

РАЗДЕЛ 29

Гаврилов В. П.

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В настоящее время фрактальные изображения применяются для дизайна интерьера, украшения одежды, аэрографии и других областях полиграфии.

Для дизайна интерьера используются различные картины и постеры (рис.1), которые кардинально преобразуют помещение.



Рис. 1. Интерьер комнаты

Картины, созданные на основе фрактальной графики, позволяют визуально увеличить пространство комнаты, другие придают оттенки уюта, третьи в содержании своем несут некую информацию.

Печать на одежде фрактальной графики позволяет качественно и эффектно выразить свою индивидуальность, реализовать и привнести в мир свой вкус и свое видение мира. Фрактальную графику печатают на футболках (рис.2), на толстовках, на бейсболках, сумках, даже на носках и зонтах.

Нанесение графики на одежду осуществляется с помощью:

трафаретной печати по текстилю;

термотрансферной и сублимационной технологии печати по текстилю;

методом прямой печати.

Для усиления эффекта в краску добавляют металлизированные блестки, флюорисцент и люминесцент.

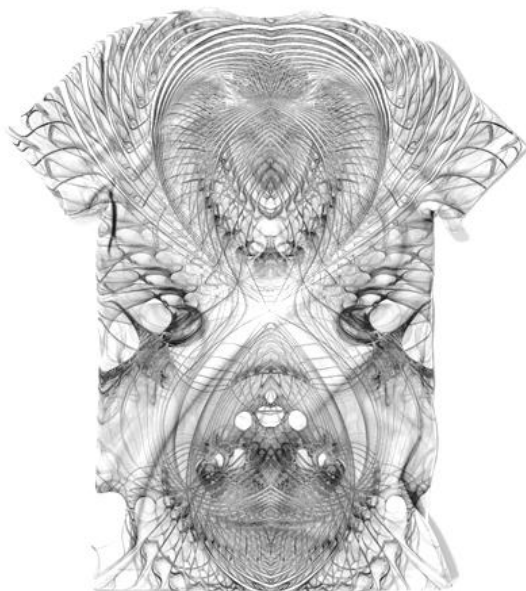


Рис. 2. Фрактальная графика на футболке

Аэрография это одна из живописных техник изобразительного искусства, использующая аэрограф в качестве инструмента для нанесения жидкого или порошкообразного красителя при помощи сжатого воздуха на какую-либо поверхность. Благодаря тонкому слою краски и возможности плавного распыления её на поверхности, возможно, достичь превосходных декоративных эффектов, таких как плавные переходы цвета, объёмность, фотографическая реалистичность получаемого изображения, имитацию грубой фактуры при идеальной гладкости поверхности. На улицах городов все больше и больше появляется автомобилей с аэрографией (рис. 3).



Рис. 3. Автомобиль с аэрографией

Одним из красивейших явлений фрактальной графики являются фрактальное видео, показывающие последовательность трансформации фракталов в движении.

Понятия фрактал и фрактальная геометрия появились в конце 70–х и с середины 80–х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал образовано от латинского fractus и в переводе означает состоящий из фрагментов. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но само подобных структур, которыми он занимался.

Фракталы позволяют описывать целые классы изображений, для детального описания которых требуется относительно мало памяти. Программные средства для работы с фрактальной графикой предназначены для автоматической генерации изображений путем математических расчетов. Создание фрактальной художественной композиции состоит не в рисовании или оформлении, а в программировании. Таким образом, для создания конкурентоспособных и коммерческих фракталов требуются знания численных методов. С этой точки зрения материал статьи является актуальным и представляет интерес для заинтересованных специалистов.

Математической основой фрактальной графики является фрактальная геометрия [5]. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature».

В современной научно технической литературе рассматривается большое количество различных методов синтеза фрактальных изображений. Для того, чтобы разобраться в них нужно провести их классификацию. Существуют классификации, например, рукотворные и природные. К рукотворным относятся те фракталы, которые были придуманы учёными, они при любом масштабе обладают фрактальными свойствами. На природные фракталы накладывается ограничение на область существования – то есть максимальный и минимальный размер, при которых у объекта наблюдаются фрактальные свойства. Все рукотворное множество фракталов делится на геометрические, алгебраические и стохастические.

Геометрические фракталы – самые наглядные, потому что в них сразу видна самоподобность. Примером таких кривых служит треугольник Серпинского. Построение треугольника Серпинского, основано на методе IFS [1,3]. Система итерирующих функций (IFS) – это совокупность сжимающих аффинных преобразований. Как известно, аффинные преобразования включают в себя масштабирование, поворот и параллельный перенос.

Аффинное преобразование считается сжимающим, если коэффициент масштабирования меньше единицы.

Суть метода IFS можно пояснить с помощью преобразований. Поместим прямоугольный треугольник с длиной катета, для определенности равной единице, на комплексную плоскость Z так, как показано на рис. 4 слева.

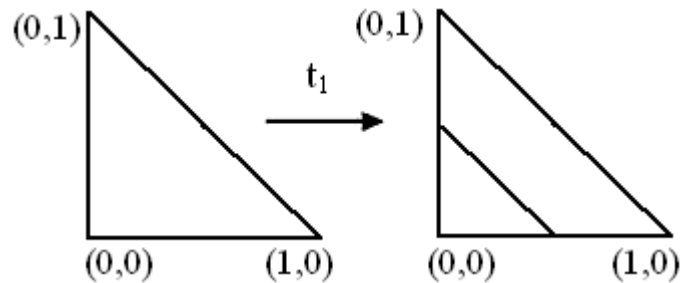


Рис. 4. Преобразование t_1

Зададим линейное преобразование t_1 , которое переводит на комплексной плоскости в равносторонний треугольник в два раза меньшего размера, представленный на рис. 4 справа

$$t_1 : f_1(Z) := \frac{Z}{2} . \quad (1)$$

Если теперь сместить этот маленький треугольник по горизонтали вправо на величину, равную $1/2$, то получим преобразование t_2 , переводящее исходный треугольник, в треугольник, представленный на рис. 5 справа.

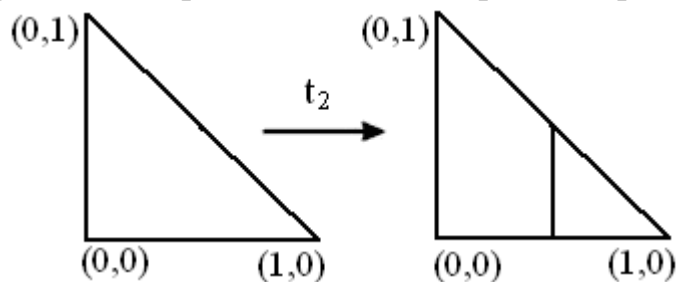


Рис. 5. Преобразование t_2

Соответствующая этому преобразованию функция равна

$$t_2 : f_2(Z) := \frac{Z + 1}{2} . \quad (2)$$

Последний, третий маленький треугольник получается с помощью преобразования t_3 , представленного на рис. 6.

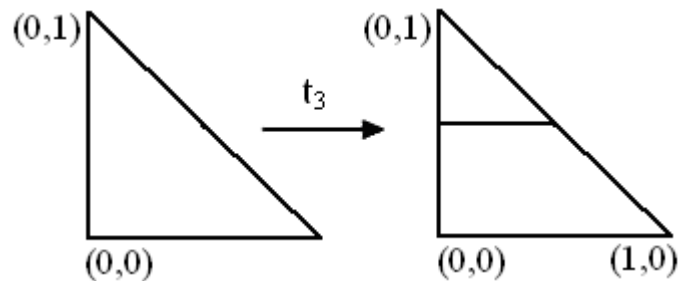


Рис. 6. Преобразование t_3

Соответствующая ему функция $f_3(Z)$ получается из $f_1(Z)$ трансляцией на комплексный вектор

$$t_3 : f_3(Z) := \frac{Z + i}{2} . \quad (3)$$

В результате три представленные линейные функции осуществляют искомое сжимающее преобразование исходного треугольника в три треугольника в два раза меньшего размера. Если теперь каждый из этих трех маленьких треугольников подвергнуть этим трем сжимающим преобразованиям, то тогда возникнет уже 9 треугольников в 4 раза меньше исходного. Таким образом, выполняя эту процедуру, определенное число раз, получим треугольник Серпинского.

Несколько различных вариантов реализации треугольника Серпинского приведены на рис. 7. Первый представляет из себя классический треугольник Серпинского, другой имитирует "насекомое" и третий архитектурное сооружение

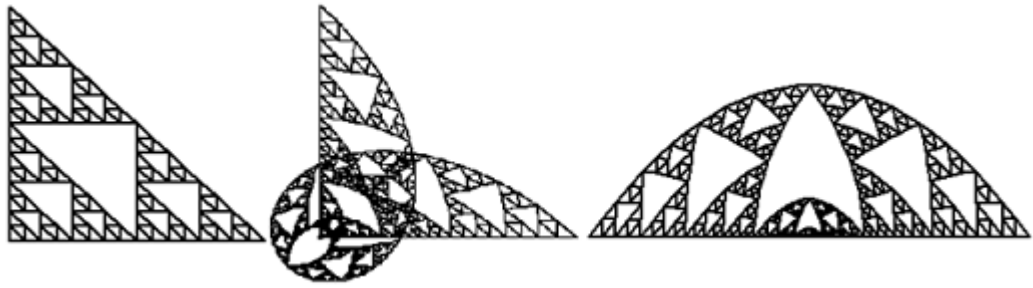


Рис. 7. Варианты реализации треугольника Серпинского

Для построения **алгебраических фракталов** используются итерации нелинейных отображений, задаваемых простыми алгебраическими формулами. Примерами алгебраических фракталов являются множества Мандельброта и Жюлиа.

Алгоритм построения алгебраических фракталов достаточно прост и основан на создании фрактальных объектов на плоскости. Суть алгоритма заключается в том, что одно комплексное число $Z_n = x_n + i y_n$ преобразуется в другое комплексное число $Z_{n+1} = x_{n+1} + i y_{n+1}$ по итерационному правилу, которое представлено формулой $Z_{n+1} = f(Z_n)$, где $f(Z_n)$ – некоторая нелинейная функция Z_n , n – номер итерации.

Множество Жюлиа наряду с множеством Мандельброта занимает центральное место в теории фракталов. Множество Жюлиа представляет собой границу области притяжения неподвижных точек комплексных отображений.

Наиболее изученным из них является отображение, представленное формулой

$$f(Z) = Z^2 + c, \text{ где} \tag{4}$$

$$c = c_1 + i c_2 - \text{const};$$

$$Z, c \in \mathbb{C};$$

\mathbb{C} – множество всех комплексных чисел.

Рассмотренный алгоритм можно представить, как прямой и основан на следующей теореме. Предположим, что $|c| < 2$. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и пусть $Z_n = f^{(n)}(Z)$ для $n = 1, 2, 3, \dots$. Если существует такое n , что $|Z_n| \Rightarrow 2$, то имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty, \tag{5}$$

т.е. орбита

$$\left[f^{(n)}(Z) \right]_{n=1}^{\infty} \quad (6)$$

стремится к бесконечности и Z не принадлежит множеству Жюлиа. На этой теореме основан первый алгоритм – построение на основе исходного отображения.

Второй алгоритм построения, основанный на обратном отображении, опирается на свойство множество Жюлиа, состоящее в том, что для обратного отображения, т.е.

$$f^{-1}(Z) = \sqrt{Z - C} \quad (7)$$

множество Жюлиа – аттрактор.

Результаты реализации приведенных выше алгоритмов представлены на рис. 8.

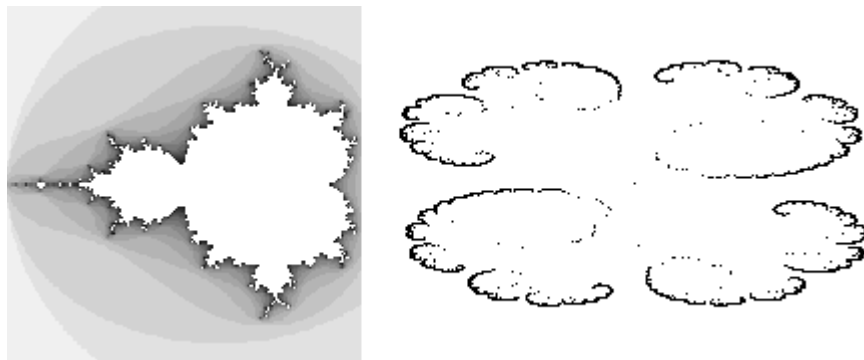


Рис. 8. Множества Мандельброта и Жюлиа

Ещё одним известным классом фракталов являются **стохастические фракталы**, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные – несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т. д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Алгоритм построения стохастических фракталов еще называют игрой в «хаос», в качестве начального множества выбирают одну точку:

x_0 – начальная точка (с произвольными координатами)

$x_1 = T_1(x_0)$ или $T_2(x_0)$ или $T_3(x_0)$,

$$\dots$$

$$x_n = T_1(x_{n-1}) \text{ или } T_2(x_{n-1}) \text{ или } T_3(x_{n-1}).$$

На каждом шаге, вместо того чтобы применять сразу три преобразования $T_1(S)$, $T_2(S)$, $T_3(S)$, применяется только одно, выбранное случайным образом. Таким образом, на каждом шаге получается ровно одна точка. Оказывается, что после некоторого переходного процесса точки, сгенерированные алгоритмом, заполняют в точности фрактальное изображение.

Замечательным свойством алгоритмов, основанных на теории IFS, является то, что их результат (аттрактор) совершенно не зависит от выбора начального множества E_0 или начальной точки x_0 . В случае детерминированного алгоритма это означает, что в качестве E_0 можно взять любое компактное множество на плоскости: предельное множество по-прежнему будет совпадать с заданным фрактальным изображением. В случае применения алгоритма построения стохастических фракталов выбор начальной точки x_0 не влияет на формирование заданного фрактального изображения.

Для равномерного распределения точек по экрану в алгоритме построения стохастических фракталов аффинные преобразования следует выбирать с вероятностью

$$p_i = \frac{\det(A_i)}{\sum_{j=1}^m \det(A_j)}, \quad (8)$$

где

A_i – матрица соответствующего аффинного преобразования ($i = 1, 2, \dots, m$).

Очевидно, что $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$.

Результат построения фрактального дерева с помощью алгоритма построения стохастических фракталов представлен на рис. 10.

Для построения использовались сжимающие аффинные преобразования.

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= a \cdot x_n + b \cdot y_n + e, \\ y_{n-1} &= c \cdot x_n + d \cdot y_n + f. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) можно представить в матричном виде.

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \quad (10)$$



Рис. 10. Фрактальное дерево

В общем случае аффинное преобразование на плоскости задается шестью независимыми действительными числами. Два числа e и f описывают перемещение фигуры на плоскости, а четыре числа a , b , c , d задают вращение фигуры при неизменном начальном положении.

С помощью алгоритма построения стохастических фракталов создаются сложные фракталы (рис. 11).

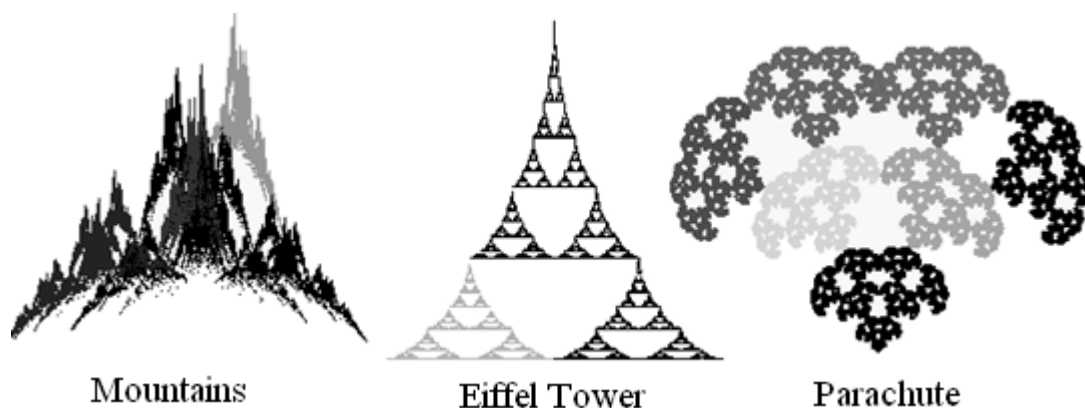


Рис. 11. Сложные фракталы

Существуют фантастические изображения растений, полученные с помощью программ. Это так называемые **L-системы**. В основе их построения лежат два принципа. Первый – это так называемая «черепашья графика». Второй принцип – каждое единичное движение заменяется на весь рисунок. Например, на первом шаге рисуется вилка, а на следующем шаге работы программы каждая из трех палочек вилки заменяется такой же вилкой, превращая вилку в ветку с сучками, после следующего шага получается лохматый куст, потом пушистое дерево (фрактал). Меняя вид начальной картинку можно получать самые разные изображения растений.

L-система представляет виртуальное программируемое устройство, состоящее из пера, управляющего им механизма и листа бумаги. Управляющий пером механизм позволяет:

- начертить отрезок прямой заданной длины в направлении текущей ориентации пера (команда f);

- изменить ориентацию пера по отношению к текущей на заданный относительный угол (команды $+$ и $-$);

- запомнить текущее состояние (команда $[$);

- вспоминать ранее запомненное состояние (команда $]$).

Под состоянием в данном случае понимается тройка чисел (x, y, a) , где x и y – это координаты пера и a – это угол, определяющий направление ориентации пера. Таким образом, задав некое начальное направление a_0 , определив относительный угол поворота α и задав длину отрезка, при помощи последовательности команд $f + f + f + f$ можно нарисовать квадрат. Определив относительный угол поворота в 60° , при помощи последовательности команд $f + + f + + f$ можно нарисовать равносторонний треугольник. Предположим также, что в программы для виртуального устройства, кроме пяти

перечисленных команд, можно включать любые другие символы, которые управляющий механизм будет просто игнорировать. То есть если ввести в программу $f + bf + ccf + cf$, то устройство все равно нарисует квадрат. Теперь мысленно оснастим устройство приставкой, которая перед тем, как передать введенную программу на управляющий механизм, может заданное число раз просматривать ее, и при каждом очередном просмотре заменять любые символы последовательности по предварительно указанным правилам. Исходную программную последовательность символов назовём аксиомой. Например, введем аксиому $f b +$, и определим правило $b < f + f b$. Зададим также количество просмотров, равное, например, двум. Тогда на входе механизма после обработки введенной аксиомы приставкой получим последовательность $f f + f f + f b +$. Вот, собственно, и все. При помощи описанного несложного виртуального устройства можно строить множество самых разнообразных фрактальных форм – от традиционных математических фракталов, таких, как, например, снежинка Коха или кривая Гильберта, до структур, очень напоминающих растительную или подводную жизнь.

На рис. 12 приведено два примера фрактальных структур, построенных при помощи L-системы.

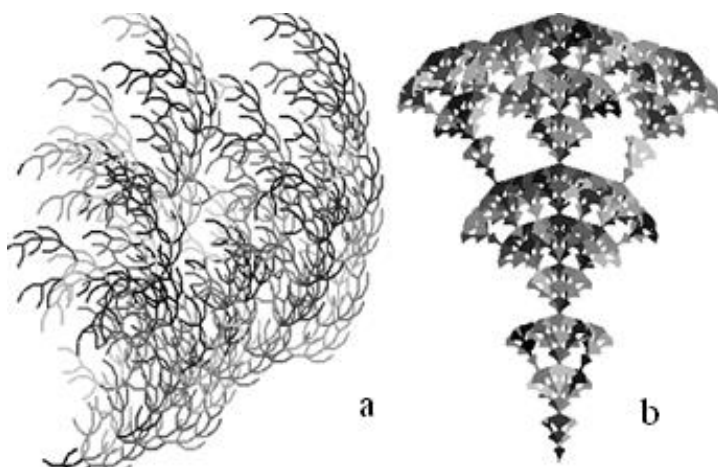


Рис. 12. Фрактальные рисунки L-системы

Для создания фрактальных структур рис. 12 а и б используются соответствующие строки команд

$A = \{ " ", "-", "f", "+", "f", "+", "[", "+", "f", "-", "f", "-", "]", "-", "[", "-", "f", "+", "f", "+", "f", "]" \};$

$$B = \{ " ", "f", "[", "+", "f", "f", "]", "[", "-", "f", "f", "]", "f", "[", "-", "f", "]", "[", "+", "f", "]", "f" \};$$

Метод L-систем позволяет уменьшать или увеличивать глубину рекурсии ветки. А меняя закон движения можно получать разные изображения (рис. 13).



Рис. 13. Коллекция фракталов L-системы

В заключении нужно отметить, что фракталы это область математического искусства и интуиции, когда с помощью простейших формул и алгоритмов получаются картины необычайной красоты и сложности. В контурах построенных изображений нередко угадываются листья, деревья и цветы. Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в компьютерной графике это построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур.

Склонность фракталов походить на горы, цветы и деревья эксплуатируется некоторыми графическими редакторами, например фрактальные облака из 3D studio MAX, фрактальные горы в World Builder. Фрактальные деревья, горы и целые пейзажи задаются простыми формулами, легко программируются и не распадаются на отдельные треугольники и кубики при приближении.

В физике фракталы используются благодаря уникальному свойству повторять очертания многих объектов природы. Фракталы позволяют приближать деревья и горные поверхности с более высокой точностью, чем приближения наборами отрезков или многоугольников (при том же объеме хранимых данных). Фрактальные модели, как и природные объекты, обладают "шероховатостью", и свойство это сохраняется при сколь угодно большом увеличении модели. Наличие на фракталах равномерной меры, позволяет применять интегрирование, теорию потенциала, использовать их вместо стандартных объектов в уже исследованных уравнениях.

Литература

1. Гонсалес Р., Вудс Р.. Цифровая обработка изображений. М.: Техно сфера, 2005. – 1072 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М.: Техно сфера, 2006. – 616 с.
3. Гаврилов В. П. Теория цифровых изображений. Харьков: ИД «ИНЖЭК», 2009. – 232 с.
4. Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теорія цифрових зображень» для студентів галузі знань 0515 «Видавничо–поліграфічна справа» всіх форм навчання / укл. Гаврилов В. П. – Х.: Вид. ХНЕУ, 2012. – 92 с.
5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.