска решений* (рис. 22).

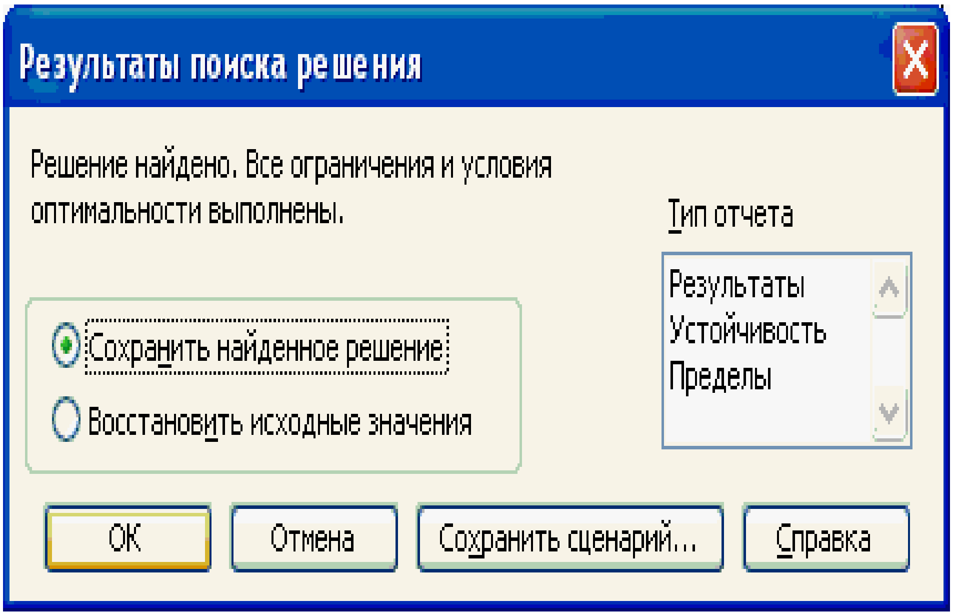


Рис. 22. **Результаты поиска решения**

Далее средства поиска решений находят оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему транспортные расходы (рис. 23).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Транспортные расходы**	Первый потребитель	Второй потребитель	Третий потребитель	Четвертый потребитель	***Производственные возможности единиц продукции***	
2	Первый поставщик	22	15	40	18	180	
3	Второй поставщик	9	12	32	16	400	
4	Третий поставщик	11	38	10	14	280	
5	***Потребности в единицах продукции***	240	320	120	180		
6							
7	***Оптимальный план поставок продукции***	0	160	0	20	180	
8		240	160	0	0	400	
9		0	0	120	160	280	
10		240	320	120	180	10280	**Транспортные расходы, min**

Рис. 23. **Оптимальное решение транспортной задачи**

4.8. Задачи для самостоятельного решения

Решить транспортную задачу.

Для этого необходимо:

1. Составить исходные опорные решения методом северо-западного угла и методом минимального элемента.
2. Сравнить значения целевых функций полученных исходных опорных планов и лучший план проверить на оптимальность методом потенциалов.
3. В случае если исходный опорный план не является оптимальным, произвести перераспределение груза по циклу.
4. Новый опорный план проверить на оптимальность с помощью метода потенциалов. Процес продолжать до тех пор, пока не будет получен оптимальный план.

4.1.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	1	5	18
A_2	2	3	6	10
A_3	5	7	4	20
b_j	25	10	13	48 \ 48

4.2.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	7	5	3	20
A_2	4	6	1	40
A_3	3	2	4	30
b_j	30	40	20	90 \ 90

4.3.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	1	5	3	20
A_2	2	6	4	7	30
A_3	5	3	6	4	40
b_j	20	30	20	20	90 \ 90

4.4.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	5	8	1	9
A_2	8	3	9	2	16
A_3	7	4	6	3	5
b_j	11	7	8	4	30 \ 30

4.5.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	3	5	8	12
A_2	5	7	6	4	5
A_3	1	4	3	7	18
b_j	10	11	8	6	35 \ 35

Решите открытую транспортную задачу.

4.6.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1	3	2	40
A_2	4	5	1	20
b_j	15	5	10	60 \ 40

4.7.

A_1	5	2	3	15
A_2	2	4	6	25
A_3	5	3	3	35
b_j	20	20	45	75 / 85

4.8.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	7	46
A_2	1	1	6	4	34
A_3	3	5	9	4	40
b_j	40	35	30	45	120 / 150

4.9. Контрольные вопросы

1. В чем особенность математической модели транспортной задачи?
2. Чем отличается открытая модель транспортной задачи от закрытой?
3. Что называется оптимальным планом транспортной задачи?
4. Какие существуют методы построения опорных планов транспортной задачи?
5. Что такое вырожденный опорный план? Как его ликвидировать?
6. Как проверить составленный опорный план на оптимальность?
7. В чем заключается критерий оптимальности опорного плана транспортной задачи?
8. Как осуществить переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому?
9. Что такое цикл и как его построить?

5. Целочисленное программирование

5.1. Графический метод

Задача линейного программирования, переменные которой принимают лишь целочисленные значения, называется ***задачей целочисленного программирования***.

В некоторых случаях условие численности распространяется только на часть переменных. Такие задачи называются частично целочисленными. Для решения задач целочисленного программирования разработаны специальные методы. Рассмотрим графический метод и метод Гомори.

Суть графического метода покажем на следующем примере.

Пример 5.1.

$z = 5x_1 + 6x_2\left(\max\right),$

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$

x_1, x_2 – *целые.*

Решение. Сначала решаем задачу графически без условия целочисленности. Строим многоугольник планов $OABC$, градиент – вектор $\vec{N} = gradz = \left(5,\, 6\right)$, линию уровня $z = 0$ и опорную прямую (рис. 24). Опорная прямая проходит через точку B. Найдем ее координаты, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Получаем $x_1 = \dfrac{19}{5};\ x_2 = \dfrac{3}{5}$.

Получен оптимальный план:

$$X_{опт} = \left(\frac{19}{5}; \frac{3}{5}\right),\ Z_{\max} = 5 \cdot \frac{19}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{113}{5} = 22,6,$$

но его переменные не удовлетворяют условию целочисленности.

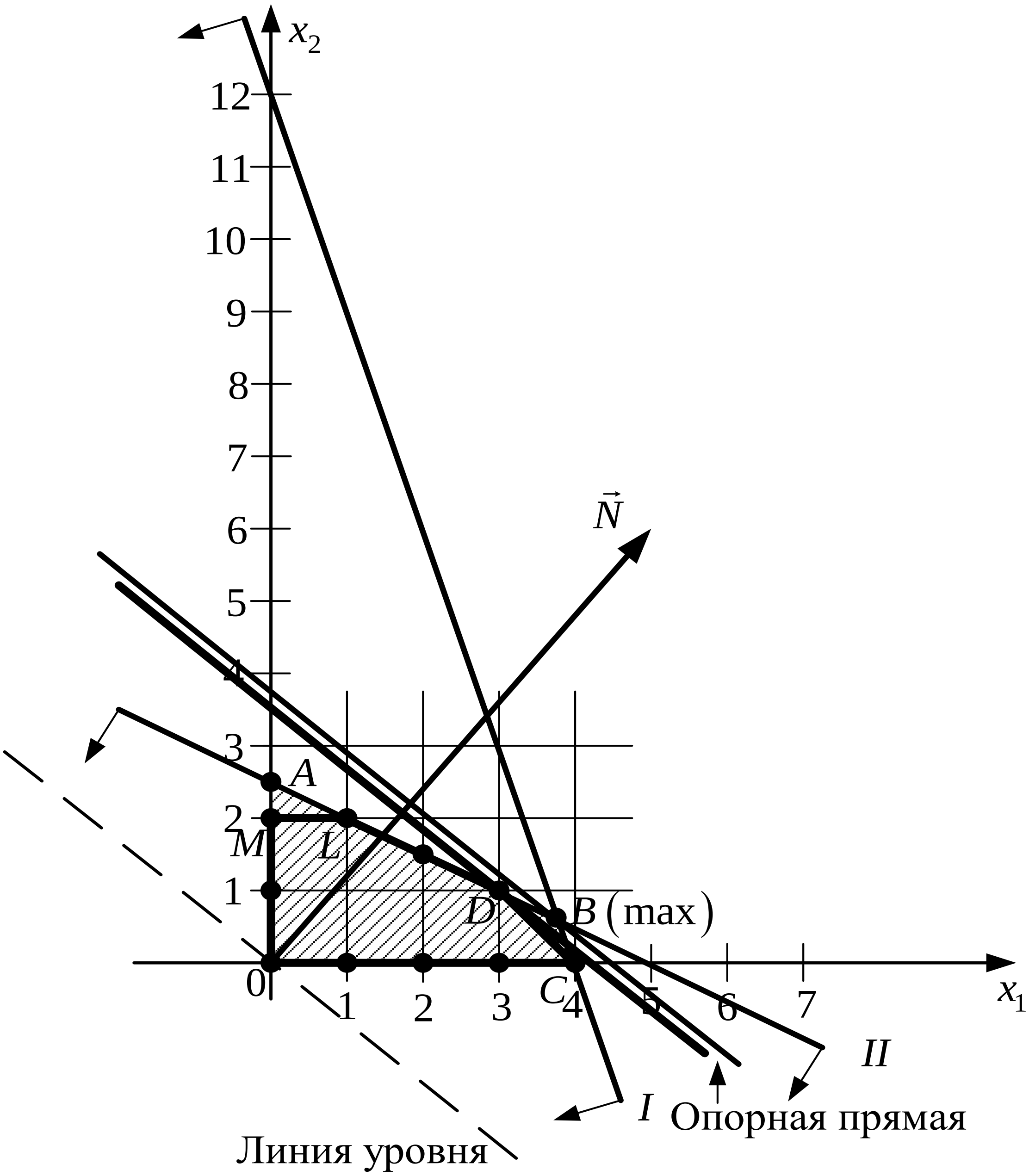


Рис. 24. **Графический метод решения задачи целочисленного программирования**

Заменим многоугольник $OABC$ многоугольником $OMLDC$, вершины которого находятся в точках с целыми координатами. С помощью градиента и линии уровня находим точку $D(3;1)$, в которой функция Z

принимает максимальное значение. Координаты точки D определяют оптимальный план задачи:

$$X_{опт} = (3;1),\ Z_{\max} = 5\cdot 3 + 6\cdot 1 = 21.$$

5.2. Метод Гомори

Решение задачи целочисленного программирования начинают с определения оптимального плана симплексным методом без учета целочисленности переменных. Если среди переменных найденного плана нет дробных чисел, то он является оптимальным планом задачи целочисленного программирования.

Если же в оптимальном плане есть дробные переменные, то из них выбирают переменную x_i с наибольшей дробной частью и к системе уравнений добавляют неравенство (ограничение Гомори):

$$\sum_j \left\{a_{ij}^*\right\} x_i \geq \left\{b_i^*\right\},$$

где a_{ij}^* $и$ b_i^* – преобразованные исходные величины a_{ij} и b_i, значения которых взяты из последней симплекс-таблицы, а $\left\{a_{ij}^*\right\}$ и $\left\{b_i^*\right\}$ – дробные части чисел.

Напомним, что ***целой частью числа*** x_i называют самое большое целое число, которое не превышает числа, – $[x_i]$.

Дробную часть числа x_i обозначим $\{x_i\}$, она определяется следующим образом: $\{x_i\} = x_i - [x_i]$.

Например, дробная часть числа $\frac{37}{3}$ равна: $\left\{\frac{37}{3}\right\} = \frac{37}{3} - 12 = \frac{1}{3}$, а дробная часть числа $-\frac{8}{3}$ равна $\left\{-\frac{8}{3}\right\} = -\frac{8}{3} - (-3) = \frac{1}{3}$.

После введения дополнительного ограничения задачу продолжают решать симплекс-методом. Если снова получают нецелочисленное решение, то опять добавляют дополнительное ограничение и процесс вычисления повторят до тех пор, пока не будет получено оптимальное целочисленное решение или не будет установлена неразрешимость задачи.

Рассмотрим метод Гомори на примере 5.1, который был решен графическим методом. Итак, по условию задачи, необходимо найти максимальное значение целевой функции Z при заданных ограничениях:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 \left(\max\right),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1,\ x_2 - \textit{целые}.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z' = -Z = -5x_1 - 6x_2 \left(\min\right),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 12, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = 1, \ldots, 4\right).$$

Это частично целочисленная задача, так как x_3 и x_4 могут быть дробными. Найдем оптимальное решение симплекс-методом (табл. 37).

Таблица 37

Симплекс-таблица

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	C_j	–5	–6	0	0	Примечание
			p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	p_3	0	12	3	1	1	0	$X_0 = \left(0;0;12;5\right)$
2	p_4	0	5	1	2	0	1	План не оптимальный
3	Z_j	–	0	0	0	0	0	
4	$\Delta_j = Z_j - C_j$			5	6	0	0	

Окончание табл. 37

1	2			3	4	5	6	7
←5	p_3	0	$\frac{19}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	стр. $6.\cdot(-1)+$ стр. 1 стр. $2:2$
→6	p_2	–6	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{1}$	0	$\frac{1}{2}$	
7	Z_j	–	–30	–3	–6	0	–3	$X_1=\left(0;\frac{5}{2};0;\frac{19}{2}\right)$
8	$\Delta_j=Z_j-C_j$			2	0	0	–3	План не оптимальный
→9	p_1	–5	$\frac{19}{5}$	$\boxed{1}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	стр. 5: $\frac{5}{2}$
10	p_2	–6	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	стр. $9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+$ стр. 6
11	Z_j	–	$-\frac{113}{5}$	–5	–6	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{13}{5}$	$X_2=\left(\frac{19}{5};\frac{3}{5};0;0\right)$
12	Δ_j	–	–	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{13}{5}$	План оптимальный

План $X_2=\left(\frac{19}{5};\frac{3}{5};0;0\right)$ оптимальный (так как все $\Delta_j \le 0$), но не целочисленный.

Найдём дробные части значений переменных $x_1=\frac{19}{5}$ и $x_2=\frac{3}{5}$:

$\left\{\frac{19}{5}\right\}=\left\{3+\frac{4}{5}\right\}=\frac{4}{5}$ и $\left\{\frac{3}{5}\right\}=\frac{3}{5}$.

Так как дробная часть числа $\frac{19}{5}$ больше дробной части числа $\frac{3}{5}$, то ограничение Гомори составим для переменной x_1. Этой переменной соответствует строка 9 симплекс-таблицы. Из этой строки выписываем:

$$x_1+\frac{2}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4=\frac{19}{5}.$$

Составляем ограничение согласно методу Гомори:

$$\{1\} x_1 + \left\{\frac{2}{5}\right\} \cdot x_3 + \left\{-\frac{1}{5}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{19}{5}\right\}.$$

Так как $\{1\} = 0;\ \left\{\frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5};\ \left\{-\frac{1}{5}\right\} = \left\{-1 + \frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5},$ то получаем неравенство:

$$\frac{2}{5} x_3 + \frac{4}{5} x_4 - x_5 \geq \frac{4}{5}.$$

Для того, чтобы преобразовать неравенство в равенство, следует ввести дополнительную переменную x_5:

$$\frac{2}{5} x_3 + \frac{4}{5} x_4 - x_5 = \frac{4}{5}.$$

К ограничениям данной задачи добавляем это ограничение и продолжаем решение задачи, начиная с последней итерации симплекс-таблицы (табл. 38).

Вектор p_5, который соответствует дополнительной переменной, сразу же выводится из базиса. В базис нужно ввести вектор $\overline{p}_3$ или $\overline{p}_4$.

Лучше ввести тот вектор, для которого минимальное отношение элементов столбца p_0 к положительным элементам векторов p_3 и p_4 находится в строке вектора p_5. Если это условие не выполняется ни для какого вектора, то в базис вводят вектор с положительным наибольшим элементом в разрешающей строке 15.

Для вектора $\overline{p}_3$ $\theta_3 = min\left(\frac{19/5}{2/5}; -; \frac{4/5}{2/5}\right) = 2$ соответствует строке 15, поэтому вводим в базис вектор $\overline{p}_3$.

После заполнения строк 18 – 22 получен целочисленный оптимальный план:

$$X_{опт} = (3; 1),\ Z_{max} = 21.$$

Таблица 38

Метод Гомори

№ стр.	Базис	$C_{баз}$	C_j	–5	–6	0	0	0	Примечание
			p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
13	p_1	–5	$\frac{19}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	Из базиса выводится дополнительная переменная x_5
14	p_2	–6	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	
15	p_5	0	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	–1	
16	Z_j	–	$-\frac{113}{5}$	–5	–6	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{13}{5}$	0	
17	Δ_j	–	–	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{13}{5}$	0	
18	p_1	–5	3	1	0	0	–1	1	стр. 20$\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$ + стр. 13
19	p_2	–6	1	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	стр. 20$\cdot\frac{1}{5}+$стр. 14
20	p_3	0	2	0	0	$\boxed{1}$	2	$-\frac{5}{2}$	стр. 15$:\frac{2}{5}$
21	Z_j	–	–21	–5	–6	0	–1	–2	$\bar{X}_4=(3;1;2;0)$
22	Δ_j	–	–	0	0	0	–1	–2	План оптимальный

5.3. Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу целочисленного программирования графическим методом и методом Гомори.

5.1. $z = x_1 + 4x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 \le \ 7, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0, x_{1,2}$ – *целые.*

5.2. $z = -2x_1 - 4x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 \le \dfrac{19}{3}, \\ \ \ x_1 + 3x_2 \le \ 10, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0, x_{1,2}$ – *целые.*

5.3. $z = 5x_1 - 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 2, \\ 5x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2$ – *целые.*

5.4. $z = 7x_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 4, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2$ – *целые.*

5.5. $z = 6x_1 + 10x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 \le 5, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2$ – *целые.*

5.6. $z = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2$ – *целые.*

5.7. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 300 тыс. грн. Его предполагается разместить на площади 45 кв. м. Участок может быть оснащен оборудованием трех видов. Заданы производительность, площадь размещения и стоимость одной машины каждого вида (табл. 39).

Таблица 39

Исходные данные

Вид машины	Стоимость одной машины, тыс. грн	Площадь размещения одной машины, м^2	Производительность в смену, тыс. грн
1	6	9	8
2	3	4	4
3	2	3	3

Определить план приобретения оборудования, обеспечивающего наибольшую производительность всего участка.

5.4. Контрольные вопросы

1. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования? Приведите примеры.
2. Каковы методы решения задач целочисленного программирования и их основные этапы?
3. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи – дробные числа?

6. Элементы теории игр

6.1. Основные понятия. Чистые стратегии

Теория игр – математическая теория конфликтных ситуаций. Упрощенная модель конфликтной ситуации – игра, участники ее – игроки.

Рассматриваются конечные парные игры с ***нулевой суммой***. Игрок A располагает m чистыми стратегиями $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_m$, а игрок B – соответственно n чистыми стратегиями $B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_n$.

Сочетание этих стратегий $\left(A_i, B_j\right)$ приводит к некоторому числовому результату («платежу») – a_{ij}, называемому «выигрышем» игрока A и «проигрышем» игрока игрока B (числа, a_{ij} могут быть и отрицательными).

Матрица, составленная из чисел a_{ij}, называется ***платежной матрицей*** или ***матрицей игры***:

$$\Pi = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы Π соответствуют стратегиям игрока A, столбцы – стратегиям игрока B.

Таблица 40

Матричная игра

B_j / A_i		Стратегии игрока B					$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
		B_1	…	B_j	…	B_n	
Стратегии игрока A	A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	α_1
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	α_i
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	α_m
$\beta_j = \max_i a_{ij}$		β_1	…	β_j	…	β_n	α / β

Числа $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ и $\beta_j = \max_i a_{ij}$ указывают минимально гарантированный выигрыш для игрока A, применяющего стратегию A_i, и максимально гарантированный проигрыш игроком B при использовании им стратегии B_j.

Величина $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$ называется нижней ценой игры, максимальным выигрышем A, или коротко – максимином, а соответствующая ему стратегия (строка) – максиминной. Аналогично $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$ называется верхней ценой игры, минимаксным проигрышем B, или минимаксом, а соответствующая стратегия B – минимаксной. Всегда $\alpha \le \beta$.

Принцип, согласно которому игроки выбирают эти стратегии, называется принципом максимина (для A) или минимакса (для B).

Если $\alpha = \beta$, то игра называется игрой с седловой точкой, а общие значения α и β, обозначаемые через v, называются ***ценой игры***.

В этом случае оптимальным решением игры для обоих игроков является выбор максиминной (для A) и минимаксной (для B) стратегий. Любое отклонение от этих стратегий для каждого игрока не может оказаться выгодным.

Пример 6.1. Для данной платежной матрицы Π определить нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и наличие седловой точки.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно условию имеем (табл. 41):

Таблица 41

Исходные данные

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	4	5	3	3
A_2	6	7	4	4
A_3	5	2	3	2
β_j	6	7	4	4 \ 4

Найдем нижнюю цену игры:

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \max_i \left(\alpha_i \right) = \max\left(3;\, 4;\, 2\right) = 4, \;\; \alpha = 4.$$

Найдем верхнюю цену игры:

$$\min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \min_j \left(\beta_j \right) = \min\left(6;\, 7;\; 4\right) = 4, \;\; \beta = 4.$$

Так как $\alpha = \beta = 4$, то игра имеет седловую точку; цена игры $v = 4$. Оптимальное решение игры дает применение чистых стратегий A_2, B_3.

Пример 6.2. Для данной платежной матрицы Π матричной игры определить минимаксные стратегии и наличие седловой точки.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно условию имеем (табл. 42).

Таблица 42

Исходные данные

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_1
A_1	2	5	3	2
A_2	6	4	5	4
A_3	3	7	6	3
A_4	2	6	4	2
β_j	6	7	6	4 \ 6

Нижняя цена игры равна $\max\limits_i(\alpha_i) = \max(2;\, 4;\, 3;\, 2) = 4,\ \ \alpha = 4.$

Верхняя цена игры равна $\min\limits_j(\beta_j) = \min(6;\, 7;\, 6) = 6,\ \ \beta = 6.$

Для игрока A максиминной стратегией является A_2, при которой ему обеспечен выигрыш не менее 4. Для игрока B минимаксными стратегиями являются B_1 и B_3, которые обеспечивают ему проигрыш не более 6. Игра не имеет седловой точки $(\alpha < \beta)$.

Исследование игры обычно начинают с исключения в платежной матрице заведомо невыгодных и дублирующих стратегий.

Кроме этого, упрощенную матрицу проверяют на наличие в ней седловой точки. Наличие таковой позволяет сразу же определить решение и цену игры.

Пример 6.3. Исследовать игру, заданную, платежной матрицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. В данной матрице 1-я строка доминирует над 2-й и 3-й, так как все ее элементы соответственно не меньше элементов 2-й и 3-й строк. Поэтому стратегии A_2 и A_3 заведомо менее выгодны, чем A_1, и могут быть исключены. В результате получаем матрицу:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице 1-й, 4-й и 5-й столбцы доминируют над 2-м столбцом. Поскольку столбцы характеризуют стратегии игрока B, стремящегося уменьшить выигрыш игрока A, то эти стратегии заведомо невыгодны.

После их исключения построим матрицу:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

в которой нет доминирующих стратегий.

Определим верхнюю и нижнюю цены игры:

$$\alpha_1 = min(6,4) = 4,\ \alpha_2 = min(2,6) = 2,$$

тогда $\alpha = max(4,2) = 4$;

аналогично, $\beta_1 = max(2,6) = 6$, $\beta_2 = max(4,6) = 6$,

откуда $\beta = min(6,6) = 6$.

Так как $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки. В чистых стратегиях решения игры нет.

6.2. Смешанные стратегии. Приемы решения игр $2\times 2,\ 2\times n,\ m\times 2$

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае применяют смешанные стратегии.

Смешанной стратегией игрока A называется применение им чистых стратегий $A_1,\ldots,A_m$ с вероятностями $x_1,\ldots,x_m$, причем $\sum x_i = 1$.

Ее записывают в виде:

$$\overline{\mathrm{X}} = \left(x_1,\ldots,x_m\right)\left(x_i \geq 0\right).$$

Аналогично вектором $\overline{\mathrm{Y}}\left(y_1,\ldots,y_n\right)\left(\sum y_j = 1,\ y_j \geq 0\right)$ определяется смешанная стратегия игрока B, где y_j есть вероятность использования стратегии B_j.

Основная теорема Неймана утверждает, что каждая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

В дальнейших приемах решения игр будет использоваться следующая теорема.

Теорема. Если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v, вне зависимости от того, с какими вероятностями будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную (в том числе и чистые стратегии).

Рассмотрим применение этой теоремы на конкретном примере игры 2×2.

Пример 6. 4. Исследовать и решить игру, заданную платежной матрицей:

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прежде всего, следует проверить наличие в платежной матрице седловой точки.

Имеем $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, тогда $\alpha = 1$; $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, тогда $\beta = 2$. Следовательно, $\alpha \neq \beta$ и седловой точки нет. Перейдем к отысканию оптимальной смешанной стратегии.

Пусть для игрока A это вектор $\overline{X}_{опт}\left(x_1, x_2\right)$ и цена игры равна v. Тогда, на основании указанной теоремы, при применении игроком B чистой стратегии B_1 или B_2 игрок A получает средний выигрыш, равный цене игры, то есть

$$-1x_1 + 3x_2 = v \text{ (при стратегии } B_1\text{)},$$

$$2x_1 + x_2 = v \text{ (при стратегии } B_2\text{)}.$$

Кроме этих двух уравнений, имеем еще уравнение для вероятностей: $x_1 + x_2 = 1$.

Из этой системы трех уравнений с тремя неизвестными найдем

$$x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = \frac{3}{5} \text{ и } v = \frac{7}{5}.$$

Аналогично, найдем оптимальную стратегию для игрока B. Считая, что $\overline{Y}_{опт}\left(y_1, y_2\right)$, имеем

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = v \text{ (при стратегии } A_1\text{)}, \\ 3y_1 + y_2 = v \text{ (при стратегии } A_2\text{)}, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Из этой системы $y_1 = \dfrac{1}{5}$, $y_2 = \dfrac{4}{5}$, а значение v было уже известно.

Итак, решением игры являются смешанные стратегии

$$\overline{X}_{опт}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ и } \overline{Y}_{опт}\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \text{ а цена игры } v = \frac{7}{5}.$$

Дадим геометрическую интерпретацию рассмотренной задачи. В системе координат xOy отложим на оси Ox отрезок A_1A_2 единичной длины, каждой точке которого будет отвечать некоторая смешанная стратегия:

$$\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1, 1 - x_1\right) \text{ (рис. 25).}$$

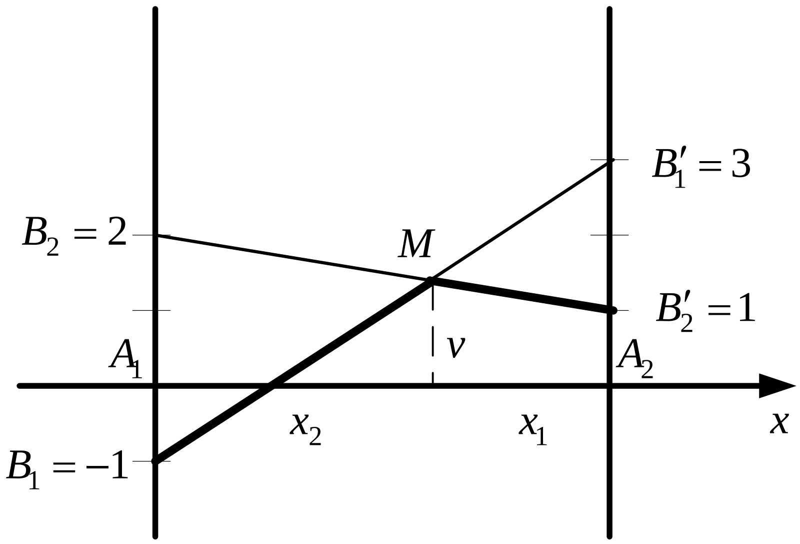


Рис. 25. **Графическое решение матричной игры**

Так, точке A_1, для которой $x_2 = 0, x_1 = 1$, отвечает стратегия A_1, точке A_2, для которой $x_1 = 0, x_2 = 1$, – стратегия A_2 и т. д. По оси ординат будем откладывать выигрыш игрока A.

При применении стратегии A_1 выигрыш равен –1, если 2-й игрок применяет стратегию B_1, и равен 2, если 2-й игрок применяет стратегию B_2.

Следовательно, получим две точки B_1 и B_2.

Соответственно, при применении стратегии A_2 выигрыш может быть 3 (при B_1) или 1 (при B_2).

Ординаты точек, лежащих на ломаной B_1MB_2, характеризуют минимальный выигрыш игрока A при использовании им любой смешанной стратегии (на участке B_1M против стратегии B_1 и на участке MB_2 – против стратегии B_2). Следуя принципу максимина, получим, что оптимальное решение игры определяет точка *M*, в которой этот выигрыш достигает максимума. Ей отвечает на оси абсцисс оптимальная стратегия $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$, а ее ордината равна цене игры $v = \frac{7}{5}$.

Графический анализ, подобный приведенному, позволяет решать игры с матрицами $2\times n$ и $m\times 2$.

Пример 6.5. Найти решение и цену игры с платежной матрицей:

$$\Pi=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5 & 3\\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Решение. Строим графическое изображение подобно предыдущему (рис. 26).

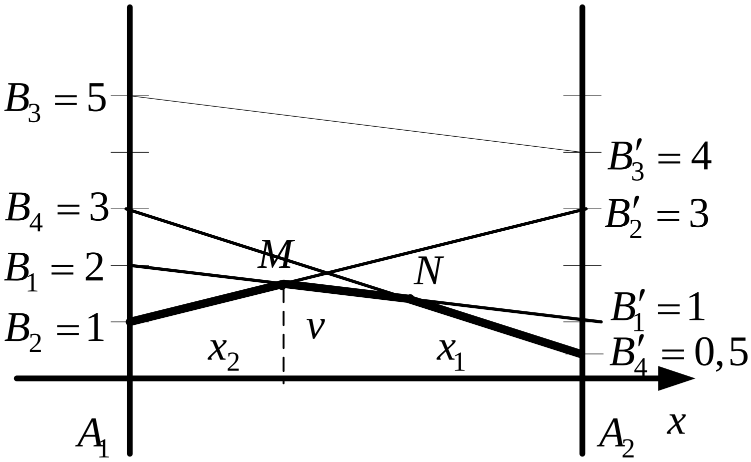


Рис. 26. **Графическое решение матричной игры**

Здесь имеем 4 прямые, характеризующие средний выигрыш при применении четырех чистых стратегий игрока B. Как и ранее, ломаная B_2MNB_4 дает нижнюю границу выигрыша. Наибольшая ордината, равна цене игры v, соответствует точке *M*, в которой пересекаются прямые B_2B_2 и B_1B_1. Координаты точки *M* находим как координаты точки пересечения прямых B_1B_1 и B_2B_2.

Соответствующие три уравнения имеют вид:

$$\begin{cases}2x_1+\ \ x_2=v,\\ \ \ x_1+3x_2=v,\\ \ \ x_1+\ \ x_2=1.\end{cases}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$x_1=\frac{2}{3},\ x_2=\frac{1}{3},\ v=\frac{5}{3}.$$

Аналогично находится оптимальная стратегии для игрока B из уравнений:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = \dfrac{5}{3}, \\ y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

откуда $y_1 = \dfrac{2}{3}$, $y_2 = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, решением игры являются смешанные стратегии:

$$\vec{X}_{опт}\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right),\ \vec{Y}_{опт}\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0\right),$$

при этом цена игры $\nu = \dfrac{5}{3}$.

Пример 6.6*.* Найти решение и цену игры с платежной матрицей:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данная задача решается аналогично предыдущей, но относительно игрока B.

Построим графическое изображение игры. Здесь четыре прямые характеризуют средний выигрыш при четырех чистых стратегиях игрока A (рис. 27).

Ломаная A_2MNA_3 дает верхнюю границу выигрыша, на которой находится точка *M* с минимальной ординатой. Координатой точки *M* определяются как координаты точки пересечения прямых A_2A_2' и A_4A_4'.

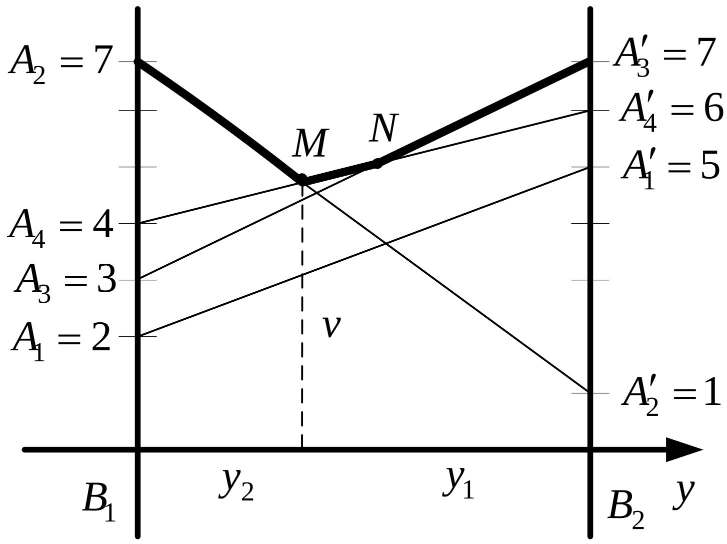


Рис. 27. **Графическое решение матричной игры**

Соответственно три уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 7y_1 + y_2 = v, \\ 4y_1 + 6y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

откуда имеем:

$$y_1 = \frac{5}{8},\ y_2 = \frac{3}{8},\ v = \frac{19}{4}.$$

Оптимальные стратегии для игрока A находим из уравнений:

$$\begin{cases} 7x_2 + 4x_4 = \dfrac{19}{4}, \\ x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$x_2 = \frac{1}{4},\ x_4 = \frac{3}{4}.$$

Итак, решением игры являются смешанные стратегии:

$\vec{X}_{опт}\left(0; \dfrac{1}{4}; 0; \dfrac{3}{4}\right)$, $\vec{Y}_{опт}\left(\dfrac{5}{8}; \dfrac{3}{8}\right)$ и цена игры $v = \dfrac{19}{4}$.

6.3. Технология решения матричных игр с помощью надстройки «Поиск решения» в среде Microsoft Excel

Этапы работы с надстройкой

Пример 6.7. По исходным данным, которые определяют платежную матрицу Π определим оптимальные стратегии игроков A и B и цену игры с помощью команды **Поиск решения** MS Excel.

$$\Pi^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 9 & 8 \\ 6 & 3 & 4 & 12 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Исходные данные представлены в виде транспонированной платежной матрицы, игрок A имеет пять стратегий, которым отвечает вектор вероятностей $\boldsymbol{P} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$.

Игрок B имеет три стратегии, которым отвечает вектор вероятностей $\boldsymbol{Q} = (q_1, q_2, q_3)$.

По платежной матрице строим систему ограничений исходной задачи:

$$\begin{cases} 5p_1^* + 7p_2^* + 6p_3^* + 9p_4^* + 8p_5^* \ge v; \\ 6p_1^* + 3p_2^* + 4p_3^* + 12p_4^* + 7p_5^* \ge v; \\ 2p_1^* + 7p_2^* + 5p_3^* + 4p_4^* + 6p_5^* \ge v; \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* = 1 \\ 0 \le p_i^* \le 1, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Вводим новые переменные $x_i = \dfrac{p_i^*}{v}$ $(i = \overline{1,5}$) и сводим исходную задачу к задаче линейного программирования.

Целевая функция этой задачи исследуется на минимум:

$$Z(\boldsymbol{X}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \to \quad min.$$

Теперь система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \ge 1; \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 7x_m \ge 1; \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_m \ge 1; \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Оптимизацию стратегии можно реализовать с помощью команды **Поиск решения.** Для этого внесем исходные данные в рабочий лист книги MS Excel, (табл. 43).

Таблица 43

Исходная таблица задачи об определении оптимальной стратегии

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	***Определение решения вспомогательной задачи***								
2	Стратегии игрока A	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	***Всего***		
3	Управляемые переменные	1	1	1	1	1			
4	Целевые коэффициенты	1	1	1	1	1	5		
5	Стратегии игрока B								***Ограничение***
6	1-й	5	7	6	9	8	35	≥	1
7	2-й	6	3	4	12	7	32	≥	1
8	3-й	2	7	5	4	6	24	≥	1
9	***Исходная задача***	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2		

Влияющие ячейки **B3:F3** содержат исходные значения вспомагательных переменных, которые принимаем за единицу.

Значение целевой функции получаем в ячейке **G4** как сумму произведений вспомогательных переменных (**B3:F3**) и значений коэффициентов целевой функции (**B4:F4**): **=СУММПРОИЗВ(B3:F3; B4:F4)**.

Ячейки **B6:F8** содержат элементы транспонированной платежной матрицы.

Значение ячеек **G6:G8** (левая часть основной системы ограничений) вычисляются как произведение матрицы Π^{T} на матрицу управляемых переменных.

Так, для ячейки **G6** имеем формулу: **=СУММПРОИЗВ($B$3:$F$3; B6:F6)**.

В ячейках **I6:I8** вычисляем значения правой части основной системы ограничений.

В девятой строке табл. 44 в ячейках **B9:F9** вычислены значения компонентов вектора вероятностей для игрока A, которые определяются как $\boldsymbol{P}^* = \frac{1}{Z(\boldsymbol{X}^*)} \cdot \boldsymbol{X}^*$.

Таблица 44

Конечная таблица задачи об определении оптимальной стратегии

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	***Определение решения вспомогательной задачи***								
2	Стратегии игрока A	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	*Всего*		
3	Управляемые переменные	0	0,0323	0	0	0,1290			
4	Целевые коэффициенты	1	1	1	1	1	0,1613		
5	Стратегии игрока B							*Ограничение*	
6	1-й	5	7	6	9	8	1,2581	≥	1
7	2-й	6	3	4	12	7	1	≥	1
8	3-й	2	7	5	4	6	1	≥	1
9	***Исходная задача***:	0	0,2	0	0	0,8	6,2		

Так, для вычисления значения ячейки **B9** введем формулу:

=B3/$G$4.

Значение целевой функции исходной задачи выводится в ячейке **G9** и вычисляется по формуле: **=1/G4**, что соответствует соотношению:

$$\nu\left(\boldsymbol{P}^*\right) = \frac{1}{Z(\boldsymbol{X}^*)}.$$

Оптимальный план вспомогательной задачи определяется с помощью процедуры **Поиск решения.**

Для этого необходимо вызвать на экран диалоговое окно **Поиск решения** и заполнить его поля. То есть, указать целевую ячейку, устанавливая переключатель в положение **минимальному значению**, указать ячейки, которые изменяются, и добавить ограничения.

В окне **Параметры** следует указать, что модель является линейной, а переменные – неотрицательными. Конечный вид диалогового окна приведен на рис. 28.

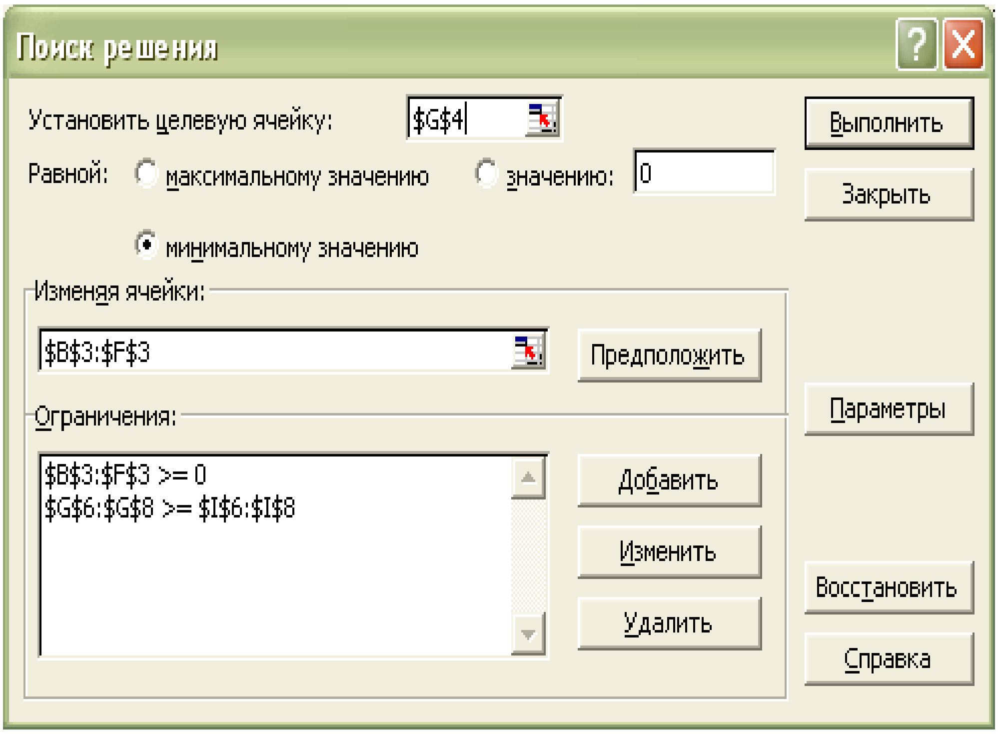


Рис. 28. **Конечный вид диалогового окна *Поиск решения***

Для определения решения следует нажать кнопку **Выполнить.**

В диалоговом окне **Результаты поиска решения**, которое потом появляется на экране, необходимо установить переключатель в положение **Сохранить найденное решение**, указать тип отчета: **Устойчивость** и нажать **ОК**.

В табл. 43 представлено решение исходной задачи относительно определения оптимальной стратегии игрока A: $\mathbf{P}^* = (0;\, 0,2;\ 0;\, 0;\, 0,8)$ и $\nu(\boldsymbol{P}^*) = 6{,}2$.

С помощью отчета по устойчивости решения, а именно той части, которая касается ограничений (табл. 45), можно определить оптимальный план игрока B.

В столбце теневых цен находим решение вспомогательной задачи к двойственной задаче.

Итак, имеем оптимальный план: $\boldsymbol{Y}^* = (0;\, 0{,}03226;\, 0{,}12903)$.

Таблица 45

Отчет по устойчивости решения

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
\$G\$5	Всего	1,25807	0	1	0,25807	1E+30
\$G\$6	Всего	1	0,03226	1	0,16667	0,571429
\$G\$7	Всего	1	0,12903	1	1,33333	0,142857

Теперь следует определить решение задачи, двойственной к задаче об оптимальной стратегии игрока A, воспользовавшись формулой:

$$\boldsymbol{G}^* = \frac{1}{F(\boldsymbol{Y}^*)} \cdot \boldsymbol{Y}^*.$$

Значения целевых функций сопряженных задач согласно теореме двойственности совпадают, то есть $Z(\boldsymbol{X}^*) = F(\boldsymbol{Y}^*)$.

Отсюда можно определить вектор оптимальных стратегий игрока B: $\boldsymbol{G}^* = (0;\, 0{,}2;\, 0{,}8)$.

6.4. Задачи для самостоятельного решения

Определите нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и наличие седловой точки.

6.1.
$$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6.2.
$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

6.3.
$$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Упростите платежные матрицы.

6.4.
$$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

6.5.
$$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

6.6.
$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

6.7.
$$\Pi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Решите графически матричную игру, заданную платежной матрицей Π.

6.8. $\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6.9. $\Pi = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6.10. $\Pi = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

6.11. $\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

6.12. $\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

6.13. $\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

6.4. Контрольные вопросы

1. Что такое игра, стратегия, нижняя и верхняя цена игры?
2. Какая игра называется парной?
3. Какая игра называется игрой с нулевой стоимостью?
4. Что называется седловой точкой?
5. Какая стратегия называется доминирующей?
6. Какими свойствами обладают оптимальные стратегии игроков?
7. В каких случаях игра ведется в смешанных стратегиях?

Ответы

1.1. $(2;3;0;0)$, $\left(\frac{11}{4};0;0;\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2};0;1;0\right)$. 1.2. $(0;4;0;2)$, $\left(\frac{4}{3};0;0;\frac{2}{3}\right)$.

1.3. $(4;12;0;0)$, $(0;10;0;2)$, $(0;0;4;4)$, $(10;0;6;0)$.

1.4. $(0;12;0;12)$, $(0;0;3;9)$, $(4;0;4;0)$, $(6;18;0;0)$.

1.5. $(2;4;0;0)$, $(0;6;2;0)$, $(0;0;4;2)$, $(3;0;0;1)$.

1.6. $(0;0;28;21)$, $(0;7;42;0)$, $(7;0;0;14)$, $(9;4;0;0)$.

2.9. $X^*=(4;5)$, $z_{\max}=13$. 2.10. $X^*=(10;9)$, $z_{\min}=-11$.

2.11. $X^*=(0;6)$, $z_{\max}=12$. 2.12. $X^*=(14;0)$, $z_{\max}=14$.

2.13. $X^*=(2;5)$, $z_{\min}=-16$. 2.14. $X^*=(5;1)$, $z_{\min}=15$.

2.15. $X^*=(4;3)$, $z_{\max}=18$. 2.16. $X^*=(3;5)$, $z_{\max}=16$.

2.17. $X^*=(2;0;4;0)$, $z_{\max}=14$. 2.18. $X^*=(10;0;6;0)$, $z_{\min}=-62$.

2.19. $X^*=(3;0;2)$, $z_{\max}=16$. 2.20. $X^*=(1;0;2;0;1)$, $z_{\max}=9$.

2.21. $X^*=(4;1)$, $z_{\min}=-3$. 2.22. $X^*=(0;2;0;4)$, $z_{\min}=-6$.

2.23. $X^*=(2;0;3;0)$, $z_{\max}=10$. 2.24. $X^*=(3;2;1)$, $z_{\min}=6$.

2.25. $X^*=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $z_{\max}=2$. 2.26. $X^*=(1;0;2)$, $z_{\min}=3$.

3.6. $X^*=\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};0\right)$, $Y^*=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, $z_{\min}=5\frac{1}{2}$.

3.7. $X^*=\left(0;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, $Y^*=(4;1)$, $z_{\min}=13$.

3.8. $X^*=\left(0;\frac{9}{17};\frac{15}{17};0\right)$, $Y^*=(6;6)$, $z_{\max}=-36$.

3.9. $X^*=(14;0;0;2)$, $Y^*=\left(\frac{3}{5};\frac{14}{5}\right)$, $z_{\max}=74$.

4.1. $X^* = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 13 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 149$.

4.2. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 0 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 270$.

4.3. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 270$.

4.4. $X^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 120$.

4.5. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 95$.

4.6. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 30 & 0 \\ 15 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \\ 25 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 302$.

4.7. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 195$.

4.8. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 30 & 0 \\ 15 & 19 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$, $z_{\min} = 277$.

5.1. $X^* = (1;1)$, $z_{\max} = 5$.

5.2. $X^* = (0;6)$, $z_{\min} = -24$.

5.3. $X^* = (1;0)$, $z_{\max} = 5$.

5.4. $X^* = (0;0)$, $z_{\max} = 0$.

5.5. $X^* = (5;10)$, $z_{\max} = 130$.

5.6. $X^* = (2;0)$, $z_{\max} = 3$.

5.7. $X^* = (1;9;0)$, $z_{\max} = 44$ тыс. ед. продукции.

6.1. $\alpha = \beta = v = 5$. 6.2. $\alpha = 4$; $\beta = 6$. 6.3. $\alpha = \beta = v = 6$

6.4. . $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

6.5. $\begin{array}{cc} & B_2 \; B_3 \\ A_1 & (6;\ 8). \end{array}$

6.6. $\begin{array}{cc} & B_1 \\ A_4 & (4). \end{array}$

6.7. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6.8. $X^* = (1;0)$, $Y^* = (1;0)$, $v = 2$.

6.9. $X^* = \left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right)$, $Y^* = \left(\frac{5}{8};\ \frac{3}{8}\right)$, $v = \frac{7}{4}$.

6.10. $X^* = \left(\frac{3}{5};\ \frac{2}{5}\right)$, $Y^* = \left(\frac{1}{5}; 0; \frac{4}{5}\right)$, $v = \frac{23}{5}$.

6.11. $X^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $Y^* = \left(0; 0; 0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $v = \frac{7}{2}$.

6.12. $X^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0\right)$, $Y^* = \left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$, $v = \frac{11}{9}$.

6.13. $X^* = \left(0; \frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$, $Y^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $v = 7$.

Рекомендованная литература

Основная

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов / И. Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1986. – 320 с.
2. Буріменко Ю. І. Математичне програмування з розв’язуванням задач на комп’ютері: навч. посібн. для вищих навчальних закладів / Ю. І. Буріменко, О. В. Сінявський, А. Ю. Щуровська. – К. : Освіта України, 2010. – 200 с.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти : пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 402 с.
4. Егоршин А. А. Математическое программирование : учеб. пособ. / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х. : ИД «ИНЖЭК», 2003. – 240 с.
5. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2006. – 438 с.
6. Збірник вправ з навчальної дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів усіх галузей знань усіх форм навчання / укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.
7. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи ; ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
8. Клебанова Т. С. Эконометрия : учебн. пособ. / Т. С. Клебанова. – 2-е изд., испр. / Т. С. Клебанова, Н. А. Дубовина, Е. В. Раевнева. – Харьков : ИД «ИНЖЭК», 2005. – 160 с.
9. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование : учебн. пособ. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1980. – 300 с.
10. Лабораторний практикум з оптимізаційних методів і моделей навчальної дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі»: навчально-практичний посібник /І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 216 с.
11. Лебедєва І. Л. Економіко-математичні моделі на базі транспортної задачі: навч. посібн. / І. Л. Лебедєва, Г. К. Снурнікова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2007. – 160 с.
12. Лугінін О. Є. Економетрія : навч. посібн. / О. Є. Лугінін, С. В. Білоусова, О. М. Білоусов. – К. : Центр навчальної літератури, 2005. – 252 с.

13. Лук'яненко І. Г. Економетрика: Практикум з використанням комп'ютера / І. Г. Лук'яненко, Л. І. Краснікова. – К. : Товариство «Знання» ; КОО, 1998. – 220 с.
14. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи і моделі : навчально-практичний посібник / Л. М. Малярець, Е. Ю.Железнякова, Є. Ю.Місюра. – Х. : ХНЕУ, 2011. – 320 с.
15. Мангус Я. Р. Эконометрия. Начальный курс : учебн. пособ. / Я. Р. Мангус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. – М. : Дело, 1998. – 248 с.
16. Методичні рекомендації до виконання контрольних робіт з навчальної дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів усіх напрямів підготовки заочної форми навчання / укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, І. Л. Лебедєва та ін. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 36 с.
17. Мур Дж. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Дж. Мур, Л. Р. Уедерфорд : пер. с англ. – 6-е изд. – М. : ИД «Вильямс», 2004. – 1024 с.
18. Наконечний С. І. Економетрія : підручник / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – Вид. 3-тє, доп. та перероб. – К. : КНЕУ, 2005. – 520 с.
19. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посібн. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2005. – 452 с.
20. Робоча програма навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" для студентів галузі знань "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання / укл. О. Д. Бабіна, О. В. Лежепьокова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 84 с.
21. Решение экономических задач на компьютере / А. В. Каплан, В. Е. Каплан, М. В. Мащенко и др. – М. : ДМК Пресс ; СПб. : Питер, 2004. – 600 с.
22. Символоков Л. В. Решение бизнес-задач в Microsoft Office / Л. В. Символоков. – М. : ЗАО «Издательство БИНОМ», 2001. – 512 с.
23. Травкін Ю. І. Математика для економістів : підручник / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.
24. Экономико-математические методы и модели : учебн. пособ. / под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн. : БГЭУ, 1999. – 413 с.

Предметный указатель

Содержание

Навчальне видання

Вища та прикладна математика в прикладах і задачах.
Розділ «Математичне програмування»
Навчально-практичний посібник для іноземних студентів
(рос. мовою)

Железнякова Еліна Юріївна
Ігначкова Алла Викторівна

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**
Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Новицька О. С.**
Коректор

Розглянуто основні класи задач математичного програмування і методи їх розв’язання. Основний акцент зроблено на придбання студентами навичок побудови економіко-математичних моделей та знаходження їх оптимального розв’язку.

У кожній темі наведено методику розв'язання типових задач, основні теоретичні відомості, необхідні для їх вирішення. В кінці кожної теми запропоновані завдання для самостійної роботи та питання для самоконтролю.

План 2014 р. Поз. № 19 П
Підп. до друку Формат 60 х 90/16.
Папір MultiCopy. Друк Riso. Умов.-друк. арк. 7,3 Обл.-вид. арк.
Тираж 1000 прим. Зам. №

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи
Дк №481 від 13.06.2001 р.

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, просп. Леніна, 9а