МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з розділу "Вища математика" навчальної дисципліни "ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

для студентів напряму підготовки 6.030601 "Менеджмент"
спеціалізації "Бізнес-адміністрування"
денної форми навчання

Харків. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 6 від 08.01.2014 р.

Укладачі: Железнякова Е. Ю.
Сілічова Т. В.

М54 Методичні рекомендації до самостійної роботи з розділу "Вища математика" навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" для студентів напряму підготовки 6.030601 "Менеджмент" спеціалізації "Бізнес-адміністрування" денної форми навчання / укл. Е. Ю. Железнякова, Т. В. Сілічова. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 101 с. (Укр. мов)

Запропоновано завдання для самостійної роботи за всіма темами навчальної дисципліни. Наведено приклади розв’язання типових задач за кожною темою та відповіді до них.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.030601 "Менеджмент".

Вступ

Сучасною тенденцією у вищій освіті є переорієнтація студентів вищих навчальних закладів з процесу навчання на результат, із знань на вміння, на формування певних компетентностей. Основними завданнями вивчення навчальної дисципліни "Вища математика" є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін математичного циклу. У процесі вивчення даної навчальної дисципліни студент отримує аналітично-дослідницькі компетентності, а саме: вміння проводити математичні обчислення, аналізувати та обробляти отримані результати і робити висновки на достатньо високопрофесійному рівні, вміння використовувати отримані знання для подальшого створення відповідних задач економіко-математичного моделювання.

З переходом на кредитно-модульну систему навчання і при скороченні аудиторного навантаження підвищується роль самостійної роботи студентів. Актуальність навчально-методичного та інформаційного забезпечення самостійної роботи студентів вузу підтверджується тим, що в сучасному суспільстві зростають вимоги до учасників системи соціальних взаємин, як ніколи раніше, зростає роль професійної готовності фахівців.

Організація самостійної роботи повинна активно впливати на характер навчального процесу, систематизувати роботу студента протягом усього семестру. Вона має охоплювати матеріали лекцій і семінарів, вироблення навичок конспектування, професійний та термінологічний практикум, складання опорних конспектів, письмовий контроль за проблемою, огляд літератури, виконання самостійних різнорівневих проблемних та практичних завдань [4].

Пропоновані методичні рекомендації складено відповідно до робочої програми навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" розділ "Вища математика". Наведений матеріал стисло охоплює найважливіші питання розділу "Вища математика", що дозволяє студентові досить за короткий термін часу звернути увагу на ключові питання. За кожною темою наведено приклади розв'язання типових задач та пропонована достатня кількість завдань для самостійної роботи.

Змістовний модуль 1. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. Диференціальне числення

Тема 1. Матриці

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1

Знайти додаток матриць A і B.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2

Знайти добуток матриць A і B.

$$\underset{[2\times 3]}{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix};\ \underset{[3\times 2]}{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$\underset{[2\times 2]}{C}=(A\cdot B)=(C_{ij})=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

$$C_{11}=1\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot(-4)=-9;\ \ C_{12}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+2\cdot 8=21;$$

$$C_{21}=3\cdot 1+4\cdot 2+(-2)\cdot(-4)=19;\ \ C_{22}=3\cdot 2+4\cdot(-3)+(-2)\cdot 8=-22;$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -9 & 21 \\ 19 & -22 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити лінійну комбінацію матриць A та B:

1.1. $A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. $A+2B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3. $2A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$ для матриць:

1.4. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$.

1.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислити:

1.7. $(A+B)(A-B)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.8. $2A+A \cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9. $B\cdot\left(B-2A\right)$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.10. $\left(A+2B\right)\cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Питання для самоперевірки

1. Що називають прямокутною числовою матрицею?
2. Що таке "елементи матриці" і чим визначається розмір матриці?
3. Як визначається місце розташування певного елемента матриці?
4. Які матриці називають рівними?
5. Що розуміють під транспонуванням матриці?
6. Яка матриця називається квадратною?
7. Яка матриця називається верхньою (нижньою) трикутною?
8. Дайте означення діагональної й одиничної матриць.
9. Яку матрицю називають сумою (різницею) двох матриць?
10. Яку матрицю називають добутком матриці зі скаляром?
11. Яким законам підпорядковуються дії додавання матриць і множення матриці зі скаляром?
12. За яким правилом визначають елементи матриці, яка є добутком двох матриць? Наведіть схему виконання цієї операції.

Тема 2. Визначники

Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & -5\end{vmatrix}=2\cdot(-5)-6\cdot 3=-28.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & 1 & -2\\ -1 & 5 & 0\end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot 0+(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)+3\cdot 4\cdot 5-$$

$$-\left(3\cdot 1\cdot(-1)+2\cdot(-2)\cdot 5+(-3)\cdot 4\cdot 0\right)=77.$$

Приклад 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$a_{22} = -7; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12; \qquad A_{32} = M_{32} = -12.$$

Приклад 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)A_{31} + 5 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} = -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(6-3) - 5(-4-12) = 77.$$

Приклад 4

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

1) $\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 18 - 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 36,$

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 5 & 6 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -23\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-6) = 36.$

3) $\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & -10 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} =$

$= -6 \cdot (-6) = 36.$

Приклад 5

Обчислимо матрицю обернену до даної $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

Знаходимо всі алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}.$$

Приклад 6

Знайти обернену матрицю A^{-1} для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Перевіримо правильність обчислень:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити визначники другого порядку:

2.1. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.2. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

2.3. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

2.4. $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$.

2.5. $\begin{vmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 2 \end{vmatrix}$.

2.6. $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язати рівняння:

2.7. $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$.

2.8. $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = 0$.

Обчислити визначники третього порядку:

2.9. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix}.$ 2.10. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & -5 \\ 9 & -8 & 6 \end{vmatrix}.$ 2.11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$

2.12. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$ 2.13. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$ 2.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$

Перевірити, чи є матриця A невиродженою:

2.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$ 2.16. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 2.17. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Знайти матриці, що обернені для вказаних:

2.18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$ 2.19. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$ 2.20. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

Обчислити ранг матриці:

2.21. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$ 2.22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ 2.23. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Питання для самоперевірки

1. Для яких матриць вводиться поняття визначника?
2. Що розуміють під визначником другого порядку?
3. Як обчислити визначник 3-го порядку за правилом трикутників?
4. Дайте означення визначника n-го порядку.
6. Що називають мінором елемента визначника?
7. Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?

8. Яким співвідношенням пов’язані між собою мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника (квадратної матриці)?

9. Сформулюйте основні властивості визначників і обґрунтуйте їх.

10. Які існують способи обчислення визначника?

11. Яка матриця називається оберненою?

12. Яка достатня умова існування оберненої матриці (які матриці можуть мати обернені)?

13. Як перевірити, що отримана матриця дійсно є оберненою до вихідної?

14. Які існують способи знаходження оберненої матриці?

15. Що називається рангом матриці?

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад 1

Розв’язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -3, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання. Розв’яжемо систему за формулами Крамера. Спочатку обчислимо визначник системи Δ, елементами якого є коефіцієнти при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, за теоремою Крамера система має єдиний розв’язок.

Обчислимо визначник, що отримано із визначника Δ заміною його першого стовпця на стовпець вільних членів системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Далі обчислимо визначники, що отримано із визначника Δ заміною його другого та третього стовпців відповідно на стовпець вільних членів системи:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 60.$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{12} = -2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 5.$

Приклад 2

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання системи рівнянь зручно надати у вигляді таблиці (табл. 1)

Таблиця 1

Розв'язання системи рівнянь

	Коефіцієнти при			b_i	Σ	Примітка
	x_1	x_2	x_3			
1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	6	11	
2	2	-1	-2	-3	-4	
3	1	4	-1	3	7	

Закінчення табл.1

1	2	3	4	5	6	7
4	1	3	1	6	11	[1]
5	0	-7	-4	-15	-26	[2]-2·[4]
6	0	1	-2	-3	-4	[3]-[4]
7	1	0	7	15	23	(-3)·[8]+[4]
8	0	1	-2	-3	-4	[6]
9	0	0	-18	-36	-54	[5]+7·[8]
10	1	0	0	1	2	(-7)·[12]+[7]
11	0	1	0	1	2	2·[12]+[11]
12	0	0	1	2	3	[9]:2

Одержали систему:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1, \\ \qquad x_2 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Приклад 3

Знайти розв’язок системи методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -8. \end{cases}$$

Розв’язання системи рівнянь див. в табл. 2.

Таблиця 2

Розв’язання системи рівнянь

	Коефіцієнти при				b_i	$\sum$	Примітка
	x_1	x_2	x_3	x_4			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	-5	-2	-2	-7	
2	1	5	-17	2	10	1	
3	1	-1	1	-4	-8	-11	

Закінчення табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	1	-5	-2	-2	-7	[4]=[1]
5	0	4	-12	4	12	8	[5]=[2]-[4]
6	0	-2	6	-2	-6	-4	[6]=[3]-[4]
7	0	1	-3	1	3	2	[7]=[5] : 4
8	1	0	-2	-3	-5	-9	[8]=[4]-[7]
9	0	0	0	0	0	0	[9]=[6]+2·[7]

x_3, x_4 – вільні невідомі. Виразимо через них x_1 і x_2.

З табл. 2 одержимо:

$$x_1 = -5 + 2x_3 + 3x_4;$$
$$x_2 = 3 + 3x_3 - x_4.$$

Це є загальний розв'язок системи. Якщо вільним невідомим надати будь-які значення, одержимо частинний розв'язок.

Приклад 4

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 30. \end{cases}$$

Розв'язання системи рівнянь наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Розв'язання системи рівнянь

	Коефіцієнти при			b_i	Σ	Примітка
	x_1	x_2	x_3			
1	3	2	1	23	29	
2	1	1	2	12	16	
3	4	3	3	30	40	
4	1	1	2	12	16	[2]
5	0	-1	-5	-13	-19	[4]·(-3)+[1]
6	0	-1	-5	-18	-24	[4]·(-4)+[3]

Закінчення табл. 3

1	2	3	4	5	6	7
7	1	0	-3	-1	-3	[8]·(-1)+[4]
8	0	1	5	13	19	[5]·(-1)
9	0	0	0	-5	-5	[8]+[6]

Одержали систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -1, \\ x_2 + 5x_3 = 13, \\ 0 = -5. \end{cases}$$

Останнє рівняння суперечить законам математики, тому маємо, що система немає розв’язків.

Відповідь: система немає розв’язків.

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати систему рівнянь:

3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$ 3.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 3.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 3.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

$$3.9.\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21, \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21. \end{cases} \qquad 3.10.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Питання для самоперевірки

1. Яку систему рівнянь називають сумісною (несумісною)?
2. Яку систему рівнянь називають визначеною (невизначеною)?
3. Якщо система сумісна, але невизначена, то скільки існує загальних розв'язків цієї системи і як їх визначити?
4. У чому полягає метод Жордана – Гаусса?
5. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?

Тема 4. Вектори

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Дано два вектори: $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 5\vec{m} + \vec{n}$, де $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Знайти а) $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right)$; б) $np_{\vec{b}}\left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right)$; в) $\cos\left(\widehat{\vec{a}, 3\vec{b}}\right)$.

Розв'язання.

а) отже, $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\left(3\vec{m} - 2\vec{n}\right) - 2\left(5\vec{m} + \vec{n}\right) = -\vec{m} - 8\vec{n}$,

$5\vec{a} + 3\vec{b} = 5\left(3\vec{m} - 2\vec{n}\right) + 3\left(5\vec{m} + \vec{n}\right) = 30\vec{m} - 7\vec{n}$, тоді

$$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right) = \left(-\vec{m} - 8\vec{n}\right)\left(30\vec{m} - 7\vec{n}\right) = -30\vec{m}^2 + 7\vec{m}\vec{n} - 240\vec{n}\vec{m} +$$

$$+ 56\vec{n}^2 = -30|\vec{m}|^2 - 233|\vec{m}||\vec{n}|\cos\frac{2\pi}{3} + 56|\vec{n}|^2 = -30 \cdot 4 - 233 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ 56 \cdot 9 = 1073;$$

б) застосуємо формулу: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, np_{\vec{a}}\vec{b}$, звідки $np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Отже, $np_{\vec{b}}\left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{b} \cdot \left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right)}{|\vec{b}|}$. Знайдемо добуток:

$$\vec b\cdot\left(5\vec a+3\vec b\right)=5\vec a\vec b+3\vec b^{\,2}=5\left(3\vec m-2\vec n\right)\left(5\vec m+\vec n\right)+3\left(5\vec m+\vec n\right)^2=5\left(15\vec m^2-\right.$$

$$\left.-7\vec n\vec m-2\vec n^2\right)+3\left(25\vec m^2+10\vec m\vec n+\vec n^2\right)=150\vec m^2-5\vec n\vec m-7\vec n^2=150\left|\vec m\right|^2-$$

$$-5\left|\vec n\right|\left|\vec m\right|\cos\frac{2\pi}{3}-7\left|\vec n\right|^2=150\cdot4-5\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-7\cdot9=552.$$

Обчислимо $\left|\vec b\right|=\sqrt{\vec b^{\,2}}=\sqrt{\left(5\vec m+\vec n\right)^2}=\sqrt{25\vec m^2+10\vec m\vec n+\vec n^2}=$

$$=\sqrt{25\cdot4+10\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4}=\sqrt{74}\approx8{,}60.$$

Таким чином, $np_{\vec b}\left(5\vec a+3\vec b\right)=\dfrac{552}{\sqrt{74}}\approx64{,}2;$

в) застосуємо формулу: $\cos\left(\widehat{\vec a,3\vec b}\right)=\dfrac{\vec a\cdot\left(3\vec b\right)}{\left|\vec a\right|\left|3\vec b\right|}$.

Обчислимо спочатку $\vec a\cdot\left(3\vec b\right)$.

$$\vec a\cdot\left(3\vec b\right)=3\left(3\vec m-2\vec n\right)\left(5\vec m+\vec n\right)=3\left(15\vec m^2-7\vec m\vec n-2\vec n^2\right)=3\left(15\left|\vec m\right|^2-\right.$$

$$\left.-7\left|\vec m\right|\left|\vec n\right|\cos\frac{2\pi}{3}-2\left|\vec n\right|^2\right)=3\left(15\cdot4-7\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot9\right)=189.$$

$$\left|\vec a\right|=\sqrt{\left(3\vec m-2\vec n\right)^2}=\sqrt{9\vec m^2-12\vec m\vec n+4\vec n^2}=\sqrt{9\cdot4-12\cdot2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot9}=$$

$$=\sqrt{108}\approx10{,}39,$$

$$\left|\vec b\right|=\sqrt{74}\approx8{,}60.$$

Таким чином, $\cos\left(\widehat{\vec a,3\vec b}\right)=\dfrac{189}{10{,}39\cdot3\cdot8{,}6}=0{,}72.$

Приклад 2. Надано координати трьох точок: $A(4;\ 2;\ 5)$, $B(-2;\ 3;\ 4)$, $C(4;\ 2;\ -1)$.

Знайти: а) довжину вектора $\vec a=3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$;

б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

в) векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$, де $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$;

г) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$, де $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$;

д) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$; перевірити, чи компланарні ці вектори.

Розв’язання.

а) за заданими координатами точок A, B і C знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BC}=(6;-1;-5)$, $\overrightarrow{AB}=(-6;1;-1)$.

Вектор $\vec{a}=3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=3(6;-1;-5)+2(-6;1;-1)=(6;-1;-16)$,

модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює: $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+(-1)^2+(-16)^2}=\sqrt{293}$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(6;-1;-16)\cdot(6;-1;-5)=36+1+80=117$;

в) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -1 & -17\\ 6 & -1 & -5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -16\\ -1 & -5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6 & -16\\ 6 & -5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}6 & -1\\ 6 & -1\end{vmatrix}=$

$=-11\vec{i}-226\vec{j}$;

г) площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$, де $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$ обчислимо за допомогою формули $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$, де $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=(-6;1;-1)$ $\vec{d}=\overrightarrow{AC}=(0;0;-6)$. Спочатку знайдемо векторний добуток $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

$$\vec{c}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 0 & -6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=-6\vec{i}-36\vec{j},$$

$$\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-36)^2}=\sqrt{36+36^2}=\sqrt{36(36+1)}=6\sqrt{37},$$

$$S_{V} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{37} = 3\sqrt{37}\ (\text{кв.од});$$

д) знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -16 \\ 6 & -1 & -5 \\ -6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -17 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 0 & -17 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки мішаний добуток векторів дорівнює нулю, то можемо зробити висновок, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

Завдання для самостійної роботи

4.1. Обчислити площу трикутника ABC, якщо $A(-1;0;1)$, $B(1;0;3)$, $C(0;2;3)$.

4.2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 30^0$.

4.3. У трикутнику з вершинами $A(1;1;1)$, $B(1;3;3)$, $C(3;3;1)$ знайти кут при вершині A.

4.4. Задані координати трикутної піраміди $A(3;-2;1)$, $B(0;1;4)$, $C(3;0;2)$, $D(-1;2;1)$. Знайти її об'єм.

4.5. Задано вектори $\vec{a} = (5;-6;-4)$, $\vec{b} = (4;8;-7)$. Обчислити їх скалярний добуток.

4.6. Перевірити, чи компланарні задані вектори:

а) $\vec{a} = (4;-6;2)$, $\vec{b} = (2;3;-1)$ та $\vec{c} = (-1;5;-3)$;

б) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 14\vec{i} - 13\vec{j} + 7\vec{k}$;

в) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

4.7. Перевірити на колініарність вектори $\vec{a} = (3;4;1)$ та $\vec{b} = (1;-2;7)$.

4.8. Визначити значення параметра λ, за яким вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ будуть компланарні, якщо: $\vec{a} = (\lambda;3;1)$, $\vec{b} = (5;-1;2)$, $\vec{c} = (-1;5;4)$.

4.9. Визначити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=20$ та $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$.

4.10. Обчислити $np_{\vec{a}+\vec{b}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ та $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120^0$.

Питання для самоперевірки

1. Яким умовам згідно з означенням повинні відповідати рівні, протилежні, колінеарні, компланарні вектори?
2. Що розуміють під сумою векторів, різницею векторів, добутком вектора зі скаляром?
3. Які операції над векторами називають лінійними?
4. Яка форма завдання вектора називається координатною?
5. Як визначається модуль вектора, який задано координатами?
6. Яку форму завдання векторів називають алгебраїчною?
7. Скалярний добуток двох векторів та його властивості.
8. Як за скалярним добутком відшукати кут між двома векторами?
9. Що називають векторним добутком двох векторів?
10. Якими властивостями володіє векторний добуток?
11. Визначення векторного добутку векторів за їх координатами.
12. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості.
13. Геометричний зміст мішаного добутку векторів.
14. Мішаний добуток векторів, заданих у координатній формі.

Тема 5. Пряма на площині

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1

Перетворити загальне рівняння прямої $2x-3y+6=0$ до вигляду з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання. Розв'язуючи це рівняння відносно y, одержуємо

$$y=\frac{2}{3}x+2.$$

Отже, кутовий коефіцієнт прямої $k=2/3$, а параметр $b=2$.

Приклад 2

Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осі Oy відрізок $b=-5$ і утворює кут $\alpha=135°$ з віссю абсцис.

Розв'язання. Знайдемо $k=tg135°=-tg45°=-1$. Тоді шукане рівняння прямої за формулою прямої із кутовим коефіцієнтом має вигляд: $y=-x-5$.

Приклад 3

Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з віссю Ox кут $\alpha=60°$.

Розв'язання. Оскільки шукана пряма проходить через початок координат, то $b=0$, і її рівняння має вигляд $y=kx$, де $k=tg60°=\sqrt{3}$. Отже, $y=\sqrt{3}x$.

Приклад 4

Загальне рівняння прямої $5x-6y+30=0$ призвести до рівняння у відрізках.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $5x-6y=-30$ і поділимо усі його члени на (-30). Одержуємо рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{5}=1.$$

Тут $a=-6$, $b=5$. За цими величинами легко побудувати графік заданої прямої (рис. 1).

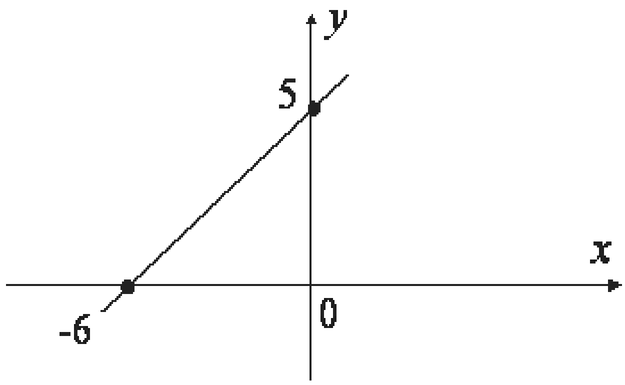

Рис. 1. **Графік прямої**

Приклад 5

Через точку $M\left(2;-5\right)$ провести пряму, яка відтинає на осях координат рівні за величиною відрізки.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі $a=b$. Тоді рівняння шуканої прямої має вигляд $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1,$, або $x+y=a$. Щоб знайти параметр a, підставимо координати точки $M\left(2;-5\right)$, яка за умовою належить прямій, в рівняння $x+y=a$, звідки дістаємо $a=2-5=-3$. Шукане рівняння прямої має вигляд $x+y=-3$ або $x+y+3=0$.

Приклад 6

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M\left(-5;1\right)$ і утворює кут $60°$ з віссю Ox.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт прямої $k=tg60°=\sqrt{3}$, а шукане рівняння згідно з формулою $y-y_0=k(x-x_0)$ має вигляд

$$y-1=\sqrt{3}(x+5) \text{ або } y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}+1.$$

Приклад 7

Точка C поділяє відрізок AB, де $A\left(1;-3\right)$, $B\left(-8;6\right)$, у відношенні $\lambda=2:1$. Через точку C провести пряму, яка утворює з віссю Ox кут $135°$.

Розв'язання. Координати точки C знайдемо за формулами ділення відрізку у заданому відношенні:

$$x_c=\frac{x_a+\lambda x_b}{1+\lambda}=\frac{1+2\cdot(-8)}{1+2}=-5$$

$$y_c=\frac{y_a+\lambda y_b}{1+\lambda}=\frac{-3+2\cdot 6}{1+2}=3$$

Отже, точка $C\left(-5;3\right)$, а $k=tg135°=-1$. Шукане рівняння прямої:

$$y-3=-1\left(x+5\right) \text{ або } x+y+2=0.$$

Приклад 8

З пучка прямих, що проходять через точку $M(-3;2)$, обрати ту пряму, яка відтинає на осі ординат відрізок, рівний 5 одиницям.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямих, що проходить через точку $M(-3;2)$: $y-2=k(x+3)$.

Перетворимо це рівняння до вигляду: $y=kx+(3k+2)$.

Згідно з умовою $3k+2=5$, звідки $k=1$, і шукане рівняння:

$$y=x+5.$$

Приклад 9

Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(-5;1)$ і $B(3;-2)$.

Розв'язання.

Згідно з формулою $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

маємо $\dfrac{x+5}{3+5}=\dfrac{y-1}{-2-1}$, або $3x+8y+7=0.$.

Приклад 10

Перевірити, чи лежать на однієї прямій точки $A(-2;-7)$, $B(1;-1)$, $C(4;5)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої, яка проходить через точки A і B:

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y+7}{-1+7},\ \text{або}\ \ 2x-y-3=0.$$

Точка C лежіть на цій прямій, якщо її координати задовольняють одержаному рівнянню. Перевіримо це: $2\cdot4-5-3=0$, тобто $0=0$.

Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій.

Приклад 11

Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $x-2y-4=0$ і $2x-3y-7=0$ та точку $M\left(-5;2\right)$.

Розв'язання. Знайдемо точку N перетину заданих прямих, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x-2y & =4, \\ 2x-3y & =7, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=-1, \end{cases} \quad \text{, а} \quad N(2;-1)\ .$$

Далі складаємо рівняння прямої, що проходить через точки M і N:

$$\frac{x+5}{2+5}=\frac{y-2}{-1-2}, \qquad \text{або} \qquad 3x+7y+1=0.$$

Приклад 12

Знайти гострий кут між прямою $9x+3y-7=0$ і прямою, яка проходить через точки $A\left(1;-1\right)$ і $B\left(5;7\right)$.

Розв'язання. Знайдемо кутові коефіцієнти заданих прямих. Перша пряма після перетворення приймає вигляд:

$$y=-3x+\frac{7}{3}, \text{ тобто } k_1=-3.$$

Для другої прямої за формулою кутового коефіцієнту $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_1-x_2}$

Маємо $k_2=\dfrac{7+1}{5-1}=2.$

Далі, обчислимо кут, користуючись формулою: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|,$

отримаємо: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{2+3}{1-2\cdot 3}\right|=1$, тобто $\varphi=45^\circ$.

Приклад 13

Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A\left(-2;5\right)$ і утворює кут 45° з прямою $x-3y+2=0$.

Розв'язання. Шукане рівняння прямої $y-5=k(x+2)$.

Кутовий коефіцієнт заданої прямої $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ дорівнює $k_1=\frac{1}{3}$.

За формулою $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$ маємо наступне рівняння

$$\operatorname{tg}45^0=\left|\frac{k_2-\frac{1}{3}}{1+k_1\cdot\frac{1}{3}}\right|,\ 1=\left|\frac{3k-1}{k+3}\right|$$

звідки

$$\frac{3k-1}{k+3}=1,\quad \text{або}\quad \frac{3k-1}{k+3}=-1.$$

Розв’язуючи ці рівняння знаходимо для шуканої прямої

$$k=2 \text{ або } k=-\frac{1}{2}.$$

А тоді рівняння прямих: $y-5=2(x+2)$ або $y-5=-\frac{1}{2}(x+2)$,

які після спрощень приймають вигляд:

$$2x-y+9=0 \text{ або } x+2y-8=0.$$

Приклад 14

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;-7)$ і паралельна прямій MN, де $M(-4;3)$, а $N(2;-5)$.

Розв'язання. Рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;-7)$ шукаємо у вигляді: $y+7=k(x-4)$.

Шукана пряма паралельна прямій MN. Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює

$$k_{MN}=\frac{-5-3}{2+4}=-\frac{4}{3}.$$

А оскільки шукана пряма паралельна прямій MN, то $k=-\frac{4}{3}$.

І тоді рівняння шуканої прямої

$$y+7=-\frac{4}{3}(x-4), \text{ або } 4x+3y+5=0.$$

Приклад 15

Для трикутника ABC, де $A(2;1)$, $B(-1;-1)$ і $C(3;2)$, скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

Розв'язання. Спочатку складемо рівняння прямої AB

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-1}{-1-1}, \text{ або } y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3},, \text{ де } k=\frac{2}{3}.$$

Висота CD перпендикулярна до прямої AB і тому її кутовий коефіцієнт дорівнює $k_{CD}=-\frac{1}{k}=-\frac{3}{2}$.

Рівняння висоти CD має вигляд:

$$y-2=-\frac{3}{2}(x-3), \text{ або } 3x+2y-13=0.$$

Приклад 16

Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $M(1;3)$ на однакових відстанях від точок $A(-5;1)$ і $B(9;-7)$.

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі.

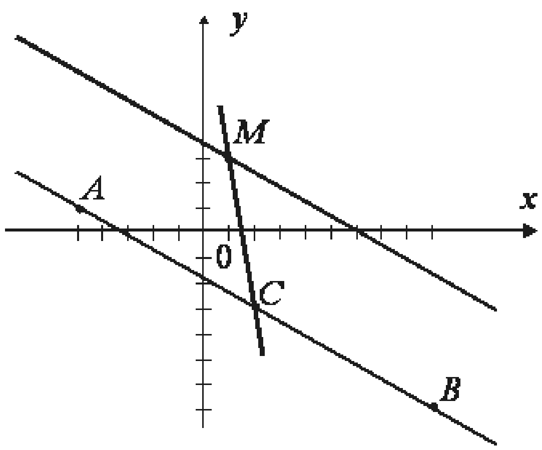

Рис. 2. **Рисунок до задачі**

Як видно із рисунку, через точку M можна провести за умовою задачі дві прямі: одна паралельна прямій AB, а друга проходить через середину відрізка AB.

Щоб знайти рівняння першої прямої, знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AB:

$$k_{AB} = \frac{-7-1}{9+5} = \frac{-4}{7},$$

Тоді рівняння паралельної прямої:

$$y - 3 = -\frac{4}{7}(x-1), \text{ або } 4x + 7y - 25 = 0.$$

Для другої прямої треба знайти координати середини відрізка AB – точки C за відомими формулами:

$$x_C = \frac{-5+9}{2} = 2, \ y_C = \frac{1-7}{2} = -3.$$

Отже, $C(2;-3)$. А тоді рівняння прямої MC:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{-3-3}, \text{ або } 6x + y - 9 = 0.$$

Приклад 17

Знайти точку Q, яка симетрична точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт заданої прямої $2x - 3y - 3 = 0$ дорівнює $k = \frac{2}{3}$. Через точку $P(-5;13)$ проведемо перпендикуляр до прямої $2x - 3y - 3 = 0$. Його рівняння з урахуванням умови перпендикулярності до заданої прямої має вигляд:

$$y - 13 = -\frac{3}{2}(x+5), \text{ або } 3x + 2y - 11 = 0 \quad (PQ).$$

Знайдемо точку A перетину прямої PQ і заданої прямої:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad A(3,1).$$

Оскільки точка Q симетрична точці P, то точка A поділяє відрізок PQ навпіл. За формулами ділення відрізка навпіл маємо:

$$x_A = \frac{x_Q + x_P}{2},\ y_A = \frac{y_Q + y_P}{2},$$

звідки:

$$x_Q = 2x_A - x_p = 2\cdot 3 + 5 = 11,$$

$$y_Q = 2y_A - y_p = 2\cdot 1 - 13 = -11.$$

Отже, точка $Q(11;-11)$ симетрична точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

Приклад 18

Призвести до нормального вигляду рівняння прямої $12x+5y+78=0$.

Розв'язання. Нормувальний множник $\mu = -\frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}} = -\frac{1}{13}$.

Тоді нормальне рівняння заданої прямої має вигляд:

$$-\frac{12}{13}x - \frac{15}{13}y - 6 = 0.$$

З цього рівняння видно, що відстань прямої від початку координат дорівнює 6.

Приклад 19

Знайти відстань від точки $M(-1;-3)$ до прямої $8x-6y+5=0$.

Розв'язання. За формулою відстані точки до прямої

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

отримаємо: $d = \frac{|-8+18+5|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \frac{15}{10} = 1{,}5.$

Приклад 20

Знайти відстань між паралельними прямими

$$3x+4y-13=0 \text{ і } 3x+4y+22=0.$$

Розв'язання. На першій прямій візьмемо будь-яку точку, наприклад, $M(3;1)$ і знайдемо відстань від цієї точки до другої прямої. Це й буде шукана відстань між паралельними прямими.

Отже,

$$d=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1+22|}{\sqrt{9+16}}=7.$$

Приклад 21

У трикутнику з вершинами $A(5;-3)$, $B(0;-1)$, $C(3;3)$ знайти довжину висоти, проведеної з вершини A.

Розв'язання. Звичайно, що довжина шуканої висоти є відстань від точки A до прямої BC. Тому знайдемо рівняння цієї прямої:

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y+1}{3+1}, \text{ або } 4x-3y-3=0.$$

Далі знаходимо відстань від точки A до прямої BC

$$d=\frac{|4\cdot 5-3\cdot(-3)-3|}{\sqrt{16+9}}=\frac{26}{5}=5{,}2.$$

Приклад 22

Скласти рівняння прямих, які паралельні прямій $3x-4y-10=0$ і які віддалені від неї на 3 одиниці.

Розв'язання. Для будь-якої точки $M(x;y)$ шуканої прямої відстань від прямої до точки можна записати:

$$3=\frac{|3x-4y-10|}{\sqrt{9+16}}.$$

Звідси одержуємо рівняння $|3x-4y-10|=15$, наслідками котрого є наступні рівняння:

$$3x-4y-10=15 \text{ або } 3x-4y-10=-15.$$

Після перетворень маємо

$$3x-4y-25=0 \text{ або } 3x-4y+5=0.$$

Це і є шукані прямі.

Приклад 23

Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $3x+4y-9=0$ і $12x+9y-8=0$. Перевірити, що бісектриси перпендикулярні.

Розв'язання. За означенням бісектриси кута кожна її точка $M(x;y)$ рівновіддалена від сторін кута. Відстані d_1 і d_2 точки $M(x;y)$ від сторін кута знаходимо за формулами:

$$d_1=\frac{|3x+4y-9|}{5},\ d_2=\frac{|12x+9y-8|}{15}.$$

Далі маємо рівняння

$$\frac{|3x+4y-9|}{5}=\frac{|12x+9y-8|}{15},$$

з якого одержуємо два рівняння бісектрис:

а) $3(3x+4y-9)=12x+9y-8$, тобто $3x-3y+19=0$;

б) $3(3x+4y-9)=-(12x+9y-8)$, тобто $3x+3y-5=0$.

Кутові коефіцієнти цих прямих дорівнюють 1 і -1, а тому бісектриси взаємноперпендикулярні.

Завдання для самостійної роботи

5.1. Привести до нормального вигляду рівняння прямої:

а) $x+3y-4=0$;

б) $5x-12y+26=0$.

5.2. Знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки:

а) $A(-1;2)$ та $B(2;1)$;

б) $A(2;1)$ та $B(-5;1)$

5.3. Знайти рівняння сторін трикутника ABC, якщо $A(1;-1)$, $B(3;5)$, $C(-7;11)$.

5.4. Знайти координати вершин трикутника, якщо відомі рівняння його сторін:

$$(AB): x+y-5=0,$$
$$(BC): 2x-y+4=0,$$
$$(AC): 5x-3y+14=0.$$

5.5. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(3;-4)$ паралельно до прямої $2x+5y-7=0$.

5.6. Через точку перетину прямих $x+y-1=0$ та $2x+3y+4=0$ провести пряму, що а) перпендикулярна прямої $3x-y+7=0$;

б) паралельна прямої $3x-y+7=0$.

5.7. Знайти кут між прямими:

а) $y=-2x+3$ та $y=3x+5$;

б) $3x+4y-7=0$ та $4x-3y+8=0$.

5.8. Знайти відстань від точки $(2;5)$ до прямої $6x+8y-5=0$.

5.9. Знайти відстань між двома паралельними прямими:

$3x+4y-12=0$ та $3x+4y+13=0$.

5.10. Через точку $A(1;2)$ провести пряму, відстань до якої від точок $B(2;3)$ та $C(4;-5)$ була би однаковою.

5.11. Знайти рівняння бісектриси кута між прямими: $4x+2y+7=0$ та $2x-4y+15=0$.

5.12. Задано рівняння прямої $4x+3y+1=0$. Знайти рівняння прямої, що паралельна до даної та відстоїть від неї на 3 одиниці.

5.13. У трикутнику з вершинами $A(-2;4)$, $B(3;1)$, $C(10;7)$ знайти довжину висоти, проведеної з вершини B.

5.14. Знайти вершини трикутника, якщо відомі рівняння його сторін: $(AB): 7x+3y-25=0,$ $(BC):$ $2x-7y-15=0,$ $(AC):$ $9x-4y+15=0.$

5.15. Дві сторони квадрата лежать на прямих $4x-3y+15=0$ і $8x-6y+25=0$. Обчислити його площу.

Питання для самоперевірки

1. Що розуміють під рівнянням лінії на площині?
2. Яке рівняння називають загальним рівнянням прямої?
3. Як знайти кут між двома прямими, що описуються рівняннями у загальному вигляді?
4. Як знайти кут між двома прямими за відомими кутовими коефіцієнтами обох прямих?
5. Як знайти кут між двома прямими?
6. Умови паралельності і перпендикулярності прямих, що описуються рівняннями з кутовими коефіцієнтами?

Тема 6. Пряма та площина у просторі

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1

Трикутна піраміда $ABCS$ задана координатами вершин:

$$A(1;-2;1),\ B(3;1;-1),\ C(2;1;3),\ S(4;-5;6).$$

Знайти рівняння прямих AB, AC і AS.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої AB як рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ ,$$

де $x_1,\ y_1,\ z_1$ – координати вершини A, а x_2, y_2, z_2 – координати вершини B.

Підставляємо ці точки в рівняння, і маємо:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{z-1}{-1-1},\ \text{або}\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Так само складаємо рівняння прямої AC, де x_1, y_1, z_1 – координати вершини A, а x_2, y_2, z_2 – координати вершини C:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{z-1}{3-1},\ \text{або}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{2}.$$

Рівняння прямої AS, де x_1, y_1, z_1 – координати вершини A, а x_2, y_2, z_2 – координати вершини S, має вигляд:

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-(-2)}{-5-(-2)}=\frac{z-1}{6-1}, \text{ або } \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{5} \quad .$$

Приклад 2. Знайти рівняння площини ABC для трикутної піраміди (див. приклад 1).

Розв'язання. Рівняння площини ABC напишемо як рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

де x_1, y_1, z_1 – координати вершини A, x_2, y_2, z_2 – координати вершини B, x_3, y_3, z_3 – координати вершини C. Підставляємо координати цих вершин і маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-1 \\ 3-1 & 1-(-2) & -1-1 \\ 2-1 & 1-(-2) & 3-1 \end{vmatrix}=0, \text{ або } \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

звідки $12(x-1)-6(y+2)+3(z-1)=0$.

Отже, рівняння площини ABC має вигляд: $12x-6y+3z-27=0$.

Приклад 3. За умовою приклада 1 знайти кут між ребром AS і площиною ABC.

Розв'язання. Кут між прямою $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою:

$$sin\,\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

де m, n, p – координати напрямного вектора прямої, а A, B, C – координати нормального вектора площини.

З рівняння прямої AS (див. приклад 1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{5}$ маємо: $m=3; n=-3; p=5$.

З рівняння площини ABC (див. приклад 2) $12x-6y+3z-27=0$ маємо: $A=12; B=-6; C=3$.

Тоді кут між прямою AS і площиною ABC дорівнюватиме:

$$\sin\varphi=\frac{12\cdot 3+6\cdot 3+3\cdot 5}{\sqrt{12^2+(-6)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2+5^2}}\approx 0,765,$$

звідки $\phi=\arcsin 0,765\approx 50^{\circ}$.

Приклад 4. Знайти рівняння та довжину висоти SD, проведеної з вершини S до площини ABC (див. приклад 1 та 2).

Розв'язання. Рівняння висоти будемо шукати в канонічній формі

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

де x_0, y_0, z_0 – координати вершини $S(4;-5;6)$, а m, n, p – координати напрямного вектора прямої.

З рівняння площини ABC (див. приклад 2) $12x-6y+3z-27=0$ нормальний вектор $\vec{n}=(12;-6;3)$.

За умовою перпендикулярності прямої і площини $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

напрямний вектор прямої і нормальний вектор площини паралельні, а тому за напрямний вектор прямої можна взяти вектор $\vec{n}=(12;-6;3)$.

Отже, шукане рівняння висоти SD:

$$\frac{x-4}{12}=\frac{y-(-5)}{-6}=\frac{z-6}{3}, \text{ або } \frac{x-4}{4}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-6}{1}.$$

Довжину висоти SD обчислимо як відстань від точки $S(4;-5;6)$ до площини ABC $12x-6y+3z-27=0$ за формулою

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Отже, $d=\dfrac{\left|12\cdot 4+(-6)\cdot(-5)+3\cdot 6\right|}{\sqrt{12^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{96}{\sqrt{189}}=6{,}98.$

Завдання для самостійної роботи

6.1. Знайти гострий кут між прямою $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ та площиною $2x+y-z+4=0$.

6.2. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;\,2;\,-1)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{4}$.

6.3. Через точку $A(2;1;\,6)$ провести пряму, що перпендикулярна до площини $x-4y+5z-1=0$.

6.4. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{5}$ з площиною $x+y-2z-4=0$.

6.5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(1;1;-2)$ та пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{5}$.

Питання для самоперевірки

1. Що називають рівнянням прямої у загальному вигляді?
2. Як визначити кут між прямою і площиною?
3. У чому полягає умова перпендикулярності прямої і площини?
4. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими, якщо прямі задані канонічними рівняннями або рівняннями у загальному вигляді?

5. Який вигляд має загальне рівняння площини, що проходить через початок координат?

6. За яких умов дві площини, які задані загальними рівняннями: 1) перетинаються; 2) паралельні; 3) збігаються?

7. За якою формулою обчислюється кут між двома площинами? Сформулюйте умову ортогональності площин.

8. Як здійснюється перехід від загального рівняння площини до рівняння: 1) у відрізках на осях; 2) у нормальному вигляді?

9. За якими формулами обчислюється відстань від точки до площини?

Тема 7. Лінії другого порядку

Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1

Скласти рівняння кола с центром у точці $C(-1;4)$, яке проходить через точку $A(3;5)$.

Розв'язання. За формулою $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ маємо:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=R^2.$$

Щоб знайти радіус кола R, треба підставити координати точки $A(3;5)$ в написане рівняння. Отже, маємо:

$$(3+1)^2+(5-4)^2=R^2, \text{ звідки } R^2=17,$$

і тоді шукане рівняння кола: $(x+1)^2+(y-4)^2=17$.

Приклад 2

Скласти рівняння кола, яке дотикається осі абсцис і проходить через точки $A(7;8)$ і $B(6;9)$.

Розв'язання. Нехай точка $C(a;b)$ – радіус шуканого кола (рис. 3).

Звичайно, радіус кола $R=b$. Оскільки $AC=R$ і $BC=R$, запишемо і розв'яжемо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \sqrt{(a-7)^2+(b-8)^2}=b, \\ \sqrt{(a-6)^2+(b-9)^2}=b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-14a-16b+113=0, \\ a^2-12a-18b+117=0. \end{cases}$$

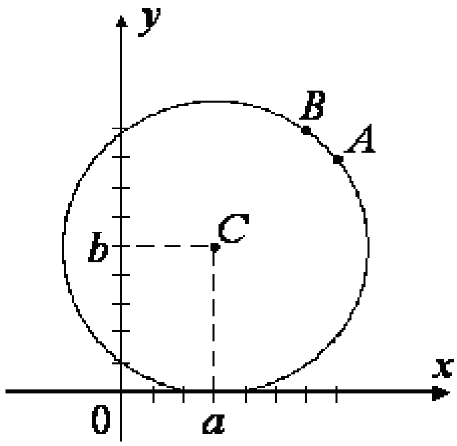

Рис. 3. **Коло**

Звідси одержуємо розв'язки:

$$\begin{cases} a=3, \\ b=5, \end{cases} \text{або} \begin{cases} a=27, \\ b=29. \end{cases}$$

Отже, умову задачі задовольняють два кола, рівняння яких мають вигляд

$$(x-3)^2+(y-5)^2=25,\ (x-27)^2+(y-29)^2=841.$$

Приклад 3

Знайти відстань між центрами кіл $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ і $x^2+y^2+3x+4y-12=0$.

Розв'язання. Перетворимо кожне рівняння до канонічного вигляду:

$$x^2+y^2-10x+16y+80=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+8)^2-25-64+80=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y+8)^2=9.$$

Центр першого кола у точці $C_1(5;-8)$.

Аналогічно маємо:

$$x^2+y^2+6x+4y-12=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

Центр другого кола у точці $C_2(-3;-2)$.

Відстань C_1C_2 знаходимо за формулою:

$$C_1C_2 = \sqrt{(5+3)^2 + (-8+2)^2} = 10.$$

Приклад 4

Скласти канонічне рівняння еліпса, у якого довжина малої осі дорівнює 24, а один з фокусів має координати $(-5;0)$.

Розв'язання. За умовою $2b = 24$, тобто $b = 12$, а $c = 5$. Тоді $a^2 = b^2 + c^2 = 169$.

Рівняння еліпса має вигляд: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$.

Приклад 5

Скласти канонічне рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{2};2)$ і $B(2;\sqrt{3})$.

Розв'язання. В рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ підставимо координати заданих точок і одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1, \\ \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 1, \end{cases}$$

з якої маємо $a^2 = 10$, $y^2 = 5$.

Рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Приклад 6

Показати, що рівняння $9x^2 + 18x + 16y^2 - 64y - 71 = 0$ є рівнянням еліпса. Знайти центр і осі еліпса, побудувати його.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння до канонічного вигляду. Для цього згрупуємо доданки, які містять змінні x і y, і виділимо в одержаних дужках повні квадрати.

Отже, маємо

$$(9x^2+18x)+(16y^2-64y)-71=0,$$

$$9(x^2+2x+1-1)+16(y^2-4y+4-4)-71=0\,,$$

$$9\left(x+1\right)^2+16\left(y-2\right)^2=144,$$

$$\frac{\left(x+1\right)^2}{16}+\frac{\left(y-2\right)^2}{9}=1.$$

Це рівняння визначає еліпс с центром у точці $C\left(-1;2\right)$, півосі якого дорівнюють $a=4$, $b=3$ (рис. 4).

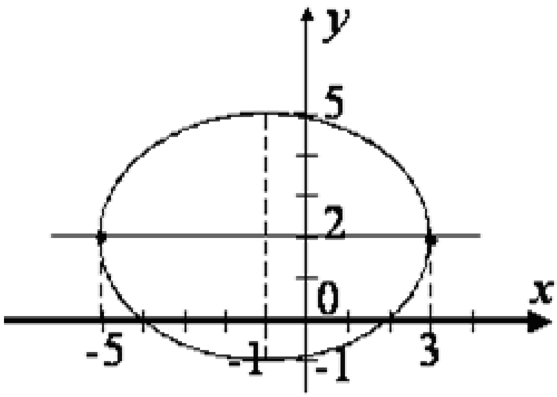

Рис. 4. **Еліпс**

Приклад 7

Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точки $M\left(3;-2\right)$ і $N(-6;2\sqrt{10})$.. Знайти ексцентриситет і фокуси гіперболи.

Розв'язання. В рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ підставимо координати заданих точок і одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1, \\ \frac{36}{a^2}-\frac{40}{b^2}=1, \end{cases}$$

з якої знаходимо $a^2=6$, $b^2=8$.

Тоді рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1.$

Далі знаходимо $c^2 = a^2 + b^2 = 14$. Отже, координати фокусів $F_1(-\sqrt{14};0)$ і $F_2(\sqrt{14};0)$, , а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Приклад 8

Написати рівняння гіперболи, один із фокусів якої знаходиться у точці $\left(-10;0\right)$, а прямі $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ є її асимптотами.

Розв'язання. За умовою з рівняння асимптот прямує $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4}$, а з координат фокуса – що $c = 10$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{9}{16}, \\ c^2 = 100; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{9}{16}, \\ a^2 + b^2 = 100; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 64, \\ b^2 = 36. \end{cases}$$

Шукане рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Приклад 9

Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, якщо вона проходить через точку $M\left(-5;3\right)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Розв'язання. Координати точки M підставляємо у рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Одержуємо рівняння: $\dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1$.

За умовою $\varepsilon = \sqrt{2}$, тобто, $\dfrac{c^2}{a^2} = 2$, або $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = 2$, звідки $b^2 = a^2$.

Отже, $\dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{a^2} = 1$, $a^2 = 16$.

Шукане рівняння гіперболи, $x^2 - y^2 = 16$, або $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ (це рівняння рівнобічної гіперболи).

Приклад 10

Написати рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться в фокусах, а фокуси – в вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Розв'язання. За умовою задачі $a_{гіп.}=c_{еліп.}$, $c_{гіп.}=a_{еліп.}$.

З рівняння еліпса маємо $a_{еліп.}=5$, $b_{еліп.}=3$.

Тоді, $c_{еліп.}=\sqrt{a_{еліп.}^2-b_{еліп.}^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Отже, для гіперболи маємо $a=4$, $c=5$, $b^2=25-16=9$.

А тоді її рівняння: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Приклад 11

Показати, що рівняння $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ є рівнянням гіперболи.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння до найпростішого вигляду наступним чином:

$$(16x^2-64x)-(9y^2+54y)-161=0\ ,,$$

$$16(x^2-4x)-9(y^2+6y)-161=0\ ,,$$

$$16(x^2-4x+4-4)-9(y^2+6y+9-9)-161=0\ ,,$$

$$16\left(x-2\right)^2-9\left(y+3\right)^2=144,$$

$$\frac{\left(x-2\right)^2}{9}-\frac{\left(y+3\right)^2}{16}=1.$$

Приклад 12

Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус знаходиться у точці: а) $F\left(3;0\right)$; б) $F\left(0;-5\right)$.

Розв'язання.

а) Маємо $y^2=2px$. За умовою $F\left(3;0\right)$, тобто $\frac{p}{2}=3$, а $p=6$. Тоді $y^2=16x$.

б) Маємо $x^2 = -2py$. Оскільки $F(0;-5)$, то $\frac{p}{2} = 5$, а $p = 10$. Тоді $x^2 = -10y$.

Приклад 13

Скласти канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, якщо відомо, що вона проходить через точку $M(-4;2)$.

Розв'язання. Звичайно, за умовою задачі $y^2 = -2px$. Параметр $p > 0$ знайдемо, підставляючи координати точки M у рівняння $y^2 = -2px$. Одержуємо $2^2 = -2p \cdot (-4)$, звідки $2p = 1$. Тоді $y^2 = -x$ – шукане рівняння параболи.

Приклад 14

Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її фокус знаходиться у точці перетину прямої $4x - 3y - 4 = 0$ з віссю Ox.

Розв'язання. Знайдемо спочатку фокус параболи.

З рівняння $4x - 3y - 4 = 0$ при $y = 0$ знаходимо $x = 1$. Отже, фокус $F(1;0)$, де $\frac{p}{2} = 1$. Тоді рівняння параболи $y^2 = 2px$, або $y^2 = 16x$.

Приклад 15

Побудувати параболи:

а) $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$; б) $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$.

Розв'язання.

а) перетворимо рівняння наступним чином

$$\left(y^2 + 2y + 1\right) + 4x - 12 = 0,$$

$$4(x-3) = -(y+1)^2$$

Отримано рівняння параболи з вершиною у точці $C(3;-1)$. Її вісь симетрії паралельна осі абсцис.

б) аналогічно, маємо

$$\left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 2y + 7 = 0,$$

$$2(y-1) = -(x-3)^2.$$

Це парабола з вершиною у точці $C(3;1)$, з віссю, яка перпендикулярна осі абсцис.

Завдання для самостійної роботи

7.1. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(-1;2)$, яке проходить через точку $A(2;6)$.

7.2. Скласти рівняння кола з центром в початку координат, якщо воно проходить через точку $(-3;4)$.

7.3. Коло проходить через точки $A(3;-1)$ і $B(-4;-8)$ і має радіус $R=13$. Знайти його рівняння.

7.4. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(3;7)$ і $B(5;-1)$ і має центр на осі ординат.

7.5. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$ і $C(1;-1)$.

7.6. Перетворити задані загальні рівняння кіл до канонічного вигляду і побудувати їх.

а) $x^2+y^2+6x-10y+13=0$;

б) $x^2+y^2+2x-3=0$;

в) $x^2+y^2-8x+6y=0$;

г) $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.

7.7. Знайти відстань між центрами кіл:

а) $x^2+y^2+4x-12y+36=0$ і $x^2+y^2-8x+10y+5=0$;

б) $x^2+y^2+6x-14y-6=0$ і $x^2+y^2-24x+2y-51=0$.

7.8. Знайти координати вершин, осі, фокуси і ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням $25x^2+9y^2=900$.

7.9. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{6}}{4})$ і $N(-2;\frac{\sqrt{15}}{5})$.

7.10. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо відомо, що він проходить через точку $M(-2;\frac{3\sqrt{3}}{2})$ і його велика вісь $2a=8$.

7.11. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в точках $(-\sqrt{3};0)$ і $(\sqrt{3};0)$, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{3}$..

7.12. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо велика вісь його дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon=0,6$.

7.13. Еліпс проходить через точки $M(-2;\frac{3\sqrt{3}}{3})$ і $N\left(-2;0\right)$. Його фокуси лежать на осі Ox. Скласти канонічне рівняння еліпса і знайти його фокуси.

7.14. Відстань між фокусами еліпса, які лежать на осі Ox, дорівнює 30, а велика вісь дорівнює 34. Написати канонічне рівняння еліпса і знайти його ексцентриситет.

7.15. Показати, що задані рівняння визначають еліпси та побудувати їх.

а) $x^2+4y^2-6x+8y=3;$

б) $x^2+2y^2-4x+4y+2=0;$

в) $9x^2+10y^2+40y-50=0.$

7.16. Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини знаходяться в точках $\left(-3;0\right)$ і $\left(3;0\right)$, а фокуси в точках $(-3\sqrt{5};0)$ і $(3\sqrt{5};0)$.

7.17. Знайти вершини, фокуси, ексцентриситет і асимптоти гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$

7.18. Скласти рівняння гіперболи і написати рівняння її асимптот, якщо відомі її фокуси $\left(-6;0\right)$ і $\left(6;0\right)$, а також ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{3}.$

7.19. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо вона проходить через точки $(-6;-\sqrt{7})$ і $(6\sqrt{2};4)$.

7.20. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ і має ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}.$

7.21. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M(10;-3\sqrt{3})$ і має асимптоти $y=\pm\frac{3}{5}x.$

7.22. Показати, що задані рівняння є рівняннями гіпербол. Знайти для цих гіпербол центр, вершини, осі та побудувати їх:

а) $x^2-y^2+4x-10y-25=0;$ б) $x^2-3y^2+6y-15=0;$

в) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0.$

7.23. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричною відносно осі Ox, яка проходить через точку $M(\frac{1}{3};4)$. Знайти фокус F параболи і визначити довжину відрізка MF.

7.24. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F\left(2;0\right)$ і від прямої $y=2$.

7.25. Знайти точки перетину параболи $y^2=9x$ з прямими:

а) $3x+y-6=0$; б) $2x-y+5=0$; в) $y-6=0$.

7.26. Написати рівняння параболи, вона відомо що вона проходить через точки перетину прямої $x+y=0$ і кола $x^2+y^2+4y=0$.

7.27. Побудувати параболи:

а) $y^2-8y=4x;$

б) $x^2-6x+8y-47=0;$

в) $y^2+8y-x+16=0;$

г) $x^2+6x+5=2y.$

Питання для самоперевірки

1. Що називають кривою 2-го порядку і який вигляд має її загальне рівняння?

2. Які існують різновиди кривих 2-го порядку і які умови визначають тип кривої?

3. Яке рівняння називають загальним рівнянням кола і як здійснюється перехід від нього до рівняння канонічного виду?

4. Канонічне рівняння еліпса та його дослідження. Ексцентриситет еліпса.

5. Канонічне рівняння гіперболи та його дослідження.

6. Асимптоти та ексцентриситет гіперболи.

7. Канонічне рівняння параболи та його дослідження.

8. Які криві 2-го порядку називаються центральними, нецентральними?

12. Наведіть порядок зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного виду.

Тема 8. Функція

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1

Знайти: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^4-x}$.

Розв'язання. Оскільки при $\sqrt{3}$ чисельник і знаменник прямують до нуля, то маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розкладаємо на множники чисельник і знаменник дробу і скорочуємо його. Отже, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^4-x}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{3+1}{1+1+1}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 2

Знайти: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Після скорочення дробу на $(x-4)$ застосуємо теорему про границю частки.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x-\sqrt{3x+4}\right)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}{\left(16-x^2\right)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{\left(16-x^2\right)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+1)}{-(x-4)(x+4)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+1}{-(x+4)\left(x+\sqrt{3x+4}\right)}=-\frac{5}{64}.$$

Приклад 3

Знайти: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Помножимо чисельник і знаменник на вирази, які спряжені до них.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4x+1-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2-4)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{4x+1}+3}=\frac{4\cdot 4}{3+3}=\frac{8}{3}.$$

Приклад 4

Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x^2}{2x^4+3x-5}$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. В подібних прикладах треба поділити чисельник і знаменник дробу на x^n, де n – найвищий з ступенів чисельника і знаменника. В даному прикладі ділимо на x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x^2}{2x^4+3x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^4}}=\frac{0}{2}=0,$$

оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}=0$.

Приклад 5

Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+5}{3\sqrt{x^2-x}+x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+5}{3\sqrt{x^2-x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)}+5}{3\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+5}{3x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+\frac{5}{x}}{3\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{1+0}{3+1}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 6

Знайти: $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{\sin3x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{tg5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\frac{5}{3},$$

бо, при $x\to 0$ $\quad\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}\to 1,\ \ \frac{\sin 3x}{3x}\to 1.$

Приклад 7

Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{tg^2 6x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{tg^2 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}{\left(\frac{tg6x}{6x}\right)^2\cdot 36x^2}=\frac{2\cdot 9}{36}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 8

Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{2x}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_{e}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^2.$$

Приклад 9

Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання.

Невизначеність даної границі є $\left[1^\infty\right]$, для її обчислення необхідно звести наданий вираз до другої чудової границі. Отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5-12}{6x+5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{12}{6x+5}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{12}{6x+5}\right)^{-\frac{6x+5}{12}\cdot\frac{-12(2x-1)}{6x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12(2x-1)}{6x+5}}=e^{-4}.$$

Приклад 10

Дослідити поведінку таких графіків функції:

1) $y=\dfrac{1}{x-3}$; 2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

Розв'язання:

1) $y=\dfrac{1}{x-3}$

Для визначення поведінки функції поблизу точки розриву $(x=3)$ знайдемо правосторонню та лівосторонню границі:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3}=\left|\begin{matrix}x=3-\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{3-\alpha-3}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=\left|\begin{matrix}x=3+\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{3+\alpha-3}=+\infty.$$

Правостороння та лівостороння границі не існують, тобто не мають числового значення, таким чином $x=3$ – точка розриву другого роду (см. рис. 5).

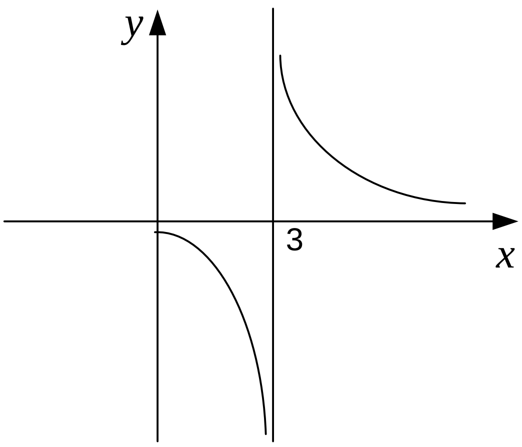

Рис. 5. **Поведінка графіка функції** $y=\dfrac{1}{x-3}$ **поблизу точки** $x=3$

2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$

Визначимось із поведінкою функції поблизу ймовірної точки розриву $x=1$.

Визначимось із границями поблизу цієї точки:

$$\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\left|\begin{matrix}x=1-\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1-\alpha-1}=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\left|\begin{matrix}x=1+\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1-\alpha-1}=\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Вищеозначені границі існують, тому лівостороння та правостороння границі існують (мають числове значення), та $x=1$ є точкою розриву II роду (рис. 6).

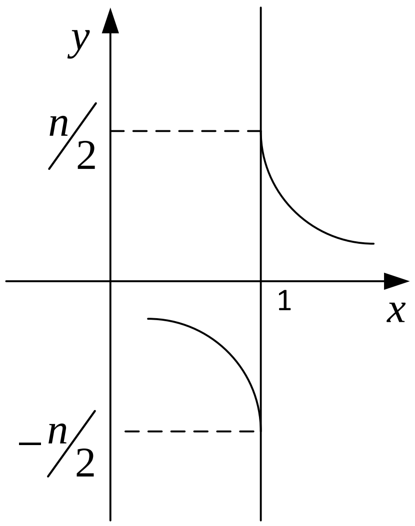

Рис. 6 **Поведінка графіка функції** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$ **поблизу точки** $x=1$

3) $y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

У даному випадку функція є неозначеною у точках $x_1=1,\ x_2=-2$. Визначимо границі поблизу цих точок :

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}.$$

Границі існують, та рівні між собою, таким чином т $x=1$ – точка усувного розриву (рис. 7).

Розглянемо поведінку функції в околі точки $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2-0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\begin{vmatrix}x=-2-\alpha\\ \alpha\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{-2-\alpha+2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2+0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\begin{vmatrix}x=-2+\alpha\\ \alpha\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{-2+\alpha+2}=+\infty.$$

Точка $x=2$ – точка розриву II – го роду (рис. 7).

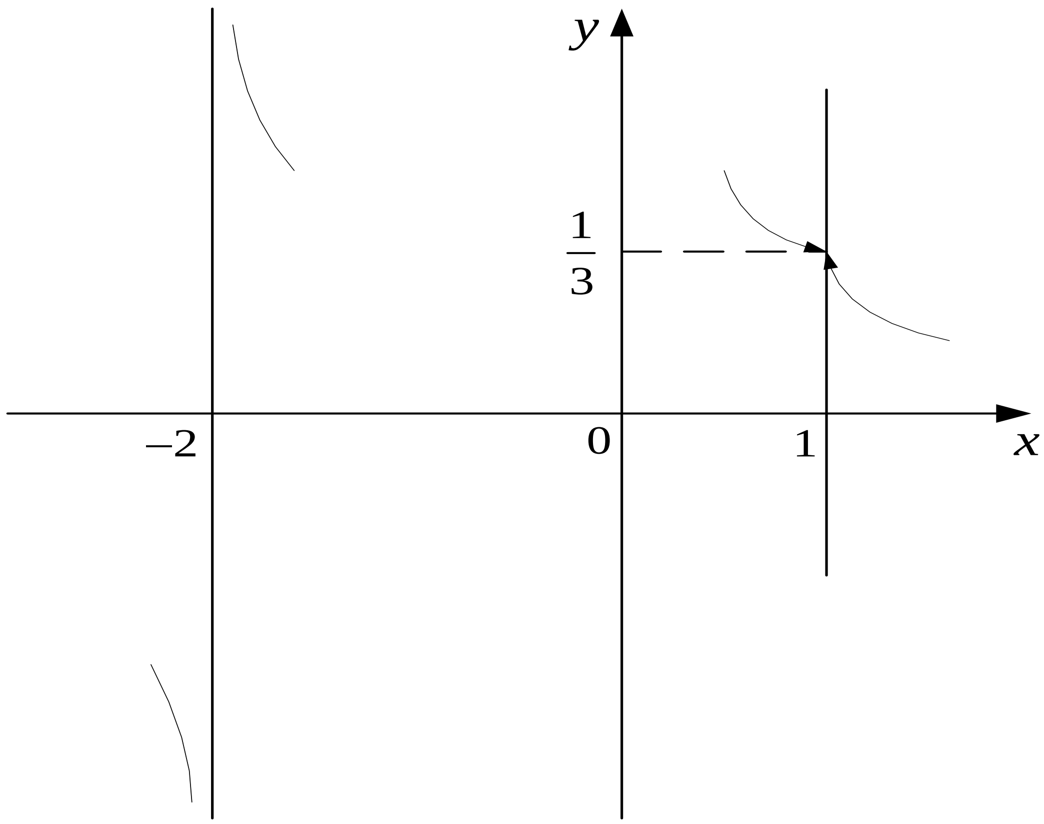

Рис. 7. **Поведінка графіка функції** $y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ **поблизу точок**

$x=-2$ **та** $x=1$

Завдання для самостійної роботи

Знайти границі наступних функцій:

8.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-14}{12}$; 8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(17x^3+2x-1\right)$; 8.3. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18}$;

8.4. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-14x+49}$; 8.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-14x+17}{12x^3+7x-3}$; 8.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x-1}$;

8.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$; 8.8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+15}$; 8.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+4x+1}{2x^3-4x^2+5}$;

8.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$; 8.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+7x+6}{2x^3+10x^2-3}$; 8.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-2}{5x^2+3x-1}$;

8.13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+10x-24}{x^2+5x-14}$; 8.14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-4x-16}{x^2-5x+4}$; 8.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$;

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$; 8.17. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{x+8}-2}$; 8.18. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2+9x+4}$;

8.19. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; 8.20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; 8.21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}}{x-1}$;

8.22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$; 8.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x+2}-2}$; 8.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

8.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\operatorname{tg}x}$; 8.26. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; 8.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{3x}}{\operatorname{tg} 2x}$;

8.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{x+1}$; 8.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin 5(x-1)}{x-1}$; 8.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+3}\right)^{2x+1}$;

Дослідити функції на неперервність:

8.31. $y=\dfrac{x^2+x}{x+1}$; 8.32. $y=\dfrac{x}{x^3+1}$; 8.33. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$;

8.34. $y=\frac{x}{x^3+1}$; 8.35. $y=\frac{(x-1)}{x^2-2x-3}$; 8.36. $y=\frac{3}{x^3-8}$;

8.37. $y=\frac{x}{4x^2-1}$; 8.38. $y=\frac{2x}{x^3+8}$; 8.39. $y=\operatorname{arctg}\frac{2}{x-1}$;

8.40. $y=\frac{x-1}{x^2+x-2}$; 8.41. $y=\frac{(x+2)}{x^2+x-2}$; 8.42. $y=\frac{1}{\ln(x-2)}$.

Питання для самоперевірки

1. Які вам відомі основні типи невизначеностей та загальні засоби їх розкриття?

2. Що вам відомо про першу та другу особливі границі? Таблиця еквівалентних нескінченно малих та умови її використання.

3. Дайте визначення неперервності функції.

4. Які існують типи розривів?

4. Наведіть загальну схему дослідження функції на неперервність.

Тема 9. Похідна функції однієї змінної

Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1

Знайти похідні y' для функцій:

1) $y=\sin\left(5x-2\right)\cdot\ln\left(4x+3\right)$; 2) $y=\frac{\arcsin x}{x^2}$;

3) $y=\left(\cos 3x+arc\sin^2\sqrt{x}\right)^3$;

4) $y=\left(4+x^3\right)^{tg4x}$; 5) $x^2y^2=tgy$; 6) $\begin{cases} x=\frac{1+t}{t^3}, \\ y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}. \end{cases}$

Розв’язання

Для знаходження похідних застосовуємо основні правила обчислення похідних та таблицю похідних елементарних функцій. Тоді отримаємо:

1) $y=\sin\left(5x-2\right)\cdot\ln\left(4x+3\right)$.

Використовуємо формулу похідної добутку:

$$y' = \left(\sin(5x-2)\right)' \cdot \ln(4x+3) + \sin(5x-2)\cdot\left(\ln(4x+3)\right)' =$$

$$= 5\cos(5x-2)\cdot\ln(4x+3) + \sin(5x-2)\cdot\frac{4}{4x+3}.$$

2) $y = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$

За формулою похідної частки та таблицю похідних, маємо:

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x^2}\right)' = \frac{(\arcsin x)' x^2 - \left(x^2\right)' \arcsin x}{x^4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x^2 - 2x\arcsin x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x\cdot\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^4\sqrt{1-x^2}} = \frac{x - 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^3\sqrt{1-x^2}}.$$

3) $y = \left(\cos 3x + arc\sin^2\sqrt{x}\right)^3.$

За формулою похідної складеної функції :

$$y' = 3\left(\cos 3x + arc\sin^2\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(\cos 3x + arc\sin^2\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 3\left(\cos 3x + arc\sin^2\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(-\sin 3x \cdot 3 + 2arc\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

4) $y = \left(4+x^3\right)^{tg 4x}.$

Означена функція є степенево-показниковою, тому, при обчислені її похідної, перш за все є необхідним прологарифмувати обидві частини тотожності, а потім знаходити похідну. Внаслідок логарифмування отримаємо: $\ln y = tg 4x\cdot\ln\left(4+x^3\right)$. Диференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{4}{\cos^2 4x}\cdot\ln\left(4+x^3\right) + tg 4x\cdot\frac{1}{4+x^3}\cdot 3x^2.$$

Звідси

$$y' = y \cdot \left(\frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln\left(4 + x^3\right) + tg4x \cdot \frac{3x^2}{4 + x^3} \right).$$

Отже, $y' = \left(4 + x^3\right)^{tg4x} \left(\frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln\left(4 + x^3\right) + tg4x \cdot \frac{3x^2}{4 + x^3} \right).$

5) $x^2 y^2 = tgy$.

Задана функція є функцією заданою неявно у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язаного відносно y. Тоді, за правилами диферен-ціювання функції заданої неявно отримаємо:

$$2xy^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$y'\left(\frac{1}{\cos^2 y} - 2x^2 y \right) = 2xy^2$, або $y'\left(\frac{1 - 2x^2 y \cos^2 y}{\cos^2 y} \right) = 2xy^2.$

Звідки

$$y' = \frac{2xy^2 \cos^2 y}{1 - 2x^2 y \cos^2 y}.$$

6) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$

Для функції, що задана параметрично, похідну знаходимо за формулою:

$$y_x{}' = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Тоді:

$$y_t' = \frac{3}{2}\left(-2 \cdot t^{-3}\right) - \frac{1}{2t^2} = -\frac{3}{t^3} - \frac{1}{2t^2} = \frac{-6 - t}{2t^3};$$

$$x_t' = \frac{t^3 - (1+t) \cdot 3t^2}{t^6} = \frac{-2t^3 - 3t^2}{t^6} = \frac{-2t - 3}{t^4}.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(6+t)\cdot t^4}{2t^3(2t+3)} = \frac{(6+t)\cdot t}{2(2t+3)}.$$

Приклад 2

Скласти рівняння нормалі та дотичної до графіку функції у заданій точці:

$$y = 3x^2 + \frac{1+x}{x-2};\ x_0 = 1.$$

*Розв'язання. Р*івняння дотичної до графіку функції у заданій точці має вигляд: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, а рівняння нормалі:

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Обчислимо: $y_0 = 3\cdot 1 + \dfrac{1+1}{1-2} = 3 - 2 = 1;$

$$y' = 6x + \frac{1(x-2) - 1(1+x)}{(x-2)^2} = 6x + \frac{-3}{(x-2)^2};$$

$$y'(1) = 6\cdot 1 + \frac{-3}{(1-2)^2} = 6 - 3 = 3.$$

Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y - 1 = 3(x-1)$.

Якщо розкрити дужки, то отримаємо рівняння дотичної у вигляді із кутовим коефіцієнтом $y = 3x - 2$. Слід звернути увагу, що розкривати дужки не є обов'язковим, так, наприклад, рівняння нормалі до графіку функції може бути поданим у вигляді:

$$y - 1 = \frac{-1}{3}(x-1).$$

Приклад 3

Обчислити границі за правилом Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1 - \ln x}{e^x - e}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\ln x}$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1-\ln x}{e^x-e}$.

При $x\to 1$ маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Це випадок, коли правило Лопіталя використовується безпосередньо. Розглянемо границю відношення похідних функцій:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1-\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2}{e}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Маємо невизначеність вигляду 1^{∞}. Позначимо задану функцію через y і прологарифмуємо: $y=(1+x)^{\ln x}$, $\ln y=\ln x\cdot\ln(1+x)$.

Знаходимо границю за правилом Лопіталя, попередньо враховуючи, що за для цього є необхідним мати невизначеності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Отримаємо у наслідок арифметичних перетворень:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{1+x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}+1}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to 0}x=0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$.

Далі, $\ln\lim\limits_{x\to 0}y=0$, та звідки $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

Приклад 4

За допомогою похідної дослідити функцію $y=\dfrac{2x^2}{x-1}$ та побудувати її графік.

Розв’язання.

Обчислимо екстремуми та проміжки монотонності:

$$y' = \frac{4x(x-1)-2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

За необхідною умовою існування екстремуму:

$$y' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ і } x = 2.$$

Зобразимо поведінку функції на рис. 8.

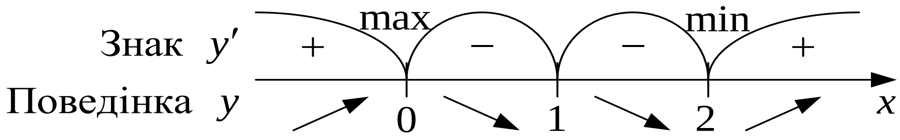

Рис. 8. **Проміжки монотонності і екстремуми функції** $y = \frac{2x^2}{x-1}$.

Таким чином $x = 0$ – точка максимуму, $x = 2$ – точка мінімуму . Знайдемо значення функції в наданих точках: $y_{\max}(0) = 0, \quad y_{\min}(2) = 8.$

Для визначення інтервалів опуклості, угнутості та точок перегину знайдемо другу похідну.

$$y'' = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)\left(2x^2-4x\right)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Оскільки $y \neq 0$, то точок перегину немає. Однак відмітимо, що зміна знаку другої похідної відбувається при переході через точку $x = 1$.

Так, при $x > 1$ $y'' > 0$ – графік функції угнутий, при $x < 1$ $y'' < 0$ – графік функції опуклий.

Область визначення $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Точка $x = 1$ – точка розриву функції. Для визначення поведінки функції в околі точки розриву обчислимо $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{2x^2}{x-1} = -\infty$ та $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty$. Таким чином, $x = 1$ – вертикальна асимптота.

При $x \to \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = \pm\infty$, тобто горизонтальної асимптоти не існує.

Перевіримо наявність похилої асимптоти $y = kx + b$. Для цього обчислимо значення коефіцієнта: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x(x-1)} = 2$ та

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1} = 2.$$

Отже, $y = 2x + 2$ – похила асимптота.

За отриманими розрахунками будуємо графік функції (рис. 9).

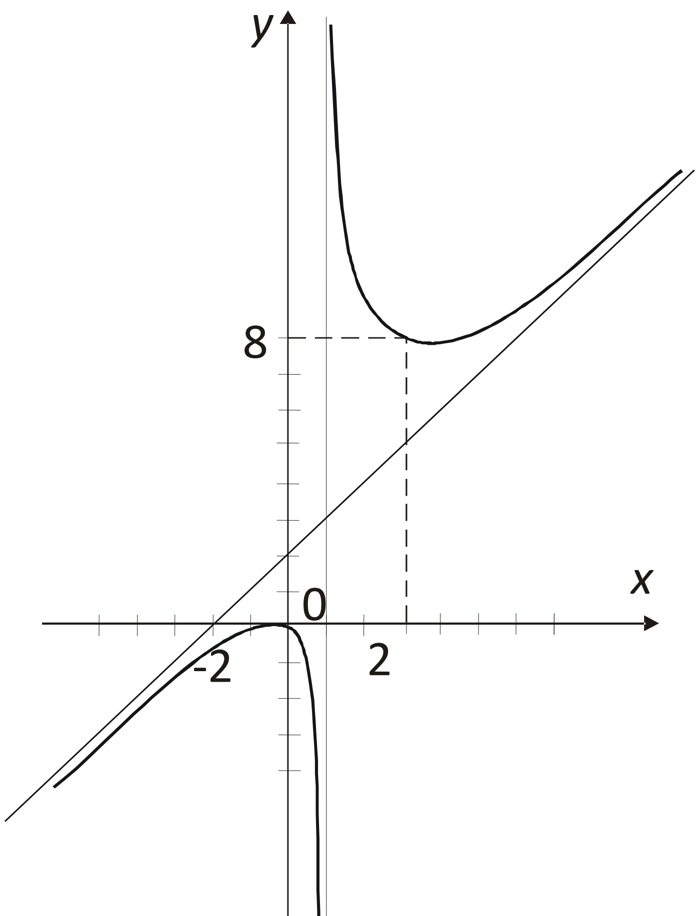

Рис. 9. **Графік функції** $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$.

Приклад 5

Знайти найбільше та найменше значення функції $y=3x^3-9x+1$ на проміжку $x\in[-2;3]$.

Розв'язання.

1. Знаходимо критичні точки першого роду. Для цього обчислимо похідну першого порядку $y'=9x^2-9=9(x-1)(x+1)$ та знайдемо значення змінної x, при яких $y'=0$.

$9(x-1)(x+1)=0,$

$x=\pm1.$

Обчислимо значення функції при $x=\pm1$ та на кінцях інтервалу:

$y(1)=0;\ \ y(-1)=7;\ \ y(3)=55;\ \ y(-2)=-5.$

Таким чином, бачимо, що на означеному проміжку функція добігає свого найбільшого значення при $x=3$: $y(3)=55$, а найменшого при $x=-2$: $y(-2)=-5$.

Завдання для самостійної роботи

а) Обчислити похідні таких функцій:

9.1. $y=(2+x)\sqrt{3-x}$; 9.2. $y=\sqrt{25x^2+1}arctg5x$; 9.3. $y=\dfrac{\arcsin 3x}{(x-4)^3}$;

9.4. $y=\dfrac{\sqrt{x+5}\cdot(x-5)^3}{(x+7)^2}$; 9.5. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{x^3}{3}\arccos x$; 9.6. $y=3^{ctgx}$;

9.7. $y=\dfrac{(x-6)^3(x+4)^5}{\sqrt{(x+1)^5}}$; 9.8. $y=\dfrac{(x+2)^4\cdot(x-7)^5}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}$; 9.9. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{(x+5)^4}$;

9.10. $y=\arcsin(\ln x)$; 9.11. $y=\sqrt{4-x^2}+\arcsin\dfrac{x}{2}$; 9.12. $y=\dfrac{2\arccos 4x}{(x+2)^3}$;

9.13. $y=\left(1-2\sqrt{x}\right)^4$ 9.14. $y=\sqrt{arctgx}$; 9.15. $y=(x^4+5)^{ctgx}$;

9.16. $y=\ln(\arcsin 3x)$; 9.17. $y=\dfrac{4arctg3x}{(x-2)^3}$; 9.18. $y=\dfrac{\ln(x+9)}{(x-3)^4}$;

9.19. $y=(x^2+3)^{\sin x}$; 9.20. $y=(x^2+1)^{\cos x}$; 9.21. $y^2=x\sin y$;

9.22. $y=5-xe^{2y}$; 9.23. $xy^2-y\ln x=5$; 9.24. $2^x+2^y=2^{x+y}$;

9.25. $\begin{cases} x=2+\sqrt{\sin t}, \\ y=t^2\cos t; \end{cases}$ 9.26. $\begin{cases} x=te^t, \\ y=\arcsin t+\sin^2 t; \end{cases}$ 9.27. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}; \end{cases}$

9.28. $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=3t^2\cos^2\sqrt{t}; \end{cases}$ 9.29. $\begin{cases} x=t\cdot e^t, \\ y=\arcsin t+\sin t; \end{cases}$ 9.30. $\begin{cases} x=t^3+5\sin t, \\ y=t\cos 3t. \end{cases}$

Записати рівняння дотичної та нормалі графіку таких функцій із абсцисою у означеній точці.

9.31. $y=x^2+3x-3;\ x_0=1$; 9.32. $y=\dfrac{1}{x-1}+x^3+3;\ x_0=2$;

9.33. $y=x^3+3x;\ x_0=-1$; 9.34. $y=\ln x^3+x;\ x_0=\dfrac{1}{e}$;

9.35. $y=\cos x+x;\ x_0=\pi$; 9.36. $y=1/tgx+\sin 3x;\ x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

Обчислити границі за правилом Лопіталя:

9.37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\ln\left(e^{x^2}+1\right)}$; 9.38. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^3 x$; 9.39. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$;

9.40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-5x-1}{\sin^2 3x}$; 9.41. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$; 9.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 5x-\sin 3x}$;

9.43. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; 9.44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$; 9.45. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x}\right)^{2tgx}$;

9.46. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 9.47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; 9.48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 3x}$.

Дослідити функцію та побудувати її графік:

9.49. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; 9.50. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; 9.51. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

9.52. $y=x+\dfrac{1}{x}$; 9.53. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; 9.54. $y=\dfrac{x}{x^3+2}$.

Визначити найбільше та найменше значення функції на проміжку:

9.55. $y=x^4-2x^2+5;\ x\in[-2,2]$. 9.56. $y=xe^x;\ x\in[-1,0]$.

9.57. $y=x-2\ln x;\ x\in[1,e]$. 9.58. $y=xe^x;\ x\in[-1,0]$.

Питання для самоперевірки

1. Наведіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
2. Основні правила диференціювання.
3. У чому полягає геометричне розуміння похідної?
4. Опишіть порядок диференціювання складених функцій.
5. Як диференціювати неявні функції?
6. Логарифмічне диференціювання. Випадки застосування.
7. Диференціювання функцій, що задані у параметричній формі.
8. Коли доцільно використовувати правило Лопіталя.
9. Необхідна і достатня умови монотонності функцій, сталості функції на деякому проміжку.
10. Умови існування точок екстремуму функції.
11. Коли графік функції має асимптоту і яку?
12. Наведіть загальну схему дослідження функції засобами диференціального числення.

Тема 10. Функції багатьох змінних

Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1

Знайти область визначення функції:

$z=\arcsin(x+y-1)$.

Розв'язання.

Областю визначення функції $\arcsin x$ є проміжок $[-1;1]$.

Тому $|x+y-1| \le 0$, або : $\begin{cases} x+y \ge 0, \\ x+y \ge 2. \end{cases}$

Зазначена область обмежена проміжком площини XY між двома паралельними прямими $y=-x$ та $y=-x+2$ (рис. 10).

Слід зазначити, що множина точок, що належать прямим $y=-x$ та $y=-x+2$ належить до області визначення даної функції.

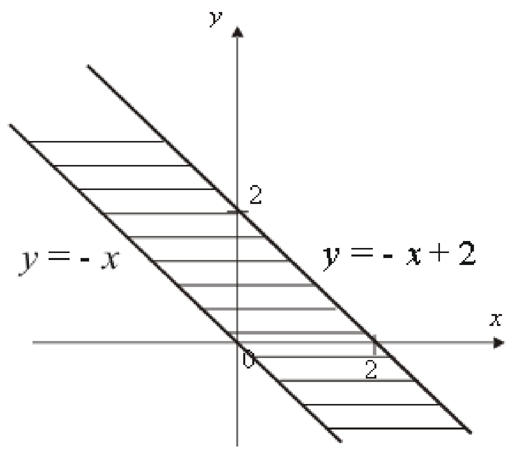

Рис. 10. **Область визначення функції**

Приклад 2

Знайти градієнт функції $z = x^2 \cdot \sin(x+y)$ у точці $M(1;-1)$ та похідну за напрямом вектора: $\overline{a} = (-5;4)$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin(x+y) + x^2\cos(x+y)\cdot(1+y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos(x+y)\cdot(1+x).$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M(1;-1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1;-1)} = 2\cdot 1\cdot \sin(0) + 1^2\cos(0)\cdot(1-1) = 0$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M(1;-1)} = 1^2\cos(0)\cdot(1+1) = 2 . \quad grad z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

Отже, за визначенням: $grad z = 0\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{j}$

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M}\cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M}\cdot\cos\beta ,$$

де $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{-5}{\sqrt{25+16}} = \frac{-5}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{4}{\sqrt{25+16}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Тоді значення похідної за напрямом набуває вигляду:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M} = 0\cdot\left(\frac{-5}{\sqrt{41}}\right) + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{8}{\sqrt{41}}$$

Приклад 3

Знайти екстремуми функції двох змінних: $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Розв'язання. Враховуючи, що необхідною умовою існування екстремуму є наявність точок, де частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 15y$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 15x$.

Для знаходження критичних точок розв’яжемо відповідну систему рівнянь: $\begin{cases} 3x^2 - 15y = 0, \\ 3y^2 - 15x = 0. \end{cases}$

Розв’язуючи цю систему отримаємо дві критичні точки $M(0;0)$ і $N(5;5)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку для перевірки достатньої умови існування екстремуму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -15 , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y .$$

Тоді для $M(0;0)$ $A=0$, $B=-15$, $C=0$, а $\Delta = AC - B^2 = -18 < 0$. Отже, в точці $M(0;0)$ екстремуму немає.

Для $N(5;5)$ $A = 6\cdot 5 = 30$, $B=-15$, $C = 6\cdot 5 = 30$,

а $\Delta = 30\cdot 30 - 15^2 > 0$.

Отже, в точці $N(5;5)$ є екстремум, а саме мінімум, бо $A = 30 > 0$. Обчислимо мінімальне значення функції: $z_{min} = 5^3 + 5^3 - 15\cdot 5\cdot 5 = -125$.

Приклад 4

Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=6$

Розв'язання. Визначимо область на площині XY, що обмежена відповідними прямими (рис. 11).

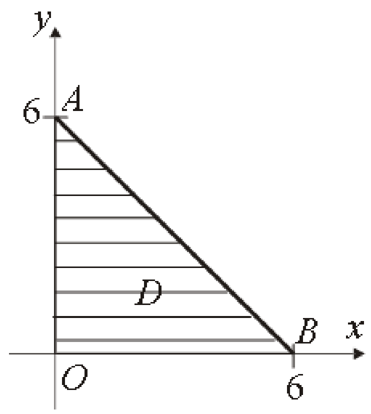

Рис. 11. **Зазначена область**

Знайдемо критичні точки для функції $z = x^2 y(4 - x - y)$в середині даного трикутника OAB (області D).

За умовою існування екстремуму функції двох змінних маємо:

$$z'_x = 8xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(8 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2 y = x^2(4 - x - 2y).$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що множина розв'язків є обмеженою межами заданої області, або: $x>0$, $y>0$, отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} 3x+2y=8, \\ x+2y=4, \end{cases}$$

Отримаємо значення критичної точки, що є в межах даної області. Ця точка $M\left(2;1\right)$, а значення функції в ній дорівнює:

$$z\left(2;1\right)=2^2\cdot 1\left(4-2-1\right)=4.$$

Дослідимо поведінку функції на межах трикутника, розглянувши три його сторони OA, OB і AB. На сторонах OA $\left(x=0\right)$ і OB $\left(y=0\right)$ значення функції z дорівнює нулю. На стороні AB (її рівняння $y=6-x$, де $0\le x\le 6$) функція z приймає вигляд:

$$z\left(x\right)=x^2\left(6-x\right)\left(4-6\right)=2x^3-12x^2.$$

Знайдемо критичні точки: $z'=6x^2-24x$, $6x^2-24x=0$, $x_1=0$, $x_2=4$.

Обчислюємо значення функції $z\left(x\right)$ в цих точках і на кінцях проміжку $\left[0;6\right]$: $z\left(0\right)=0$, $z\left(4\right)=-64$, $z\left(6\right)=0$.

Так, серед одержаних значень функції обираємо найбільше й найменше. Таким чином $\max\limits_{D} z=4$ при $x=2$, $y=1$ та $\min\limits_{D} z=-64$ при $x=4$, $y=2$;

Завдання для самостійної роботи

Визначити область визначення функції двох змінних:

10.1. $z=\arcsin\left(x^2+y^2-16\right)$;

10.2. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2-4}$;

10.3. $z=\ln\left(4-y\right)+\sqrt{25-x^2-y^2}$;

10.4. $z=\ln\left(9-3x-y^2+\sqrt{x+1}\right)$;

10.5. $z=\log_2(y^2-2x+4)+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$; 10.6. $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-y^2}+\sqrt{y-x}$;

10.7. $z=\log_{0,3}\left(3x-4y+12\right)+\sqrt{x^2-4}$; 10.8. $z=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}$;

10.9. $z=\dfrac{\sqrt{y-x}}{\lg(9-x^2-y^2)}$; 10.10. $z=\dfrac{\sqrt{y-x}}{\lg(9-x^2-y^2)}$;

10.11. $z=\ln(x^2+x-2-y)-\sqrt{1-y^2}$; 10.12. $z=\sqrt{xy}-\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Дослідити функцію двох змінних на екстремум:

10.13. $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$;

10.14. $z=\dfrac{3}{2}x^2+2xy-\dfrac{1}{2}y^2-5x-y+2$;

10.15. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$; 10.16. $z=4-\sqrt[3]{x^2+y^2}$;

10.17. $z=x^3+y^3-9xy$; 10.18. $z=x^4+2y^4+4$.

10.19. $z=2x+6y-2\ln x-18\ln y$; 10.20. $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$;

10.21. $z=x^3+8y^3+6xy-1$.

Обчислити похідну та градієнт за напрямом:

10.22. $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}+xy}$, $M\left(1;2\right)$, $\bar{a}=\left(2;5\right)$;

10.23. $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, $M\left(3;4\right)$, $\bar{a}=\left(2;-4\right)$;

10.24. $z=\sin^2\left(3x+2y\right)M\left(2;-3\right)$, $\bar{a}=\left(1;-4\right)$;

10.25. $z=e^{\sqrt{\cos 2x+3y}}$, $M\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$, $\bar{a}=\left(3;-4\right)$;

10.26. $z = e^{\sin x - 2y^3}$, $M(\pi; 0)$, $\bar{a} = (2;1)$;

10.27. $z = arctg\dfrac{y}{x}$, $M(2;1)$, $\bar{a} = (1;-2)$;

10.28. $z = \sqrt[3]{x + y^2}$, $M(4;2)$, $\bar{a} = (2;-2)$.

Знайти найбільше та найменше значення функції двох змінних для заданої області:

10.29. $z = x - 2y + 5$; $D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$;

10.30. $z = x^2 + 4y^2$; $D:\ x^2 + y^2 \leq 1$;

10.31. $z = xy(4 - x - y)$; $D:\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = 8$;

10.33. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $D:\ x = 0,\ y = 0,\ y - x = 1$;

10.34. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$; $D:\ 1 \leq x \leq 4,\ -3 \leq y \leq 2$.

Питання для самоперевірки

1. Що називається функцією декількох змінних?

2. Що розуміють під областю визначення функції двох змінних, який її геометричний зміст?

3. Як визначається екстремум функції кількох змінних? Визначить необхідну та достатню умову існування екстремуму функції двох змінних.

4. Що називається похідною за напрямом?

5. Як обчислюється похідна за напрямом?

6. Що називається градієнтом функції?

7. Які властивості має градієнт?

8. Як знайти найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?

Змістовний модуль 2. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди

Тема 11. Невизначений інтеграл

Приклади розв’язання типових задач

Обчислити інтеграли:

Приклад 1

$\int \sin(4x+5)dx$ та $\int 2^{3x+4}dx$

Розв'язання. Для обчислення наведених інтегралів зручно використати властивість: $\int f\left(ax+d\right)dx = \frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+c$

Тоді отримаємо:

$$\int \sin(4x+5)dx = -\frac{1}{4}cos(4x+5)+C;$$

$$\int 2^{3x+4}dx = \frac{2^{3x+4}}{3\ln 2}+C.$$

Приклад 2

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln\ x}};\ \int \frac{2\sin xdx}{\cos^3 x};.$$

Розв'язання. Дані інтеграли розв'язуються за допомогою методу заміни змінної.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln\ x}} = \left| \begin{matrix} t=\ln x \\ dt=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2\sqrt{1-t} =$$

$$= -2\sqrt{1-\ln x}+C;$$

$$\int \frac{2\sin xdx}{\cos^3 x} = \left| \begin{matrix} t=\cos x \\ dt=(\cos x)'dx=-\sin xdx \end{matrix} \right| = \int \frac{-2dt}{t^3} = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\cos^2 x}+C.$$

Приклад 3

$$\int (2x+5)\sin 4xdx.$$

Розв'язання. Для розв'язання інтегралу використовується метод інтегрування частинами за формулою: $\int udv = u\cdot v - \int v\cdot du.$

$$\int (2x+5)\sin 4x dx = \begin{vmatrix} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = \sin 4x dx & v = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2x+5\right)\cos 4x + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = -\frac{1}{4}\left(2x+5\right)\cos 4x + \frac{1}{8}\sin 4x + c.$$

Приклад 4

Приклад 4

$$\int \frac{6(x+1)}{x^2+x-6}dx$$

Розв'язання.

Враховуючи, що підінтегральна функція є дробово-раціональною, перевіримо, чи розкладаються корні знаменника дробу за формулою: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де $x_{1,2}$ - корені поліному другого ступеня.

Розв'язуючи відповідне квадратне рівняння отримаємо:

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3).$$

Тоді:

$$\frac{6(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

За правилами знаходження коефіцієнтів отримаємо:

$$\frac{6(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)\cdot(x+3)}.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів A і B:

$$6(x+1) = A(x+3) + B(x-2).$$

Припустимо, що $x=2$, тоді:

$$6(2+1) = A(2+3) + B(2-2),$$

$$18 = 5A, \quad A = \frac{18}{5}.$$

Припустимо, що $x=-3$, тоді:

$$6(-3+1)=A(-3+3)+B(-3-2),$$

$$12=-5B,\ \ B=-\frac{12}{5}.$$

Підінтегральний вираз має наступний вигляд:

$$\frac{6(x+1)}{(x-2)(x+3)}=\frac{18/5}{x-2}+\frac{-12/5}{x+3},$$

а значення інтегралу:

$$\int\frac{6(x+1)dx}{(x-2)(x+3)}=\int\frac{18/5}{(x-2)}dx+\int\frac{-12/5}{(x+3)}dx==\frac{18}{5}\ln\left|x-2\right|-\frac{-12}{5}\ln\left|x+3\right|+C\,.$$

Приклад 5

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.$$

Розв'язання.

У більшості випадків, якщо підінтегральний вираз є ірраціональністю, необхідно обрати заміну змінної таким чином, щоб позбавитися ірраціональності. Тобто зробити відповідну заміну:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\begin{vmatrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=2\int\frac{tdt}{t\left(t-1\right)}=2\int\frac{dt}{t-1}=2\ln\left|t-1\right|+c=$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+c.$$

Приклад 6

$$\int cos^3x\cdot\sin^2 xdx.$$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є тригонометричною та непарною відносно $\cos x$.

Тоді

$$\int cos^3x\cdot\sin^2 xdx=\int\cos^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\cos xdx==\int(1-\sin^2x)\cdot\sin^2 x\cdot\cos xdx=$$

$$=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ \cos x=dt\end{vmatrix}=\int(1-t^2)t^2dt=\int\left(t^2-t^4\right)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити значення невизначених інтегралів:

11.1. $\int\left(9x^2-10\sqrt[4]{x}+3\sqrt{x}\right)dx$; **11.2.** $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; 11.3. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

11.4 $\int tg^2 xdx$; **11.5.** $\int\left(1-3x\right)^{17}dx$; **11.6.** $\int\sqrt[4]{\left(12x-5\right)^3}dx$; **11.7.** $\int e^{3x-5}dx$;

11.8. $\int\frac{dx}{11-4x}$; **11.9.** $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$; **11.10.** $\int\frac{3\sin x}{1-2\cos x}dx$; **11.11.** $\int\frac{3x^3}{2x^4+3}dx$; **11.12.** $\int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}}dx$; **11.13.** $\int e^{4\sin x}\cos xdx$; **11.14.** $\int\frac{\ln^5\left(3x-2\right)}{3x-2}dx$; **11.15.** $\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; **11.16.** $\int x\cos\left(x^2-1\right)dx$; **11.17.** $\int\frac{dx}{\arcsin^4 x\sqrt{1-x^2}}$; **11.18.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$; **11.19.** $\int\frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$; **11.20.** $\int x\ln xdx$;

11.21. $\int\left(1-3x\right)\cos 2xdx$; **11.22.** $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$; **11.23.** $\int\left(4-x\right)e^{-3x}dx$; **11.24.** $\int x^2e^{-2x}dx$; **11.25.** $\int e^x\sin xdx$; **11.26.** $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$; **11.27.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+28}}$; **11.28.** $\int\frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx$; **11.29.** $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$; **11.30.** $\int\frac{3-5x}{4x^2+16x-9}dx$; **11.31.** $\int\frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$; **11.32.** $\int\frac{3x+8}{\left(x-2\right)\left(x+5\right)}dx$;

11.33. $\int\frac{2x^2+41x-91}{\left(x-1\right)\left(x+3\right)\left(x-4\right)}dx$; **11.34.** $\int\frac{x^2+2}{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)}dx$; **11.35.** $\int\frac{x^2-7x-6}{\left(x^2+9\right)\left(x-3\right)}dx$; **11.36.** $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x\right)}$; **11.37.** $\int\frac{7x-15}{x\left(x^2-2x+5\right)}dx$;

11.38. $\int \frac{x^3-7x^2+8}{\left(x^2+4\right)x^2}dx$; **11.39.** $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; **11.40.** $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;

11.41. $\int \sin 2x\cos 4xdx$; **11.42.** $\int \sin^3 xdx$; **11.43.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$; **11.44.** $\int \cos^4 xdx$; **11.45.** $\int tg^4 xdx$; **11.46.** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$; **11.47.** $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$; **11.48.** $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$; **11.49.** $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$; **11.50.** $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\frac{dx}{x^2}$; **11.51.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

11.52. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$; **11.53.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^5}}$; **11.54.** $\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx$.

Питання для самоперевірки

1. Що називається невизначеним інтегралом?

2. Властивості невизначеного інтеграла.

4. Що таке безпосереднє інтегрування?

5. У чому полягає метод інтегрування заміною змінної? Які типи заміни змінної у невизначених інтегралах ви знаєте?

6. Наведіть приклади інтегралів, які беруться за допомогою заміни змінної.

7. Запишіть формулу інтегрування частинами. Для яких типів інтегралів застосовується метод інтегрування частинами?

8. В чому полягає метод інтегрування дробово-раціональних виразів? Наведіть приклади.

9. Умови використання універсальної тригонометричної підстановки. Інші засоби обчислення інтегралів підінтегральна функція яких є тригонометричним виразом.

10. Основний засіб інтегрування ірраціональних функцій.

Тема 12. Визначений інтеграл

Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1

Обчислити значення визначених інтегралів:

а) $\int\limits_1^2 x^2(x+3)dx$; б) $\int\limits_1^2 x(x^2+1)dx$.

Розв'язання. а) *п*ри обчисленні інтегралу доцільно $\int\limits_1^2 x^2(x+3)dx$ розкласти на множники підінтегральний вираз, та скористатися формулою Ньютона – Лейбниця: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Отримаємо: $\int\limits_1^2 x^2(x+3)dx = \int\limits_1^2 \left(x^4+3x^2\right)dx = \frac{x^5}{5} + x^3\Big|_1^2 = \frac{2^5-2}{5} + 7 = 19\frac{2}{5}$.

б) при обчисленні цього інтегралу більш доцільним є використання заміни змінної. Необхідно пам'ятати, що у процесі розв'язання також змінюються межі інтегрування.

$$\int\limits_0^2 x(x^2+1)dx == \left|\begin{matrix} x^2+1=t;\ dt=2xdx \\ x=0,\ t=1;\ x=2,\ t=5 \end{matrix}\right| == \int\limits_1^5 \frac{t}{2}dt = \frac{t^2}{4}\Bigg|_1^5 = \frac{25-1}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Приклад 2

Обчислити значення визначеного інтегралу $\int\limits_0^\pi x\sin xdx$.

Розв'язання. Для обчислення даного інтегралу слід використовувати формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі, а саме:

$$\int\limits_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\cdot du.$$

Тоді:

$$\int_0^\pi x\sin x dx = \begin{vmatrix} x = u & du = dx \\ \sin x dx = dv & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cdot\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx =$$

$$= -\pi\cdot\cos\pi + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi .$$

Приклад 3

Обчислити значення інтегралу: $\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл є невласним, тому отримаємо:

$$\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = +\infty.$$

Границя не має числового значення, даний інтеграл розбігається.

Приклад 4

Знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^2 + 4x$; $y = x + 4$.

Розв'язання.

Площа фігури, яка є створеною у наслідок перетину двох функцій знаходиться за формулою: $s = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx$, де a, b - точки перетину графіків функцій. Знайдемо точки перетину параболи і прямої, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases}$$

Звідки, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Зробимо рисунок до задачі (рис. 12).

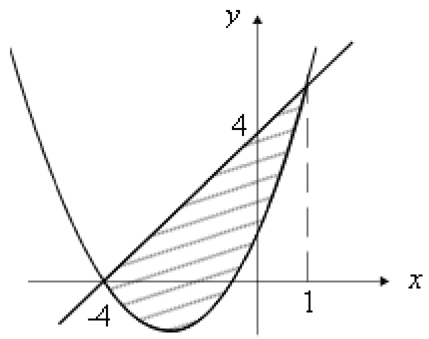

Рис. 12. **Фігура, що обмежена лініями** $y = x^2 + 4x\,;\, y = x + 4$

Шукана площа фігури є

$$S = \int_{-4}^{1} ((x+4) - (x^2 + 4x))dx = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)dx =$$

$$= \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-4}^{1} = \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3} \right) = \frac{125}{6} (\text{кв. од.}).$$

Приклад 5

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ навколо осі OX .

Розв'язання.

Об'єм тіла обертання V_x знаходимо за формулою: $V_x = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$.

Зробимо відповідний рисунок для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ навколо осі OX (рис. 13).

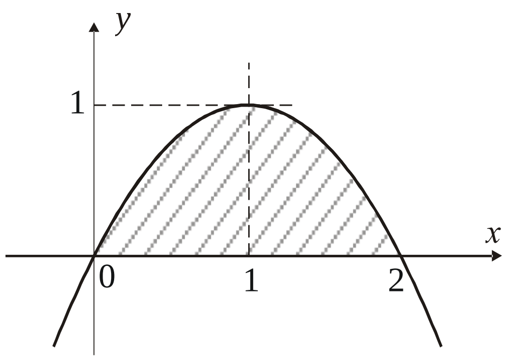

Рис. 13. **Рисунок для обчислення об'єму тіла**

$$V_x = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{16}{15}\pi \text{ (куб.од.)}.$$

Тоді: $V_x = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{15}\pi$ (од.кв.).

Завдання для самостійної роботи

Обчислити значення визначених інтегралів:

12.1. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$; 12.2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^3}$; 12.3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$;

12.4. $\int_0^4 \frac{dx}{25 - x^2}$; 12.5. $\int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}}$; 12.6. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$;

12.7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$; 12.8. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 5x dx$; 12.9. $\int_4^5 x\sqrt{x^2 - 16} dx$;

12.10. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$; 12.11. $\int_0^1 \frac{x dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$; 12.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$;

12.13. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$; 12.14. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx$; 12.15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 - 3\cos x}$;

12.16. $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$; 12.17. $\int_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$; 12.18. $\int_{1}^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx$;

12.19. $\int_{0}^{1} \arcsin x dx$; 12.20. $\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx$; 12.21. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^5}$;

12.22. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 12.23. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$; 12.24. $\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$;

12.25. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9}$; 12.26. $\int_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

Знайти площі фігур, що обмежені заданими лініями:

12.27. $y=3\cdot x^{-1}$, $x+y=4$; 12.28. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$;

12.29. $y=\sqrt{1-x}$, $y=x+1$, $y=0$; 12.30. $y=x^2$, $xy=1$, $x=3$, $y=0$;

12.31. $y=2\sqrt{x}$, $6-y=0$, $x=0$; 12.32. $y=x$; $y=-x+4$; $y=0$;

12.33. $y=\ln x$, $x=e$, $x=e^2$, $y=0$. 12.34. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$;

12.35. $y=x^2-2x+3$, $y-3x+1=0$; 12.36. $y=x^2-x$, $y=3x$;

12.37. $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$; 12.38. $y=(x-4)^2$, $y=16-x^2$, $y=0$;

12.39. $y=2x-x^2$, $y+x$.

Знайти об’єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, що обмежені заданими лініями:

12.40. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;

12.41. $y=3\sin x$, $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$;

12.42. $y = e^{1-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1;$

12.43. $y = x^2, \quad xy = 8, \quad x = 4, \quad y = 0.$

Питання для самоперевірки

1. Означення та основні властивості визначеного інтеграла.
2. Формула Ньютона-Лейбніца для визначеного інтеграла.
3. В чому полягає особливість методу заміни змінної у визначеному інтегралі?
4. Записати формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
5. Методи обчислення невласних інтегралів.

Тема 13. Диференціальні рівняння першого порядку

Приклади виконання типових задач

Приклад 1

Розв'язати диференціальне рівняння І порядку:

$$y' \sin x = y \ln y, \text{ за умовою } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

Розв'язання. Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його відносно y'. Тоді отримаємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\sin x}$. Відокремимо змінні: $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$. Після інтегрування отримаємо: $\ln|\ln y| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln c$.

Тоді: $\ln y = c \cdot tg\frac{x}{2}$ або $y = e^{c \cdot tg\frac{x}{2}}$ – загальний розв'язок.

Використовуючи умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$, знаходимо значення довільної сталої c: $e=e^{c\cdot tg\frac{\pi}{4}} \Rightarrow c\cdot tg\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow c=1$. Тоді частинний розв'язок має вигляд: $y=e^{tg\frac{x}{2}}$.

Приклад 2

Розв'язати диференціальне рівняння I порядку $xy'=5y+x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x. Отримане рівняння $y'=5\frac{y}{x}+1$ є однорідним ДР I порядку, загального вигляду: $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Тоді: $\frac{y}{x}=t$; $y'=t'x+t \Rightarrow (1+t)(t'x+t)-t=0$; $t'x(1+t)=-t^2$.

У випадку вищезазначеного рівняння отримаємо: $y'=5\frac{y}{x}+1$; $t'x+t=5t+1$; $t'x=4t+1$; $\frac{dt}{dx}x=4t+1$; $\frac{dt}{4t+1}=\frac{dx}{x}$. Отримане рівняння є ДР I порядку із відокремлюваними змінними. Інтегруємо: $\frac{1}{4}\ln|4t+1|=\ln|x|+C$; $\sqrt[4]{4t+1}=C\cdot x$ $4\frac{y}{x}+1=(C\cdot x)^4$.

Отримаємо загальний розв'язок: $4\frac{y}{x}+1=C\cdot x^4$.

Приклад 2

Розв'язати диференціальне рівняння I порядку $x^2y'+2xy-1=0$.

Розв'язання. $y' + 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$. Рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку загального вигляду:

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0.$$

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + v'u$.

$$u' \cdot v + v' \cdot u + 2\frac{uv}{x} - \frac{1}{x^2} = 0; \qquad u' \cdot v + u(v' + 2\frac{v}{x}) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Знайдемо частинний розв'язок:

$v' + 2\frac{v}{x} = 0$; $\frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x} = 0$; $\frac{dv}{dx} = -2\frac{v}{x}$; $\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}$. Інтегруємо та отримаємо: $\ln v = -2\ln x$, або $v = \frac{1}{x^2}$.

Підставимо отриманий частинний розв'язок до рівняння $u' \cdot v + u(v' + 2\frac{v}{x}) - \frac{1}{x^2} = 0$, тоді:

$u' \cdot v = 0$; $\frac{du}{dx} \cdot v = 0$; $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$; $du = dx \cdot x^2$, загальний розв'язок:

$$u = \frac{x^3}{3} + C \quad y = u \cdot v = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\frac{1}{x^2}.$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння І порядку:

13.1. $x\sqrt{9 - y^2}dx - y(4 + x^2)dy = 0$; 13.2. $(xy^2 - y^2)dx + (x^2y + x^2)dy = 0$;

13.3. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$; 13.4. $\sin^2 x \cos^2 y dx = \cos^2 x dy, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$;

13.5. $y'e^{-x} = x - 1, \quad y(1) = -e$; 13.6. $(xy - x^2)y' = y^2$;

13.7. $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$; 13.8. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$;

13.9. $(x^2 + y^2)dx = 2xydy, \quad y(4) = 0$; 13.10. $y^2 + x^2y' = xyy', \quad y(1) = 1$;

13.11. $xy' - y = x\cos^2\frac{y}{x}, \quad y(3) = 0$; 13.12. $(x^2+1)y' - xy = x^3 + x$;

13.13. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; 13.14. $xy' - y = x^2\cos x$;

13.15. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x, \;\; y(e) = \frac{e^2}{2}$; 13.16. $(1-x^2)y' + 2xy = xy^2, \;\; y(0) = 0{,}5$.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має диференціальне рівняння першого порядку?

2. Що називається загальним розв’язком диференціального рівняння першого порядку?

3. Що називається частинним розв’язком диференціального рівняння першого порядку?

4. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.

5. Які різновиди диференціальних рівнянь першого порядку ви знаєте?

6. Який вид має диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?

7. Яке диференціальне рівняння називається однорідним? Наведіть загальну схему його розв’язання.

8. Яке рівняння першого порядку називається лінійним? Наведіть загальний вигляд диференційного рівняння Бернуллі.

Тема 14. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Приклади виконання типових задач

Приклад 1

Розв’язати диференціальне рівняння II порядку

$$y'' = xe^{-x}, \text{ за умовою } y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Розв’язання. Загальний вигляд рівнянь цього типу: $y'' = f(x)$.

Тоді загальний розв'язок знаходиться безпосереднім інтегруванням:

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1;$$

$$y = \int\left(-xe^{-x} - e^{-x} + c_1\right)dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1x + c_2.$$

Для отримання частинного розв'язку скористаємося початковими умовами: $\begin{cases} 0 = -1 + c_1 \\ 1 = 2 + c_2 \end{cases}$, $\Rightarrow$ $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$.

Частинний розв'язок: $y = xe^{-x} + 2e^{-x} + x - 1.$

Приклад 2

Розв'язати диференціальне рівняння II порядку $y''(x+3) + y' = 0$.

Розв'язання. Це рівняння другого порядку загального вигляду: $y'' = f\left(x, y'\right)$. Розв'язання відбувається за допомогою використання заміни: $y' = p\left(x\right)$ та $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$.

Тоді отримаємо: $p'(x+3) + p = 0$; $\dfrac{dp}{dx}(x+3) = -p$; $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{-dx}{x+3}$;

$\ln p = -\ln(x+3) + \ln C_1$; $p = \dfrac{C_1}{x+3}$; $p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1}{x+3}$; $y = \int \dfrac{C_1}{x+3}dx.$

Отримаємо відповідь: $y = C_1\ln(x+3) + C_2$

Приклад 3

Розв'язати диференційне рівняння II порядку $2\left(y'\right)^2 = \left(y-1\right)y''$.

Розв'язання. Надане рівняння є рівнянням вигляду: $y'' = f(y, y')$. Розв'язання відбувається за допомогою підстановки: $y' = p\left(y\right)$, та $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Отримаємо: $2p^2 = \left(y-1\right)p\dfrac{dp}{dy}$, або $p\left(2p - \left(y-1\right)\dfrac{dp}{dy}\right) = 0$,

звідки маємо $p = 0$, або $2p - \left(y-1\right)\dfrac{dp}{dy} = 0$.

З першого рівняння $p=0$, $y'=0$, одержуємо $y=C$.

В другому рівнянні поділимо змінні і знайдемо його загальний розв'язок: $\frac{dp}{p}=\frac{2dy}{y-1}$, $\ln|p|=2\ln|y-1|+\ln C_1$, $p=C_1(y-1)^2$.

Підставляючи в останнє рівняння обернену змінну $p=\frac{dy}{dx}$, одержуємо знову рівняння першого порядку: $\frac{dy}{dx}=C_1\,(y-1)^2$, $\frac{dy}{(y-1)^2}=C_1\,dx$. Проінтегруємо: $\int\frac{dy}{(y-1)^2}=C_1\int dx$, $-\frac{1}{y-1}=C_1\,x+C_2$.

Отримаємо загальний розв'язок : $(C_1x+C_2)(1-y)=1$.

Приклад 4

Розв'язати лінійне диференціальне рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами $y''-3y'+2y=(3-4x)e^x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок будемо шукати у вигляді $y_{он}=y_{чн}+y_{оо}$, де $y_{оо}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння $y''-3y'+2y=0$.

Розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння: $k^2-3k+2=0$, де $k_1=1, k_2=2$. Отже, $y_{оо}=c_1e^x+c_2e^{2x}$. Права частина, а саме, $f(x)=(3-4x)e^x$ є функцією вигляду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де $n=1, a=1$, тому $y_{чн}=x(Ax+B)e^x$, бо $a=1=k_1\neq k_2$. Невідомі A і B знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього диференціюючи $y_{чн}$, знайдемо $y'_{чн}$ та $y''_{чн}$.

$$
\begin{array}{c|l}
 & y_{чн}=\left(Ax^2+Bx\right)e^x \\
3 & y'_{чн}=(2Ax+B)e^x+\left(Ax^2+Bx\right)e^x
\end{array}
$$

$$y''_{чн} = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + \Big(Ax^2 + Bx$$

Підставимо $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ у вихідне диференціальне рівняння:

Зведемо подібні у лівій частині та отримаємо: $(-2Ax - B + 2A)e^x = (3 - 4x)e^x$. Прирівнюючи коефіцієнти при e^x, отримаємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} -2A = -4 \\ -B + 2A = 3 \end{cases}.$$

Звідки $A = 2; \quad B = 1$.

Таким чином, $y_{чн} = x(2x+1)e^x$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Остаточно маємо загальний розв'язок:

$$y_{чн} = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x(2x+1)e^x.$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння II порядку:

14.1. $y'' = \sin 2x + x$; 14.2. $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' = 0$; 14.3. $yy'' - y'(1 + y') = 0$;

14.4. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

14.5. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right)$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = e$; 14.6. $y'' - 8y' + 7y = 14$;

14.7. $y'' - 2y' = x^2 - 1$; 14.8. $y'' + 3y' - 10y = 12xe^{-2x}$;

14.9. $y'' - 3y' + 2y = e^x$; 14.10. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

14.11. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$;

14.12. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

14.13. $y'' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

14.14. $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку? Загальний та частинний розв’язок ДУ n-го порядку.

2. Які диференціальні рівняння n-го порядку допускають зниження порядку? Загальний розв’язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$.

3. Схема загального розв’язку рівняння $F(x, y', y'') = 0$?

4. Схема загального розв’язку $F(y, y', y'') = 0$?

5. Загальний вигляд однорідного та неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку?

6. Загальний вигляд характеристичного рівняння для даного однорідного диференціального рівняння?

7. Вигляд загального розв'язку однорідного рівняння, якщо корені характеристичного рівняння :

а)дійсні і різні;

б) дійсні і рівні;

в) комплексно-спряжені?

8. Вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння, якщо функція у його правій частині має вигляд:

а) $P_n(x)e^{\alpha x}$;

б) $M\cos\beta x + N\sin\beta x$;

в) $e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta\right)$?

Тема 15. Ряди

Приклади виконання типових задач

Дослідити на збіжність числові ряди:

Приклад 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+4}{\sqrt{n^{10}-1}}.$$

Розв’язання. За необхідною умовою збіжності ряду: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4}{\sqrt{n^{10}-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4}{n^5\sqrt{1-\frac{1}{n^{10}}}}=0.$$

Отже ряд може збігатися.

Для перевірки достатньої умови збіжності ряду використаємо ознаку порівняння. В якості еталонного оберемо узагальнений гармонійний ряд, загальний член якого дорівнює $v_n=\frac{1}{n^2}$, цей ряд є збіжним.

Отримаємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(3n^3+4\right)n^2}{\sqrt{n^{10}-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(3n^3+4\right)n^2}{n^5\sqrt{1-\frac{1}{n^{10}}}}=3\neq 0.$

Відповідь: ряд є збіжним.

Приклад 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}.$$

Розв'язання. За достатньою ознакою збіжності Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, якщо $q<1$ – ряд є збіжним, $q>1$ – ряд є розбіжним, маємо:

$$u_n=\frac{3^n}{(2n)!};u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\left(2(n+1)\right)!}=\frac{3^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+1)(2n+2)}=0<1.$$

Даний ряд є збіжним.

Приклад 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

*Розв'язання. З*астосуємо ознаку Коші, тоді отримаємо:

$$u_n=\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\text{ а }\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3e}<1$, ряд збігається.

Приклад 4

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+...\,;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Розв'язання. Даний ряд є знакозмінним, тому дослідимо його на абсолютну та умовну збіжність.

$$1>\frac{1}{2!}>\frac{1}{3!}>...\quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0.$$

Ряд збігається за ознакою Лейбниця.

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин заданого ряду:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...\ .$$

За ознакою Даламбера цей ряд збігається, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Таким чином, заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)^2}.$$

Розв'язання. Визначимо радіус збіжності: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2}\right|=1$.

Ряд є абсолютно збіжним на інтервалі $(-1;1)$.

Дослідимо збіжність ряду на границях інтервалу.

При $x=1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Це ряд з додатними членами і за достатньою умовою порівняння з еталонним узагальненим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який є збіжним, отримаємо, що при $x=1$ ряд є збіжним.

При $x=-1$ ряд набуває вигляду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Ряд, складений з модулів, співпадає з рядом $x=1$, при тому він є збіжним.

Таким чином даний ряд є абсолютно збіжним, та областю збіжності є відрізок є відрізок $[-1;1]$.

Приклад 7

Знайти наближене значення e^2 з точністю до 0,01 обмежуючись першими восьма членами ряду Маклерена для e^x.

Розв'язання: Застосуємо формулу:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\ ,(-\infty<x<\infty).$$

При $x=2$ маємо $e^2\approx1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+\frac{2^7}{7!}$.

Припустима при цьому похибка оцінюється таким чином:

$$R_8=\frac{2^8}{8!}+\frac{2^9}{9!}+\dots=\frac{2^8}{8!}+\frac{2^9}{8!9}+\frac{2^{10}}{8!9\cdot10}+\dots=$$

$$=\frac{2^8}{8!}\left(1+\frac{2}{9}+\frac{2^2}{9\cdot10}+\frac{2^3}{9\cdot10\cdot11}+\dots\right)<\frac{2^8}{8!}\left(1+\frac{2}{9}+\frac{2^2}{9\cdot9}+\frac{2^3}{9\cdot9\cdot9}+\dots\right)=$$

$$=\frac{2^8}{8!}\left(1+\frac{2}{9}+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^3+\dots\right)=\frac{2^8}{8!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{2^8\cdot9}{8!\cdot7}<0,008<0,01.$$

Завдання для самостійної роботи

Дослідити на збіжність ряд з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$:

15.1. $u_n=\frac{n^2+1}{\sqrt[3]{n^2}}$; 15.2. $u_n=\frac{3n+1}{2n^3+3}$; 15.3. $u_n=\frac{n+1}{(2n+1)^2}$;

15.4. $u_n = \dfrac{n+2}{n\sqrt{n+2}}$; 15.5. $u_n = \dfrac{3^n \cdot n}{\sqrt{n(n+1)}}$; 15.6. $u_n = \dfrac{2n}{(n+3)^3+1}$;

15.7. $u_n = \dfrac{7n-1}{5^n \cdot (n+1)!}$; 15.8. $u_n = \dfrac{3n(n+1)}{7^n}$; 15.9. $u_n = \dfrac{n^2+3}{(n+1)!}$;

15.10. $u_n = \dfrac{3n+1}{\sqrt{n \cdot 7^n}}$; 15.11. $u_n = \dfrac{2^n}{5^n \cdot (2n+1)}$; 15.12. $u_n = \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$;

15.13. $u_n = \left(\dfrac{3n-1}{2n+1}\right)^n$; 15.14. $u_n = \dfrac{7^n+3^n}{21^n}$.

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

15.15. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n \cdot (n+1)}$; 15.16. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n^2+1}}$; 15.17. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{2n+5}$;

15.18. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (2n+1)}{n^2(n+1)}$; 15.19. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{4^n \cdot (2n+1)}$; 15.20. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n+2)!}$;

15.21. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{5n \cdot (n+1)}$; 15.22. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{7^n \cdot (5n-2)}$; 15.23. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+5}}$;

15.24. $u_n = \dfrac{(-1)^n\left(2+(-1)^n\right)}{n}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

15.25. $u_n = \dfrac{2^n \cdot x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$; 15.26. $u_n = \dfrac{3^n \cdot x^{n+1}}{2n+1}$; 15.27. $u_n = \dfrac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$;

15.28. $u_n = \dfrac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$; 15.29. $u_n = \dfrac{5^n \cdot x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$; 15.30. $u_n = \dfrac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$;

15.31. $u_n = \dfrac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{2n+1}}$; 15.32. $u_n = \dfrac{(x-2)^n}{2^n}$; 15.33. $u_n = \dfrac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$;

15.34. $u_n = \dfrac{x^n}{2^n+3^n}$. 15.35. $u_n = \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$; 15.36. $u_n = \dfrac{2^n \cdot x^{5n}}{2n-1}$;

15.37. $u_n = \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$; 15.38. $u_n = \frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$; 15.39. $u_n = n!(x-5)^n$;

15.40. $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$;

15.41. Обчислити наближено $\frac{1}{\sqrt{e}}$ з точністю до 0,001; 15.42.

15.42. Обчислити наближено $\ln 1{,}04$ з точністю до 0,0001.

15.43. Обчислити наближено $\sqrt[10]{1027}$ з точністю до 0,0001.

15.44. Обчислити наближено $\sin 0{,}4$ з точністю до 0,0001.

15.45. Обчислити наближено $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю до 0,0001.

15.46. Обчислити наближено $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ з точністю до 0,0001.

Питання для самоперевірки

1. Які ряди називаються числовими?
2. Який ряд називається збіжним, а який – розбіжним?
3. У чому полягає необхідна ознака збіжності ряду?
4. У чому полягають наступні ознаки збіжності числових рядів:

а) ознака порівняння;
б) ознака Даламбера;
в) радикальна ознака Коші;
г) інтегральна ознака Коші?

5. Які ряди називаються знакозмінними?
6. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
7. У чому полягає ознака Лейбніца?
8. Який ряд називається абсолютно збіжним?
9. Який ряд називається умовно збіжним?
10. Що таке степеневий ряд?
11. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?
12. Як використати ознаку Даламбера для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду?

Відповіді

1.1. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **1.2.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & 10 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}$. **1.3.** $\begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

1.4. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$.

1.6. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.7. $\begin{pmatrix} 38 & 18 & -44 \\ 22 & -10 & 43 \\ 29 & 19 & -29 \end{pmatrix}$. **1.8.** $\begin{pmatrix} 19 & 13 & 40 \\ 6 & -10 & 53 \\ 5 & 7 & -15 \end{pmatrix}$. **1.9.** $\begin{pmatrix} -5 & 29 & 9 \\ -13 & -1 & 3 \\ -9 & -15 & -3 \end{pmatrix}$.

1.10. $\begin{pmatrix} 5 & -23 & 11 \\ 3 & -8 & 5 \\ -4 & -34 & 16 \end{pmatrix}$.

2.1. -1. **2.2.** 34. **2.3.** 1. **2.4.** 6. **2.5.** a. **2.6.** 12. **2.7.** 2; -5. **2.8.** 1; 4. **2.9.** 80. **2.10.** -68. **2.11.** 60. **2.12.** -2. **2.13.** 52. **2.14.** 10. **2.15.** Так. **2.16.** Ні. **2.17.** Так.

2.18. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1/2 & 5/2 \\ -5 & -1/2 & 7/2 \end{pmatrix}$. **2.19.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. **2.20.** $\begin{pmatrix} -4/5 & 6/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 7/5 & -8/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

2.21. 2. **2.22.** 3. **2.23.** 3.

3.1. $x_1=3$, $x_2=8$, $x_3=13$. **3.2.** $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=0$. **3.3.** $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$. **3.4.** $x_1=-8$, $x_2=-4$, $x_3=-13$. **3.5.** $\varnothing$. **3.6.** нескінченна множина розв'язків. **3.7.** $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$. **3.8.** $\varnothing$. **3.9.** нескінченна множина розв'язків. **3.10.** $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

4.1. 3 кв. од. **4.2.** 4 кв. од. **4.3.** 60^0. **4.4.** 4 куб. од. **4.5.** 28. **4.6. а)** Так; **б)** Так; **в)** Ні. **4.7.** Так. **4.8.** -3. **4.9.** $\frac{2\pi}{3}$**. 4.10.** $\frac{1}{2}$.

5.1. а) $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0$; б) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$.

5.2. а) $x+3y-5=0$; б) $y=1$.

5.3. $(AB):3x-y-4=0$, $(BC):3x+5y-34=0$, $(AC):3x+2y-1=0$.

5.4. $A\left(\frac{1}{8},\frac{39}{8}\right)$, $B\left(\frac{1}{3},\frac{14}{3}\right)$, $C(2,8)$. **5.5.** $2x+5y+14=0$.

5.6. а) $x+3y+11=0$; б) $3x-y-27=0$. **5.7.** а) $\varphi=135^0$; б) $\varphi=90^0$.

5.8. $4{,}7$ од. **5.9.** 5 од. **5.10.** $4x+y-6=0$ та $3x+2y-7=0$.

5.11. $x+3y-4=0$ та $3x-11=0$. **5.12.** $4x+3y+16=0$ та $4x+3y-14=0$. **5.14.** $A(1;6), B(4;-1), C(-3;-3)$. **5.15.** $0{,}25$ кв. од.

6.1. $\varphi\approx 24^0$. **6.2.** $x-3y+4z+9=0$. **6.3.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-6}{5}$.

6.4. $(-2;0;3)$. **6.5.** $2x+y-z-5=0$.

7.1. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. **7.2.** $x^2+y^2=25$. **7.3.** $(x+9)^2+(y-4)^2=169$.

7.4. $x^2+(y-2)^2=34$. **7.5.** $(x+1)^2+(y+1)^2=25$.

7.6. а) $(x+3)^2+(y-5)^2=21$; б) $(x+1)^2+y^2=4$; в) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; г) $(x-4)^2+(y-5)^2=33$. **7.7.** а) $\sqrt{157}$; б) 17.

7.8. $a=6$; $b=10$; $c=8$; $\varepsilon=\frac{4}{3}$. **7.9.** $\frac{x^2}{10}+y^2=1$. **7.10.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

7.11. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{24}=1$. **7.12.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **7.13.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$.

7.14. $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{64}=1$, $\varepsilon=\frac{15}{17}$. **7.15.** а) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$;

б) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$; в) $\frac{x^2}{10}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$. **7.16.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$.

7.17. $(\pm 4;0)$, $(\pm 5;0)$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}x$. **7.18.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$.

7.19. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$. **7.20.** $x^2-y^2=1$. **7.21.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

7.22. а) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+5)^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$;

в) $\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$. **7.23.** $y^2=48x$, $F(12;0)$, $MF=\frac{37}{3}$.

7.24. $y=x-\frac{x^2}{4}$. **7.25.** а) $(1;3)$, $(4;-6)$; б) $\varnothing$; в) $(4;6)$. **7.26.** $x^2=-2y$.

7.27. а) $(y-4)^2=4(x+4)$; б) $(x-3)^2=-8(y-7)$; в) $(y+4)^2=x$;

г) $(x+3)^2=2(y+2)$. **8.1.** $\frac{7}{12}$. **8.2.** -2. **8.3.** $\frac{7}{9}$. **8.4.** ∞. **8.5.** 0. **8.6**. $\frac{3}{2}$. **8.7.** $-\infty$. **8.8.** -4. **8.9.** 2. **8.10.** 0. **8.11.** ∞. **8.12.** $\frac{4}{5}$. **8.13.** $\frac{14}{9}$. **8.14.** 4. **8.15.** $-\infty$.

8.16. $-\frac{3}{2}$. **8.17.** ∞ **8.18.** 0. **8.19.** $\frac{1}{6}$. **8.20.** -1. **8.21.** ∞. **8.22.** $\frac{3}{64}$. **8.23.** 3.

8.24. $\frac{5}{2}$. **8.25.** 2. **8.26.** $-\frac{1}{2}$. **8.27.** $-\frac{3}{2}$. **8.28.** e^{-7}. **8.29.** 5. **8.30.** e^{-14}.

9.31.1. **9.37**.1. **9.38.** 0. **9.39.** $25/18$. **9.43**. e^{-6}. **9.48.** $-\frac{1}{2}$. **9.55.** найбільше $y(\pm 2)=13$, найменше $y(\pm 1)=4$. **9.56.** найбільше $y(0)=0$, найменше $y(-1)=-\frac{1}{e}$. **9.57.** найбільше $y(1)=1$, найменше $y(e)=e-2$.

9.58. найбільше $y(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$, найменше $y(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}$.

10.13. $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)-min$. **10.14.** екстремуму немає. **10.15.** $z_{min}(1;2)=-7$.

10.16. $z_{min}(0;0)=4$. **10.17.** $z_{min}(3;3)=-27$. **10.18.** $z_{min}(0;0)=4$.

10.19. $z_{min}(1;3)=20-18\ln 3$. **10.20.** $z_{min}(-2;0)=-\dfrac{2}{e}$.

10.21. $z_{max}\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)=0$. **10.29.** $\max\limits_D z=6$; $\min\limits_D z=3$. **10.30.** $\max\limits_D z=4$; $\min\limits_D z=0$. **10.31.** $\min\limits_D z=-64$; $\max\limits_D z=\dfrac{64}{27}$. **10.32.** $\min\limits_D z=-\dfrac{1}{3}$; $\max\limits_D z=2$.

10.33. $\min\limits_D z=-11$ $\max\limits_D z=9$.

11.1. $3x^3-8\sqrt[4]{x^5}+2\sqrt{x^3}+C$ **11.2.** $-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **11.3.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$.

11.4. $-x+\operatorname{tg}x+C$. **11.5.** $\dfrac{(1-3x)^{18}}{-54}+C$. **11.6.** $\dfrac{\sqrt[4]{(12x-5)^7}}{21}+C$. **11.7.** $\dfrac{1}{3}e^{3x-5}+C$. **11.8.** $-\dfrac{\ln|11-4x|}{4}+C$. **11.9.** $\ln\left(x^2-3x+8\right)+C$. **11.10.** $\dfrac{3}{2}\ln|1-2\cos x|+C$. **11.11.** $\dfrac{3}{8}\ln\left(2x^4+3\right)+C$. **11.12.** $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2}+C$.

11.13. $\dfrac{1}{4}e^{4\sin x}+C$. **11.14.** $\dfrac{1}{18}\ln^6(3x-2)+C$. **11.15.** $e^{\operatorname{tg}x}+C$. **11.16.** $\dfrac{1}{2}\sin\left(x^2-1\right)+C$. **11.17.** $-\dfrac{1}{3\arcsin^3 x}+C$. **11.18.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}+C$.

11.19. $e^{\sqrt{2x-1}}+C$. **11.20.** $(7-x)\cos x+\sin x+C$.

11.21. $\dfrac{1-3x}{2}\sin 2x-\dfrac{3\cos 2x}{4}+C$. **11.22.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$.

11.23. $\dfrac{3x-11}{9}e^{-3x}+C$. **11.24.** $-\dfrac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\dfrac{1}{2}\right)+C$.

11.25. $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$. **11.26.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+C$.

11.27. $\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+28}\right|+C$.

11.28. $3\ln\left(x^2-4x+13\right)+\dfrac{11}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{3}+C$.

11.29. $3\sqrt{x^2-4x+5}+C$. **11.30.** $\dfrac{13}{20}\ln\left|\dfrac{2x-1}{2x+9}\right|-\dfrac{5}{8}\ln\left|4x^2+16x-9\right|+C$.

11.31. $6\arcsin\frac{x-1}{2}+\sqrt{3+2x-x^2}+C$. **11.32.** $2\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.

11.33. $4\ln|x-1|+5\ln|x-4|-7\ln|x+3|+C$.

11.34. $-\frac{3}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln|x-1|+C$.

11.35. $\ln\left(x^2+9\right)-\ln|x-3|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

11.36. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

11.37. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)-3\ln|x|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

11.38. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{x}+C$. **11.39.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$.

11.40. $C-\frac{1}{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **11.41.** $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 6x}{12}+C$.

11.42. $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. **11.43.** $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$.

11.44. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **11.45.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+x+C$.

11.46. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x}+\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+C$. **11.47.** $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.

11.48. $\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)+C$. **11.49.** $6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

11.50. $-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x+5}{x}}+C$. **11.51.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$. **11.52.** $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$.**11.53.** $\frac{x^3}{27\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}+C$. **11.54.** $C-\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{45x^5}$.

12.1. $\frac{17}{6}$. **12.2.** $\frac{7}{32}$. **12.3.** $\frac{2}{3}$. **12.4.** $\frac{1}{10}\ln 9$. **12.5.** $\frac{\pi}{6}$. **12.6.** $\frac{\pi}{12}$. **12.7.** $\frac{\pi}{6}$.

12.8. 0. **12.9.** 9. **12.10.** 2. **12.11.** $\frac{1}{4}$. **12.12.** $\frac{1}{4}$. **12.13.** 2. **12.14.** 1.

12.15. $\frac{1}{2}arctg 2$. **12.16.** $\frac{81}{8}\pi$. **12.17.** 4. **12.18.** $\frac{1}{9}$. **12.19.** $\frac{\pi}{2}-1$.

12.27. $4-3\ln 3$ (кв. од.). **12.28.** 9 (кв. од.). **12.29.** $\frac{7}{6}$(кв. од.).

12.30. $\frac{1}{3}+\ln 3$ (кв.од.). **12.31**. 15 **(**кв.од.). **12.32.** 14 (кв.од.). **12.33**. e^2 (кв.од.). **12.34.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ (кв.од.). **12.35**. 4,5 (кв.од.).

12.36. $5\frac{1}{3}$ (кв.од.). **12.37.** $2\ln 2-1$**(** кв.од.). **12.38.** $\approx 106{,}6$ (кв.од.). **12.39**. $13{,}5$ (кв.од.). **12.40.** $\frac{3\pi}{10}$ (куб. од.). **12.41.** $4\pi^2$ (куб. од.). **12.42.** $\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$ (куб. од.). **12.43.** $\frac{112\pi}{5}$ (куб. од.).

13.1. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\sqrt{9-y^2}=C$. **13.2.** $\ln|xy|+\frac{y-x}{xy}=C$.

13.3. $2\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|=C$. **13.4.** $tgy=1-x+tgx$. **13.5.** $y=e^x(x-2)$.

13.6. $y=Ce^{\frac{y}{x}}$. **13.7.** $y=xe^{Cx^2+1}$. **13.8.** $y=\frac{Cx^2}{2}-\frac{1}{2C}$ **.13.9.** $(x-2)^2-y^2=4$.

13.10. $y=x\ln(ey)$. 13**.11.** $x=3e^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}$. **13.12.** $y=1+x^2+C\sqrt{1+x^2}$.

13.13. $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$. **13.14.** $y=x\sin x+Cx$. **13.15.** $y=\frac{1}{2}x^2\ln x$. **13.16.** $y=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x^2-4}$**.**

14.1. $\frac{x^3}{6}-\frac{\sin 2x}{4}+C_1x+C_2$. **14.2.** $C_1y=x+\frac{x^3}{3}+C_2$ .14**.3.** $y=C_1e^{c_2x}+\frac{1}{C_2}$.

14.4. $y=-\ln\cos x$. **14.5.** $y=xe^x-e^x+\frac{1}{2}$. **14.6.** $y=C_1e^x+C_2e^{7x}+2$.

14.7. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$.**14.8.** $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}+\left(\frac{1}{12}-x\right)e^{-2x}$.

14.9. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-xe^x$.**14.10.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{6}{5}\sin 2x-\frac{2}{5}\cos 2x$.

14.11. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\sin x$. **14.12.** $y=e^x+x^2+1$.

14.13. $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{7}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}\sin 2x$.

14.14. $y=\frac{\sin 2x}{3}-\frac{\sin x}{3}-\cos x$.

15.1. розбіжний. **15.2**. збіжний. **15.3.** розбіжний. **15.4.** розбіжний.

15.5. розбіжний. **15.6**. збіжний. **15.7.** збіжний. **15.8**. збіжний.

15.9. збіжний. **15.10.** збіжний. **15.11.** збіжний. **15.12**. збіжний. 15.13. розбіжний. **15.14**. збіжний. **15.15.** абсолютно збіжний. **15.16**. умовно збіжний. **15.17**. розбіжний. **15.18**. абсолютно збіжний. **15.19.** абсолютно збіжний. **15.20**. абсолютно збіжний. **15.21**. умовно збіжний. **15.22.** абсолютно збіжний. **15.23**. абсолютно збіжний. **15.24**. розбіжний.

15.25. $x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. **15.26**. $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **15.27**. $x\in[-2;2]$. **15.28.** $x\in[-5;5)$. **15.29**. $x\in\left[-\frac{6}{5};\frac{6}{5}\right)$. **15.30**. $x\in(-2;2)$. **15.31**. $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

15.32. $x\in(0;4)$. **15.33.** $x\in[-1;3)$. **15.34.** $x\in(-3;3)$. **15.35.** $x\in[1;3]$.

15.36. $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}};\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$. **15.37**. $x\in[3;5)$. **15.38.** $x\in(-1;3)$. **15.39.** $x=5$.

15.40. $x\in(1;3]$.**15.41**. 0,6065. **15.42.** 0,0392. **15.43.** 2,0006. **15.44.** 0,3894. **15.45.** 0,4931.**15.46.** 0,7468.

Рекомендована література

1. Анохіна О. Д. Збірник індивідуальних завдань з навчальної дисципліни "Вища математика" для студентів усіх спеціальностей всіх форм навчання / укл. О. Д. Анохіна, Г. В. Усіна. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2006. – 144 с.
2. Барковський В. В. Математика для економістів : навч. посібн. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1997.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 2000.
4. Бондар В. І. Дидактика : підручник / В.І.Бондар. – К. : Либідь, 2005.–262 с.
5. Вища математика : навч. посібн. для самост. вивч. дисц. / під ред. К. Г. Валуєва. – К. : КНЕУ, 1999.
6. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : "ЮНИТИ", 2002.
7. Высшая математика : Сборник задач / под ред. П. Ф. Овчинникова. – К. : Вища школа, 1999.
8. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, О. М. Титаренко та ін. – К. : Кондор, 2006. – 556 с.
9. Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посібн. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. дім "ІНЖЕК", 2006. – 544 с.
10. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посібн.: в 2-х ч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 1. – 348 с.; Ч. 2 – 308 с.
11. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Наука, 1999.
12. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М., 1999.

13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / под ред. А. П. Рябушко : В 3-х ч. – Мн. : Вышейшая школа, 1990 – 1991. Ч 1. – 270 с.; Ч. 2. – 352 с.; Ч.3. – 288 с.

14. Тевяшев А. Д. Высшая математика. Сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшев, А. Г. Литвин. – Х. : ХТУРЭ, 1999.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з розділу "Вища математика" навчальної дисципліни "ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА" для студентів напряму підготовки 6.030601 "Менеджмент" спеціалізації "Бізнес-адміністрування" денної форми навчання

Укладачі: **Железнякова** Еліна Юріївна
Сілічова Тетяна Василівна

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Редактор **Бутенко В. О.**

Коректор **Бутенко В. О.**

План 2014 р. Поз. № 12 ЕВ. Обсяг 101 стор.

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи Дк № 481 від 13.06.2001 р.