МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Лебедєва І. Л.
Норік Л. О.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Лабораторний практикум

Харків. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014

УДК 519.2(076.5)
ББК 22.17я73
Л33

Рецензенти: докт. техн. наук, професор кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки *Романова Т. Є.*; докт. екон. наук, доцент, в. о. завідувача кафедри економічної кібернетики та маркетингового менеджменту Національного технічного університету «ХПІ» *Кузьминчук Н. В.*; докт. техн. наук, професор кафедри вищої математики Харківського державного університету харчування і торгівлі *Синєкоп Н. С.*

Затверджено на засіданні вченої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.
Протокол № 7 від 24.02.2014 р.

Лебедєва І. Л.
Л33 Вища та прикладна математика. Лабораторний практикум для студентів напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент» / І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 200 с. (Укр. мов.)

Наведено лабораторні роботи, перелік яких повністю охоплює програму навчальної дисципліни. Розглянуто основні принципи й концепції побудови математичних моделей широкого кола економічних задач, до розв'язання яких можуть бути застосовані методи теорії ймовірностей, математичної статистики та математичного програмування. Показано ефективність застосування програмного забезпечення MS Excel до визначення розв'язку багатовимірних економічних задач. За кожною лабораторною роботою надано завдання для самостійного розв'язання та питання для самоперевірки.

Рекомендовано для студентів економічних спеціальностей як навчальний матеріал у процесі неперервної математичної підготовки, а також для викладачів для проведення занять та організації індивідуальної роботи студентів.

ISBN 978-966-676-552-2 **УДК 519.2(076.5)**
ББК 22.17я73

Передмова

«Вища та прикладна математика» є нормативною навчальною дисципліною природничо-наукового циклу. Вона входить до складу структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів з напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент» галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» і складається з двох частин, кожна з яких, у свою чергу, поділяється на два модулі. Так, перша частина – вища математика – містить 23 теми, які стосуються основ лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числень функцій однієї та декількох змінних, а також диференціальних рівнянь та рядів. Ці теми об’єднані у перший та другий змістові модулі. Вища математика викладається в першому семестрі. Друга частина навчальної дисципліни – прикладна математика – містить основні відомості з теорії ймовірностей та математичної статистики, а також математичні моделі оптимізаційних задач, методи їх побудови та пошуку розв’язку. Ця частина дисципліни представлена у 24 темах, які об’єднані у третій та четвертий змістові модулі, і викладається у другому семестрі.

Метою вивчення навчальної дисципліни є формування цілісної системи теоретичних знань математичного апарату, необхідного для розв’язання теоретичних та практичних задач у професійній діяльності компетентного фахівця в галузі менеджменту і адміністрування, вміння аналітично мислити та навичок застосування математичного апарату до формалізації реальних процесів та явищ, їх дослідження за допомогою математичних моделей, а також до розв’язання економічних задач щодо напряму розвитку економічних процесів у разі зміни їх параметрів та обґрунтування керівного впливу на процеси, що досліджуються.

Завдання навчальної дисципліни полягає в засвоєнні основ методології дослідження прикладних задач економіки з використанням математичного апарату, набуття студентами досвіду самостійної роботи з літературою як з математики, так і з прикладних питань.

Предметом даної навчальної дисципліни є математичний інструментарій дослідження і розв’язання практичних задач економіки, а її об’єктом – методи обробки та аналізу статистичних даних, а також принципи побудови економіко-математичних моделей для розв’язання оптимізаційних економічних задач.

Завдяки вивченню навчальної дисципліни студент набуває навичок обробки статистичних даних, оцінювання числових характеристик одновимірної та двовимірної випадкових величин, формулювання статистичних гіпотез та побудови статистичних критеріїв для їх перевірки, а також застосовування алгоритмів побудови економіко-математичних моделей оптимізаційних задач і пошуку їх розв'язків. Застосування такої форми навчання, як лабораторні роботи, допомагає студентові вдосконалити знання програмного середовища MS Excel та його надбудов **Анализ данных** і **Поиск решения**[1], що надалі сприятиме широкому застосуванню комп'ютерних технологій у професійній діяльності під час розв'язання економічних задач великої вимірності.

Знання та навички, набуті студентом у результаті вивчення навчальної дисципліни, складають основу аналітично-дослідницьких **компетентностей** сучасного фахівця в галузі менеджменту й адміністрування у контексті Національної рамки кваліфікацій, серед них такі:

вміння застосовувати набуті теоретичні знання для побудови математичних моделей і розв'язання відповідних задач та ситуаційних вправ;

навички самостійно визначати алгоритм математичних обчислень;

навички відстежувати основні тенденції та напрями розвитку математичної науки, самостійно працювати із науково-методичною літературою із застосуванням для цього сучасних інформаційних технологій;

вміння у випадку складного завдання використовувати метод розкладання від складного до простого, тобто зведення окремих складових вихідного завдання до більш простих;

вміння відокремлювати незалежні та залежні фактори, обчислювати середні показники, проводити аналіз поточних результатів із метою уточнення типу та форми зв'язку між змінними;

вміння аналізувати тенденції розвитку економічний процесів і на основі отриманих розрахунків прогнозувати напрям та наслідки подальшого розвитку процесу;

вміння використовувати отримані знання для подальшого створення відповідних економіко-математичних моделей та їх розв'язання (визначення балансових відношень, обчислення коефіцієнтів витрат, визна-

[1] Тут і надалі спеціальні терміни, що використовуються в програмному середовищі MS Excel, наведені мовою оригіналу і виділяються напівжирним шрифтом.

чення залежності попиту та пропозиції, порівняння ефективності фінансових операцій та ін.);

навички побудови математичних моделей оптимізаційних задач і визначення їх розв’язку;

вміння перевіряти стійкість розв’язку щодо зміни параметрів моделі;

розуміння загальних принципів перетворення задачі дослідження системи в умовах ризику в задачу дослідження системи в умовах визначеності;

вміння аналізувати отримані результати і з їх урахуванням робити обґрунтовані висновки на достатньо високому професійному рівні;

навички застосування програмного середовища MS Excel у дослідженні економічних процесів;

здатність автономно і відповідально виконувати завдання;

комунікації щодо взаємодії студентів у процесі спільного розв’язання проблем і прийняття узгоджених рішень.

Оволодіння основами теорії ймовірностей та математичної статистики, вміння застосовувати методи математичного програмування дозволяють ефективно розв’язувати практичні задачі економіки, використовувати системний підхід до аналізу факторів, що визначають розвиток економічних процесів, будувати математичні моделі системи для визначення керівного впливу факторів з метою оптимізації її стану.

Навчальна дисципліна є необхідним ланцюгом неперервної аналітико-математичної підготовки економістів. Вона передує вивченню дисциплін економічного спрямування, які передбачають використання інструментарію математичної статистики й економіко-математичного моделювання для розв’язання суто економічних задач.

Навчальним планом передбачається проведення у другому семестрі лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика». Лабораторні роботи вміщують навчальний матеріал, що відповідає програмі навчальної дисципліни і вимогам галузевого стандарту вищої освіти МОН України на базі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра, спеціаліста та магістра, що розроблена Науково-методичною комісією з економіки й підприємництва МОН України.

Необхідною умовою успішного засвоєння навчального матеріалу з навчальної даної навчальної дисципліни є самостійна робота студентів із додатковою літературою та вміння застосовувати пакети прикладних програм у процесі виконання лабораторних робіт та індивідуальних навчально-дослідних завдань за допомогою комп'ютера. Застосування програмного середовища MS Excel безпосередньо як потужного калькулятора, тобто проведення розрахунків шляхом уведення потрібних формул до комірок електронних таблиць, сприяє більш глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу. Поряд із цим використання вбудованих функцій і таких надбудов MS Excel, як **Анализ данных** і **Поиск решения**, дозволяє швидко й ефективно розв'язувати не тільки навчальні приклади, але й складні економічні задачі великої вимірності, що мають практичне значення. Застосування пакета прикладних програм MS Excel у процесі виконання лабораторних робіт ґрунтується на тому, що на сьогодні програмне середовище MS Excel є однією з найбільш популярних і зручних програм, які призначені для роботи з електронними таблицями, отже, воно є звичним робочим середовищем для сучасного фахівця в галузі економіки та менеджменту.

Додаток MS Excel входить до складу стандартного пакета офісних додатків Microsoft Office. Він надає користувачам широкі можливості щодо здійснення всіляких статистичних розрахунків та розв'язання оптимізаційних задач, а також щодо роботи з графічними інструментами. На сучасному етапі MS Excel є основним засобом, що допомагає офісним співробітникам успішно створювати або форматувати таблиці, здійснювати їх аналіз, управляти і обмінюватися даними, складати діаграми, виконувати обчислення будь-якої складності. Додаток MS Excel має власну мову програмування – об'єктно-орієнтовану мову Visual Basic for Applications (VBA), що може застосовуватися користувачами в процесі розробки макросів для MS Excel.

У процесі підготовки лабораторних робіт використовувалась сучасна версія MS Excel 2010 – динамічна програма, що дозволяє прораховувати різні варіанти розвитку економічних процесів, подаючи їх у зручному для читання вигляді за допомогою унікальних засобів візуалізації. Потужні засоби аналізу, що містить надбудова **Пакет анализа**, дозволяють виділяти й відстежувати важливі тенденції розвитку економічних процесів. Крім того, будь-які файли легко можна відправити в Інтернет, що дає можливість роботи над ними в режимі on-line разом з іншими користувачами.

1. План лабораторних робіт

Лабораторна робота з навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» – це форма заняття, під час якого студент під керівництвом викладача здійснює виконання практичного завдання за допомогою комп'ютера відповідно до заданої теми. Проведенню лабораторної роботи з певної теми передують засвоєння основних теоретичних положень з цієї теми та формування практичних навичок.

Лабораторна робота виконується в комп'ютерному класі з використанням електронних таблиць MS Excel 2010.

Перелік тем лабораторних робіт, їх зміст та література з кожної роботи наведені в таблиці.

Таблиця

План лабораторних робіт

Теми лабораторних робіт	Питання для опрацювання (за модулями та темами)	Кількість годин	Література
1	2	3	4
Змістовий модуль 3. Теорія ймовірностей та математична статистика			
№ 1. Класичне означення ймовірності та елементи комбінаторики. Формула повної ймовірності та формула Байєса	Обчислення ймовірностей за класичним визначенням із застосуванням елементів комбінаторики за теоремами додавання та множення ймовірностей. Діаграми Вена – Ейлера як геометрична інтерпретація ймовірності події. Застосування формули повної ймовірності (апріорна ймовірність) та формули Байєса (апостеріорна ймовірність)	2	Основна: [2 – 4; 7; 11]. Додаткова: [12; 14; 19; 23]
№ 2. Біноміальний закон розподілу, його основні числові характеристики. Теореми Муавра – Лапласа та Пуассона в дослідженні асимптотичної поведінки біноміального розподілу	Побудова біноміального закону розподілу для певних значень p та n на базі моделі повторних випробувань за схемою Бернуллі, визначення основних числових характеристик розподілу. Дослідження впливу факторів p та n на форму многокутника розподілу: $n \to \infty$ (теорема Муавра – Лапласа) та $p \to 0$ при $n \to \infty$ (теорема Пуассона)	2	Основна: [3; 4; 7 – 8; 11]. Додаткова: [14; 19; 23]

Продовження таблиці

1	2	3	4
№ 3. Двовимірна дискретна випадкова величина, її закон розподілу та числові характеристики	Обчислення основних числових характеристик дискретної двовимірної випадкової величини. Побудова умовних законів розподілу. Дослідження щільності кореляційного зв'язку за коефіцієнтом кореляції	2	Основна: [3; 4; 7 – 8; 11]. Додаткова: [14; 15; 19; 23]
№ 4. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки. Перевірка статистичних гіпотез щодо закону розподілу	Визначення точкових та інтервальних оцінок основних числових характеристик розподілу неперервної випадкової величини. За допомогою надбудови **Анализ данных** MS Excel побудова емпіричного закону розподілу. На прикладі нормального, рівномірного та експоненціального розподілів перевірка гіпотези щодо закону розподілу в генеральній сукупності	2	Основна: [3; 4; 7 – 8; 11]. Додаткова: [15; 19; 23]
Змістовий модуль 4. Математичне програмування. Дослідження операцій			
№ 5. Симплексний метод розв'язання задач лінійного та цілочислового програмування	Набування навичок застосування симплекс-методу до розв'язання задач лінійного та цілочислового програмування на прикладі визначення оптимального плану задачі про використання сировини за допомогою вбудованих функцій MS Excel	2	Основна: [1; 2; 5; 9; 10]. Додаткова: [12; 13; 16 – 20, 24; 25]
№ 6. Теорія двоїстості. Дослідження стійкості оптимального плану	Оволодіння методикою побудови математичної моделі двоїстих задач та їх розв'язання за теоремами двоїстості, а також симплексним методом. Дослідження стійкості оптимального плану використання ресурсів щодо зміни параметрів моделі за допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel	2	Основна: [1; 5; 9; 10]. Додаткова: [12; 13; 16 – 25]
№ 7. Класична транспортна задача. Задача про оптимальний розподіл операцій за обладнанням як транспортна задача	Побудова математичної моделі задачі про оптимальний розподіл операцій за видами обладнання як класичної транспортної задачі та її розв'язання із застосуванням надбудови **Поиск решения** MS Excel	2	Основна: [1; 5; 6; 9; 10]. Додаткова: [12; 13; 16 – 25]

Закінчення таблиці

1	2	3	4
№ 8. Оптимізаційні задачі управління запасами	На прикладі моделі управління запасами з урахуванням можливості їх накопичення засвоєння основних положень динамічного програмування та визначення оптимального плану зі застосуванням надбудови **Поиск решения** MS Excel	2	Основна: [1; 5; 9; 10]. Додаткова: [12; 13; 16 – 25]
№ 9. Задача масового обслуговування як задача стохастичного програмування. Задачі заміни	Розв'язання задач масового обслуговування. Побудова математичної моделі черги зі скінченною кількістю завдань і визначення її оптимального плану. Економічний аналіз моделі заміни	2	Основна: [1; 5; 9; 10]. Додаткова: [12; 13; 16 – 25]

Вихідні дані завдання для самостійного розв'язання за кожною лабораторною роботою студент визначає за своїм номером у списку навчальної групи.

Відповідно до змісту лабораторної роботи, виконання завдання передбачає реалізацію можливостей безпосереднього застосування електронних таблиць MS Excel як потужного калькулятора у поєднанні з використанням вбудованих функцій програмного середовища MS Excel та його надбудов **Анализ данных** та **Поиск решения**.

Для зарахування виконання лабораторної роботи студенту необхідно оформити індивідуальний звіт, у якому викладається економічний сенс задачі, що запропонована для самостійного розв'язання, наведено її математичну модель, знайдено розв'язок задачі за допомогою вбудованих функцій і надбудов MS Excel, а також здійснено аналіз отриманих результатів і наведено висновки. Крім того, студент повинен володіти теоретичними знаннями, що відповідають темі лабораторної роботи. Для їх перевірки та визначення ступеня самостійності виконання лабораторної роботи студент під час її захисту повинен відповісти на контрольні запитання з теми даної роботи. Приклад контрольних питань наведено наприкінці кожної лабораторної роботи. В електронному вигляді результати проведених обчислень необхідно подати викладачеві наприкінці заняття, а на початок наступного заняття – надати друкований варіант звіту про виконання лабораторної роботи.

На титульному аркуші звіту студент повинен вказати номер лабораторної роботи та її назву, свої П. І. Б., групу та факультет, а також

П. І. Б. викладача, під керівництвом якого була виконана лабораторна робота та прийнята до захисту.

Оцінювання знань студента за темою лабораторної роботи здійснюється за результатами її виконання та захисту, при цьому приділяється увага знанням теоретичного матеріалу, правильності висновків, повноті економічної інтерпретації набутих результатів та дотримання терміну виконання. Максимальний бал, який може отримати студент, визначається за технологічною картою дисципліни.

2. Зміст лабораторних робіт та інструкційна карта їх виконання

Змістовий модуль 3. Теорія ймовірностей та математична статистика

Лабораторна робота № 1

1.1. Тема роботи: класичне означення ймовірності та елементи комбінаторики. Статистичне та геометричне означення ймовірності. Умовна ймовірність та поняття про незалежність подій. Формула повної ймовірності та формула Байєса.

1.2. Мета роботи – засвоєння основних принципів роботи з табличним процесором MS Excel, ознайомлення з вбудованими функціями та надбудовами MS Excel щодо їх можливостей, а також практичне застосування цих функцій до обчислення ймовірностей випадкових подій за класичним означенням і за допомогою теорем додавання та множення ймовірностей, опрацювання питань щодо обчислення умовної ймовірності та застосування формули повної ймовірності й формули Байєса.

1.3. Базові принципи роботи з MS Excel

Найбільш поширеним способом реалізації обчислювальних операцій, що пов’язані з автоматичним опрацюванням даних, є використання електронних таблиць. Табличний процесор MS Excel є тим універсальним засобом, який зручно застосовувати для роботи з електронними таблицями. Він має широкий спектр сервісних можливостей, які використовуються для моделювання економічних процесів великої вимірності.

Запуск MS Excel здійснюється або через головне меню за допомогою команд **Пуск** $\Rightarrow$ **Все программы** $\Rightarrow$ **Microsoft Office** $\Rightarrow$ **Microsoft Office Excel 2010**, або з використанням попередньо створеного ярлика програми, що міститься на робочому столі. Після запуску програми на моніторі з'являється чистий **Лист** робочої книги. ***Робоча книга*** – це файл, що має розширення xls. Кожний **Лист** робочої книги є окремою робочою таблицею, стовпці якої позначені латинськими літерами, а рядки – арабськими цифрами. Відповідно комірка електронної таблиці, що розташована, наприклад, на перетині стовпця **Е** та **2**-го рядка, має позначення **Е2**.

У процесі обчислень за допомогою електронних таблиць MS Excel можна безпосередньо в комірку вводити ***формули***, за якими будуть виконуватись обрахування, або застосовувати вбудовані функції та надбудови. Формула складається з однієї або кількох адрес комірок, чисел і знаків, що визначають математичні дії: **< + >**, **< – >**, **< * >**, **< / >** та **< ^ >**. Кожна формула повинна починатися зі знака **< = >**. Під час обчислень використовуються дані, що містяться у відповідних комірках робочої книги, або безпосередньо вводяться числові дані. По суті, будь-яка ***вбудована функція*** – це формула, що побудована заздалегідь, або декілька таких формул, що пов'язані між собою. Кожна вбудована функція має назву або власне ім'я. Для проведення обчислень із застосуванням вбудованої функції необхідно вказати назву цієї функції та її аргументи, які є вихідними даними для виконання обчислень. У загальному випадку для виконання обчислень у комірку, до якої буде виведено результат, записують: **=НАЗВА ФУНКЦІЇ(Аргументи)**. Аргументами функції можуть бути числа, текст, логічні значення, масиви, значення помилок чи посилання, а також формули. У свою чергу, ці формули можуть містити інші функції. Функції, що є аргументом іншої функції, називаються ***вкладеними***. Так, MS Excel дозволяє використовувати до семи рівнів вкладеності функцій. У деяких випадках перелік аргументів функції може бути пустим. Наприклад, якщо під час обчислень необхідно ввести число π, то це здійснюється за допомогою формули **=ПИ()**, яка повертає його з точністю 15 знаків після десяткової коми.

Якщо вбудована функція містить декілька аргументів, то їх необхідно відділяти крапкою з комою. Функція може мати як фіксовану, так і довільну кількість аргументів. Так, функції **СУММ** або **ПРОИЗВЕД** можуть містити до 255 аргументів.

Слід підкреслити, що при застосуванні вбудованих функцій необхідно правильно обирати функцію і вказувати її аргументи, оскільки формули, за якими здійснюються обчислення, є прихованими від користувача, тобто вбудовані функції MS Excel працюють як «чорна скриня», що видає тільки готовий результат, не розкриваючи при цьому сам процес обчислення.

Деякі дії в MS Excel можна виконати значно швидше, якщо використовувати функціональні клавіші (табл. 1.1) та клавіатурні комбінації, так звані «гарячі» клавіші (табл. 1.2).

Таблиця 1.1

Функціональні клавіші

Клавіша	Функція	Клавіші			
		Shift	Ctrl	Ctrl + Shift	Alt + Shift
1	2	3	4	5	6
F1	Вивести довідку чи запустити майстер відповідей	Довідка типу «Що це?»	–	–	Вставити новий аркуш
F2	Перейти до виправлення вмісту комірки і рядків формул	Перейти до виправлення примітки комірки	Вивести вікно **Сведения**	–	–
F3	Вставити ім'я у формулу	Запустити майстер функцій	Присвоїти ім'я	Створити імена за текстом комірок	–
F4	Повторити останню дію; посилання на комірку перетворити на абсолютне	Повторити останній перехід чи пошук	Закрити вікно	–	–
F5	Виконати команду **Перейти** (меню **Правка**)	Виконати команду **Найти** (меню **Правка**)	Відновити вихідний розмір вікна	–	–
F6	Перейти в наступну ділянку вікна	Перейти в попередню ділянку вікна	Перейти в наступну книгу	Перейти в попередню книгу	–

Закінчення табл. 1.1

1	2	3	4	5	6
F7	Виконати команду **Орфография** (меню **Сервис**)	–	Виконати команду **Переместить** (меню документа)	–	–
F8	Включити режим розширення виділеної ділянки	Включити режим переходу до наступної частини виділеної ділянки	Виконати команду **Размер** (віконне меню документа)	–	–
F9	Перерахувати всі аркуші в усіх відкритих книгах	Перерахувати поточний аркуш	Згорнути вікно документа	–	–
F10	Перейти в рядок меню	Вивести контекстне меню	Розгорнути вікно документа	–	–
F11	Створити діаграму	–	–	–	–
F12	Виконати команду **Сохранить как** (меню **Файл**)	Виконати команду **Сохранить** (меню **Файл**)	Виконати команду **Открыть** (меню **Файл**)	Виконати команду **Печать** (меню **Файл**)	–

Таблиця 1.2

«Гарячі» клавіші

Операція	Комбінація клавіш
1	2
Клавіші для виправлення вмісту комірок чи рядка формул	
Увести набрані дані в комірку	Enter
Видалити набрані дані	Esc
Повторити останню дію	F4 або Ctrl + Y
Почати новий абзац у поточній комірці	Alt + Enter
Видалити символ або виділені символи ліворуч від курсору	Backspace
Вставити в комірку символ табуляції	Ctrl + Alt + Tab
Видалити символ або виділені символи праворуч від курсору	Delete

Продовження табл. 1.2

1	2
Перемістити курсор на один символ угору, вниз, ліворуч чи праворуч	Клавіші зі стрілками
Перемістити курсор на початок рядка	Home
Перейти до виправлення примітки комірки	Shift + F2
Створити імена за текстом комірок	Ctrl + Shift + F3
Заповнити внизу	Ctrl + D
Заповнити праворуч	Ctrl + R
Заповнити виділені комірки набраним значенням	Ctrl + Enter
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої знизу	Enter
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої вгорі	Shift + Enter
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої праворуч	Tab
Увести дані в комірку та перейти до комірки, розташованої ліворуч	Shift + Tab
Почати формулу	=
Перейти в режим виправлення вмісту комірки	F2
Очистити рядок формул після зазначення комірки чи видалити в рядку формул символ ліворуч від курсору	Backspace
Вставити ім’я функції у формулу	Shift + F3
Присвоїти ім’я	Ctrl + F3
Перерахувати всі аркуші в усіх відкритих книгах	F9 чи Ctrl + =
Перерахувати поточний аркуш	Shift + F9
Виконати автопідсумовування	Alt + =
Увести поточну дату	Ctrl + ;
Увести поточний час	Ctrl + Shift + :
Скасувати результати виправлення комірки чи рядки формул	Esc
Завершити виправлення комірки	Enter
Почати новий абзац	Alt + Enter
Вставити символ табуляції	Ctrl + Alt + Tab
Скопіювати вміст верхньої комірки в поточну комірку чи в рядок формул	Ctrl + Shift + “
Увести набрану формулу як формулу масиву	Ctrl + Shift + Enter
Скопіювати формулу верхньої комірки в поточну комірку чи в рядок формул	Ctrl + ‘ (апостроф)
Відобразити список автовведення	Alt + ↓ (Стрілка вниз)

Закінчення табл. 1.2

1	2
Клавіші для форматування даних	
Виконати команду **Стиль** (меню **Формат**)	Alt + ‘ (апостроф)
Виконати команду **Ячейка** (меню **Формат**)	Ctrl + 1
Виконати форматування загальним числовим форматом	Ctrl + Shift + ~
Виконати форматування грошовим форматом із двома десятковими знаками після крапки (від’ємні числа відображаються в круглих дужках)	Ctrl + Shift + $
Виконати форматування процентним форматом з відсутньою дробовою частиною	Ctrl + Shift + %
Виконати форматування науковим форматом із двома десятковими знаками після коми	Ctrl + Shift + ^
Виконати форматування форматом для дат з полями дня, місяця і року	Ctrl + Shift + #
Виконати форматування форматом для часу з полями годин і хвилин та індексами A.M. чи P.M.	Ctrl + Shift + @
Виконати форматування форматом із двома десятковими знаками після коми	Ctrl + Shift+ !
Вставити рамку структури	Ctrl + Shift + &
Видалити всі межі	Ctrl + Shift + _
Виконати чи видалити форматування жирним шрифтом	Ctrl + И
Виконати чи скасувати форматування курсивом	Ctrl + Ш
Підкреслити текст чи видалити лінію підкреслення	Ctrl + Г
Перекреслити текст чи видалити лінію перекреслення	Ctrl + 5
Сховати рядки	Ctrl + 9
Показати рядки	Ctrl + Shift + (
Сховати стовпці	Ctrl + 0 (нуль)
Показати стовпці	Ctrl + Shift +)

Для роботи з функціями в MS Excel є спеціальний засіб – **Мастер функций**. Звернутись до нього можна, натиснувши кнопку **Вставка функции** f_x, що розташована на панелі інструментів **Главная**, або набравши комбінацію клавіш **<Shift+F3>**. Також можна набрати команду **Формулы** $\Rightarrow$ **Вставить функцию**. Будь-яка з цих дій відкриває діалогове вікно **Мастер функций – шаг 1 из 2** (рис. 1.1). Для зручності функції в MS Excel об’єднані за такими категоріями: логічні та текстові функції, функції перевірки властивостей та значень, функції посилання і масивів, функції дати і часу, функції керування базами даних і списками, функції надбудов та програмування, аналітичні функції оперативної обробки трансакцій OLAP (Online Transaction Processing), математичні, статистичні, інженерні, фінансові та інформаційні функції. У діалоговому вікні **Мастер функций – шаг 1 из 2** міститься перелік категорій функцій (список **Категория**) та доступних функцій (список **Выберите функцию**). Список **Категория** містить також опцію **Полный алфавитный список функций**.

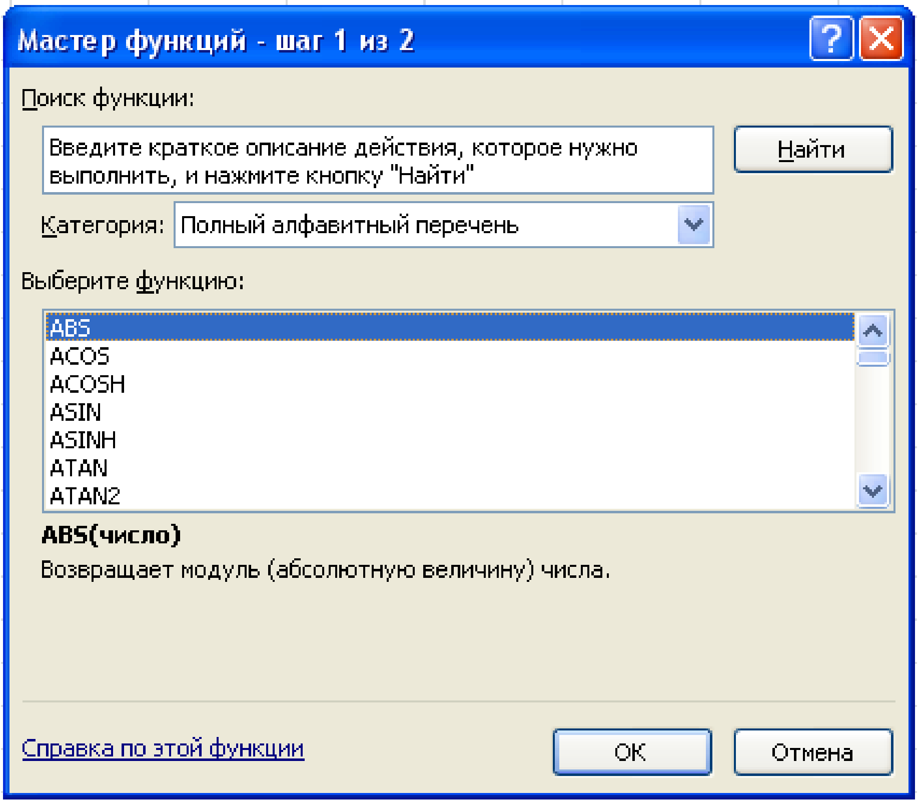


Рис. 1.1. **Вікно панелі «Мастер функций»**

У процесі виконання лабораторних робіт застосовуються вбудовані функції категорії **Математические** та **Статистические**. У MS Excel ці категорії функцій представлені достатньо широко.

Побудова формули починається зі знака **< = >**. Після введення імені функції в діалоговому вікні **Мастер функций – шаг 1 из 2** треба натиснути **OK**, що призведе до появи діалогового вікна **Аргументы функции**. Після його заповнення в діалоговому вікні відображаються аргументи функції та результати обчислень. Щоб вивести результат розрахунків у комірку листа MS Excel, натискаємо **OK.**

Інформацію щодо функції можна отримати з її діалогового вікна **Аргументы функции**. Якщо цього виявиться недостатньо, то повну інформацію можна отримати, натиснувши напис **Справка по этой функции**, що міститься в лівому нижньому куті цього ж вікна.

Ввести функцію у формулу можна безпосередньо з клавіатури. При цьому MS Excel 2010 динамічно розкриває список функцій, що починаються так само, як і текст, що вводиться. Після введення функції цей список автоматично зникає. Як тільки ім'я функції набране і відкрита дужка, поруч із рядком формул з'являється підказка, де відображається повний синтаксис функції, тобто назва функції і список її аргументів. Причому той аргумент, який необхідно ввести на даний момент, визначено напівжирним шрифтом.

Слід зауважити, що для набору імені функції можна застосовувати як малі, так і великі літери. Якщо ім'я набране правильно, то малі літери автоматично перетворюються на великі. Якщо ж цього не відбулось, то це означає, що в імені функції було зроблено помилку.

Деякі вбудовані функції повертають масиви значень або запитують масив значень як аргумент. Щоб здійснити обчислення за допомогою формули масиву, потрібно вивести масив у діапазон клітинок, що має таку саму кількість рядків і стовпців, що й аргументи масиву. Формули масиву створюються так само, як і інші формули, за винятком того, що в цьому випадку для введення формули слід натискати комбінацію клавіші **<Ctrl+Shift+Enter>.** Електронна таблиця MS Excel має ряд вбудованих функцій для роботи з масивами, наприклад, функція **МУМНОЖ()**, що повертає добуток матриць, та інші.

При розв'язанні оптимізаційних задач може виникати необхідність у порівнянні результатів розрахунків, якщо одним і тим же коміркам надавати різних значень. І це необхідно зробити таким чином, щоб не втратити попередні результати. MS Excel дозволяє це зробити завдяки застосуванню такого інструмента, як **Диспетчер сценариев**. ***Сценарієм*** називають набір значень, які задані для однієї чи декількох змінних комірок у моделі «**что – если»**.

Для створення нового сценарію спочатку необхідно вибрати розділ **Данные,** а потім опцію **Анализ «что – если»** $\Rightarrow$ **Диспетчер сценариев,** внаслідок чого відкривається вікно, що містить список сценаріїв. Спочатку він порожній. Необхідно натиснути кнопку **Добавить** для того, щоб з'явилось діалогове вікно **Добавление сценария** (рис. 1.2).

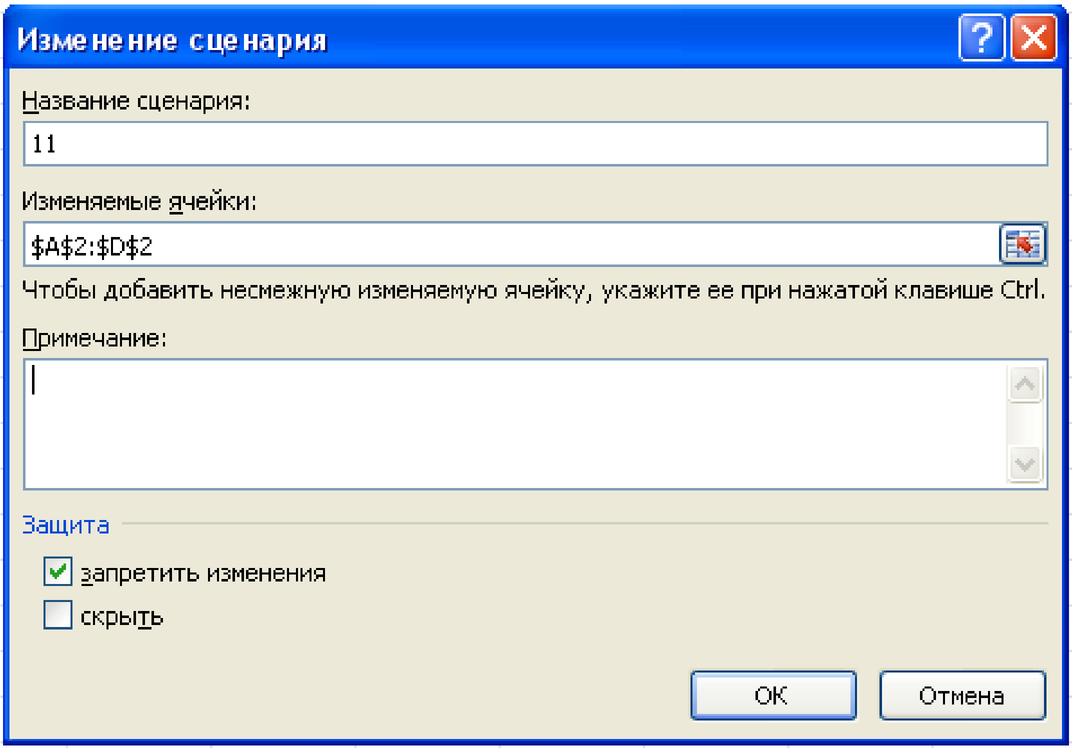


Рис. 1.2. **Вікно створення сценарію**

У цьому вікні потрібно вказати ім'я сценарію, дати посилання на комірки, що будуть змінюватися за даним сценарієм (розділяючи їх крапкою з комою), та написати коментарі до сценарію в поле **Примечание**. Натискання кнопки **ОК** виводить на екран нове діалогове вікно, в якому потрібно ввести значення комірок за певним сценарієм (рис. 1.3). Імена, які були надані змінним коміркам, відображаються в діалоговому вікні.

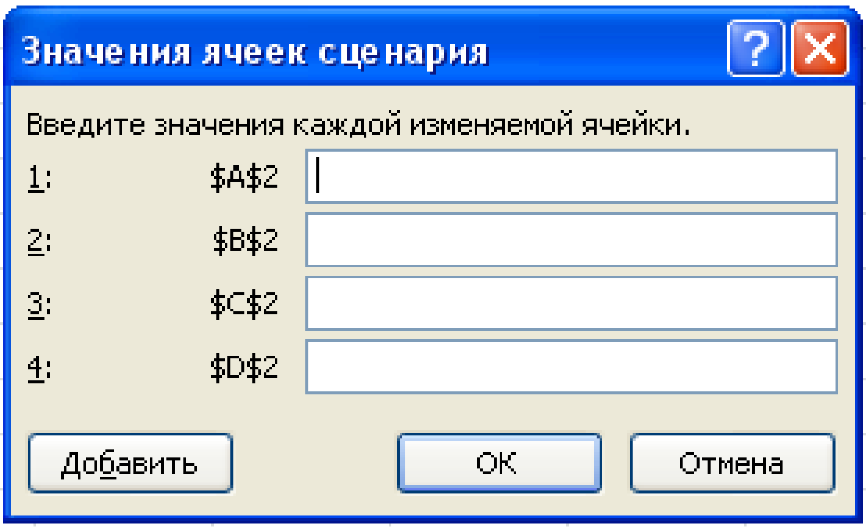


Рис. 1.3. **Встановлення значень комірок за сценарієм**

У полі діалогового вікна **Значения ячеек сценария** можна записувати як числа, так і формули. Щоб створити новий сценарій, знову натискають кнопку **Добавить** і повторюють ту ж операцію стільки разів, скільки заплановано розглянути сценаріїв.

1.4. Теоретичні положення

Вихідним поняттям теорії ймовірності є ***випробування*** (експеримент). Під випробуванням розуміють спосіб дослідження процесів та явищ за чітко визначених умов, які дозволяють відтворювати явище достатню кількість разів. ***Випадкова подія*** – це наслідок, який може відбутися чи не відбутися як результат проведення випробування. Для позначення випадкових подій використовують великі літери латини: A, B, C та ін. або S. ***Імовірність події*** $P(S)$ є кількісною мірою об'єктивної можливості реалізації цієї події.

Сукупність усіх рівноможливих результатів випробування визначають як ***простір елементарних подій*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, де ω_i – елементарний наслідок випробування, тобто ***елементарна подія***, що належить простору Ω. При цьому $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$. Випадкову подію можна подати як підмножину простору елементарних подій, тобто $S \subseteq \Omega$. Елементарні події, що належать до цієї підмножини, називаються ***сприятливими*** щодо появи події S. Якщо підмножина елементарних подій, що утворює подію S, є пустою, то така подія називається ***неможливою*** і позначається $\varnothing$. Якщо подія S містить усі елементарні події даного простору елементарних подій, тобто за заданих умов випробувань вона не може не відбутися, то така подія є ***вірогідною*** і позначається Ω.

Подією $\overline{S}$, що є ***протилежною*** до події S, є подія, для якої сприятливі всі ті елементарні події, що доповнюють дану випадкову подію S до простору елементарних подій.

Події, що не мають спільних сприятливих елементарних подій, називаються ***несумісними***. Випадкові попарно несумісні події $S_1; S_2; \ldots S_m$, що визначені на одному й тому ж просторі елементарних подій $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$, утворюють у сукупності ***повну групу несумісних випадкових подій***, якщо при реалізації будь-якої елементарної події $\omega_i \subset \Omega$ ($i = \overline{1,n}$) відбувається одна з випадкових подій S_j ($j = \overline{1,m}$).

Кожній події S із множини подій, що можуть бути побудовані на множині $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$, поставлено у відповідність невід'ємне дійсне число $P(S) \geq 0$, яке й визначається як імовірність події S, при цьому для вірогідної події $P(\Omega) = 1$.

За ***класичним означенням*** імовірність події $P(S)$ визначається співвідношенням:

$$P(S) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де n – загальна кількість рівноможливих елементарних подій, які утворюють простір елементарних подій Ω;

m – кількість сприятливих елементарних подій, тобто подій, що супроводжуються появою події S.

З аксіом теорії ймовірностей випливає, що ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Формула (1.1) застосовується в тому випадку, коли множина елементарних подій Ω є дискретною. Однак множина Ω може бути й неперервною. Якщо простір елементарних подій містить нескінченну множину елементів і йому можна поставити у відповідність певний геометричний простір, а ймовірність кожної події залежить тільки від міри цієї події, а не від її розташування, то говорять, що на цьому просторі визначена ***геометрична ймовірність***. Тоді ймовірність кожної події визначається як відношення міри цієї події до міри простору випадкових подій:

$$P(S) = \frac{mes\ g}{mes\ G}, \tag{1.2}$$

де G – область, що відповідає множині елементарних подій Ω;

g – область, що відповідає підмножині елементарних подій, які є сприятливими для появи події S.

Для ілюстрації основних понять теорії ймовірностей застосовують ***діаграми Ейлера – Венна***, тобто геометричні схеми, що відображують дії з підмножинами. На цих діаграмах множині, що відображає простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, ставлять у відповідність прямокутник. Підмножину елементарних подій, що є сприятливими для даної випадкової події, виділяють у вигляді круга на цьому прямокутнику. Імовірність події визначається як відношення площі круга до площі всього прямокутника. Якщо випадкові події сумісні, то відповідні їм круги перетинаються. На рис. 1.4 наведено діаграму Ейлера – Венна, на якій відображені несумісні випадкові події A і B. Також можна стверджувати, що випадковій події A відповідає більша ймовірність, ніж випадковій події B.

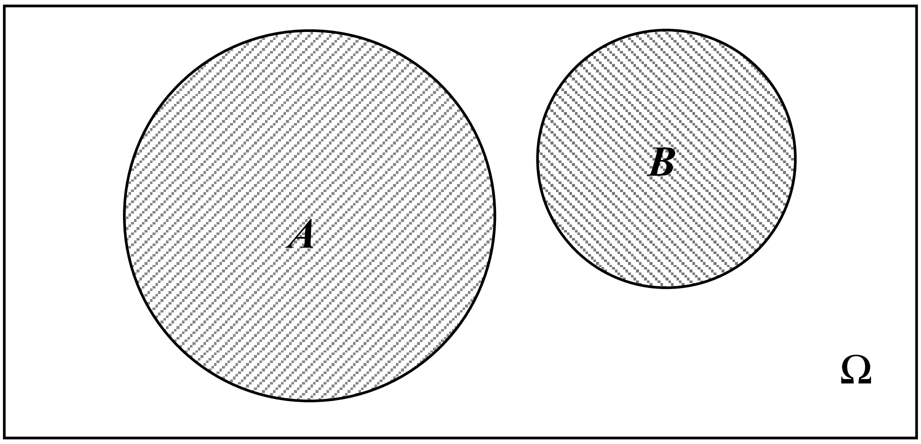


Рис. 1.4. **Приклад діаграми Ейлера – Венна**

У тому випадку, коли простір елементарних подій є дискретним, для обчислення ймовірностей зручно застосовувати формули комбінаторики. ***Комбінаторика*** – це розділ математики, який вивчає питання щодо кількості комбінацій, які можна побудувати, використовуючи задану кількість об’єктів.

Розглянемо множину, що містить n різних об’єктів. ***Перестановкою*** називається впорядкована множина (***кортеж***), що містить усі n об’єктів. Будь-яка перестановка відрізняється від іншої лише порядком розташування об’єктів. ***Кількість перестановок*** (із n), що отримують на множині обсягом n, визначається за формулою:

$$P_n = n!, \tag{1.3}$$

де $n!$ – факторіал числа n, він визначається як добуток усіх натуральних чисел, починаючи з 1 і закінчуючи n, тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Якщо з множини різних об'єктів обсягом n витягати по k об'єктів і будувати з них кортежі, для яких має значення не тільки склад об'єктів, але й порядок їх розміщення у кортежі, то такий кортеж називається ***розміщенням***. ***Кількість розміщень*** (із n по k) визначається за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.4}$$

Якщо при побудові кортежу з k об'єктів, що належать множині обсягом n, порядок розташування об'єктів не має значення, то такий кортеж називається ***сполученням***. ***Кількість сполучень*** (із n по k) визначається за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}, \tag{1.5}$$

тобто кількість сполучень менша за кількість розміщень у $k!$ разів, що визначає кількість перестановок у множині обсягом k.

Імовірність події, яка визначається лише умовою випробування і не залежить від того, чи відбулась будь-яка інша подія, називається ***безумовною***.

Умовна ймовірність $P(B|A)$ – це ймовірність появи події B за умови, що подія A вже відбулася. Якщо ймовірність події не залежить від того, відбулась чи ні інша подія, то події називаються ***незалежними***.

Теорема множення ймовірностей 1.1 (*про ймовірність добутку подій*). Імовірність одночасної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності появи однієї з подій з умовною ймовірністю іншої події у припущенні, що перша подія вже відбулась:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B|A), \tag{1.6}$$

де $P(A)$ – ймовірність події A (безумовна ймовірність події A);

$P(B|A)$ – ймовірність появи події B за умови, що подія A вже відбулася (умовна ймовірність події B).

Теорема додавання ймовірностей 1.2 (*про ймовірність суми подій*). Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей без імовірності їх добутку:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.7)$$

У процесі аналізу можливого розвитку подій та визначення ризиків, що пов'язані із впливом факторів, появу яких можна передбачити, а відносно ймовірностей появи цих факторів можна висловити певні припущення, застосовується ***формула повної ймовірності***.

Нехай подія A настає лише за умови появи однієї з несумісних випадкових подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу подій. Ці події називаються ***гіпотезами***. Тоді ймовірність події A визначається за формулою:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i), \qquad (1.8)$$

де $P(H_i)$ − ймовірність реалізації гіпотези H_i;

$P(A|H_i)$ − умовна ймовірність події A, тобто ймовірність події A за умови, що реалізується саме гіпотеза H_i.

Оскільки гіпотези $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу несумісних випадкових подій, то відносно них виконуються такі умови:

$$H_i \bigcap H_j=\varnothing, \text{ якщо } i\neq j, \text{ та } \sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1. \qquad (1.9)$$

Слід зауважити, що $P(H_i)$ є ймовірністю реалізації гіпотези H_i, яка визначається до випробування, тобто це ***апріорна ймовірність***.

Нехай випадкова подія A, яка може мати місце як наслідок реалізації однієї з гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$, вже відбулася, і необхідно визначити ймовірність того, що це мало місце саме завдяки реалізації гіпотези H_i. Отже, необхідно знайти ***апостеріорну*** ймовірність гіпотези H_i, тобто умовну ймовірність гіпотези, якщо відомо, що подія A вже відбулася.

Імовірність гіпотези H_i за умови, що подія A вже відбулася, обчислюється за ***формулою Байєса***:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}, \qquad (1.10)$$

де $P(H_i \mid A)$ − апостеріорна ймовірність i-ї гіпотези за умов, що подія A відбулася.

1.5. Змістовна постановка задачі

За допомогою вбудованих функцій, що містить MS Excel 2010, необхідно виконати такі завдання:

1.1. Застосовуючи функції **ФАКТР**(), **ПЕРЕСТ**() та **ЧИСЛКОМБ**(), обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{15}^{5} + C_{21}^{4}}{P_6}$.

1.2. За класичним означенням імовірності обчислити ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що за довільного набору коду доступу, про який відомо, що він складається з чотирьох різних цифр, буде набрано правильний код.

1.3. Із застосуванням теорем додавання та множення ймовірностей обчислити ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що серед трьох студентів здадуть іспит саме два з них, якщо перший студент вивчив 80 % питань програми, другий – 90 %, а третій – 70 %. Навести діаграму Ейлера – Венна, що відповідає випадковій події.

1.4. Із застосуванням формули повної ймовірності визначити ймовірність отримання певного рівня прибутку за таких умов. Підприємець має можливість орендувати місце на одному з двох торговельних майданчиків: закритому чи відкритому. Якщо погода сонячна, то ймовірність досягти певного рівня прибутковості (успіх) складає 0,7 для відкритого майданчика та 0,6 – для закритого. У дощову погоду на відкритому майданчику покупців нема, а для закритого майданчика ймовірність отримати певний рівень прибутку зберігає те ж саме значення 0,6. Протягом року дощова погода спостерігається в середньому для половини днів. У сонячну погоду підприємець з однаковою ймовірністю обирає торгівлю на відкритому чи закритому майданчиках, а у дощову − тільки на закритому.

1.5. Із застосуванням формули Байєса за умовою завдання 1.4 визначити ймовірність того, що підприємець отримав прибуток саме у день, коли йшов дощ, якщо відомо, що в цей день був досягнутий певний рівень прибутку.

1.6. Приклад виконання лабораторної роботи № 1

Завдання 1.1. Для обчислення значення виразу $\dfrac{A_{16}^{5}+C_{15}^{6}}{P_{10}}$, що передбачає використання формул комбінаторики, застосуємо вбудовані функції MS Excel **ФАКТР(**n**)**, **ПЕРЕСТ(**$n;m$**)** та **ЧИСЛКОМБ(**$n;m$**)**. Для обчислення значення заданого виразу визначимо кожний із його елементів окремо, тобто виведемо їх значення в окремі комірки. Так, для виведення результату обчислення значення кількості розміщень вибираємо комірку **С3** і ставимо курсор до цієї комірки. Кількість розміщень A_{16}^{5} визначається за допомогою функції **ПЕРЕСТ()**, що належать до категорії **Статистические.** Викликаємо діалогове вікно надбудови **Мастер функцій – шаг 1 из 2,** натиснувши на кнопку f_x, вибираємо необхідну функцію, переходимо до її діалогового вікна і вводимо її аргументи (рис. 1.5). Після натискання **Ok** результат обчислень виводиться на екран.

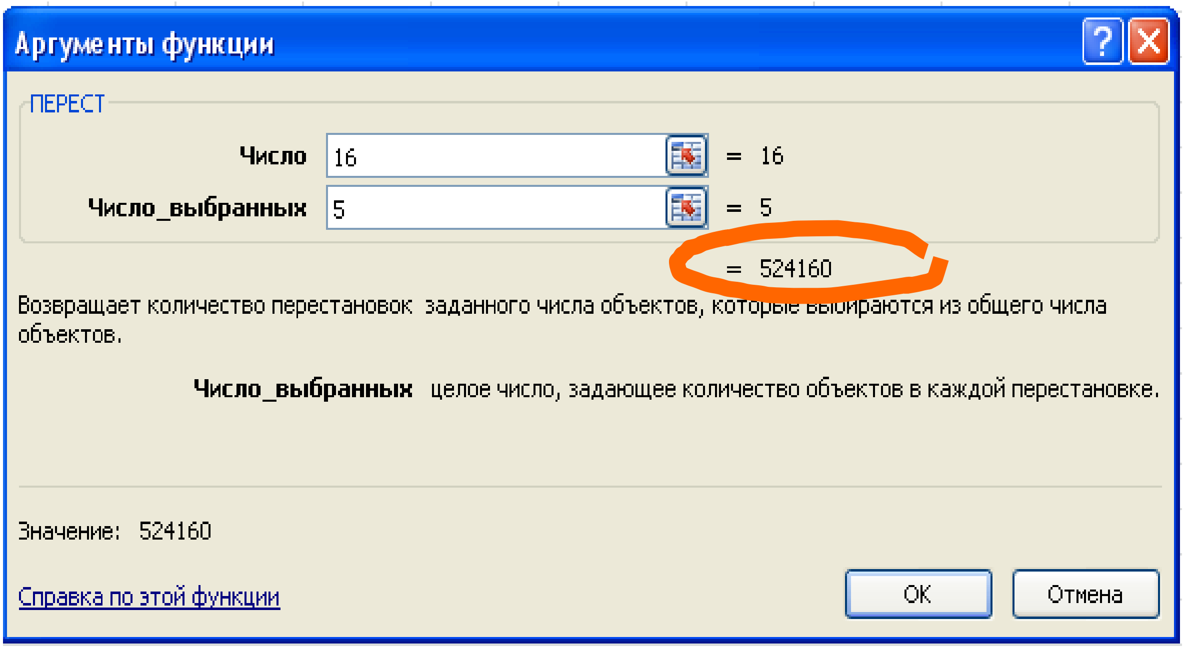


Рис. 1.5. **Діалогове вікно функції ПЕРЕСТ()**

Для обчислення кількості сполучень C_{15}^{6} поставимо курсор до комірки **С4**, натисканням кнопки f_x викликаємо діалогове вікно надбудови **Мастер функций – шаг 1 из 2** і вибираємо функцію **ЧИСЛКОМБ()**, яка належить до категорії **Математические**. Після заповнення діалогового вікна **Аргументы функции** (аналогічно до того, як наведено на рис. 1.5) натисканням кнопки **Ok** виводимо результат обчислень.

Результат обчислення кількості переставлень P_{10} виводимо в комірку **С5**, застосувавши для здійснення розрахунків функцію **ФАКТР()**, що належить до категорії **Математические**.

Тепер обчислимо значення всього виразу, для чого в комірці **С7** набираємо формулу: **=(С3+С4)/С5**. Оскільки результат обчислень виявився дробовим, то ставимо курсор у цю комірку, натискаємо праву клавішу маніпулятора «миша», обираємо режим **Формат ячеек** і в діалоговому вікні вибираємо **Число**. Потім у полі **Числовые форматы** вказуємо **Дробный**, а у полі **Тип** вказуємо (про всяк випадок) **Дробями до трех цифр** (рис. 1.6).

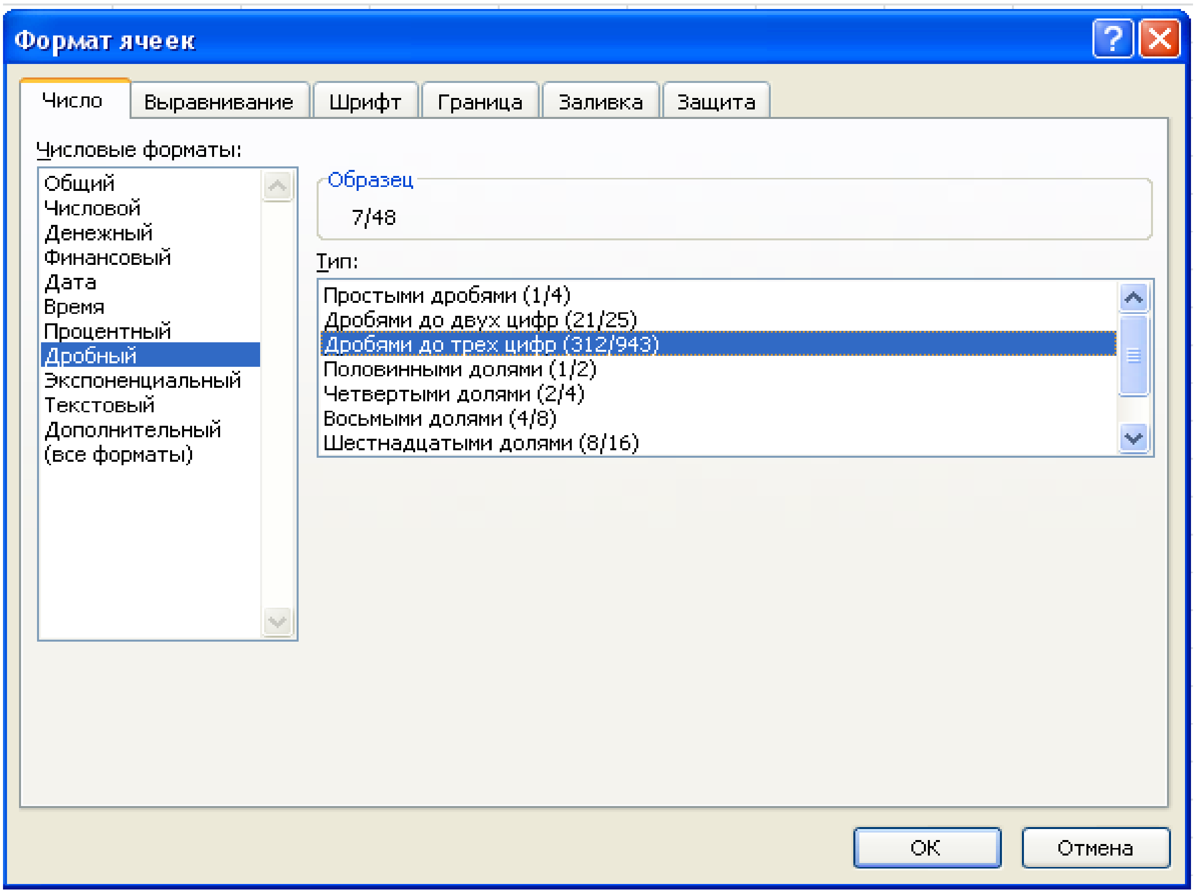


Рис. 1.6. **Визначення формату комірки**

За результатами обчислення отримуємо: $\dfrac{A_{16}^{5}+C_{15}^{6}}{P_{10}}=\dfrac{7}{48}$.

Приклад оформлення результатів обчислень наведено на рис. 1.7.

f_x =(C3+C4)/C5

	A	B	C	D	E
1	**Завдання 1.1**				
2					
3	Кількість розміщень із 16 по 5		524160		
4	Кількість сполучень із 15 по 6		5005		
5	Кількість переставлень із 10		3628800		
6					
7	Значення виразу		7/48		
8					
9					

Рис. 1.7. **Приклад оформлення завдання 1.1**

Завдання 1.2. Відомо, що код доступу складається з чотирьох різних цифр. Для визначення ймовірності випадкової події, яка полягає в тому, що за довільного набору цифр буде набрано правильний код, застосуємо класичне означення ймовірності. Оскільки код доступу тільки один, тобто лише одна елементарна подія є сприятливою, то $m=1$. Загальну кількість елементарних подій, що утворює простір елементарних подій, визначаємо як кількість розміщень із 10 (загальна кількість цифр) по 4 (кількість цифр у коді доступу). Набираємо =**ПЕРЕСТ(**10; 7**)** і отримуємо, що $n=5040$. За формулою (1.1) маємо: $P(A)={}^{1}\!/_{5040}$.

Завдання 1.3. Позначимо через A випадкову подію, яка полягає в тому, що успішно складуть іспит саме два студенти. Нехай A_1, A_2 та A_3 – це успішне складання іспиту першим, другим та третім студентами окремо. Події A_1, A_2 та A_3 є сумісними. Оскільки перший студент вивчив 80 % питань програми, другий – 90 %, а третій – 70 %, то при складанні іспиту ймовірності успіху для кожного з них становлять, відповідно, $P(A_1)=0{,}8$, $P(A_2)=0{,}9$ та $P(A_3)=0{,}7$. На діаграмі Ейлера – Венна (рис. 1.8) області, що відповідають події A, виділені штриховкою.

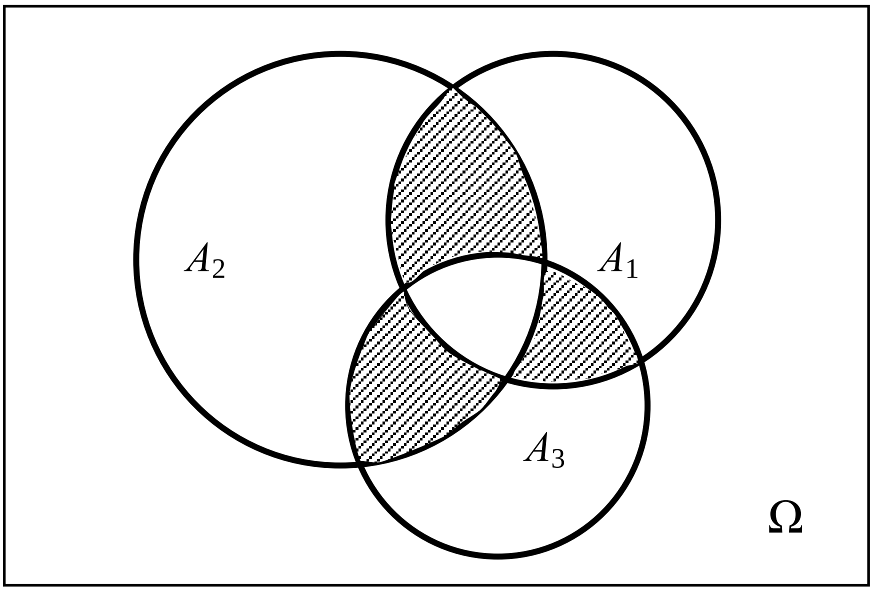


Рис. 1.8. **Діаграма Венна – Ейлера для трьох сумісних подій**

Імовірність події A, яка полягає в тому, що іспит складуть тільки два будь-які студенти, визначається співвідношенням:

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3).$$

Оскільки всі три події є попарно несумісними, то ймовірність їх суми за аксіомою IV дорівнює сумі їхніх імовірностей, тобто:

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3).$$

А оскільки події, що утворюють добуток, є незалежними, то за теоремою множення ймовірностей маємо, що ймовірність добутку дорівнює добутку безумовних ймовірностей. Отже, остаточно отримуємо:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3).$$

Імовірність того, що i-й студент не складе іспит, тобто події, протилежної до A_i (i-й студент складе іспит), становить $P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i)$.

Скористаємося можливостями MS Excel для обчислення ймовірності події A. Для цього відкриваємо новий **Лист** і записуємо вихідні дані завдання в діапазоні комірок **D3:D5**, тобто ймовірності скласти іспит для кожного студента, у діапазоні комірок **D7:D9** виводимо результати обчислення ймовірностей протилежних подій, а до комірки **D11** вводимо формулу для обчислення ймовірності випадкової події A (рис. 1.9).

D11 f_x =D3*D4*D9+D7*D4*D5+D3*D8*D5

	A	B	C	D	E	F
1	**Завдання 1.3**					
2						
3	Імовірність події А1			0,8		
4	Імовірність події А2			0,9		
5	Імовірність події А3			0,7		
6						
7	Імовірність події, протилежної А1			0,2		
8	Імовірність події, протилежної А2			0,1		
9	Імовірність події, протилежної А3			0,3		
10						
11	Імовірність події А			0,398		
12						

Рис. 1.9. **Обчислення за теоремами додавання та множення ймовірностей**

Отже, ймовірність того, що саме два студенти складуть іспит, дорівнює:

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7) + (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 +$$
$$+ 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}7 = 0{,}398.$$

Завдання 1.4. Розглянемо стани, в яких може перебувати система «Підприємець». На рис. 1.10 визначена множина станів, у яких може перебувати система, показані шляхи переходів та ймовірності, з якими ці переходи здійснюються. Маємо два послідовних рівні гіпотез, на кожному з яких виконуються умови (1.9). Першому рівню відповідають гіпотези відносно стану погоди – гарна (+) чи погана (–). Оскільки за умовою задачі половина днів протягом року є сонячними, то стани погоди є рівноймовірними, отже, ймовірність їх реалізації становить $0{,}5$ Гіпотези другого рівня визначають тип майданчика – закритий чи відкритий. Імовірності їх реалізації є умовними, оскільки залежать від стану погоди. Третій рівень гіпотез – отримання певного рівня прибутку (успіх) або його відсутність.

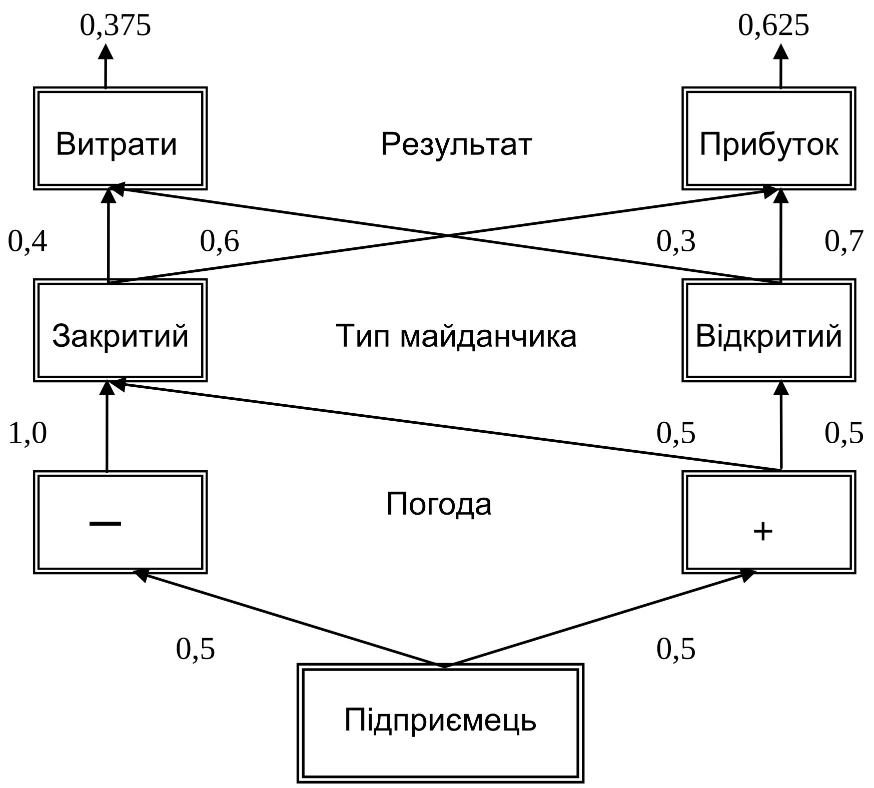


Рис. 1.10. **Множина станів системи «Підприємець»**

На робочому аркуші MS Excel у рядках запишемо всі шляхи, якими можна досягти стану «Успіх», та відповідні їм імовірності (рис. 1.11).

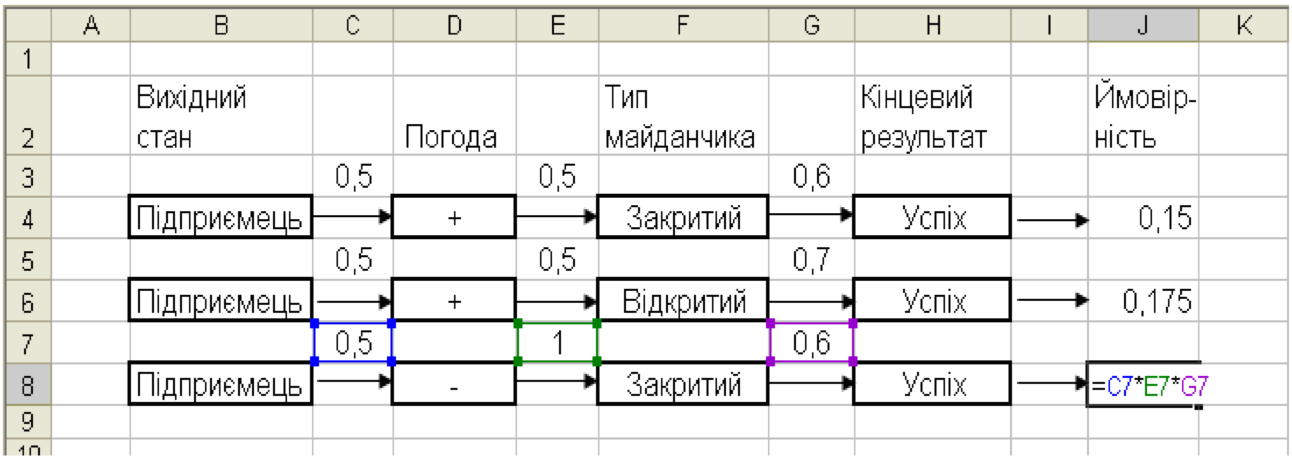


Рис. 1.11. **Скриншот, який містить схему обчислення повної ймовірності**

Стани системи позначаються прямокутниками з відповідною назвою, а перехід із одного стану в інший – стрілкою, над якою написана ймовірність даного переходу. Кожний шлях досягнення успіху має вихідний стан «Підприємець» і кінцевий стан – «Успіх». Ці шляхи визначають за множиною станів системи, якщо рухатися вздовж стрілок. На рис. 1.11 у рядку формул наведена формула обчислення ймовірності успіху, якщо торгівля відбувається на закритому майданчику за умови поганої погоди.

Отже, відповідно до формули повної ймовірності (1.8) для підприємця ймовірність досягти успіху, тобто отримати певний рівень прибутку становить:

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}6=0{,}625.$$

Завдання 1.5. Повернемося до умови завдання 1.4. Оскільки відомо, що подія A відбулася (успіх досягнуто) і необхідно визначити, чи обумовлена вона реалізацією гіпотези H_3, то обчислення апостеріорної ймовірності здійснюється за формулою (1.10), де в знаменнику міститься повна ймовірність події A (це відповідь завдання 1.4), а в чисельнику – ймовірність успіху за поганої погоди, тобто третій доданок у формулі повної ймовірності (йому відповідає останній рядок на схемі рис. 1.11). Вводимо цю формулу до будь-якої комірки й отримуємо:

$$P(H_3\mid A)=\frac{0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}6}{0{,}625}=0{,}48.$$

Отже, якщо успіх досягнуто, то він майже рівною мірою забезпечується торгівлею на відкритому чи закритому майданчиках.

1.7. Завдання для самостійної роботи

Варіант № 1.1

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{13}^2+C_{21}^4}{P_{11}}-4\cdot C_{13}^4$.

2. У конверті серед 100 фотокарток знаходиться та, яку розшукують. З конверта навмання витягли 10 карток. Знайти ймовірність того, що серед них опиниться потрібна картка.

3. Проводиться хімічний аналіз проб води із трьох джерел. Імовірність того, що вода з першого джерела відповідає нормі, дорівнює 0,6; із другого – 0,8; із третього – 0,5. Знайти ймовірність того, що в межах нор-

ми буде склад води саме з другого джерела, якщо відносно інших можна зробити будь-яке припущення.

4. Фірма має трьох постачальників, обсяг постачання для кожного з яких становить відповідно 30 %, 20 % та 50 %. Кожний із постачальників дотримується стандарту під час виготовлення продукції з імовірністю 0,8, 0,7 та 0,9, відповідно. Визначити ймовірність того, що одиниця продукції, яка була вибрана для перевірки, причому цей вибір здійснювався довільно, виявилася якісною.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо постачальника, якщо продукція виявилася неякісною.

Варіант № 1.2

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{20}^{6}+C_{13}^{10}}{P_{15}}-6{,}3\cdot C_{23}^{15}$.

2. Група складається з 15 юнаків і 10 дівчат. Для чергування призначають 5 студентів. Визначити ймовірність того, що серед них буде саме 2 дівчини.

3. На зупинці можуть зупинятися автобуси № 17, 26 та 443. Імовірність того, що автобус № 17 приїде на зупинку за розкладом, дорівнює 0,8, автобус № 443 – 0,6 і автобус № 26 – 0,2. Знайти ймовірність того, що: а) за розкладом приїде хоча б один автобус; б) за розкладом приїдуть автобуси як № 26, так і 17; в) усі три автобуси спізняться; г) спізниться один автобус.

4. Біля верстату знаходиться три деталі, до яких додали одну стандартну. Потім навмання взяли одну деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь буде стандартною, якщо відносно якості трьох вихідних деталей можна зробити будь-яке припущення.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо постачальника, якщо продукція виявилася неякісною.

Варіант № 1.3

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{28}^{10}+C_{19}^{6}}{P_{23}}-4\cdot A_{10}^{3}$.

2. У партії 40 стандартних і 4 нестандартні деталі. Для контролю взяли навмання 8 деталей, які виявилися стандартними. Знайти ймовірність того, що наступна взята навмання деталь буде також стандартною.

3. Три менеджери влаштовуються на роботу. Перший із них на 90 % відповідає вимогам роботодавця, другий – на 70 %, третій – на 80 %. За умов, що є три вільних місця і робітника вибирають випадково, знайти ймовірність того, що на роботу візьмуть хоча б одного менеджера.

4. Три експерти роблять висновок щодо можливостей здійснення певного проекту, і відповідь надається у формі «так» чи «ні». Перший експерт володіє інформацією на 80 %, другий – на 90 %, третій – на 95 %. Визначити ймовірність того, що відповіді всіх трьох експертів співпадуть.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо правильності їх висновків за умов, що їх відповіді співпали.

Варіант № 1.4

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{23}^{6}-C_{18}^{3}}{P_{10}}+\dfrac{1}{2}\cdot C_{20}^{5}.$

2. У партії із 15 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 5 узятих навмання деталей 3 стандартні.

3. На склад доставили 2 партії товару. У першій партії 76 % якісних виробів, у другій – 83 %. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Визначити ймовірність того, що серед них виявиться один якісний і один бракований.

4. У першій із шухляд знаходяться п’ять білих та сім чорних кульок, у другій – три білих та три чорних кульки, у третій – шість білих та шість чорних. З першої шухляди до другої переклали якусь кульку, після чого з другої до третьої теж переклали одну кульку, колір якої невідомий. Потім із третьої шухляди вийняли одну кульку. Визначити ймовірність того, що остання кулька є білою.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо кольору кульок, які переклали з першої шухляди до другої та з другої до третьої.

Варіант № 1.5

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{17}^{9}+C_{20}^{3}}{P_{13}}-\dfrac{1}{5}\cdot A_{7}^{2}.$

2. Підручник має 208 сторінок. Визначити ймовірність того, що порядковий номер сторінки, яка відкрита навмання, буде закінчуватися цифрою 3.

3. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Імовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,5, для другого – 0,8 і для третього – 0,75. Визначте ймовірність того, що буде лише одне влучення.

4. Три консультанти роблять висновок щодо можливостей застосування певного проекту, і їх відповідь надається у формі «так» чи «ні». Перший консультант володіє інформацією на 70 %, другий – на 80 %, третій – на 90 %. Визначити ймовірність того, що відповіді всіх трьох консультантів не співпадуть.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо шляхів перетворення системи, якщо виявилося, що після двох термінів експлуатації система перебуває в робочому стані.

Варіант № 1.6

1. Обчислити значення виразу: $\frac{A_{19}^{5}+C_{12}^{3}}{P_{20}}-\frac{1}{4}\cdot C_{25}^{10}$.

2. На 20 однакових жетонах написано 20 двозначних чисел від 11 до 30. Яка ймовірність того, що номер навмання взятого жетона буде кратним 4 або 7?

3. Із трьох знарядь зробили залп по цілі. Імовірність влучення в ціль у разі одного пострілу з першого знаряддя дорівнює 0,9; з другого – 0,8, а з третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що постріл хоча б із одного знаряддя буде влучним.

4. Магазин має трьох постачальників, обсяг постачання для кожного з яких становить відповідно 10 %, 20 % та 70 %. Кожний із постачальників у процесі виготовлення продукції дотримується стандарту з імовірністю 0,8, 0,7 та 1,0, відповідно. Визначити ймовірність того, що продукція, яка була навмання вибрана для перевірки, виявилася неякісною.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо постачальників, від яких було отримано продукцію, якщо вона виявилася якісною.

Варіант № 1.7

1. Обчислити значення виразу: $\frac{C_{13}^{5}+A_{19}^{10}}{P_{14}}-3\cdot A_{12}^{7}$.

2. У пакунку 6 білих і 4 чорних мотків пряжі. Із пакунка навмання беруть 2 мотки. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

3. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом години перший верстат не зупиниться, дорівнює 0,81; другий – 0,65; третій – 0,43. Визначити ймовірність того, що протягом години зупиняться будь-які два верстати.

4. Під час експлуатації протягом певного терміну система може зберігати робочий стан з імовірністю 0,7, досягти критичного стану з імовірністю 0,2 або перейти в аварійний стан з імовірністю 0,1. У разі досягнення критичного стану система самостійно або повертається до робочого стану (з імовірністю 0,6), або переходить у катастрофічний стан. У разі досягнення катастрофічного стану зовнішнє джерело впливу повертає систему до робочого стану (з імовірністю 1,0). Визначити ймовірність того, що після двох термінів експлуатації система перебуватиме в катастрофічному стані.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо правильності їх висновків за умов, що відповіді співпали.

Варіант № 1.8

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{2A_{18}^{9}-C_{24}^{4}}{P_{21}}+C_{12}^{5}$.

2. Механізм містить дві однакові деталі. Він не працюватиме, якщо обидві деталі будуть меншими за розміром, ніж стандартні. Складальник має 10 деталей, з яких 3 – менші за розміром. Знайти імовірність того, що механізм працюватиме, якщо складальник бере потрібні для механізму дві деталі навмання.

3. Пристрій складається із трьох елементів, що працюють незалежно. Імовірність безвідмовної роботи першого елемента дорівнює 0,5; другого – 0,4; третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що працюватиме безвідмовно другий елемент, а стан інших елементів є довільним.

4. У першій з урн знаходяться сім білих та сім чорних кульок, у другій – три білих та вісім чорних, у третій – чотири білих та шість чорних. З першої урни до другої переклали одну кульку, колір якої невідомий, після чого з другої урни до третьої теж переклали одну кульку, колір якої також є невідомим. Після цього з третьої урни вийняли одну кульку. Визначити ймовірність того, що ця кулька буде білою.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо кольору кульок, які переклали з першої урни до другої.

Варіант № 1.9

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{16}^{7}+4C_{20}^{18}}{P_{12}}-A_{24}^{6}$.

2. На столі лежать 30 екзаменаційних білетів. Яка ймовірність того, що номер білета, який взято навмання, буде кратним 3 або 7?

3. Для повідомлення про пожежу встановили три автомати, що працюють незалежно. Ймовірність того, що в разі пожежі спрацює перший автомат, дорівнює 0,81; другий – 0,83, третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що в разі пожежі надійде сигнал лише від одного автомата.

4. У шухляді зберігаються три лампи, до яких додали одну стандартну. Потім навмання взяли одну з ламп. Визначити ймовірність того, що ця лампа є нестандартною, якщо відносно якості трьох вихідних ламп можна зробити будь-яке припущення.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо кожного з припущень за умов, що випадково взята лампа виявилася стандартною.

Варіант № 1.10

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{12}^{7}-C_{14}^{5}}{2P_{7}}-C_{30}^{27}$.

2. Студент знає 50 із 60 питань. Знайти ймовірність того, що студент відповість на два питання.

3. Від аеровокзалу вирушають три автобуси до трапа літака. Імовірність своєчасного прибуття кожного автобуса дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що два автобуси спізняться.

4. Завод має три цехи, обсяг робіт для кожного з яких становить відповідно 70 %, 20 % та 10 %. Кожний цех у процесі виготовлення продукції дотримується стандарту з імовірністю 0,8, 0,7 та 0,9 відповідно. Визначити ймовірність того, що одиниця продукції, яка була вибрана для перевірки навмання, виявилася неякісною.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез постачальника, якщо продукція виявилася якісною.

Варіант № 1.11

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{25}^{8}+5C_{12}^{7}}{P_{14}}+A_{18}^{8}$.

2. У групі 12 студентів, серед яких 8 мають з економіки оцінки від 7 до 9 балів. За списком відібрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них п’ятеро знають економіку на 7 – 9.

3. Контролер, перевіривши якість 20 пальт, встановив, що серед них 16 відповідають першому ґатунку, а інші – другому. З цієї партії навмання взяли 3 пальта. Знайти ймовірність того, що серед них хоча б одне пальто буде першого ґатунку.

4. Фірма має трьох постачальників, обсяг постачання для кожного з яких становить відповідно 10, 40 та 50 %. Кожний із постачальників дотримується стандарту з імовірністю 0,6, 0,7 та 0,8, відповідно. Визначити ймовірність того, що одиниця продукції, яка була вибрана для перевірки, причому цей вибір здійснювався довільно, виявилася неякісною.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо постачальника, якщо продукція виявилася якісною.

Варіант № 1.12

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{3A_{14}^{5}-C_{11}^{9}}{P_{18}}+C_{17}^{8}$.

2. Пристрій складається з п’яти однотипних елементів, з яких два є зношеними. Для перевірки вибрали два з них. Знайти ймовірність того, що вибрали саме зношені елементи, якщо вибір здійснювався навмання.

3. Проводиться аналіз води із трьох джерел. Імовірність того, що хімічний склад води з першого джерела відповідає нормі, дорівнює 0,4; із другого – 0,9; із третього – 0,5. Знайти ймовірність того, що в межах норми є склад води тільки з третього джерела.

4. Є три урни. У першій урні знаходиться три білих та п’ять чорних кульок, у другій – дві білих та вісім чорних. З перших двох урн вийняли навмання по дві кульки і поклали до третьої, в якій до цього знаходилися три білих кульки. Потім з третьої урни навмання вийняли дві кульки. Визначити ймовірність того, що ці обидві кульки виявляться чорними.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез щодо кольору кульок, які переклали з першої урни до третьої.

Варіант № 1.13

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{15}^{6}+C_{19}^{15}}{P_{14}}-\dfrac{1}{2}A_{21}^{4}$.

2. У цеху працюють шість чоловіків і чотири жінки. За табельними номерами навмання відібрано семеро. Знайти ймовірність того, що серед відібраних працівників буде саме три жінки.

3. Три студенти складають іспит. Перший із них вивчив 85 % питань програми, другий – 80 %, третій – 90 %. Знайти ймовірність того, що лише один студент складе іспит.

4. Біля верстата знаходиться три деталі, з яких одна є нестандартною. До них додали дві деталі, якість яких невідома. Потім навмання взяли одну деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь буде стандартною, якщо відносно якості двох останніх деталей можна зробити будь-яке припущення.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності кожної з гіпотез, якщо деталь, що взята для перевірки, виявилася стандартною.

Варіант № 1.14

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{A_{16}^{7}-C_{14}^{11}}{3P_7}-C_{20}^{17}$.

2. У шухляді міститься 10 однакових деталей, які мають номери від 1 до 10. Навмання вибрали шість деталей. Знайти ймовірність того, що серед них виявляться деталь № 1 та деталь № 2.

3. Із трьох урн, які містять білі та чорні кульки, витягують по одній кульці. Імовірність вилучення білої кульки з першої урни дорівнює 0,9; з другої – 0,8, з третьої – 0,75. Знайти ймовірність того, що з другої і третьої урн вилучать білі кульки.

4. Підприємство щотижня постачає товар фірмовим магазинам у співвідношенні 2:3:5. Імовірність того, що протягом тижня розпродано весь товар даного підприємства, для першого магазину становить 0,75, для другого – 0,85, а для третього – 0,9. Визначити ймовірність того, що наприкінці тижня в магазині весь товар даного підприємства буде розпродано, якщо покупець вибирає один з трьох магазинів навмання.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо того, яка саме крамниця продасть увесь товар.

Варіант № 1.15

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{2A_{22}^{9}-C_{12}^{7}}{P_{17}}+A_{22}^{8}$.

2. У шухляді містяться 7 білих і 6 червоних кульок. Із шухляди навмання беруть 3 кульки. Знайдіть ймовірність того, що всі кульки будуть одного кольору.

3. Робітник обслуговує три пристрої. Імовірність того, що протягом години перший пристрій не зупиниться, дорівнює 0,81; другий – 0,65; третій – 0,43. Визначити ймовірність того, що протягом години зупиняться будь-які два пристрої.

4. Магазин здійснює перевезення вантажу трьома автопарками у співвідношенні 3:1:4. Імовірність дотримання терміну перевезення становить для першого автопарку 0,9, для другого – 0,85, для третього – 0,8. Визначити ймовірність того, що товар поставлено відповідно до терміну.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо перевізника, який порушив термін постачання, якщо товар не було перевезено в означений термін.

Варіант № 1.16

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{2A_{21}^{8}-C_{10}^{7}}{P_{10}}+A_{24}^{8}$.

2. Набір трицифрового номера білета, який виграє, виконується триразовим автоматичним викиданням із ящика одного за одним трьох жетонів із загальної кількості 9 жетонів, пронумерованих цифрами від 1 до 9. Знайти ймовірність того, що набраний номер не містить цифри 7.

3. Прилад складається з трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

4. Є три партії деталей, з яких перша містить 10 стандартних і 4 нестандартних, друга – 14 стандартних і 4 нестандартних, третя – 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із партії, що вибрана навмання, беруть деталь. Знайти ймовірність того, що деталь виявиться стандартною.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо партії деталей, якщо деталь виявилася нестандартною.

Варіант № 1.17

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{3A_{27}^{9}-C_{17}^{8}}{P_{9}}-A_{22}^{8}$.

2. На складі є 10 двигунів заводу № 1 і вісім двигунів заводу № 2. Навмання взято чотири двигуни. Знайти ймовірність того, що серед них два двигуни заводу № 1 і два двигуни заводу № 2.

3. У партії із 20 деталей 15 стандартних, а решта нестандартні. Навмання беруть 4 деталі. Знайти імовірність того, що серед них принаймні 1 нестандартна.

4. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го ґатунку, 3 % – 2-го та 2 % – 3-го ґатунку. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для насіння 1-го ґатунку становить 0,5, 2-го – 0,2 та 3-го – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш ніж 50 зерен.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо сорту насіння, якщо навмання взятий колосок має менше 50 зерен.

Варіант № 1.18

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{2A_{28}^{9}+C_{18}^{7}}{P_{16}}+A_{25}^{9}$.

2. Набір трицифрового номера виграшної облігації виконують триразовим викиданням з урни одного за одним трьох жетонів із п'яти, пронумерованих цифрами від 1 до 5. Знайти ймовірність того, що вибраний номер містить цифру 3.

3. У цеху є три резервні мотори, для кожного з яких імовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено принаймні один мотор.

4. Є три партії зовні однакових деталей. У першій партії 20 стандартних і 5 нестандартних, у другій – 15 стандартних і 3 нестандартні, у третій – 14 стандартних і 2 нестандартні деталі. Із навмання вибраної партії взяли деталь. Знайти ймовірність того, що вона виявилася стандартною.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо партії деталей, якщо вибрана деталь виявилася нестандартною.

Варіант № 1.19

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{3A_{24}^{9}-C_{19}^{7}}{P_{19}}+A_{26}^{7}$.

2. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих двох деталей будуть дві придатні.

3. Перевірка партії рису, розфасованого по 0,5 кг, дала такі результати: 20 % усіх пачок були по 498 г, 60 % – по 500 г, 20 % – по 502 г. Із партії навмання взяли дві пачки. Знайти ймовірність того, що обидві пачки мають однакову масу.

4. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший автомат дає 90 %, другий – 93 %, а третій – 95 % стандартної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого – 50, від третього – 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр нестандартної деталі.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо автомата, який виготовляє якісну продукцію, якщо на конвеєр потрапила стандартна деталь.

Варіант № 1.20

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{2A_{24}^{8}+C_{20}^{7}}{P_{18}}-A_{28}^{8}$.

2. За підсумком року акції десяти фірм мали прибуток, чотирьох фірм знецінились, а акції шести фірм – зберегли свою номінальну вартість. Знайти ймовірність того, що випадково куплені шість акцій різних фірм будуть прибутковими.

3. Із партії суконь дівчина має намір вибрати дешеву. Ймовірність того, що навмання взята сукня дешева, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що із трьох суконь тільки дві будуть дешевими.

4. На двох верстатах-автоматах виробляються однакові заготівки, які транспортером перекидаються в те саме місце. Продуктивність другого верстата в 1,5 рази більша, ніж першого. Перший верстат дає 5 % нестандартних заготівок, а другий – 93 % стандартних. Знайти ймовірність того, що взята навмання заготівка буде стандартна.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо верстата, якщо взята навмання заготівка виявилася стандартною.

Варіант № 1.21

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{4A_{26}^{7}-C_{21}^{7}}{P_{17}}-A_{25}^{9}$.

2. Партія складається з 20 виробів, з яких 8 виробів 1-го ґатунку, 6 – 2-го, 2 – 3-го ґатунку, а решта – браковані. Навмання беруть 4 вироби.

Знайти ймовірність того, що серед них виявилося 2 вироби 1-го ґатунку, 1 – 2-го ґатунку і 1 – бракований.

3. Випущено 45 лотерейних білетів, серед яких 12 виграшних. Гравець придбав 3 білети. Знайти ймовірність того, що серед них буде принаймні один виграшний.

4. Імовірність повної сплати податків для першої групи підприємств 4/5, для другої групи ця ймовірність задовольняє рівняння $9-9p=4p^2$. До першої групи входить 70 підприємств, а до другої групи – 30. Знайти ймовірність повної сплати податків.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо групи підприємств, якщо виявлено неповну сплату податків.

Варіант № 1.22

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{3A_{21}^{8}+C_{22}^{9}}{P_{18}}+A_{24}^{8}$.

2. У партії із 16 деталей чотири нестандартні. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед них дві деталі будуть стандартними.

3. Перевірка партії рису, розфасованого по 0,5 кг, дала такі результати: 60 % усіх пачок мали вагу 500 г, 20 % – нижче за 496 г, 20 % – вище за 504 г. Із партії навмання взято дві пачки. Знайти ймовірність того, що маса обох пачок відхиляється від норми більше за 4 г.

4. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % – із 1-го, 45 % – із 2-го. При цьому продукція з 1-го цеху містить 3 %, а з 2-го – 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку, виявиться придатною.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо цеху, якщо заготівка, яка надійшла на обробку, не придатна.

Варіант № 1.23

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{2A_{22}^{9}+C_{23}^{11}}{P_{21}}-A_{22}^{12}$.

2. Для молодіжної вечірки діджей заготував 20 компакт-дисків, 7 з яких з інструментальною музикою. Знайти ймовірність того, що з чотирьох навмання відібраних компакт-дисків три будуть з інструментальною музикою.

3. Механізм, що містить 4 однакові деталі, не працюватиме, якщо під час його складання буде взято 3 або більше деталей меншого розміру, ніж потрібно. У робітника є 15 деталей, серед яких 6 меншого розміру. Знайти ймовірність того, що механізм працюватиме, якщо робітник братиме деталі навмання.

4. Ймовірність виконання договору для першої фірми 0,5, для другої – 0,7, для третьої ця ймовірність складає 60 % від суми ймовірностей першої та другої фірми. Податкова інспекція довільним чином перевіряє кожну із фірм. Знайти ймовірність того, що під час перевірки буде виявлено порушення договору.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо фірми, якщо перевірка не виявила порушення договору.

Варіант № 1.24

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{5A_{24}^{9}+2C_{15}^{7}}{P_{18}}+A_{24}^{8}$.

2. У конверті 10 акцій, серед яких три фірми А. Навмання відібрано 4 акції. Яка ймовірність того, що серед них буде одна акція фірми А?

3. Маємо дві партії деталей. У першій партії 7 придатних і 3 браковані деталі. У другій – 10 придатних і 4 браковані. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що обидві деталі придатні.

4. Вивчаються результати іспиту з теорії ймовірностей у трьох групах. У першій групі є 30 студентів, з них 8 отримали відмінну оцінку, в другій – відповідно 28 і 6, а в третій – відповідно 32 і 8. Яка ймовірність того, що навмання вибраний студент отримав за іспит відмінну оцінку?

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо групи студентів, в якій студент отримав на заліку відмінну оцінку.

Варіант № 1.25

1. Обчислити значення виразу: $\dfrac{4A_{25}^{8}-C_{18}^{9}}{2P_{7}}-3A_{21}^{9}$.

2. Серед 30 видів акцій будівельних організацій 19 стали прибутковими, 5 – збитковими, а 6 – залишилися без змін. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання придбаних акцій різних видів прибутковими виявляться саме три?

3. Перша партія складається з 8 придатних і 3 бракованих деталей, друга – 12 придатних і 4 бракованих. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що одна деталь буде придатною, а інша – бракованою.

4. Фірма встановлює тюнери, 70 % яких виготовлено на заводі № 1, а решта – на заводі № 2. Імовірність того, що тюнер працюватиме протягом гарантійного терміну, для заводу № 2 він дорівнює 0,9, тоді як для заводу № 1 – 0,8. Знайти ймовірність того, що навмання взятий тюнер не відпрацює гарантійного терміну.

5. За умовою завдання 4 визначити апостеріорні ймовірності гіпотез щодо заводу, який виготовив тюнер, якщо тюнер зламався.

1.8. Контрольні запитання

1. Наведіть формули для визначення перестановок, розміщень та сполучень за умов, що елементи множини не повторюються.
2. Поясніть, чим відрізняються розміщення від сполучень.
3. Які події називаються випадковими, неможливими, вірогідними? Наведіть приклади таких подій.
4. Що таке «простір елементарних подій»?
5. Дайте класичне означення ймовірності випадкової події.
6. Що таке «повна група несумісних подій»? Наведіть приклад випадкових подій, що утворюють повну групу подій.
7. Яка подія є протилежною до вихідної?
8. Які події називаються залежними? Наведіть приклади залежних та незалежних подій.
9. Дайте означення умовної та безумовної ймовірностей.
10. Дайте означення сумісних подій. Наведіть приклади сумісних випадкових подій та випадкової події, що є результатом їх перетину на просторі повної групи подій.
11. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей.
12. Сформулюйте теорему множення ймовірностей.
13. Охарактеризуйте властивості гіпотез, які утворюють повну групу несумісних подій. Наведіть приклад гіпотез.
14. Поясніть, чому у формулі повної ймовірності ймовірність суми подій $P(\sum_{i=1}^{n} A \cdot H_i)$ визначається як сума їх імовірностей.

15. Наведіть формулу Байєса для визначення апостеріорної ймовірності гіпотези.

16. Сформулюйте властивості апостеріорних імовірностей щодо гіпотез, які висуваються при визначенні повної ймовірності події.

Лабораторна робота № 2

2.1. Тема роботи: дискретна випадкова величина; біноміальний закон розподілу, його основні числові характеристики; застосування теорем Муавра – Лапласа та Пуассона в дослідженні асимптотичної поведінки біноміального розподілу.

2.2. Мета роботи – на прикладі дискретної випадкової величини ознайомлення з загальною задачею про повторені однорідні незалежні випробування, дослідження біноміального закону розподілу та визначення його основних числових характеристик; порівняння результатів обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі й за асимптотичними формулами Муавра – Лапласа та Пуассона.

2.3. Теоретичні положення

Випадковою величиною називається величина, значення якої залежать від ряду випадкових факторів, які неможливо передбачити, і в результаті випробування ця величина набуває одне із множини своїх значень, яке заздалегідь невідоме. Той факт, що випадкова величина набуває певне значення, є випадковою подією. Якщо множина значень випадкової величини є дискретною, тобто складається з окремих ізольованих значень, то така величина називається ***дискретною випадковою величиною***. Відповідність між значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими вона набуває цих значень, називається ***законом розподілу*** випадкової величини. Закон розподілу можна задати у вигляді таблиці (***ряд розподілу***), графічно (***многокутник розподілу***) або аналітично, якщо відома функція.

Нехай поява події у даному випробуванні не залежить від того, скільки разів ця подія з'являлась у попередніх випробуваннях, тобто наслідки випробувань є взаємно ***незалежними***, і ймовірність появи випадкової події S для кожного випробування є сталою величиною $P(S)=p$, тобто випробування є ***однорідними***. Схема незалежних і однорідних випробувань називається ***схемою Бернуллі***. Імовірність того, що подія S з'явиться саме m разів у серії з n випробувань визначається за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{при} \quad 0 \le m \le n, \tag{2.1}$$

де C_n^m – кількість сполучень із n по m;

p – ймовірність появи події в окремому випробуванні;

q – ймовірність того, що в окремому випробуванні подія не з'явиться.

Кількість випробувань, які необхідно провести, щоб із заданою ***довірчою ймовірністю*** P (***надійністю***) гарантувати, що в серії випробувань за схемою Бернуллі подія з'явиться хоча б один раз, визначається співвідношенням:

$$n \ge \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)} \quad \text{при} \quad n \in \mathrm{N}. \tag{2.2}$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ, яка набуває своїх значень $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n$ з імовірністю, що визначається за формулою Бернуллі, називається ***біноміальним***.

Основними числовими характеристиками розподілу випадкової величини є її ***математичне сподівання***, яке за означенням для дискретної випадкової величини визначається за формулою:

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ , \tag{2.3}$$

та її ***дисперсія***, яка за означенням обчислюється за формулою::

$$D(\xi) = M\left(\xi - M(\xi)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(\xi)\right)^2 \cdot p_i\ , \tag{2.4}$$

або за перетвореним співвідношенням:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(M(\xi)\right)^2, \tag{2.4^{I}}$$

де x_i – i- те значення випадкової величини в ряді розподілу;

p_i – імовірність, з якою випадкова величина набуває значення x_i;

n – кількість значень випадкової величини в ряді розподілу.

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання визначається як:

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}. \tag{2.5}$$

Воно має ту ж саму вимірність, що й випадкова величина.

Поряд з основними застосовуються ***додаткові числові характеристики*** випадкової величини. Так, ***коефіцієнт варіації*** – це відношення середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання, що виражається у відсотках:

$$\nu(\xi)=\frac{\sigma(\xi)}{M(\xi)}\cdot 100\ \%. \tag{2.6}$$

Мода M_O – це можливе значення x_i випадкової величини ξ з максимальною ймовірністю. ***Медіана*** M_e – це можливе значення x_i випадкової величини ξ, яке поділяє ряд розподілу навпіл.

Для обчислення основних числових характеристик випадкової величини, що розподілена за біноміальним законом, застосовують співвідношення:

$$M(\xi)=np,\ D(\xi)=npq. \tag{2.7}$$

Значення моди в цьому випадку обчислюється за формулою:

$$np-q\le M_O\le np+p \quad \text{при} \quad M_O\in Z. \tag{2.8}$$

Розподіл випадкової величини будь-якої природи можна задати за допомогою функції розподілу. ***Функція розподілу*** визначає ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке буде меншим за деяке значення x. Отже, за означенням:

$$F(x)=P(\xi<x). \tag{2.9}$$

Звідси ймовірність того, що значення, якого набуде випадкова величина, належатиме напіввідкритому інтервалу $[m_1; m_2)$, визначається як різниця значень функції розподілу, що відповідають межам інтервалу:

$$P_n(m_1 \le m < m_2) = F(x = m_2) - F(x = m_1). \qquad (2.10)$$

Для дискретної випадкової величини ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке належить певному інтервалу, можна також визначити за IV аксіомою теорії ймовірностей (про ймовірність суми несумісних випадкових подій). Для випадкової величини, що розподілена за біноміальним законом, маємо:

$$P_n(m_1 \le m < m_2) = \sum_{m=m_1}^{m=m_2-1} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (2.11)$$

Оскільки за великої кількості випробувань ($n \to \infty$) застосування формули (2.1) для обчислення ймовірностей значень випадкової величини, що розподілена за біноміальним законом, потребує громіздких розрахунків, то відповідно до ***локальної теореми Муавра – Лапласа*** ймовірність того, що випадкова величина набуде значення $\xi = m$, можна приблизно визначати співвідношенням:

$$P_n(\xi = m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad 0 < p < 1, \qquad (2.12)$$

де $\varphi(x)$ − ***функція Гаусса***, яка визначається як:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad (2.13)$$

аргументом функції Гаусса є $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Теорема Муавра – Лапласа є однією з ***асимптотичних теорем*** теорії ймовірностей і може застосовуватись при $n > 100$ та $npq > 20$. Точність обчислення зростає зі зростанням кількості випробувань.

За великої кількості випробувань ($n > 100$ та $npq > 20$) для визначення ймовірності того, що значення випадкової величини належатиме інтервалу $[m_1; m_2)$, відповідно до ***інтегральної теореми Муавра – Лапласа*** можна приблизно визначити за співвідношенням:

$$P_n(m_1 \le m < m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (2.14)$$

де $\Phi(x)$ − ***функція Лапласа***, що визначається як:

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \qquad (2.15)$$

Оскільки інтеграл $\int e^{-t^2/2} dt$ не визначається через елементарні функції, то значення функції Лапласа знаходять за спеціальною таблицею.

При тому ж самому значенні n обчислення за формулами (2.12) та (2.14) дають більш точні результати, якщо $p \approx q$. Якщо $p < 0{,}1$, то похибка за наближеного обчислення з використанням теорем Муавра – Лапласа стає значною. Отже, якщо випробування здійснюються за схемою Бернуллі, то для наближеного обчислення ймовірностей значень випадкової величини, що розподілена за біноміальним законом, в умовах $n \to \infty$, $p << 1$ застосовується ***формула Пуассона***:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \qquad (2.16)$$

де a – параметр, який визначається як $a = np$.

Слід зазначити, що, на відміну від формули Муавра – Лапласа, яка не може застосовуватися для $p = 0$, формула Пуассона має сенс і для неможливих подій.

Закон розподілу дискретної випадкової величини, для якої ймовірність її певного значення визначається асимптотичною формулою (2.12), називається ***розподілом Пуассона***, або ***законом виключних подій***. Оскільки розподіл Пуассона є окремим випадком біноміального розподілу, то випадкова величина, що розподілена за законом виключних подій ($q \to 1$), має такі основні числові характеристики:

$$M(\xi) = np = a, \; D(\xi) \approx np = a. \qquad (2.17)$$

Отже, розподіл Пуассона є однопараметричним законом.

2.4. Змістовна постановка задачі

2.1. Імовірність того, що взяту напрокат автомашину повернуть неушкодженою, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із семи орендованих машин неушкодженими будуть повернуті: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ машин; б) менше п'яти машин; в) не більше шести й не менше чотирьох машин. Визначити основні числові характеристики випадкової величини. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як зміниться многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,7; б) збільшити кількість машин до 8.

2.2. Схожість зерна в середньому становить 60 %. Знайти ймовірність того, що з 500 посіяних зернин зійде: а) 300; б) не менше 250 і не більше 350 зернин. Знайти обсяг вибірки, за яким із надійністю 95 % у вибірковій сукупності буде хоча б одна непроросла зернина.

2.3. Завод виготовляє точні прилади. Партія деталей містить 0,01 % нестандартних. З цієї партії на контроль узяли 200 деталей. Визначити ймовірність того, що серед них кількість нестандартних деталей, що виявить контроль, становитиме: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ деталей; б) більше, ніж одна деталь.

2.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 2

Завдання 2.1. У даних випробуваннях випадковою величиною ξ є кількість машин, що повернуті неушкодженими. Оскільки те, буде чи ні ушкоджена певна машина, не залежить від того, чи буде ушкоджена інша машина і для всіх машин імовірність ушкодження вважається однаковою, то випробування слід вважати незалежними й однорідними, отже, реалізується схема Бернуллі.

На робочому аркуші MS Excel (рис. 2.1) побудуємо многокутник розподілу випадкової величини ξ, що розподілена за біноміальним розподілом. Параметрами розподілу є $p = 0{,}8$ та $n = 7$. Для цього запишемо найменування параметрів в одному стовпці (комірки **A4** та **A5**), а їх значення – поруч, в окремому стовпці (комірки **B4** та **B5**).

B7 | fx | =ЧИСЛКОМБ($B$5;A7)*$B$4^A7*(1-$B$4)^($B$5-A7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Завдання 2.1**										
2	**Біноміальний закон розподілу**										
3											
4	p=	0,8					p=	0,7		p=	0,8
5	n=	7					n=	7		n=	8
6	m	$P_n(\xi=m)$		x	F(x)		m	$P_n(\xi=m)$		m	$P_n(\xi=m)$
7	0	0,0000128		≤0	0		0	0,0002187		0	0,00000256
8	1	0,0003584		(0; 1]	0,0000128		1	0,0035721		1	0,00008192
9	2	0,0043008		(1; 2]	0,0003712		2	0,0250047		2	0,00114688
10	3	0,0286720		(2; 3]	0,0046720		3	0,0972405		3	0,00917504
11	4	0,1146880		(3; 4]	0,0333440		4	0,2268945		4	0,04587520
12	5	0,2752512		(4; 5]	0,1480320		5	0,3176523		5	0,14680064
13	6	0,3670016		(5; 6]	0,4232832		6	0,2470629		6	0,29360128
14	7	0,2097152		(6; 7]	0,7902848		7	0,0823543		7	0,33554432
15				>7	1,0000000					8	0,16777216
16											
17	$\Sigma P_n(\xi=m)$=	1,0000000				$\Sigma P_n(\xi=m)$=		1,0000000	$\Sigma P_n(\xi=m)$=		1,00000000
18											
19	$P(\xi=m<5)$=	0,1480320		M(ξ)=	5,6						
20	$P(4\le\xi=m\le6)$=	0,7569408		D(ξ)=	1,12						
21											

Рис. 2.1. **Скриншот, що містить розрахунки біноміального розподілу для різних значень його параметрів**

Тепер у вигляді стовпчика (комірки **A7:A14**) запишемо значення, яких може набувати випадкова величина, тобто $m = 0, 1, 2, ..., 7$. Відповідні їм імовірності обчислюємо за співвідношенням (2.1). Для цього в комірку **B7** вводимо формулу:

=ЧИСЛКОМБ($B$5;A7)*$B$4^A7*(1–$B$4)^($B$5–A7).

Зверніть увагу, що в цій формулі посилання на комірки, що містять параметри розподілу, є абсолютними. Розтягнувши цю формулу вздовж комірок **B7:B14**, отримаємо ймовірності, з якими випадкова величина набуває своїх значень. Переконаємось, що ми отримали саме закон розподілу. Для цього визначаємо суму ймовірностей усіх значень випадкової величини. Вводимо в комірку **B17** формулу: **=СУММ(B7:B17)**. Те, що ця сума дорівнює 1 (значення), означає, що дійсно ми побудували закон розподілу випадкової величини.

Для обчислення ймовірностей влучення значення випадкової величини у певний інтервал побудуємо функцію розподілу (2.9), для чого для дискретної випадкової величини можна скористатись рекурентним співвідношенням: $F(x_{i+1}) = F(x_i) + P_n(x_i)$. Зрозуміло, що при $x \le 0$ маємо $F(x) = 0$. Це значення записуємо в комірку **E7**. Значення комірки **E8** обчислюємо, ввівши туди формулу: **=E7+B7**. Тепер розтягуємо цю формулу на комірки **E8:E15**. Для комірки **E15** отримуємо значенню функції розподілу, що відповідає $x > 7$, як і повинно бути, воно дорівнює 1.

Імовірність того, що значення, якого набуде випадкова величина ξ, буде меншим за п'ять, дорівнює значенню функції розподілу, аргумент якої відповідає умові: $x \in (4; 5]$. Відповідно, у комірку **B19** записуємо посилання на комірку **E12**.

Імовірність того, що значення, якого набуде випадкова величина ξ, належатиме певному інтервалу, визначимо за формулою (2.10). Для цього перетворимо умову: $P_7(4 \le \xi = x \le 6) = P_7(4 \le \xi = x < 7)$. Тепер у комірку **B10** вводимо формулу: **=E14–E11**. Також можна скористатись аксіомою про суму ймовірностей несумісних подій. За формулою (2.11) маємо: $P_7(4 \le \xi = x \le 6) = P_7(4) + P_7(5) + P_7(6)$, тобто ми отримали той же результат.

Обчислимо основні числові характеристики випадкової величини безпосередньо за означеннями. Для цього застосуємо вбудовані функції MS Excel. Оскільки дані згруповані, то для визначення математичного сподівання за формулою (2.3) застосовуємо функцію **СУММПРОИЗВ()**, що належить до категорії **Статистические**. Вводимо її в комірку **E19** і вказуємо аргументи, що записані в комірках **A7:A14** та **B7:B14**. Отримане значення співпадає з тим, що обчислюється за формулою (2.7) для біноміального закону розподілу (рис. 2.1).

Якщо обчислення дисперсії випадкової величини здійснювати за формулою (2.4^{I}), то можна застосувати функцію **СУММПРОИЗВ()**. Для цього в комірку **E20** вводимо формулу:

=СУММПРОИЗВ((A7:A14)^2;B7:B14)-E19^2.

Результат співпадає з тим, що можна отримати за формулою (2.7).

Для побудови многокутника розподілу скористаємося надбудовою **Мастер диаграмм**. Виділяємо комірки **B7:B14** і вибираємо шлях **Вставка** $\Rightarrow$ **Точечная**. Натисканням іконки діаграма виводиться на екран. Сам графік має зараз назву **Ряд 1**. Тепер правою клавішею миші натискаємо на будь-яку точку на діаграмі і в діалоговому вікні **Ряд 1** вибираємо **Выбрать данные**, переходимо в діалогове вікно **Выбор источника данных**. Тепер для ряду 1 вибираємо **Изменить**, переходимо у вікно **Изменение ряда** і заповнюємо його поля (рис. 2.2).

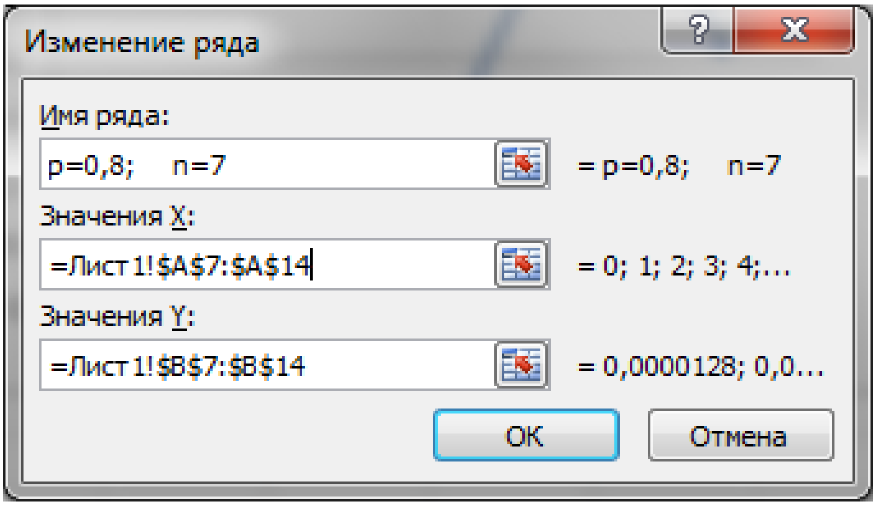


Рис. 2.2. **Діалогове вікно «Изменение ряда»**

Значения Y вже вказані, вони є результатами обчислення ймовірностей (комірки **B7:B14**). Записуємо **Имя ряда**, вказуємо **Значения X**, яких може набувати випадкова величина (комірки **A7:A14**). Натисканням **OK** повертаємось до вікна **Выбор источника данных** і там знову натискаємо **OK**, внаслідок чого на екран виводиться многокутник розподілу.

Аналогічним чином організовуємо обчислення побудови біноміального закону розподілу випадкової величини ξ для значення параметрів $p = 0{,}7$ та $n = 7$, а також $p = 0{,}8$ та $n = 8$ (див. рис. 2.1). Для того щоб побудувати многокутники, що відповідають цим розподілам, правою клавішею миші натискаємо на будь-яку точку на діаграмі і в діалоговому вікні, яке щойно відкрилось, вибираємо **Выбрать данные**, переходимо в діалогове вікно **Выбор источника данных** і натискаємо **Добавить**. У новому вікні **Изменение ряда** вказуємо його ім'я, тобто $p = 0{,}7$ та $n = 7$. Поле **Значения X** містить посилання на комірки **G7:G14**, а **Значения Y** – на комірки **H7:H14**. Аналогічно додаємо ряд $p=0{,}8$ та $n=8$, для якого поле **Значення X** містить посилання на комірки **J7:J14**, а **Значення Y** – на комірки **K7:K14**. Результати надані на рис. 2.3, де імена рядів автоматично були перенесені в **Легенду**.

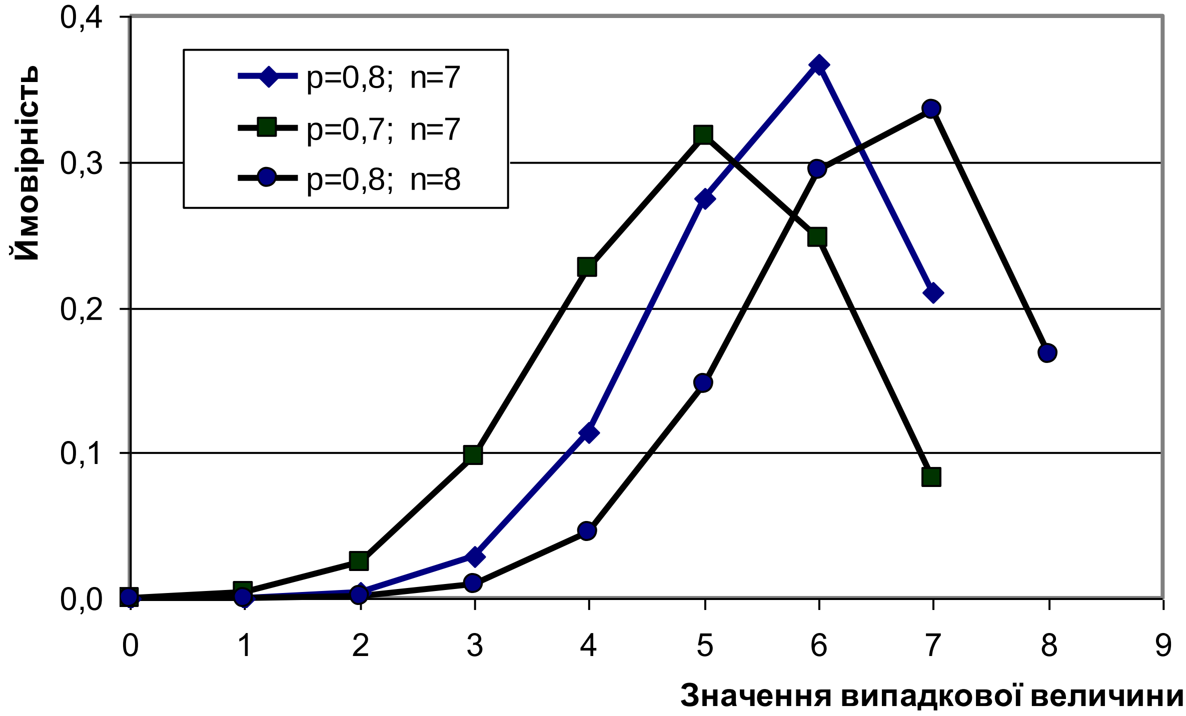


Рис. 2.3. **Многокутник біноміального розподілу залежно від значення його параметрів**

З аналізу рис. 2.3 видно, що всі розподіли, які досліджувались, є одномодальними. Значення моди зсунуте в бік більших значень випадкової величини, тобто розподіл асиметричний (негативна асиметрія). Це пов'язано з тим, що поява події є більш імовірною, ніж її відсутність. Так, одному й тому ж значенню $n=7$ при $p=0{,}7$ відповідає $M_O=5$, а при $p=0{,}8$ маємо $M_O=6$, при цьому моді відповідає більша ймовірність. Зі збільшенням кількості випробувань (за однакової ймовірності появи події в одному випробуванні) спостерігається зсув моди в бік більших значень випадкової величини.

Завдання 2.2. Оскільки реалізується схема Бернуллі, тобто випробування є однорідними й незалежними, то випадкова величина ξ (кількість пророслих зернин у вибірковій сукупності) розподілена за біноміальним законом. Однак кількість випробувань велика ($n = 500$), а ймовірність появи події в окремому випробуванні $p = 0{,}6$. Отже, для обчислення ймовірностей, з якими випадкова величина набуває певних значень, можна застосовувати асимптотичні теореми Муавра – Лапласа.

За допомогою MS Excel визначити ймовірність певного значення випадкової величини можна за допомогою функції **НОРМРАСП()**, що належить до категорії **Статистические**. Скористаємося формулою (2.12). Для цього спочатку для функції Гаусса (2.13) за вихідними умовами задачі обчислимо її аргумент: $\frac{300 - 500 \cdot 0{,}6}{\sqrt{500 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 0$. Потім викликаємо функцію **НОРМРАСП()** і заповнюємо її діалогове вікно відповідно до параметрів функції Гаусса і отримаємо її значення (рис. 2.4).

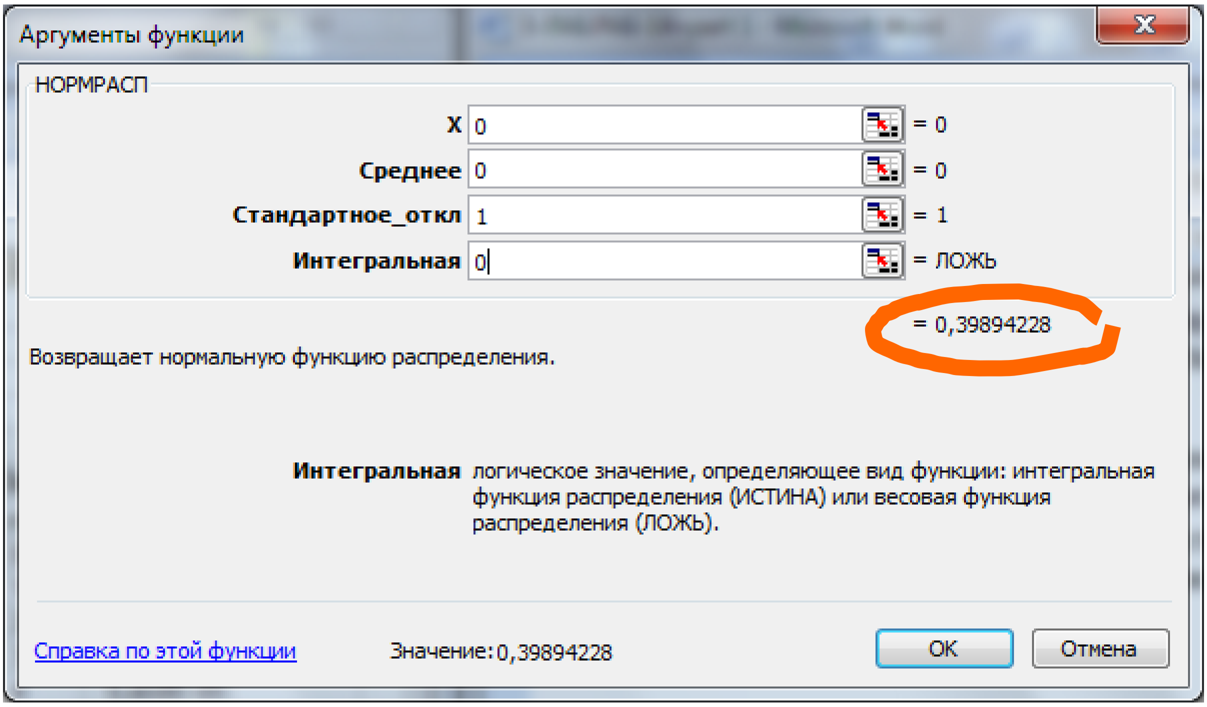


Рис. 2.4. **Заповнення полів діалогового вікна НОРМРАСП() при визначенні функції Гаусса**

Для обчислення ймовірності того, що з 500 посіяних зернин зійде саме 300 зернин, отримане значення функції Гаусса треба поділити на середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ від її математичного сподівання, тобто на величину $\sqrt{500 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}$. Відповідно, отримуємо результат: $P_{500}(\xi = 300) \approx 0{,}0364$.

Обчислення можна скоротити, якщо застосувати ту ж саму вбудовану функцію для визначення функції щільності ймовірності (рис. 2.5). Як бачимо, ми отримали той же результат.

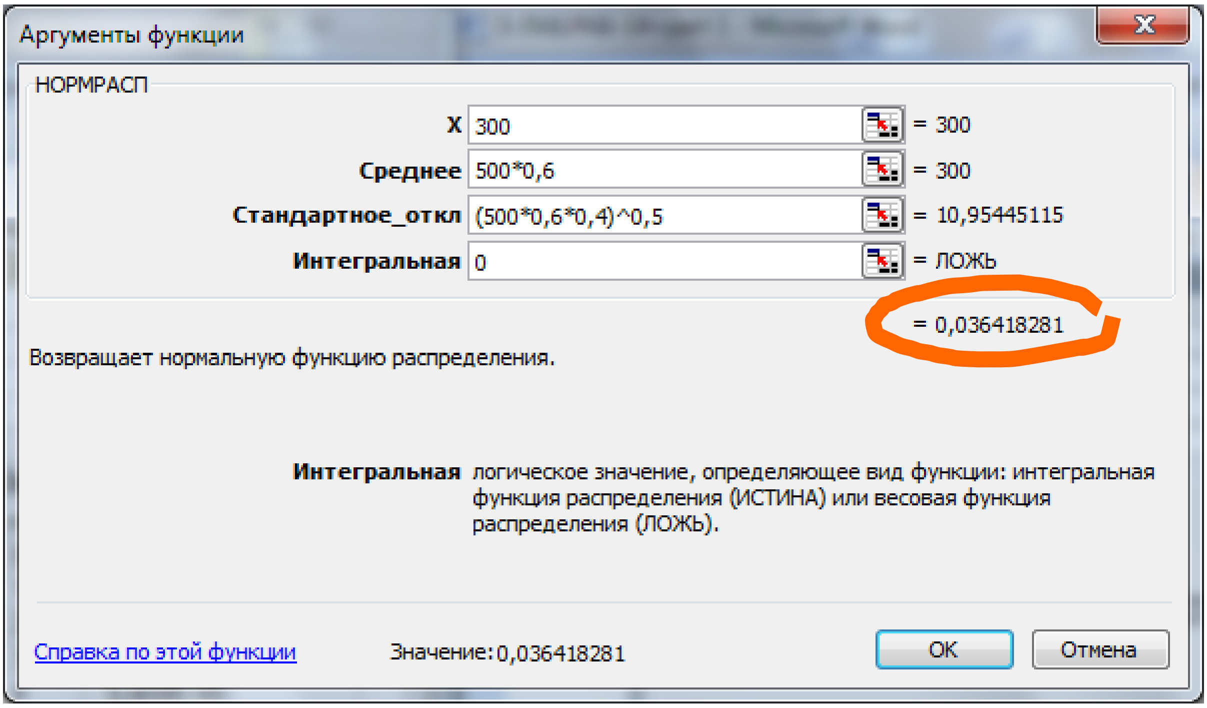


Рис. 2.5. **Заповнення полів діалогового вікна НОРМРАСП() при визначенні функції щільності ймовірностей**

Імовірності того, що з 500 зернин зійде не менше 250 і не більше 350, обчислюємо за інтегральною теоремою Муавра – Лапласа (2.14). Для цього спочатку обчислюємо аргументи функції Лапласа, що відповідають значенням випадкової величини $\xi = 250$ та $\xi = 350$. Потім викликаємо функцію **НОРМРАСП()** і отримані значення x_1 та x_2 вказуємо у полі **X**. У полі **Среднее** вказуємо 0, у полі **Стандартное_откл** пишемо 1 (як і на рис. 2.4), а в полі **Интегральная** вказуємо 1, підтверджуючи тим самим, що ми визначаємо саме інтегральну функцію. Імовірність влучення в інтервал визначається як різниця значень функції Лапласа на кінцях інтервалу. Отже, отримуємо: $P_{500}(250 \le m \le 350) \approx 0{,}999975$. Тобто ймовірність того, що значення випадкової величини не влучить у вказаний інтервал, є подією малоймовірною.

За співвідношенням (2.2) визначаємо обсяг вибіркової сукупності, за яким із надійністю 95 % у вибірковій сукупності буде хоча б одна непроросла зернина. Для цього в довільну комірку аркуша MS Excel записуємо формулу: **=ln(1–0,95)/ln(1–0,6)**. Натискаємо **Enter** і отримуємо, що $n \geq 3{,}27$. З урахуванням того, що $n \in N$, обсяг вибірки повинен бути не меншим, ніж 4.

Завдання 2.3. Оскільки реалізується схема Бернуллі, тобто випробування є однорідними й незалежними, то випадкова величина ξ (кількість стандартних деталей у вибірковій сукупності) розподілена за біноміальним законом. Однак кількість випробувань велика ($n = 200$), а ймовірність появи події в окремому випробуванні мала ($p = 0{,}001$), то для обчислення ймовірностей, з якими випадкова величина набуває своїх значень, можна застосовувати асимптотичну формулу Пуассона (2.16).

Приклад того, як можна на робочому аркуші MS Excel організувати обчислення, наведено на рис. 2.6.

H8 | fx =$H$4^G8/EXP($H$4)/ФАКТР(G8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Завдання 2.3**								
2	**Асимптотична формула Пуассона**								
3									
4	*p*=	0,001					a=	0,2	
5	*n*=	200							
6		**За формулою Бернуллі**					**За формулою Пуассона**		
7	*m*	*Pn(ξ=m)*		x	*F*(x)		*m*	*Pn(ξ=m)*	
8	0	0,8186488		≤0	0,0000000		0	0,8187308	
9	1	0,1638937		(0; 1]	0,8186488		1	0,1637462	
10	2	0,0163237		(1; 2]	0,9825425		2	0,0163746	
11	3	0,0010784		(2; 3]	0,9988662		3	0,0010916	
12	4	0,0000532		(3; 4]	0,9999447		4	0,0000546	
13									
14			M(ξ)=	0,2			*P*(ξ=*m*>1)=	0,0175231	
15			D(ξ)=	0,1998					
16									

Рис. 2.6. **Обчислення ймовірностей для закону виключних подій**

Для наближеного обчислення ймовірності формула (2.16) безпосередньо записувалась у комірку, як показано в рядку формул на рис. 2.6. У стовпчику **E** обчислювались значення функції розподілу. Хоча випадкова величина ξ може набувати значень $m = 0, 1, 2, \ldots, 200$, найбільше значення $\xi = m$, для якого обчислювалась імовірність у даному прикладі, становило $m=4$, оскільки функція розподілу вже досягла значення $F(x)\approx 0{,}9999$. Відповідно, $P_{200}(m>4)\approx 0{,}0001$, отже, випадкова подія, яка полягає в тому, що значення випадкової величини належатиме відрізку $[5;\ 200]$, є малоймовірною.

Визначимо ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке більше за 1, через імовірність протилежної події:

$$P_{200}(\xi=m>1)=1-\left(P_{200}(m=0)+P_{200}(m=1)\right)\approx 0{,}0175\,.$$

Слід зазначити, що для умов задачі різниця між точним значенням ймовірності, яке обчислювалось за формулою Бернуллі (комірки **B8:B14**), і наближеним значенням, що обчислювалось за формулою Пуассона (комірки **H8:H14**) відчувається лише починаючи з четвертого знака після десяткової коми.

2.6. Завдання для самостійної роботи

Варіант 2.1

1. В університеті 20 % студентів є відмінниками. Для перевірки знань відібрали 8 студентів. Визначити ймовірність того, що серед них буде: а) саме $m=0,1,2,\ldots$ відмінників; б) не менше п'яти, але не більше семи відмінників. Скільки студентів треба відібрати для перевірки, щоб найімовірніше число відмінників дорівнювало шести? Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) збільшити ймовірність до 0,3; б) зменшити обсяг вибірки до 7.

2. Ймовірність порушення стандарту в процесі виготовлення певної продукції дорівнює 0,3. Визначити ймовірність того, що з 400 виробів кількість непридатних: а) дорівнює 240; б) не менше 210; в) не менше 210 і не більше 270. Визначити кількість випробувань, які необхідно провести, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що подія відбулась хоча б один раз.

3. Середня кількість заявок, що надходять на підприємство побутового обслуговування за 1 годину, дорівнює чотирьом. Знайти ймовірність того, що за годину надійде $m=0,1,2,\ldots.$ заявок. Визначити ймовірність того, що за годину надійде: а) більше трьох заявок; б) менше чотирьох заявок; в) не більше шести й не менше двох заявок.

Варіант 2.2

1. Імовірність того, що абонент правильно набере номер телефону, в середньому дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з восьми викликів абоненти правильно наберуть саме $m = 0, 1, 2, ...$ номерів. Знайти ймовірність того, що абоненти наберуть правильно а) не менше п'яти номерів; б) не більше п'яти номерів; в) не менше трьох і не більше шести номерів. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і її многокутник розподілу в разі: а) зменшення ймовірності появи події до 0,7; б) збільшення кількості випробувань до 9.

2. Ймовірність появи події в окремому випробуванні дорівнює 0,8. Проводиться 200 незалежних випробувань. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) 160 разів; б) не менше 150 разів; в) не менше 150 і не більше 170 разів. Визначити кількість випробувань, які необхідно провести, щоб із упевненістю 90 % можна було стверджувати, що подія відбулась хоча б один раз.

3. Імовірність того, що витрати електроенергії протягом однієї доби не перевищуватимуть встановленої норми, дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що витрати електроенергії не перевищать норми протягом такої кількості діб: а) $m = 0, 1, 2, ...$; б) протягом не більше чотирьох діб; в) протягом менш п'яти діб, але більше трьох.

Варіант 2.3

1. Імовірність виграшу в новорічній лотереї дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що з десяти білетів виграш припаде на $m = 0, 1, 2, ...$ білетів. Визначити ймовірність: а) виграшу не більше, ніж за двома білетами; б) найімовірнішої кількості виграшних білетів; в) виграшу не менше, ніж за одним і не більш, ніж за трьома білетами. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) збільшити ймовірність до 0,6; б) зменшити обсяг вибірки до 9.

2. Завод випускає електричні лампочки, серед яких 75 % становить продукція першого ґатунку. У вибірку навмання взяли 200 лампочок. Обчислити ймовірність того, що кількість лампочок першого ґатунку у вибірковій сукупності буде: а) не менше, ніж 180; б) не більше, ніж 120. Визначити, яким повинен бути обсяг вибіркової сукупності для того, щоб із надійністю 95 % можна було стверджувати, що в даній вибірковій сукупності є хоча б одна нестандартна лампочка.

3. Через телефонну станцію протягом години проходить в середньому 180 викликів. Знайти ймовірність того, що протягом хвилини буде саме $m = 0, 1, 2, ...$ викликів. Визначити ймовірність того, що кожну хвилину виникає: а) не менше трьох викликів; б) не менше двох і не більше шести викликів.

Варіант 2.4

1. Завод випускає 80 % виробів першого ґатунку. Знайти ймовірність того, що серед десяти виробів, які були взяті навмання, першого ґатунку буде: а) саме $m = 0, 1, 2, ...$ виробів; б) хоча б один виріб; в) не менше восьми виробів. Визначити найімовірніше число виробів першого ґатунку і його ймовірність. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,7; б) зменшити обсяг вибірки до 9.

2. Частка об'єктів, що має певну ознаку, в генеральній сукупності дорівнює 75 %. До вибірки взято 400 об'єктів. Обчислити найімовірнішу кількість об'єктів, для яких притаманна ця ознака, та ймовірність цієї кількості. Визначити ймовірність того, що у вибірковій сукупності кількість об'єктів із даною ознакою становить: а) менше, ніж 280; б) не більше, ніж 320 об'єктів; в) не менше, ніж 280 і не більше, ніж 320 об'єктів.

3. Середня кількість літаків, що прибувають в аеропорт за 1 хв, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що кількість літаків, які прибули протягом 2 хв, становитиме саме $m = 0, 1, 2, ...$ Визначити ймовірність того, що протягом 2 хв прибуде: а) менше чотирьох літаків; б) більше п'яти літаків; в) хоча б два літаки.

Варіант 2.5

1. Магазин отримав партію електроламп, з яких 40 % є стоватними. Визначити ймовірність того, що серед 12 ламп, які вибрали навмання, кількість шестидесятиватних буде: а) саме $m = 0, 1, 2, ...$; б) більше шести; в) не менше чотирьох; г) не більше восьми й не менше трьох.

2. Відділ технічного контролю перевіряє 1 000 деталей на відповідність стандарту. Імовірність того, що деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,75. Визначити найімовірнішу кількість стандартних серед деталей, що проходять перевірку, та ймовірність найімовірнішого числа. Знайти ймовірність того, що кількість стандартних деталей буде: а) не

меншою ніж 750 деталей; б) не більшою ніж 900 деталей. Визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, щоб із надійністю 90 % можна було стверджувати, що в даній вибірці є хоча б одна нестандартна деталь.

3. Імовірність того, що виріб не витримає випробування, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що серед 5 000 виробів не витримають випробування: а) саме $m = 0, 1, 2, ...$; б) більше, ніж один виріб; в) менше чотирьох виробів. Визначити кількість виробів, відносно яких із надійністю 95 % можна стверджувати, що вони витримають випробування.

Варіант 2.6

1. В університеті 60 % усіх студентів займаються в спортивних секціях. Для перевірки відібрали 10 студентів. Визначити ймовірність того, що серед них у секціях займаються: а) $m = 0, 1, 2, ...$ студентів; б) не менше трьох і не більше восьми студентів; в) більше чотирьох студентів. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,4; б) збільшити обсяг вибірки до 11.

2. У генеральній сукупності частка об’єктів, що мають певну ознаку, дорівнює 0,7. У вибірку взято 300 об’єктів. Визначити найімовірніше число об’єктів, що мають цю ознаку, та ймовірність найімовірнішого числа. Визначити ймовірність, з якою можна стверджувати, що у вибірковій сукупності кількість об’єктів із даною ознакою становить: а) менше, ніж 200; б) не менше ніж 200 і не більше ніж 250. Визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, щоб із надійністю 95 % можна було стверджувати, що в даній вибірці є хоча б один об’єкт, якому не притаманна дана ознака.

3. Середня кількість кораблів, що заходять у порт протягом години, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що протягом години в порт зайде: а) саме $m = 0, 1, 2, ...$ кораблів; б) більше п’яти кораблів; в) менше чотирьох кораблів; г) не більше шести й не менше двох кораблів.

Варіант 2.7

1. Оптова база обслуговує 10 магазинів, від кожного з яких може надійти протягом дня замовлення на товар з імовірністю 0,4. Визначити ймовірність того, що протягом дня на базу надійде: а) $m = 0, 1, 2, ...$ замовлень; б) більше чотирьох замовлень; в) не менше двох і не більше чотирьох замовлень. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як

змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,3; б) збільшити обсяг вибірки до 11.

2. У великій партії деталей 65 % відповідає вищому ґатунку. З цієї партії було взято 200 деталей. Визначити найімовірнішу кількість деталей вищого ґатунку і ймовірність цієї найімовірнішої кількості. Обчислити ймовірність, з якою кількість деталей вищого ґатунку в даній вибірці буде: а) меншою від 140; б) не меншою від 140 і не більшою від 160. Визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, щоб із надійністю 90 % можна було стверджувати, що в даній вибірці є хоча б одна неякісна деталь.

3. Принцип роботи лічильника Гейгера передбачає, що прилад реєструє частки, що вилітають з джерела радіоактивності, з імовірністю 0,0001. Якщо за час спостереження із джерела вилетіло 30 000 часток, визначити ймовірність того, що лічильник зареєструє: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ часток; б) більше трьох часток; в) менше п'яти часток; г) не більше семи часток і не менше трьох часток.

Варіант 2.8

1. Автобаза має 8 машин, імовірність виходу на лінію для кожної з яких дорівнює 0,8. Знайти ймовірність виходу на лінію найближчого дня $m = 0, 1, 2, \ldots$ машин. Визначити, яка ймовірність нормальної роботи автобази в найближчий день, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше 6 автомашин. Обчислити ймовірність виходу на лінію: а) не більше 5 автомашин; б) не менше 5 і не більше 7 автомашин. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,7; б) збільшити кількість машин до 9.

2. Кількість робітників, що перевиконують норму на виробництві, дорівнює 20 %. У вибірку взято 200 робітників. Визначити ймовірність, з якою можна стверджувати, що перевиконують норму: а) не менше 50 робітників; б) не менше 40 і не більше 100 робітників. Визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, щоб із надійністю 95 % можна було стверджувати, що в даній вибірці є хоча б один робітник, який не перевиконує норми.

3. Середня кількість літаків, які прибувають в аеропорт щохвилини, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що протягом 2 хв в аеропорт прибудуть: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ літаків; б) менше чотирьох літаків; в) не більше п'яти літаків; г) хоча б два літаки.

Варіант 2.9

1. Схожість насіння становить 80 %. Знайти ймовірність того, що з 12 посіяних насінин зійде: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ насінин; б) не менше трьох насінин; в) не більше п'яти й не менше трьох насінин; г) менше семи насінин. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,7; б) зменшити обсяг вибірки до 11.

2. При застосуванні певного технологічного процесу 80 % від усієї продукції становитиме продукція першого ґатунку. Обчислити ймовірність того, що в партії з 300 виробів кількість продукції першого ґатунку становитиме: а) 250 виробів; б) не менше 230 і не більше 250 виробів. Визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, щоб із надійністю 90 % можна було стверджувати, що в даній вибірці є хоча б один неякісний виріб.

3. Середня кількість заявок, що надходять на підприємство побутового обслуговування протягом години, дорівнює п'яти. Знайти ймовірність того, що за годину надійде: а) саме $m = 0, 1, 2, \ldots$ заявок; б) більше трьох заявок; в) не більше шести й не менше двох заявок.

Варіант 2.10

1. Імовірність того, що телевізор потребуватиме ремонту протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з 10 телевізорів протягом гарантійного терміну потребуватимуть ремонту: а) саме $m = 0, 1, 2, \ldots$ телевізорів; б) хоча б один телевізор; в) менше трьох телевізорів? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу в разі: а) збільшення ймовірності до 0,3; б) зменшення кількості випробувань до 9.

2. Імовірність порушення стандарту в процесі застосування певної технології обробки деталей дорівнює 0,3. Визначити ймовірність того, що з 800 готових деталей кількість непридатних становитиме: а) 240 деталей; б) не менше 210 деталей; в) не менше 210 і не більше 420 деталей. Визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, щоб із надійністю 95 % можна було стверджувати, що в даній вибірці є хоча б один неякісний виріб.

3. Імовірність того, що в певному автогосподарстві одна автомашина зазнає аварії протягом місяця, дорівнює 0,01. Автогосподарство має 500 автомашин. Визначити ймовірність того, що протягом місяця зазна-

ють аварії: а) $m = 0, 1, 2, ...$ автомашин; б) не менше дев'яти автомашин; в) не більше п'яти й не менше двох автомашин.

Варіант 2.11

1. Робітник обслуговує 8 однотипних верстатів. Імовірність того, що протягом тижня один верстат потребуватиме ремонту, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що за тиждень уваги робітника потребуватимуть: а) $m = 0, 1, 2, ...$ верстатів; б) більше трьох, але менше шести верстатів; в) не більше трьох верстатів. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу в разі: а) збільшення ймовірності до 0,4; б) збільшення кількості верстатів до 9.

2. Імовірність зняття симптомів грипу завдяки прийому певних ліків дорівнює 0,6. Ліки приймати 100 хворих на грип. Знайти ймовірність того, що кількість хворих, яким ці ліки допомогли: а) дорівнює 60; б) не менш 50; в) не менше 40 і не більше 70. Визначити, яку кількість хворих треба відібрати, щоб із надійністю 95 % можна було стверджувати, що серед них ліки допомогли хоча б одному хворому.

3. На прядильній фабриці робітниця обслуговує 1 000 веретен. У процесі обертання веретена пряжа рветься у випадкові моменти часу. Вважаючи, що ймовірність обриву пряжі на кожному з веретен протягом деякого проміжку часу дорівнює 0,004, знайти ймовірність того, що за цей час відбудеться: а) $m = 0, 1, 2, ...$ обривів; б) не більше п'яти обривів. Визначити найімовірніше число обривів і обчислити його ймовірність.

Варіант 2.12

1. Імовірність відмови приладу під час випробування дорівнює 0,25. Проведено вісім випробувань. Визначити ймовірність того, що у восьми випробуваннях кількість відмов становитиме: а) $m = 0, 1, 2, ...$; б) більше шести; в) не більше шести й не менше трьох. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу в разі: а) збільшення ймовірності до 0,4; б) збільшення кількості верстатів до 9.

2. Завод випускає електричні лампочки, серед яких 70 % становлять енергозбережуючі лампи. У вибірку взято 200 лампочок. Визначити найімовірнішу кількість енергозбережуючих ламп та ймовірність цього

найімовірнішого числа. Визначити ймовірність того, що кількість звичайних електричних ламп становитиме: а) не менше, ніж 140; б) не більше, ніж 180; в) не менше, ніж 130 і не більше, ніж 180. Знайти обсяг вибірки, за яким із надійністю 90 % у вибірковій сукупності буде хоча б одна звичайна електрична лампа.

3. Вироби заводу містять 5 % браку. Знайти ймовірність того, що серед 800 узятих навмання виробів бракованих виробів буде: а) саме $m = 0, 1, 2, ...$; б) менше чотирьох; в) хоча б один. Визначити найбільш ймовірну кількість бракованих виробів і знайти її ймовірність.

Варіант 2.13

1. В університеті з усіх студентів 30 % відмінників. Для перевірки залишкових знань відібрали 15 студентів. Визначити ймовірність того, що серед них кількість відмінників становитиме: а) $m = 0, 1, 2, ...$; б) не менше п'яти й не більше восьми; в) не менше чотирьох. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу в разі: а) збільшення ймовірності до 0,4; б) зменшення кількості студентів у вибірковій сукупності до 10.

2. Схожість насіння певної рослини становить 80 %. Знайти ймовірність того, що з 900 посіяних насінин зійде: а) 720; б) не менше 700; в) не більше 740; г) не менше 700 і не більше 740. Визначити, якою повинна бути кількість насіння, щоб із надійністю 95 % можна було стверджувати, що зійде хоча б одна зернина.

3. Імовірність виграшу в лотереї дорівнює 0,01. Визначити ймовірність того, що зі ста білетів виграш припаде: а) на $m = 0, 1, 2, ...$ білетів; не більш ніж на два білети; в) більш ніж на три білети.

Варіант 2.14

1. Імовірність того, що взяту напрокат автомашину повернуть неушкодженою, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з дванадцяти орендованих автомашин неушкодженими будуть повернуті: а) саме $m = 0, 1, 2, ...$ автомашин; б) не більше десяти й не менше шести автомашин; в) менше семи автомашин. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,6; б) зменшити кількість автомашин до 11.

2. Схожість досліджуваної рослини становить 70 %. Знайти ймовірність того, що з 700 посіяних зернин зійде: а) 490; б) менше 500; в) не менше 390 і не більше 590. Знайти обсяг вибірки, за яким із надійністю 90 % у вибірковій сукупності буде хоча б одна непроросла зернина.

3. З партії деталей, серед яких 1 % нестандартних, на контроль відбирається 500 деталей. Визначити ймовірність того, що кількість нестандартних деталей, що виявить контроль, становитиме: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ деталей; б) не більше трьох деталей; в) не менше однієї й не більше п'яти деталей. Визначити найбільш ймовірну кількість бракованих деталей у вибірковій сукупності і знайти її ймовірність.

Варіант 2.15

1. У новорічну ніч імовірність того, що оператор забезпечить мобільний зв'язок між абонентами, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з восьми викликів буде успішно здійснено: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ з'єднань; б) менше п'яти з'єднань; в) не менше трьох і не більше шести з'єднань. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 0,7; б) збільшити кількість викликів до 9.

3. У великій партії деталей лише 70 % відповідає вищому ґатунку. З партії взято 300 деталей. Обчислити ймовірність того, що кількість деталей вищого ґатунку буде: а) не більше ніж 260; б) більше від 210; в) не менше 240 і не більше 260. Визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, щоб із упевненістю 90 % можна було стверджувати, що серед деталей буде хоча б одна, що не відповідає вищому ґатунку.

3. Під час вхідного контролю партії деталей виявилося в середньому 1 % бракованих. Визначити ймовірність того, що серед 300 деталей виявиться: а) рівно $m = 0, 1, 2, \ldots$ бракованих; б) не більше чотирьох бракованих; в) не менше двох і не більше п'яти бракованих. Знайти найімовірніше число бракованих деталей та ймовірність цього числа.

Варіант № 2.16

1. У цеху є 12 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що серед них працюють: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ верстатів; б) не менше п'яти й не більше восьми верстатів? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики

випадкової величини і многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність з 0,8 до 0,5; б) зменшити кількість верстатів з 12 до 8.

2. Імовірність виготовлення бракованого свердла дорівнює 0,2. Свердла пакуються в коробки по 100 штук. Знайти ймовірність того, що в коробці буде: а) 65 бракованих свердел; б) не більш ніж 75 бракованих свердел; в) не менш ніж 35 бракованих свердел. Визначити обсяг вибірки, для якого з упевненістю 95 % можна було стверджувати, що хоча б одне свердло буде бракованим.

3. Із партії обсягом 500 валків взято 50 з метою контролю їхнього діаметра. Із попередніх досліджень відомо, що в середньому 2 % валків браковані. Знайти ймовірність того, що серед 50 вибраних валків буде $m = 0, 1, 2, ...$бракованих. Визначити ймовірність того, що за серед 50 вибраних валків бракованих буде: а) більше трьох; б) менше п’яти; в) більше двох, але не більше п’яти.

Варіант № 2.17

1. Робітник обслуговує 10 однотипних верстатів. Імовірність того, що верстат потребуватиме обслуговування протягом певного часу t, дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що за час t: а) потрібно буде обслуговувати $m = 0, 1, 2, ...$верстатів; б) кількість вимог на обслуговування буде більше трьох, але менше семи? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини в разі а) зменшення ймовірності з 0,3 до 0,25; б) збільшення кількість верстатів з 10 до 15.

2. Імовірність відмови датчика протягом місяця дорівнює 0,1. Щомісяця перевіряють 1 000 датчиків. Визначити ймовірність того, що серед вибраних на перевірку буде: а) 650 датчиків з відмовою; б) не більш ніж 750 датчиків з відмовою; в) не менш ніж 300 датчиків з відмовою. Обчислити необхідний обсяг вибірки, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що серед датчиків хоча б один є з відмовою.

3. У певній місцевості на кожні 100 кавунів припадає в середньому один, маса якого не менша за 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії із 70 кавунів буде $m = 0, 1, 2, ...$ кавуни масою не менше 10 кг. Визначити ймовірність того, що за серед 70 вибраних кавунів кількість кавунів, маса яких не менша за 10 кг, буде: а) більше двох; б) менше двох; в) не більше чотирьох й не менш одного.

Варіант № 2.18

1. За один цикл верстат-автомат виготовляє 10 деталей. Імовірність того, що довільна деталь бракована, становить 0,01. Яка ймовірність того, що серед них бракованих деталей виявиться: а) $m = 0, 1, 2, ...$; б) не менше двох і не більше семи? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини, якщо: а) збільшити ймовірність з 0,01 до 0,05; б) збільшити кількість деталей з 10 до 18.

2. Телевізійна компанія, вирішуючи питання щодо доцільності придбання права на трансляцію чемпіонату міста з футболу, провела опитування серед фанатів. Визначено, що кожні 20 зі 100 фанатів, які не мають кабельного зв'язку, бажають стати абонентами телевізійної компанії. Знайти ймовірність того, що серед вибраних 200 фанатів абонентами телевізійної компанії стане: а) 105 фанатів; б) не більш ніж 175 фанатів; в) не менш ніж 135 фанатів. Визначити необхідну кількість вболівальників футболу, щоб із упевненістю 90 % можна було стверджувати, що хоча б один фанат стане абонентом телевізійної компанії.

3. У процесі транспортування ймовірність пошкодити виріб дорівнює 0,05. Обчислити ймовірність того, що при цьому із 60 виробів буде саме $m = 0, 1, 2, ...$ пошкоджених. Визначити ймовірність того, що за серед 60 вибраних виробів пошкодженими будуть: а) не більше чотирьох; б) менше восьми; в) не менше двох, але не більше семи.

Варіант № 2.19

1. Податкова служба визначила, що 50 % всіх особистих декларацій про прибуток містить принаймні одну помилку. Випадковим чином відібрали 10 декларацій. Яка ймовірність що серед них з помилками: а) $m = 0, 1, 2, ...$; б) не менше трьох й не більше восьми? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити як змінюються числові характеристики випадкової величини та многокутник розподілу, якщо: а) збільшити ймовірність до 60 %; б) збільшити кількість декларацій з 10 до 20.

2. У процесі виробництва детекторів брехні вимагається, щоб вони могли відрізняти правильні відповіді від неправильних з надійністю 85 %. Детектори тестують, використовуючи для цього 50 запитань. Знайти ймовірність того, що правильно визначених відповідей буде: а) 35; б) не більш ніж 45; в) не менш ніж 15. Визначити необхідну кількість запитань,

щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що хоча б одна хибна відповідь помилково буде визнана правильною.

3. Банк видає кредитні картки VISA. Було встановлено, що 2 % усіх рахунків оплачується повністю за їх допомогою. З попереднього року вибрали навмання 50 рахунків. Яка ймовірність того, що серед них буде $m = 0, 1, 2, \ldots$ оплачених за допомогою карток VISA? Визначити ймовірність того, що за серед 50 відібраних рахунків оплачених буде: а) більше трьох; б) менше десяти; в) не більше семи й не менш одного рахунку.

Варіант № 2.20

1. Митниця дає офіційну оцінку того, що 20 % усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларує весь товар, який оподатковується. Якщо випадково відібрати 16 осіб, які повертаються з-за кордону, то яка ймовірність того, що: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ осіб не задекларує товар, який оподатковується; б) не менше трьох із них не задекларує товар, який оподатковується? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини та многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 10 %; б) збільшити кількість відібраних осіб з 16 до 30.

2. Штамповка металевих клем для з'єднувальних пластин дає 20 % браку. Визначити ймовірність наявності в партії із 600 клем: а) 100 клем, що не відповідають стандарту; б) не більш як 225 клем, що не відповідають стандарту; в) не менш ніж 350 клем, що відповідають стандарту. Визначити необхідну кількість клем, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що хоча б одна клема відповідає стандарту.

3. Кількість довгих волокон у партії бавовни складає 0,6 % від їх загальної кількості. Для контролю взяли навмання пучок з 500 волокон. Яка ймовірність того, що в обраному пучку волокон буде $m = 0, 1, 2, \ldots$ довгих волокон? Визначити ймовірність того, що в обраному пучку кількість довгих волокон буде: а) більше п'яти; б) менше десяти; в) не більше одного.

Варіант № 2.21

1. Керівництво прикордонної застави зібрало статистичні дані, які вказують на те, що 20 % машин, які прибувають з-за кордону, є легковими. До в'їзду на КПП прибуло 10 машин. Яка ймовірність того, що серед них: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ машин будуть легковими; б) не менше двох машин

будуть легковими? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як зміняться числові характеристики випадкової величини та многокутник розподілу, якщо: а) збільшити ймовірність до 30 %; б) збільшити кількість машин з 10 до 20.

2. У процесі автоматичного пресування карболітових деталей за певною технологією 2/3 від загальної кількості деталей не містить браку. Знайти ймовірність того, що із 450 взятих навмання деталей кількість деталей без браку: а) дорівнює 100; б) не перевищує 250; в) знаходиться в межах від 280 до 320. Визначити необхідну кількість деталей, яку треба взяти, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що хоча б одна деталь без браку.

3. У скрині знаходяться 100 карток, на яких написані номери від 1 до 100. Навмання 200 раз виймають одну картку, фіксують її номер і повертають її у скриню. Яка ймовірність того, що в цих випробуваннях картка з номером «1» з'явиться $m = 0, 1, 2, \ldots$ раз? Визначити ймовірність того, що в серії з 200 випробувань картку з номером «1» витягли: а) більше семи разів; б) менше п'яти раз; в) не більше десяти й не менше двох раз.

Варіант № 2.22

1. У великій партії деталей в середньому з кожних 10 деталей 9 є стандартними. Знайти ймовірність того, що з 15 деталей стандартними будуть: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$; б) не менше п'яти. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини та многокутник розподілу за умов, що: а) ймовірність того, що деталь виявиться стандартною, зменшити до 0,8; б) кількість деталей у вибірковій сукупності збільшити від 15 до 25.

2. Відсоток схожості насіння складає 80 %. Знайти ймовірність того, що з 800 посіяних зернин зійдуть: а) 560; б) не більш ніж 600; в) більше 640, але менше 750 зернин. Визначити кількість зернин, яку необхідно взяти, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що хоча б одне зерно зійде.

3. Із партії друкарських видань взято 100 видань для проведення перевірки щодо порушення якості друку. Із попередніх досліджень відомо, що в середньому 0,01 % видань містять такі порушення. Яка ймовірність того, що серед 100 вибраних видань саме $m = 0, 1, 2, \ldots$ будуть містити порушення? Визначити ймовірність того, що серед 100 відібраних

видань з порушеннями буде: а) більше трьох; б) менше п'яти; в) не більше десяти й не менше двох видань.

Варіант № 2.23

1. Податкова інспекція визначила, що серед усіх особистих декларацій про прибуток 60 % містять помилку. Визначити ймовірність того, що серед 15 декларацій, які відібрані випадково, без помилок виявиться: а) $m = 0, 1, 2, ...$; б) не менше двох й не більше десяти декларацій. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини та многокутник розподілу, якщо: а) зменшити ймовірність до 50 %; б) збільшити кількість декларацій з 15 до 25.

2. При застосуванні певної технології виготовлення свердел імовірність браку дорівнює 0,7. Свердла пакуються в коробки по 200 штук. Знайти ймовірність того, що якісних свердел у коробці буде: а) 150; б) не більше 175; в) не менше 105. Визначити, скільки необхідно взяти свердел, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що серед них хоча б одне свердло буде якісним.

3. Банк видає пільгові кредити. Було встановлено, що 1 % усіх кредитів оплачується до закінчення терміну кредитування. Для аналізу за результатами попереднього року вибрали навмання 100 кредитних угод. Визначити ймовірність того, що серед них буде $m = 0, 1, 2, ...$ таких, що були сплачені достроково. Яка ймовірність того, що серед 100 кредитних угод оплачених достроково буде: а) більше трьох; б) не менш ніж п'ять; в) не більше семи й не менше двох?

Варіант № 2.24

1. Робітник обслуговує 14 однотипних верстатів. Імовірність того, що верстат потребуватиме обслуговування протягом часу t, дорівнює 0,4. Яка ймовірність того, що за час t: а) обслуговування потребуватимуть $m = 0, 1, 2, ...$ верстатів; б) кількість вимог на обслуговування буде від чотирьох до десяти? Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини та многокутник розподілу, якщо: а) збільшити ймовірність з 0,4 до 0,7; б) збільшити кількість верстатів з 14 до 20.

2. Виробник кондиціонерів вимагає, щоб вони могли розрізняти температурний режим приміщень з надійністю 75 %. Для тестування вибра-

но 450 кондиціонерів. Знайти ймовірність того, що правильно визначать температурний режим приміщень: а) 350; б) не більш як 270; в) не менш ніж 150 кондиціонерів. Визначити, яку кількість кондиціонерів необхідно відібрати у вибіркову сукупність, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що хоча б один кондиціонер визначить температурний режим приміщень правильно.

3. При вирощуванні гарбузів із насіння вищого ґатунку в середньому на кожні 200 гарбузів припадає два таких, що маса кожного перевищує 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії із 100 гарбузів буде $m = 0, 1, 2, \ldots$ гарбузів, маса яких перевищує 10 кг. Визначити ймовірність того, що за серед 100 гарбузів масу завбільшки 10 кг матимуть: а) більше чотирьох гарбузів; б) менше семи гарбузів; в) не більше дев’яти й не менше двох гарбузів.

Варіант № 2.25

1. У партії деталей двох подібних форматів кількість великих утричі перевищує кількість менших за розміром. Деталі скидані до купи. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих з цієї купи 12 деталей будуть: а) $m = 0, 1, 2, \ldots$ великих; б) не менш двох й не більше семи великих. Побудувати многокутник розподілу. Дослідити, як змінюються числові характеристики випадкової величини та многокутник розподілу, якщо: а) збільшити ймовірність вибору деталі великого формату до 0,8; б) збільшити кількість деталей з 12 до 16.

2. При застосуванні певної технології імовірність браку виробництва складає 15 %. Для діагностики вибрано 500 деталей, виготовлених за цією технологією. Знайти ймовірність того, що бракованих деталей буде: а) 350; б) не більш як 420; в) не менш ніж 100. Визначити необхідну кількість деталей, щоб із упевненістю 95 % можна було стверджувати, що хоча б одна деталь буде якісною.

3. Із партії друкарських видань взято 200 видань з метою контролю на наявність помилок. Із попередніх досліджень відомо, що в середньому 0,5 % видань містять помилки. Знайти ймовірність того, що серед 200 видань, відібраних для перевірки, з помилками буде $m = 0, 1, 2, \ldots$ видань. Визначити ймовірність того, що з 200 видань помилки міститимуть: а) більше семи видань; б) менше трьох видань; в) не більше десяти й не менше двох видань?

2.7. Контрольні запитання

1. Поясніть, яким умовам відповідають випробування, що здійснюються за схемою Бернуллі.

2. Наведіть формулу Бернуллі і поясніть, за яких умов вона може застосовуватись.

3. Чи має обмеження формула Бернуллі за кількістю випробувань?

4. Які числові характеристики розподілу випадкової величини вважаються основними? Наведіть їх означення для дискретної випадкової величини.

5. Наведіть формули для обчислення основних числових характеристик випадкової величини, що розподілена за біноміальним законом.

6. Які додаткові числові характеристики розподілу випадкової величини Ви знаєте? Наведіть їх означення.

7. Що таке многокутник розподілу?

8. Дайте означення поняття «довірча ймовірність» і наведіть формулу для визначення кількості випробувань, які необхідно провести, щоб із заданою надійністю забезпечити появу певної випадкової події.

9. Які рівні надійності найчастіше застосовуються для визначення необхідної кількості випробувань, що забезпечує появу певної події?

10. Поясніть, чому формули Муавра – Лапласа та формула Пуассона називаються асимптотичними.

11. Сформулюйте локальну теорему Муавра – Лапласа. Які існують обмеження для її застосування?

12. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра – Лапласа.

13. Порівняйте можливості застосування локальної формули Муавра – Лапласа та формули Пуассона.

14. Наведіть формулу Пуассона.

15. Поясніть, чому закон, згідно з яким для визначення ймовірності застосовується формула Пуассона, називається законом виключних подій.

16. Поясніть, чому закон розподілу Пуассона вважається однопараметричним.

17. Як впливає параметр розподілу Пуассона на вигляд многокутника його розподілу?

Лабораторна робота № 3

3.1. Тема роботи: Двовимірна дискретна випадкова величина, її закон розподілу та числові характеристики.

3.2. Мета роботи – ознайомлення на прикладі дискретної випадкової величини з принципами обчислення основних числових характеристик двовимірної випадкової величини; побудова умовних законів розподілу її компонентів і відповідних їм рівнянь регресії; дослідження щільності кореляційного зв'язку за коефіцієнтом кореляції.

3.3. Теоретичні положення

Якщо на просторі елементарних подій Ω задані дві випадкових величини $\xi = \xi(\omega)$ та $\eta = \eta(\omega)$ такі, що кожній елементарній події ω ставиться у відповідність впорядкована пара значень $\xi = x_i$ та $\eta = y_j$, то впорядкована пара $(\xi; \eta)$ двох одновимірних величин ξ та η називається ***двовимірною випадковою величиною***. Одновимірні випадкові величини ξ та η є її ***компонентами***.

Законом розподілу двовимірної випадкової величини називається відповідність між можливими значеннями цієї величини, тобто парами чисел (x_i, y_j), та ймовірністю $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$, з якою випадкова величина $(\xi; \eta)$ набуває цих значень. Події $\xi = x_i$, $\eta = y_j$ утворюють повну групу подій, отже, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, де i – кількість значень, яких може набувати випадкова величина ξ, j – кількість значень, яких може набувати випадкова величина η. Закон розподілу дискретної випадкової величини можна задати у вигляді таблиці (***кореляційна таблиця***) або аналітично. Відповідність між значеннями одновимірної випадкової величини $\xi = x_i$ $(i = \overline{1,n})$ та ймовірностями $P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ є законом розподілу компонента ξ, а між значеннями одновимірної випадкової величини $\eta = y_j$ $(j = \overline{1,m})$ та ймовірностями $P(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ – законом розподілу компонента η двовимірної випадкової величини $(\xi; \eta)$.

Кожна з одновимірних випадкових величин характеризується її математичним сподіванням:

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\ ,\quad M(\eta)=\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\ , \tag{3.1}$$

та дисперсією:

$$D(\xi)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{j=1}^{m}p_{ij}-\left(M(\xi)\right)^2,\quad D(\eta)=\sum_{j=1}^{m}y_j^2\sum_{i=1}^{n}p_{ij}-\left(M(\eta)\right)^2. \tag{3.2}$$

Для характеристики щільності кореляційного зв'язку між компонентами двовимірної випадкової величини «мовою моментів» застосовується ***кореляційний момент***, який визначається як математичне сподівання добутку відхилень компонентів випадкової величини від їх математичних сподівань:

$$\mu_{\xi\eta}=M\left((\xi-M(\xi))\cdot(\eta-M(\eta))\right), \tag{3.3}$$

або

$$\mu_{\xi\eta}=M\left(\xi\cdot\eta\right)-M(\xi)\cdot M(\eta). \tag{3.3'}$$

Відповідно, для дискретної двовимірної випадкової величини має місце співвідношення:

$$\mu_{\xi\eta}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}-M(\xi)\cdot M(\eta). \tag{3.4}$$

Основними числовими характеристиками двовимірної випадкової величини $(\xi;\eta)$ вважаються математичні сподівання $M(\xi)$ та $M(\eta)$ і дисперсії $D(\xi)$ та $D(\eta)$ кожного з її компонентів, а також ***коефіцієнт кореляції***:

$$r_{\xi\eta}=\frac{\mu_{\xi\eta}}{\sqrt{D(\xi)\cdot D(\eta)}}. \tag{3.5}$$

Розподіл одного з компонентів випадкової величини $(\xi;\eta)$ за умови, що її інший компонент набуває певного значення, називається ***умовним розподілом***. Так, ***умовна ймовірність*** $P(x_i\mid\eta=y_j)$ визначає ймовірність, з якою випадкова величина ξ набуває значення x_i $(i=\overline{1,n})$ за умови, що випадкова величина η має стале значення y_j $(j=\overline{1,m})$:

$$P(x_i \mid \eta = y_j) = \frac{p(x_i; y_j)}{P(\eta = y_j)}, \quad \text{де} \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}. \tag{3.6}$$

Аналогічно умовна ймовірність $P(y_j \mid \xi = x_i)$ – це ймовірність, з якою випадкова величина η набуває значення y_j $(j=\overline{1,m})$ за умови, що випадкова величина ξ матиме стале значення x_i $(i=\overline{1,n})$:

$$P(y_j \mid \xi = x_i) = \frac{p(x_i; y_j)}{P(\xi = x_i)}, \quad \text{де} \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}. \tag{3.7}$$

Відповідність між значеннями, яких набуває один із компонентів двовимірної випадкової величини, та їх умовними ймовірностями є умовним законом розподілу. Так, умовний закон розподілу одного з компонентів випадкової величини $(\xi;\eta)$ записано в рядках кореляційної таблиці, для іншого – в її стовпцях.

Умовне математичне сподівання випадкової величини ξ за умови, що випадкова величина η набуває значення y_j $(j=\overline{1,m})$, визначається формулою:

$$M(\xi \mid \eta = y_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}, \quad \text{де} \quad j=\overline{1,m}. \tag{3.8}$$

Умовне математичне сподівання випадкової величини ξ є функцією від значення y_j, якого набуває випадкова величина η, тобто:

$$M(\xi \mid \eta = y) = g_1(y). \tag{3.9}$$

Функція $g_1(y)$ називається ***регресією випадкової величини ξ на випадкову величину η***.

Аналогічно умовне математичне сподівання випадкової величини η за умови, що випадкова величина ξ набуває значення x_i $(i = \overline{1,n})$, визначається формулою:

$$M(\eta \mid \xi = x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}}, \quad \text{де} \quad i = \overline{1,n}, \qquad (3.10)$$

а функція

$$M(\eta \mid \xi = x) = g_2(x). \qquad (3.11)$$

є ***регресією випадкової величини*** η ***на випадкову величину*** ξ.

Графіки, що побудовані за функціями $g_1(y)$ та $g_2(x)$, називаються відповідними ***лініями регресії***. Кут між лініями регресії відображає щільність кореляційного зв'язку.

Якщо двовимірна випадкова величина $(\xi;\eta)$ є такою, що обидва її компоненти ξ та η розподілені за нормальним законом, то регресія є лінійною і умовне математичне сподівання визначається за відповідним лінійним рівнянням:

$$M(\xi \mid \eta = y) = a_0 + a_1 y \quad \text{або} \quad M(\eta \mid \xi = x) = b_0 + b_1 x. \qquad (3.12)$$

Так, при визначенні параметрів ***рівняння регресії*** випадкової величини η на ξ через основні числові характеристики двовимірної випадкової величини $(\xi;\eta)$ маємо:

$$M(\eta \mid \xi = x) = M(\eta) + r_{\xi\eta} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \cdot (x - M(\xi)).$$

Отже, ***коефіцієнт регресії*** η на ξ дорівнює:

$$\rho_{\eta/\xi} = b_1 = r_{\xi\eta} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}, \qquad (3.13)$$

а вільний член обчислюється за формулою:

$$b_0 = M(\eta) - \rho_{\eta/\xi} \cdot M(\eta). \qquad (3.14)$$

3.4. Змістовна постановка задачі

Чотири монети кидають одночасно. Необхідно виконати такі завдання:

3.1. Побудувати закон розподілу випадкової величини $(\xi; \eta)$, компонентом ξ якої є кількість «орлів» на двох монетах, компонентом η – кількість «орлів» на всіх чотирьох монетах.

3.2. Побудувати умовний закон розподілу випадкової величини η, що відповідає умові $\xi = 0$.

3.3. Обчислити умовні математичні сподівання компонентів ξ та η і за цими результатами побудувати лінії регресії η на ξ та ξ на η.

3.4. Визначити основні числові характеристики двовимірної випадкової величини і зробити висновок щодо щільності кореляційного зв'язку.

3.5. Обчислити параметри рівняння регресії η на ξ.

3.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 3

Завдання 3.1. У процесі випробувань компонент ξ випадкової величини $(\xi; \eta)$ набуває значення $x_i \in \{0; 1; 2\}$, а компонент η – значення $y_j \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Позначимо випадкову подію, яка полягає в тому, що на монеті під номером k $(k = \overline{1,4})$ випаде «орел», через A_k. Імовірність такої події не залежить від номера монети і дорівнює 0,5. При обчисленні ймовірності $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$ слід спиратись на теореми множення та додавання ймовірностей незалежних подій. Вважатимемо, що результат випробування на першій і другій монетах нам відомий, а результат на третій і четвертій монетах – ні. Нехай $\xi = x_1 = 0$ та $\eta = y_1 = 0$, тоді:

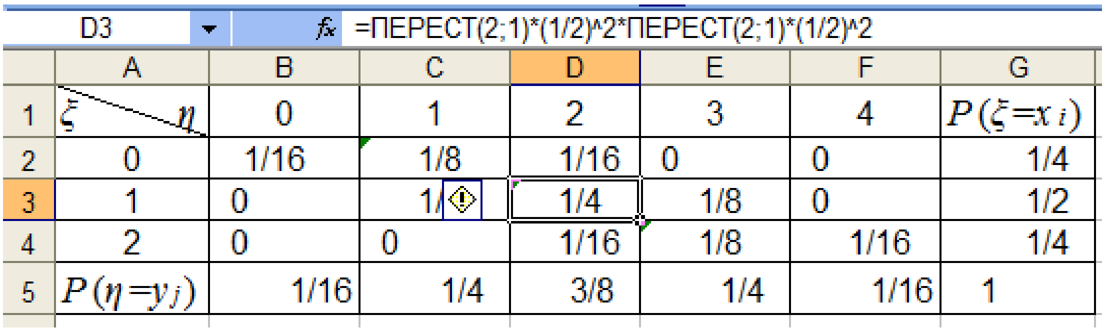
$$p_{11} = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = (0,5)^4 = 1/16 .$$

Якщо $\xi = x_1 = 0$ та $\eta = y_2 = 1$, то:

$$p_{12} = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) = A_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16},$$

де A_2^1 – кількість розміщень одного «орла» на двох монетах (третій і четвертій), результат для яких вважається невідомим.

Аналогічно обчислюємо ймовірності інших значень двовимірної випадкової величини. Обчислення здійснюємо за допомогою MS Excel і оформлюємо у вигляді кореляційної таблиці (рис. 3.1).


D3 =ПЕРЕСТ(2;1)*(1/2)^2*ПЕРЕСТ(2;1)*(1/2)^2

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	4	$P(\xi=x_i)$
2	0	1/16	1/8	1/16	0	0	1/4
3	1	0	1/	1/4	1/8	0	1/2
4	2	0	0	1/16	1/8	1/16	1/4
5	$P(\eta=y_j)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16	1

Рис. 3.1. **Скриншот, що містить розрахунки закону розподілу двовимірної випадкової величини**

Комірки **A1:F4** описують закон розподілу двовимірної випадкової величини. Комірки **B5:F5**, значення яких обчислюються як суми за відповідними стовпцями, містять ймовірності**,** з якими одновимірна випадкова величина η набуває своїх значень. Отже, комірки **B1: F1** та **B5:F5** – це закон розподілу одновимірної випадкової величини η. Значення комірок **G2:G4** обчислюються як суми за відповідними рядками, отже, комірки **A2:A4** та **G2:G4** – закон розподілу одновимірної випадкової величини ξ. До комірки **G4** виводиться сума ймовірностей всіх значень випадкової величини $(\xi;\eta)$. Вона дорівнює 1, тобто це дійсно є законом розподілу.

Завдання 3.2. Для побудови умовного закону розподілу випадкової величини η, що відповідає умові $\xi = 0$, за формулами (3.7) необхідно поділити ймовірності, значення яких записані в комірках **B2:F2**, на їхню суму, що записана в комірці **G2**. Нагадуємо, що посилання на комірку **G2** повинне бути абсолютним. Отримані результати наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Умовний закон розподілу випадкової величини η при $\xi = 0$

η	0	1	2	3	4
$P(y_j \mid \xi = 0)$	1/4	1/2	1/4	0	0

Завдання 3.3. Для обчислення умовних математичних сподівань доповнимо кореляційну таблицю, що наведена на рис. 3.1, ще одним стовпчиком (комірки **H1:H4**) та ще одним рядком (комірки **A6:F6**). Для обчислення умовних математичних сподівань випадкової величини η за співвідношенням (3.8) введемо, наприклад, у комірку **H2** формулу, як показано на рис. 3.2, і розтягнемо її на комірки **H2:H4**.

H2 fx =СУММПРОИЗВ($B$1:$F$1;B2:F2)/G2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	4	$P(\xi=x_i)$	$M(\eta\|\xi=x_i)$
2	0	1/16	1/8	1/16	0	0	1/4	1
3	1	0	1/8	1/4	1/8	0	1/2	2
4	2	0	0	1/16	1/8	1/16	1/4	3
5	$P(\eta=y_j)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16	1	
6	$M(\xi\|\eta=y_j)$	0	1/2	1	1 1/2	2		

Рис. 3.2. **Скриншот, що містить розрахунки умовних математичних сподівань**

При побудові ліній регресії за допомогою надбудови **Мастер диаграмм** застосовуємо тип діаграми **Точечный**, при цьому вісь ОХ відповідає випадковій величині ξ, вісь ОY – випадковій величині η. Результат наведено на рис. 3.3.

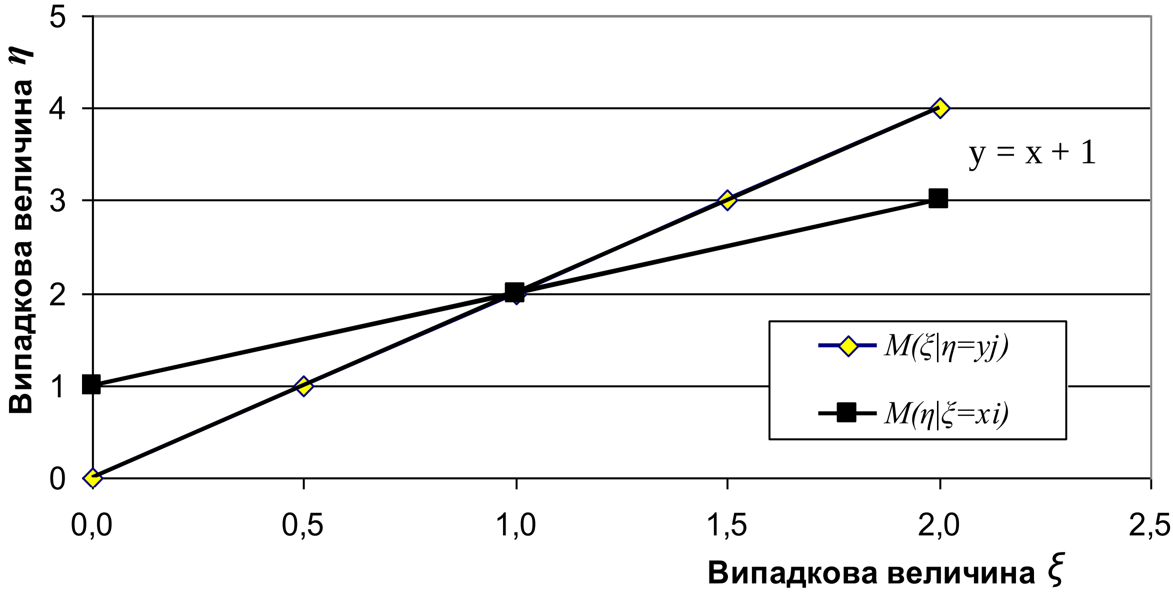
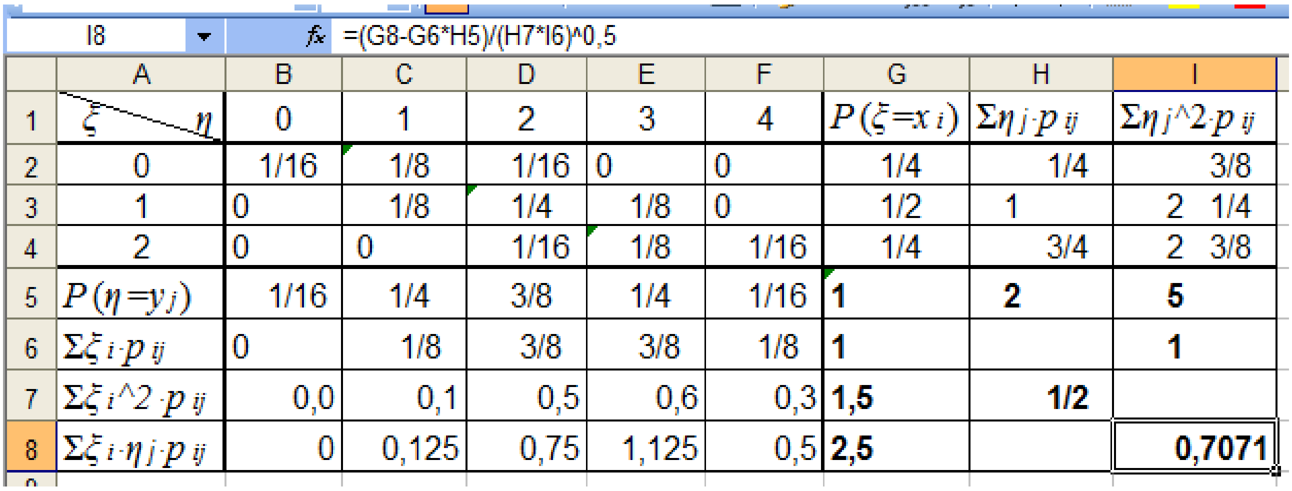


Рис. 3.3. **Лінії регресії η на ξ та ξ на η**

Завдання 3.4. Відкриємо новий аркуш MS Excel. Для визначення основних числових характеристик двовимірної випадкової величини візьмемо за основу кореляційну таблицю і доповнимо її двома рядками та двома стовпцями для проведення проміжних обчислень у процесі визначення основних числових характеристик компонентів двовимірної випадкової величини та ще одним рядком для обчислення коваріаційного моменту. Обчислення організовані таким чином, як це наведено на рис. 3.4.



I8 fx =(G8-G6*H5)/(H7*I6)^0,5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	4	$P(\xi=x_i)$	$\Sigma\eta_j \cdot p_{ij}$	$\Sigma\eta_j^2\cdot p_{ij}$
2	0	1/16	1/8	1/16	0	0	1/4	1/4	3/8
3	1	0	1/8	1/4	1/8	0	1/2	1	2 1/4
4	2	0	0	1/16	1/8	1/16	1/4	3/4	2 3/8
5	$P(\eta=y_j)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16	**1**	**2**	**5**
6	$\Sigma\xi_i \cdot p_{ij}$	0	1/8	3/8	3/8	1/8	**1**		**1**
7	$\Sigma\xi_i^2\cdot p_{ij}$	0,0	0,1	0,5	0,6	0,3	**1,5**	**1/2**	
8	$\Sigma\xi_i \cdot \eta_j \cdot p_{ij}$	0	0,125	0,75	1,125	0,5	**2,5**		**0,7071**

Рис. 3.4. **Скриншот, що містить розрахунки основних числових характеристик випадкової величини** $(\xi;\eta)$

При обчисленні математичного сподівання випадкової величини ξ в комірку **B6** вводимо формулу: **=СУММПРОИЗВ($A$2:$A$4;B2:B4)** і розтягуємо її вздовж рядка. У комірку **G6** виводимо значення математичного сподівання як суму комірок **B6:G6**. Отже, $M(\xi)=1$. Для обчислення математичного сподівання квадрату випадкової величини ξ (першого доданка в перетвореній формулі дисперсії) в комірку **B7** вводимо формулу: **=СУММПРОИЗВ(($A$2:$A$4)^2;B2:B4)** і розтягуємо її вздовж рядка. У комірку **G7** виводимо значення математичного сподівання ξ^2 як суму комірок **B7:F7**. Отже, $M(\xi^2)=2,5$. Тепер у комірку **H7** вводимо формулу: **=G7-G6^2** і отримуємо значення дисперсії: $D(\xi)=0,5$.

Аналогічно в комірку **H2** для допоміжних обчислень вводимо формулу: **=СУММПРОИЗВ($B$1:$F$1;B2:F2)**, розтягуємо її на комірки **H2:H4** і в комірці **H5** виводимо їхню суму. Отримуємо, що $M(\eta)=2$. Для допоміжних обчислень при визначенні $M(\eta^2)$ в комірку **I2** вводимо формулу:

=СУММПРОИЗВ($B$1:$F$1^2;B2:F2), розтягуємо її на комірки **I2:I4** і в комірці **I5** виводимо їхню суму. Отже, $M(\eta^2) = 5$. Для обчислення дисперсії у комірку **I6** вводимо формулу: **=I5-H5^2**. Звідси маємо $D(\eta) = 1$.

Тепер перейдемо до обчислення математичного сподівання добутку випадкових величин ξ та η. Для допоміжних обчислень у комірку **B8** вводимо формулу: **=B1*СУММПРОИЗВ($A$2:$A$4;B2:B4)**, розтягуємо її на комірки **B8:F8**, а в комірці **F8** записуємо їх суму. Отже, $M(\xi \cdot \eta) = 2{,}5$. Залишилося визначити коефіцієнт кореляції. Ввівши в комірку **I8** формулу: **=(G8-G6*H5)/(H7*I6)^0,5**, отримуємо $r = 0{,}7071$. Оскільки $|r| > 0{,}35$, то кореляційний зв'язок між випадковими величинами ξ та η слід вважати суттєвим.

Завдання 3.5. Для обчислення параметрів рівняння регресії η на ξ підставимо значення основних числових характеристик випадкової величини $(\xi; \eta)$ у співвідношення (3.13) і (3.14). Так, для обчислення коефіцієнта регресії η на ξ в довільну комірку робочого аркуша вводимо формулу: **=I8*(I6/H7)^0,5**. Отримуємо, що $\rho_{\eta/\xi} = 1$. Далі визначаємо вільний член рівняння: $b_0 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$. Отже, маємо рівняння регресії η на ξ:

$$M(\eta \mid \xi = x) = 1 + x.$$

Повернемося до графіків лінії регресії (рис. 3.3). Зайдемо правою клавішею миші на будь-яку точку лінії регресії η на ξ і виведемо на екран рівняння лінійного тренда. Ми отримали те ж саме рівняння.

3.6. Завдання для самостійної роботи

За допомогою вбудованих функцій та надбудов MS Excel для двовимірної випадкової величини $(\xi; \eta)$ необхідно: 1) побудувати її закон розподілу у вигляді кореляційної таблиці; 2) побудувати умовний закон розподілу одновимірної випадкової величини η за умови, що $\xi = 1$; 3) визначити умовні математичні сподівання для всіх можливих для даного прикладу умовних законів розподілу і за цими результатами побудувати спряжені лінії регресії η на ξ та ξ на η; 4) визначити основні числові характеристики двовимірної випадкової величини і за коефіцієнтом кореляції зробити висновок щодо щільності кореляційного зв'язку між компонентами двовимірної випадкової величини $(\xi;\eta)$; 5) обчислити параметри рівняння регресії η на ξ.

Варіант № 3.1

Є п'ять монет, які кидають одночасно. Розглядається двовимірна випадкова величина $(\xi;\eta)$, компонентом ξ якої є кількість «орлів» на трьох монетах, а компонентом η – кількість «орлів» на всіх п'яти монетах.

Варіант № 3.2

Є шість монет, які кидають одночасно. Розглядається двовимірна випадкова величина $(\xi;\eta)$, компонентом ξ якої є кількість «орлів» на трьох монетах, а компонентом η – кількість «орлів» на шести монетах.

Варіант № 3.3

У процесі перевезення ймовірність пошкодження для кожного виробу дорівнює 0,3. Після перевезення п'яти виробів вибірково перевіряють якість двох з них. Випадкова величина ξ – кількість пошкоджених виробів серед тих, що перевіряли, η – загальна кількість пошкоджених виробів.

Варіант № 3.4

Робітник обслуговує чотири верстати, два з яких розташовані в одному цеху, а два – в іншому. Верстати працюють автономно. Імовірність того, що протягом однієї години верстат не буде потребувати уваги робітника, для одного верстата становить 0,8. Випадкова величина ξ – кількість верстатів, які будуть потребувати уваги робітника в одному з цехів, η – загальна кількість верстатів, які потребуватимуть уваги робітника.

Варіант № 3.5

Велика партія деталей містить 80 % деталей першого ґатунку. Деталі упаковані в ящики по 10 одиниць у кожному. Для перевірки з одного ящика взяли навмання три деталі. Випадкова величина ξ – кількість деталей першого ґатунку серед деталей, що відібрані для перевірки, а η – загальна кількість деталей першого ґатунку серед деталей, що знаходяться в ящику.

Варіант № 3.6

За даними митного поста 20 % осіб не декларують у повному обсязі товар, який підлягає оподаткуванню. Для перевірки з числа восьми пасажирів мікроавтобусу випадковим чином було відібрано п'ять осіб. Випадкова величина ξ – кількість осіб, що не задекларували товар у повному обсязі, серед тих, які були відібрані для перевірки, η – кількість осіб, що не задекларували весь товар, з числа пасажирів мікроавтобусу.

Варіант № 3.7

Прилад складається з шести елементів, імовірність несправності для кожного з них дорівнює 1/9. Для перевірки випадковим чином було відібрано два елементи. Випадкова величина ξ – кількість несправних елементів серед відібраних для перевірки, η – кількість несправних елементів серед усіх елементів, з яких складається прилад.

Варіант № 3.8

У процесі виготовлення макету за певною технологією ймовірність відхилення від норми становить 0,2. Серед п'яти макетів, що були виготовлені на замовлення, замовник відібрав два для ретельної перевірки. Випадкова величина ξ – кількість якісних макетів серед тих, що були відібрані для перевірки, η – кількість якісних макетів серед загальної кількості макетів.

Варіант № 3.9

Велика партія деталей містить 10 % деталей другого ґатунку. Деталі упаковані в ящики по п'ять одиниць у кожному. Для перевірки якості з одного ящика взяли навмання три деталі. Випадкова величина ξ – кількість деталей першого ґатунку серед деталей, що відібрані для перевірки, а η – загальна кількість деталей першого ґатунку серед деталей, що знаходяться в ящику.

Варіант № 3.10

Є вісім монет, які кидають одночасно. Розглядається двовимірна випадкова величина $(\xi;\eta)$, компонентом ξ якої є кількість «орлів» на трьох монетах, а компонентом η – кількість «орлів» на восьми монетах.

Варіант № 3.11

Під час проведення змагань з парашутного спорту на точність приземлення парашутист здійснює п'ять стрибків і з імовірністю 0,7 після кожного влучає в залікову зону (коло). Випадкова величина ξ – кількість влучень у залікову зону після двох стрибків, η – загальна кількість влучень у залікову зону.

Варіант № 3.12

Кульки, з яких 60 % мають білий колір, а інші – чорний, упаковані в коробки по 10 кульок у кожній. З коробки виймають три кульки. Випадкова величина ξ – кількість чорних кульок серед витягнутих, η – кількість червоних кульок серед тих, що знаходяться у коробці.

Варіант № 3.13

Робітник обслуговує шість верстатів, два з яких розташовані в першому цеху, а чотири – в другому. Верстати працюють автономно. Імовірність того, що протягом однієї години верстат не потребуватиме уваги робітника, становить 0,9. Випадкова величина ξ – кількість верстатів, які будуть потребувати уваги робітника в першому цеху, η – загальна кількість верстатів, які потребуватимуть уваги робітника.

Варіант № 3.14

Гральний кубик підкидається тричі. Випадкова величина ξ – сума очок, які випали, η – кількість п'ятірок, що випали.

Варіант № 3.15

Статистика свідчить, що 7 % працездатних людей – безробітні. Навмання вибрано 4 особи. Випадкова величина ξ – кількість безробітних серед цих 4-х осіб, η – кількість працюючих серед цих 4-х осіб.

Варіант № 3.16

Два лучника роблять по 2 постріли по мішені. Імовірність влучення в мішень для першого лучника дорівнює 0,5, для другого – 0,6. Випадкова величина ξ – кількість влучень у мішень першим лучником, η – кількість влучень у мішень другим лучником.

Варіант № 3.17

В магазині діє акція: знижка на другий товар у чеку. У середньому цією знижкою користується кожний четвертий покупець. Протягом години товари придбали вісім покупців. Менеджер перевірив чеки чотирьох з них. Випадкова величина ξ – кількість чеків, в які внесено других товар, серед чотирьох, що перевіряв менеджер, η – загальна кількість чеків, в які було внесено других товар протягом години.

Варіант № 3.18

Прилад складається з 5-ти елементів, імовірність несправності кожного з них дорівнює 1/9. Випадкова величина ξ – кількість несправних елементів, η – кількість елементів, придатних к експлуатації.

Варіант № 3.19

Гральний кубик підкидається п'ять разів. Випадкова величина ξ – сума очок, які випали, η – кількість четвірок, що випали.

Варіант № 3.20

На шляху руху автомобіля розташовані 6 світлофорів, кожен з яких з імовірністю 0,5 дозволяє або забороняє рух автомобіля. Чотири світлофори розташовані, а два – на прилеглій вулиці. Випадкова величина ξ – кількість світлофорів, які автомобіль проїхав по вулиці без зупинки, η – загальна кількість світлофорів, які автомобіль проїхав без зупинки.

Варіант № 3.21

За даними податкової інспекції 20 % осіб подають декларацію протягом першого тижня. З десяти декларацій осіб, що працюють у певній фірмі, відібрано п'ять. Випадкова величина ξ – кількість осіб (із цих п'яти), що подали декларації протягом першого тижні, а η – загальна кількість осіб, що задекларували свої статки протягом першого тижня.

Варіант № 3.22

Є сім монет, які кидають одночасно й спостерігають за результатами на трьох з них. Випадкова величина ξ – кількість «орлів» на трьох монетах, а η – кількість «орлів» на всіх семи монетах.

Варіант № 3.23

Два цехи обладнані однаковими верстатами, в одному з них знаходяться три верстати, у другому – п'ять. Імовірність безвідмовної роботи верстата протягом зміни становить 0,7. Випадкова величина ξ – кількість верстатів у першому цеху, які безперервно працюватимуть протягом зміни, η – кількість таких верстатів у другому цеху.

Варіант № 3.24

Імовірність пошкодження виробу під час перевезення дорівнює 0,2. Випадкова величина ξ – кількість пошкоджених виробів серед двох, узятих для контролю, η – кількість пошкоджених виробів серед усіх семи виробів, які були перевезені.

Варіант № 3.25

Два приятелі придбали по 5 лотерейних білетів. За статистикою ймовірність виграшу для кожного з білетів дорівнює 0,2. Випадкова величина ξ – кількість виграшних білетів у одного з приятелів, η – загальна кількість виграшних білетів у обох приятелів.

3.7. Контрольні запитання

1. Дайте означення багатовимірної випадкової величини.
2. Якими бувають багатовимірні величини?
3. Наведіть способи задавання закону розподілу двовимірної дискретної випадкової величини.
4. Що таке умовний розподіл? Як побудувати умовний розподіл за кореляційною таблицею двовимірної випадкової величини?
5. Як за кореляційною таблицею, що визначає розподіл дискретної двовимірної величини, отримати розподіл її компонентів?
6. Назвіть основні числові характеристики розподілу двовимірної випадкової величини.
7. У чому полягають переваги використання коефіцієнта кореляції як характеристики щільності кореляційного зв'язку порівняно з кореляційним моментом?
8. Чи може коефіцієнт кореляції бути від'ємним? Якщо так, то що це означає?

9. Як визначити параметри рівняння лінійної регресії через основні числові характеристики двовимірної випадкової величини?

10. Поясніть, яке взаємне розташування можуть мати спряжені лінії регресії η на ξ та ξ на η, якщо ξ та η є компонентами двовимірної випадкової величини $(\xi; \eta)$.

11. Які інформацію можна отримати щодо тісноти кореляційного зв'язку з дослідження взаємного розташування спряжених лінії регресії?

12. Чи є некорельовані випадкові величини незалежними?

Лабораторна робота № 4

4.1. Тема роботи: Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки. Перевірка статистичних гіпотез щодо закону розподілу.

4.2. Мета роботи – ознайомлення з вибірковим методом статистичних досліджень. Дослідження можливостей застосування MS Excel для визначення точкових та інтервальних оцінок основних числових характеристик розподілу випадкової величини за результатами дослідження вибіркової сукупності. Побудова емпіричної функції розподілу. На прикладі нормального, рівномірного та експоненціального розподілів застосування статистичних критеріїв до перевірки гіпотези щодо закону розподілу випадкової величини у генеральній сукупності

4.3. Теоретичні положення

Генеральною сукупністю є множина всіх значень, яких набуває (або може набувати) в процесі випробувань випадкова величина X. Оскільки об'єкти в сукупність поєднані за певною ознакою, це передбачає, що вплив економічних, соціальних або будь-яких інших факторів, дослідження яких і ставиться за мету, в межах сукупності підпорядковується єдиному закону. Якщо брати до уваги вплив тільки одного з факторів, то така сукупність є одновимірною. Оскільки обсяг генеральної сукупності може бути занадто великим або процес дослідження передбачає руйнування об'єкта, то для проведення дослідження застосовується ***вибірковий метод***.

Множина значень випадкової величини, яких вона набуває під час обмеженої кількості вимірювань, називається ***вибірковою сукупністю***, або ***вибіркою***. Кількість вимірювань n становить ***обсяг вибірки***. Значення x_i, якого набуває досліджувана випадкова величина X у вибірковій сукупності, називається ***варіантою***. За результатами обчислення вибіркових даних роблять висновок щодо характеристик випадкової величини в генеральній сукупності, тому вибірка повинна бути ***репрезентативною***, тобто правильно відображати властивості об'єкта дослідження.

Відповідність між впорядкованою послідовністю варіант x_i і частотами m_i, з якими ці варіанти зустрічаються у вибірковій сукупності, називається ***дискретним варіаційним рядом***. Цей ряд є ***статистичним***, або ***емпіричним розподілом*** дискретної випадкової величини, а його графічним відображенням є ***полігон частот***.

Якщо обсяг вибірки великий $(n \geq 30)$, користуватися дискретним варіаційним рядом стає незручно. У цьому випадку, а також у випадку, коли дані отримані в результаті вимірювання неперервної випадкової величини, емпіричний закон розподілу надають у вигляді ***інтервального варіаційного ряду***, де результати вимірювань об'єднуються за інтервалами, які, зазвичай, мають однакову довжину. Кількість k інтервалів, на які поділяють ранжований ряд варіант у процесі первинного угруповання, тобто кількість ***кроків***, оцінюється за формулою Стерждеса:

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \lg n, \qquad (4.1)$$

а потім кількість інтервалів округляється до найближчого цілого числа. Зазвичай це число знаходиться в межах від 8 до 12.

Графічним відображенням інтервального варіаційного ряду є ***гістограма***, тобто фігура, що складається з прямокутників, кожний з яких основою має інтервал варіаційного ряду, а його висота визначається виходячи з того, що площа прямокутника дорівнює частоті влучення у даний інтервал (для гістограми частот).

За виглядом полігону або гістограми можна висловити припущення щодо закону розподілу випадкової величини в генеральній сукупності.

Числові характеристики, що обчислені за вибірковими даними, є ***статистичними оцінками*** Θ^* відповідних числових характеристик Θ випадкової величини. Статистичною оцінкою математичного сподівання випадкової величини X є ***вибіркова середня*** $\overline{x}$ (центр вибіркової сукупності). Вона обчислюється як середнє виважене варіант x_i, кожна з яких береться з вагою, що відповідає її відносній частоті:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i \,, \tag{4.2}$$

де k – кількість варіант у дискретному варіаційному ряді або кількість інтервалів в інтервальному варіаційного ряду;

x_i – значення варіанти для дискретного варіаційного ряду або значення, що відповідає середині інтервалу для інтервального варіаційного ряду;

w_i – ***відносна частота***, або ***частість***, яка визначається як відношення частоти m_i до обсягу вибірки $w_i = \dfrac{m_i}{n}$ $(i = \overline{1,n})$.

Вибіркова середня є ***незсунутою оцінкою*** математичного сподівання, тобто математичне сподівання вибіркової середньої дорівнює математичному сподіванню випадкової величини.

Вибіркова дисперсія D^* визначається як середнє виважене квадратів відхилення варіант від вибіркової середньої випадкової величини, кожне з яких береться з вагою, що відповідає відносній частоті варіанти:

$$D^* = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot w_i \,. \tag{4.3}$$

Вибіркова дисперсія є зсунутою оцінкою дисперсії випадкової величини генеральної сукупності. Для обчислення ***виправленої вибіркової дисперсії*** S_x^2 користуються формулою:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D^*. \tag{4.4}$$

Відповідно ***виправлене середнє квадратичне відхилення*** визначається як $S_x = \sqrt{S_x^2}$. Саме воно є оцінкою середнього квадратичного відхилення теоретичного розподілу, що характеризує розпорошення випадкової величини навколо центра сукупності.

Вибіркова середня та виправлене середнє квадратичне відхилення вибірки є ***точковими оцінками*** числових характеристик теоретичного розподілу, оскільки кожна з них визначена одним числом Θ^* (точкою). Однак оцінки числових характеристик генеральної сукупності самі є випадковими величинами, тому окрім точкових розглядають ще ***інтервальні оцінки***, тобто ***довірчий інтервал*** $(\Theta_1^*; \Theta_2^*)$, до якого з ***довірчою імовірністю*** P потрапляє невідоме значення числової характеристики теоретичного розподілу. Імовірність того, що числова характеристика теоретичного розподілу належатиме певному довірчому інтервалу, називається ***надійністю оцінки*** γ, яка, у свою чергу, пов'язана з ***рівнем значущості*** α: $\alpha = 1-\gamma$. За означенням довірчого інтервалу маємо:

$$P(\Theta_1^* < \Theta < \Theta_2^*) = 1-\alpha. \qquad (4.5)$$

У припущенні нормального закону розподілу в генеральній сукупності довірчий інтервал для математичного сподівання a визначається як:

$$\bar{x} - t_\alpha \cdot S_x \big/ \sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\alpha \cdot S_x \big/ \sqrt{n}, \qquad (4.6)$$

де t_α – значення критерію Стьюдента, яке залежить від рівня значущості α та кількості ступенів вільності $df = n-1$ і визначається за таблицею розподілу Стьюдента.

Якщо обсяг вибірки великий, то в якості t_α у формулі (4.5) застосовується аргумент функції Лапласа, який визначається відповідно до рівня значущості α зі співвідношення $\Phi(t) = 0{,}5 \cdot (1-\alpha)$.

З довірчою ймовірністю, що дорівнює $P = \gamma$, ***похибка оцінки*** ε математичного сподівання за вибірковою середньою не перевищуватиме величини $\varepsilon = t_\alpha \cdot S_x \big/ \sqrt{n}$.

Емпіричною функцією розподілу називається функція $F^*(x)$, яка для будь-якого заздалегідь заданого значення x визначає відносну частоту події, яка полягає в тому, що випадкова величина набуває значень, які менші за x. Згідно з цим означенням $F^*(x) = m_x / n$, де m_x– сума варіант, значення яких менші за x. Графіком цієї функції є ***кумулята***.

Будь-яке припущення відносно числових характеристик випадкової величини або закону розподілу та його параметрів, яке висловлюється за результатами дослідження вибіркової сукупності, є ***статистичною гіпотезою***. Гіпотеза, що підлягає перевірці, називається ***основною***, або ***нульовою*** і позначають H_0. Нульовій гіпотезі протиставляється ***конкуруюча***, або ***альтернативна гіпотеза*** H_i, яка містить твердження, що спростовує нульову гіпотезу. Результатом перевірки статистичної гіпотези є висновок щодо можливості прийняти нульову гіпотезу, тобто вважати, що вибіркові дані не суперечать або суперечать нульовій гіпотезі. Висновок щодо основної гіпотези може бути правильним у двох випадках: гіпотеза H_0 була визнана правильною, і вона дійсно є правильною; гіпотезу H_0 відхилили, і вона дійсно є хибною. Помилкові висновки можуть бути теж двох типів. ***Помилка першого роду*** полягає в тому, що нульова гіпотеза відхиляється, хоча насправді вона є правильною. ***Помилка другого роду*** полягає в тому, що приймається нульова гіпотеза, хоча правильною є альтернативна.

Для перевірки нульової гіпотези використовують ***статистичні критерії***, які являють собою зведення правил, за якими гіпотеза H_0 або приймається, або відхиляється. Множина можливих значень статистичного критерію поділяється на дві підмножини. Одна з цих підмножин називається ***областю допустимих значень***, вона містить такі значення критерію, для яких основну гіпотезу немае причин відхилити, а друга – ***критичною областю*** і містить ті значення критерію, за яких нульова гіпотеза відхиляється. Імовірність помилки першого роду називається ***рівнем значущості*** і позначається α. Значення статистичного критерію, які відділяють критичну область від області допустимих значень, називаються ***критичними точками***, вони залежать від рівня значущості α і позначаються k_α. Якщо емпіричне значення критерію більше від критичного, то з надійністю $1-\alpha$ основна гіпотеза відхиляється на користь альтернативної. Якщо емпіричне значення критерію менше від критичного, то основну гіпотезу немае причин відхиляти.

Однією з найважливіших задач математичної статистики є визначення теоретичного закону розподілу випадкової величини, яка характеризує ознаку, що досліджується. Для її розв’язання необхідно визначити вигляд і параметри закону розподілу. У загальному випадку закон розподілу випадкової величини в генеральній сукупності до початку досліджень є невідомим, але певні припущення відносно його характеру можна зробити за виглядом гістограми. Відповідно до припущення щодо закону розподілу за вибірковими даними обчислюють ***вирівнюючі частоти*** m_i^*. Основна гіпотеза стверджує, що відхилення емпіричних частот від вирівнюючих обумовлене випадковим розпорошенням, тобто H_0: $m_i = m_i^*$. Перевірку нульової гіпотези здійснюють за ***критерієм Пірсона***, або ***критерієм*** χ^2. Критерій узгодженості Пірсона є випадковою величиною, що має розподіл χ^2. Він визначається за формулою:

$$\chi^2_{емп} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - m_i^*)^2}{m_i^*}, \tag{4.7}$$

де k – кількість інтервалів, що міститься в інтервальному статистичному розподілі вибіркової сукупності;

r – кількість параметрів, якими визначається закон розподілу ймовірностей випадкової величини в генеральній сукупності згідно з нульовою гіпотезою.

Якщо $\chi^2_{емп} < \chi^2_{0,05}(df)$, то нульову гіпотезу немає підстав відхилити, тобто розбіжності між емпіричними і вирівнюючими частотами є статистично незначущими. Отже, закон розподілу, за яким здійснюється обчислення вирівнюючих частот згідно з емпіричними даними вибіркової сукупності, відповідає закону розподілу в генеральній сукупності.

Якщо $\chi^2_{емп} > \chi^2_{0,05}(df)$, то нульова гіпотеза є хибною, тобто розбіжність між емпіричними частотами і вирівнюючими частотами, які обчислювались відповідно до певного припущення відносно закону розподілу в генеральній сукупності, є статистично значущою.

Критичне значення $\chi^2_{0,05}(df)$ визначається за таблицею критерію (згоди) Пірсона залежно від рівня значущості α та кількості степенів вільності $df = k - r - 1$,

У тому випадку, коли є підстави вважати, що закон розподілу випадкової величини в генеральній сукупності є нормальним, при обчисленні вирівнюючи частот за статистичними оцінками основних числових характеристик випадкової величини в якості функції розподілу розглядається функція:

$$F^*(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma^*}\right), \qquad (4.8)$$

де $\Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma^*}\right)$ – функція Лапласа;

$\frac{x - \bar{x}}{\sigma^*}$ – нормована (стандартизована) випадкова величина, яка розподілена за нормальним законом, тобто математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює нулю, а середнє квадратичне відхилення – 1.

Для нормального закону $r = 2$, оскільки він визначається двома параметрами: a – математичне сподівання, оцінкою якого є $\bar{x}$, та σ – середнє квадратичне відхилення, оцінкою якого є σ^*.

Якщо можна припустити, що закон розподілу випадкової величини є рівномірним, то емпірична функції розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a^*; \\ \dfrac{x - a^*}{b^* - a^*}, & \text{якщо } a^* < x \le b^*; \\ 1, & \text{якщо } x > b^*. \end{cases} \qquad (4.9)$$

Для рівномірного закону теж $r = 2$, а саме: a – початок інтервалу, оцінкою якого є $a^* = \bar{x} - \sqrt{3} \cdot S_X$, та b – кінець інтервалу, до якого належать значення випадкової величини, оцінкою якого є $b^* = \bar{x} + \sqrt{3} \cdot S_X$.

Якщо закон розподілу випадкової величини вважати показниковим, то в якості функції розподілу розглядається функція:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda^* x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Для показникового закону $r = 1$, оскільки $M(X) = \sigma$, і параметром цього закону є величина $\lambda = 1/M(X)$, оцінкою якого є $\lambda^* = 2 \cdot (\bar{x} + S_x)^{-1}$.

4.4. Змістовна постановка задачі

Вибіркова сукупність містить відомості про середню вартість робочої години (у грн) робітників-верстатників механічного цеху протягом року:

6,20 6,25 5,88 6,20 6,12 6,95 6,82 6,15 6,23 6,70 5,75 6,30 6,40
6,30 6,45 6,20 6,40 6,30 6,20 6,31 6,25 6,45 6,20 6,50 6,25 6,50
5,91 6,20 6,00 6,25 6,20 6,40 6,01 6,15 6,40 6,25 6,20 6,12 6,25
6,70 6,10 5,98 6,20 5,89 6,13 6,21 6,35 6,14 6,40 6,25 6,10 6,35
6,21 6,25 6,50 6,60 6,35 6,40 6,30 6,35 6,25 6,10 6,15 6,75 6,08
6,20 6,25 6,08 6,20 6,15 6,30 5,84 6,47 6,43 6,45 6,35 6,40 6,25
5,95 6,20 6,50 5,60 6,21 6,51 6,21 5,98 6,20 6,21 6,15 6,00 6,05
6,07 6,30 6,45 6,50 6,15 6,70 6,10 6,12 6,28.

За даними вибіркової сукупності необхідно виконати такі завдання:

4.1. Визначити емпіричний закон розподілу та побудувати гістограму частот, а також кумуляту для емпіричної функції розподілу $F_{емп.}(x)$.

4.2. Обчислити вибіркову середню $\overline{x}$, дисперсію та виправлене середнє квадратичне відхилення S_X.

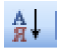
4.3. Знайти довірчий інтервал, до якого з надійністю 95 % належить математичне сподівання теоретичного закону розподілу.

4.4. За критерієм згоди Пірсона перевірити гіпотезу про закон розподілу випадкової величини у генеральній сукупності.

4.5. Порівняти полігон частот та графік, що відповідає вирівнюючим частотам у припущенні певного теоретичного закону.

4.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 4

Слід зауважити, що великий обсяг вибірки ($n = 100$) свідчить про ретельність досліджень. Це підвищує надійність висновків, які можна зробити завдяки аналізу вибіркових даних.

Завдання 4.1. Для визначення емпіричного закону розподілу випадкової величини X на робочому аркуші MS Excel у вигляді таблиці записуємо значення варіант. Оскільки статистика наведена для одновимірної випадкової величини, то її значення набирають в одному стовпчику (комірки **A1:A100**), інакше MS Excel сприйматиме її як багатовимірну. Виділяємо комірки **A1:A100**, натискаємо кнопку  , здійснюємо операцію **Сортировка по возрастанию**. Для визначення меж інтервалів (**карманов**) знаходимо найменше та найбільше значення випадкової величини: $x_{\min} = 5{,}60$, $x_{\max} = 6{,}95$. Обчислюємо розмах:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 6{,}95 - 5{,}6 = 1{,}35.$$

Якщо прийняти кількість інтервалів $k = 10$, то довжина інтервалу становитиме $h = R/k = 0{,}135$. Такий крок не дуже зручний, спробуємо $h = 0{,}2$. Визначимо межі інтервалів, розширивши нижню межу на величину, яка не повинна перевищувати $0{,}5h$. Нехай $x_1 = 5{,}5$, тоді отримуємо вісім інтервалів, і верхня межа останнього визначається як: $x_9 = 7{,}1$. Слід зауважити, що при побудові інтервального варіаційного ряду за допомогою інструментів MS Excel в інтервал включається його верхня межа, тому в комірки **C1:C8**, куди вводимо межі **карманов**, треба записувати їх значення, починаючи з $x_2 = 5{,}7$. Застосуємо інструмент аналізу **Гистограмма**. Приклад заповнення його діалогового вікна наведено на рис. 4.1.

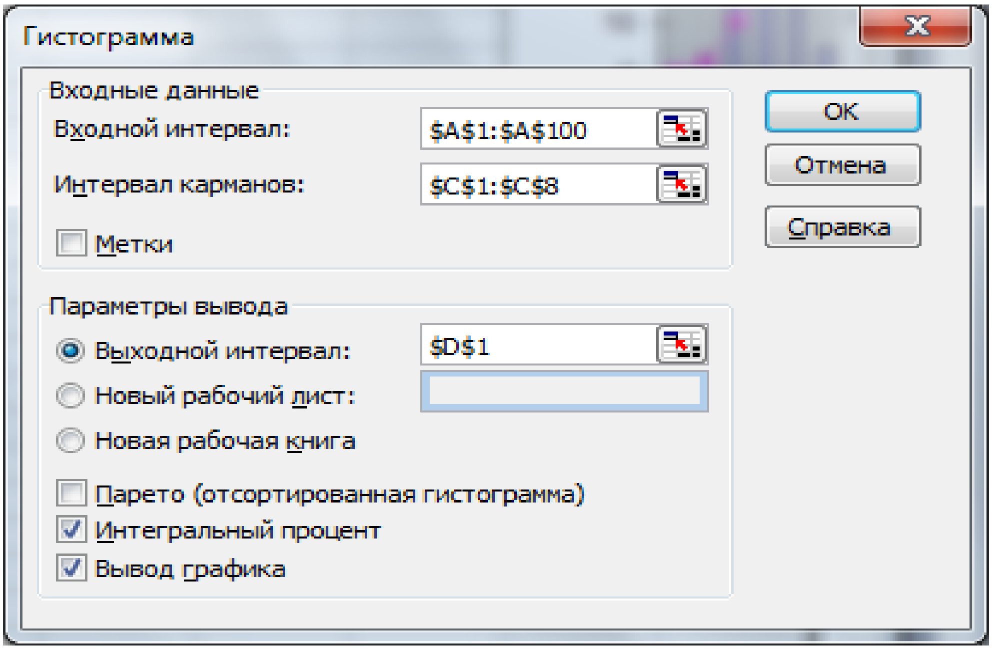


Рис. 4.1. **Діалогове вікно інструменту аналізу Гистограмма**

Якщо в діалоговому вікні **Гистограмма** позначити прапорцем поле **Интегральный процент**, то одночасно з формуванням інтервального варіаційного ряду відбувається підрахунок накопичених частостей у відсотках, тобто фактично визначається емпірична функція розподілу. Якщо ж позначити також поле **Вывод графика**, то на екран виводяться і таблиця (табл. 4.1), що відповідає закону розподілу випадкової величини X, і графічне відображення закону розподілу, який має вигляд, подібний до гістограми, і графік накопичених частот (у відсотках), який з точністю до масштабу по осі ординат подібний до кумуляти (рис. 4.2).

Таблиця 4.1

Результат систематизації вибіркової сукупності

Карман	**Частота**	**Интегральный %**
5,7	1	1,00 %
5,9	4	5,00 %
6,1	15	20,00 %
6,3	49	69,00 %
6,5	23	92,00 %
6,7	5	97,00 %
6,9	2	99,00 %
7,1	1	100,00 %
Еще	0	100,00 %

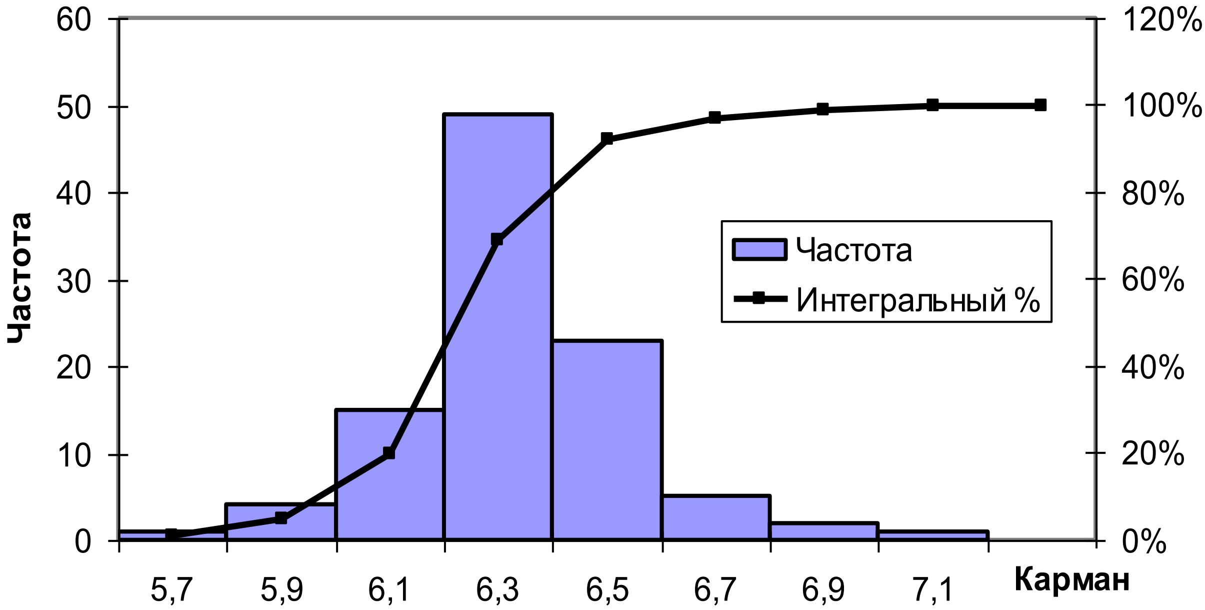


Рис. 4.2. **Статистична обробка вибіркових даних за допомогою інструменту аналізу Гистограмма**

Слід зауважити, що гістограма, яка виводиться за допомогою інструменту аналізу **Гистограмма**, не відповідає двом вимогам. По-перше, ширина стовпців такої гістограми є меншою за її крок. Однак цей недолік легко виправити. Для цього треба зайти на будь-який стовпчик гістограми, визвати правою клавішею миші діалогове вікно **Формат ряда данных**, зайти в **Параметры** та вказати, що **Ширина зазора** дорівнює нулю. По-друге, площа під гістограмою частот повинна чисельно дорівнювати обсягу вибірки. Отже, висота стовпчиків гістограми визначається не тільки кількість значень випадкової величини, що потрапили до даного інтервалу, але й довжиною інтервалу (кроком). При побудові гістограми за допомогою інструменту аналізу **Гистограмма** ця умова порушується. Однак у даному разі це не має особливого значення, оскільки для нас важливим є вигляд гістограми. Саме за виглядом гістограми робиться припущення щодо закону розподілу випадкової величини, а масштаб у цьому випадку не має принципового значення.

Завдання 4.2. Електронні таблиці MS Excel дозволяють визначати числові характеристики емпіричного розподілу кількома способами, наприклад, кожну з основних і додоткових характеристик розподілу випадкової величини можна вивести за допомогою відповідних вбудованих функцій, що належать до категорії **Статистические**. Наприклад, за допомогою функції **СРЗНАЧ()**, аргументами якої є значення випадкової величини за результатами вибірки, можна визначити вибіркову середню, а за допомогою функції **ДИСП()** – оцінити дисперсію вибірки. Пропонуємо самостійно визначити ці та інші оцінки числових характеристик розподілу за допомогою вбудованих функцій **СРЗНАЧ()**, **ДИСП()**, **ДОВЕРИТ()**, **СТАНДОТКЛОН()**, **МЕДИАНА()**, **МОДА()**, **СКОС()**, **ЭКСЦЕСС()**. Усі ці числові характеристики емпіричного розподілу можна визначити одночасно, застосувавши інструмент аналізу **Описательная статистика**. Для цього викликаємо його діалогове вікно, у ньому наводимо посилання на комірки, в яких містяться вихідні дані, указуємо спосіб групування (**по стобл-цам**), указуємо комірку, куди слід вивести результат, і позначаємо прапорцем поле **Итоговая статистика**. Після натискання **OK** отримуємо результати, які містяться в перших двох стовпцях табл. 4.2, а в третьому –

додано коментар, оскільки терміни, що застосовуються в MS Excel, дещо відрізняються від термінів математичної статистики.

Таблиця 4.2

Підсумкова таблиця, що відповідає виконанню процедури «Описательная статистика»

Столбец 1	***Столбец 2***	***Коментарий***
Среднее	6,253	Вибіркова середня випадкової величини
Стандартная ошибка	0,021699	Стандартна похибка оцінки середньої
Медиана	6,22	Медіана
Мода	6,2	Мода
Стандартное отклонение	0,216988	Виправлене середнє квадратичне відхилення
Дисперсия выборки	0,047084	Виправлена дисперсія (квадрат стандартного відхилення)
Эксцесс	1,437105	Ексцес
Асимметричность	0,329320	Коефіцієнт асиметрії
Интервал	1,35	Розмах
Минимум	5,6	Значення найменшої з варіант
Максимум	6,95	Значення найбільшої з варіант
Сумма	625,3	Сума варіант
Счет	100	Обсяг вибіркової сукупності

Слід звернути увагу на те, що стандартна похибка при визначенні середньої вибіркової сукупності обчислюється за формулою:

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{(n-1)\cdot n}}, \quad \text{або} \quad SE = \frac{S_X}{\sqrt{n}}. \qquad (4.11)$$

Завдання 4.3. Для визначення довірчого інтервалу, до якого з надійністю 95 % належатиме математичне сподівання теоретичного закону розподілу, застосовуємо формулу (4.6), скориставшись для цього даними табл. 4.2. Так, ми отримали, що $\bar{x} = 6{,}253$ та $SE = 0{,}021699$. За допомогою функції **НОРМОБР()**, яка описує диференціальну та інтегральну функції нормального розподілу, визначаємо аргумент функції Лапласа, що відповідає її значенню $0{,}5 \cdot 0{,}95 = 0{,}475$. Для цього в діалоговому вікні аргументу цієї функції (рис. 4.3) у полі **Вероятность** вказуємо значення $0{,}5 + 0{,}475 = 0{,}945$, у полі **Среднее** – 0, у полі **Стандартное_откл** – 1. Отримуємо, що $t_\alpha = 1{,}96$.

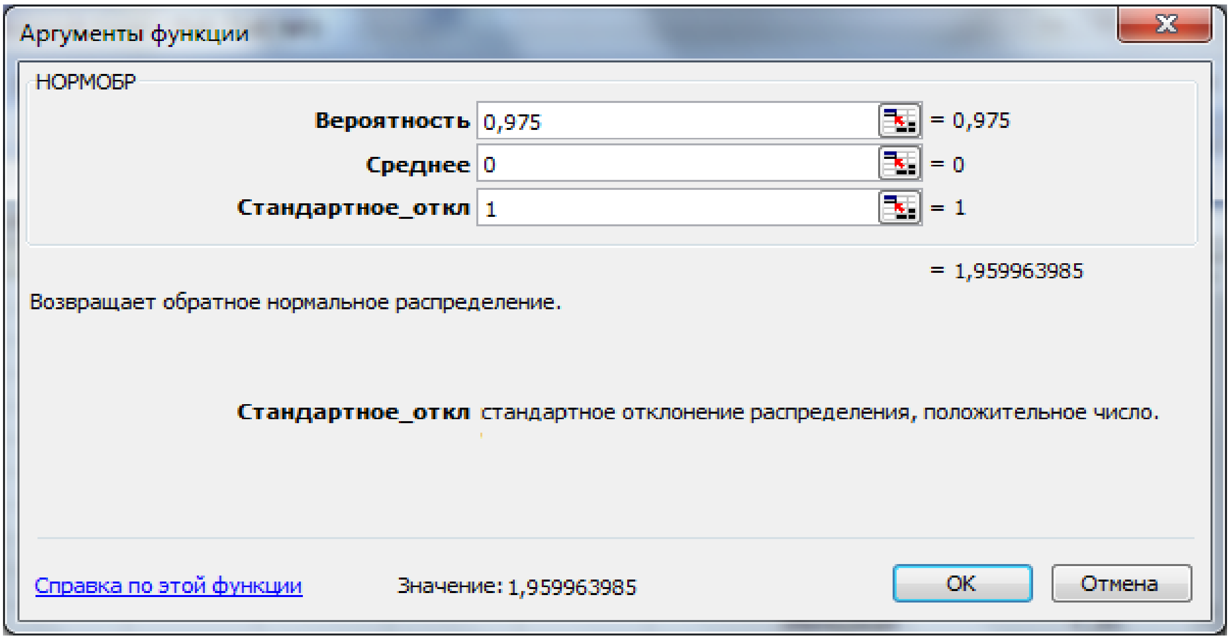


Рис. 4.3. **Діалогове вікно функції НОРМОБР()**

Тепер обчислюємо похибку оцінки математичного сподівання, що відповідає заданій надійності: $\varepsilon = 1{,}96 \cdot 0{,}021699 \approx 0{,}043$. Отже, з довірчою ймовірністю $P = 0{,}95$ можна стверджувати, що математичне сподівання випадкової величини в генеральній сукупності не менше ніж 6,21 та не більше ніж 6,30.

Пропонуємо порівняти ці значення з результатами, які можна отримати за допомогою функції **ДОВЕРИТ()**.

Завдання 4.4. За виглядом гістограми (рис. 4.1) можна припустити, що закон розподілу випадкової величини у генеральній сукупності є нормальним. Виходячи з цього припущення, обчислимо вирівнюючі частоти для інтервалів, верхня межа яких вказана в табл. 4.1 у стовпці **Карман**. Розрахунки зручно проводити в таблиці, яку оформлюють на новому робочому аркуші MS Excel (рис. 4.4).

D2 fx =НОРМРАСП(B2;6,253;0,2169988;1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	x_{i+1}	m_i	$F^*(x_{i+1})$	$P^*(X=x)$	m^*_i	$(mi-m^*_i)$^2/m^*_i
2	1	5,7	1	0,0054	0,0054	0,5411	0,3892
3	2	5,9	4	0,0519	0,0465	4,6486	0,0905
4	3	6,1	15	0,2404	0,1885	18,8486	0,7858
5	4	6,3	49	0,5857	0,3454	34,5354	6,0583
6	5	6,5	23	0,8725	0,2868	28,6757	1,1234
7	6	6,7	5	0,9803	0,1078	10,7804	3,0994
8	7	6,9	2	0,9986	0,0183	1,8269	0,0164
9	8	7,1	1	1,0000	0,0014	0,1386	5,3518
10	Сума		100		1,0000	99,9953	16,9147
11							

Рис. 4.4. **Скриншот, що містить розрахунки вирівнюючих частот у припущенні нормального закону**

Для обчислення теоретичної функції розподілу у припущенні нормального закону скористаємося вбудованою функцією **НОРМОБР()**. Для цього в комірку **D2** вводимо формулу:

=НОРМРАСП(B2;6,253;0,2169988;1),

яка окрім посилання на комірку зі значенням верхньої межі інтервалу емпіричного закону розподілу містить також значення вибіркової середньої випадкової величини X і її виправленого середнього квадратичного відхилення. Розтягуючи цю формулу на комірки **D2:D9**, отримуємо розрахункові значення функції розподілу. Імовірність потрапляння значення випадкової величини в певний інтервал обчислюємо як різницю значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу:

$$P^*\left(X = x \in (x_i;\, x_{i+1}]\right) = F^*(x_{i+1}) - F^*(x_i),$$

а вирівнюючи частота становить:

$$m_i^* = n \cdot P^*\left(X = x \in (x_i;\, x_{i+1}]\right).$$

Зазначимо, що для верхньої межі останнього інтервалу ми отримали $F^*(x = 7{,}1) = 1{,}0$. Це означає, що обчислення не містить помилок. Про це ж свідчить сума ймовірностей, яка дорівнює 1, та сума вирівнюючих частот, що становить 99,9953, тобто майже дорівнює обсягу вибіркової сукупності ($n = 100$).

Перевіримо статистичну гіпотезу H_0: $m_i = m_i^*$. Альтернативною вважатимемо гіпотезу H_1: $m_i \neq m_i^*$. Статистичним критерієм, за яким перевіряється основна гіпотеза, є критерій Пірсона.

У комірках **G2:G9** обчислюємо складові критерію Пірсона (4.7) для кожного інтервалу й визначаємо їх суму. Отже, $\chi^2_{емп.} = 16{,}9147$. За допомогою функції **ХИ2ОБР()**, що належить до категорії **Статистические**, визначаємо критичне значення критерію згоди Пірсона для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та кількості ступенів свободи $df = 8 - 2 - 1 = 5$. Отримуємо: $\chi^2_{0,05}(5) = 11{,}0705$. Оскільки має місце співвідношення $\chi^2_{емп.} > \chi^2_{0,05}$, то гіпотезу H_0 слід відкинути на користь альтернативної. Отже, різниця між емпіричними і вирівнюючими частотами є суттєвою. Нагадаємо, що вирівнюючи частоти обчислювались із припущення про нормальний закон розподілу випадкової величини. Відповідно, слід вважати, що закон розподілу випадкової величини X суттєво відрізняється від нормального.

Завдання 4.5. За даними, що містяться в комірках **B2:B9** і **C2:C9** розрахункової таблиці (рис. 4.4), побудуємо полігон частот. Для цього застосуємо **Мастер диаграмм** і виберемо тип **Точечная**, при цьому точки з'єднуємо ламаною лінією, оскільки вона відповідає емпіричним частотам. У цьому ж вікні додаємо ще один ряд зі значеннями вирівнюючих частот (комірки **B2:B9** і **F2:F9**). Точки, що відповідають вирівнюючим частотам, з'єднуємо плавною лінією, оскільки вони відповідають теоретичним частотам неперервної випадкової величини. Для цього правою клавішею миші заходимо на будь-яку точку теоретичної кривої, викликаємо діалогове вікно **Тип диаграммы** і змінюємо ламану лінію на плавну. Видно (рис. 4.5), що загальний вигляд кривих є майже однаковим. На відміну від теоретичної кривої, яка відповідає нормальному закону розподілу, полігон має більш гострий максимум. Так, за результатами, що були отримані за допомогою інструменту аналізу **Описательная статистика** (табл. 4.2), ексцес для емпіричного розподілу становить 1,437, тоді як для нормального закону розподілу він дорівнює нулю. Отже, розподіл випадкової величини X хоча і схожий на нормальний, має порівняно з ним суттєво менше розпорошення відносно центра сукупності.

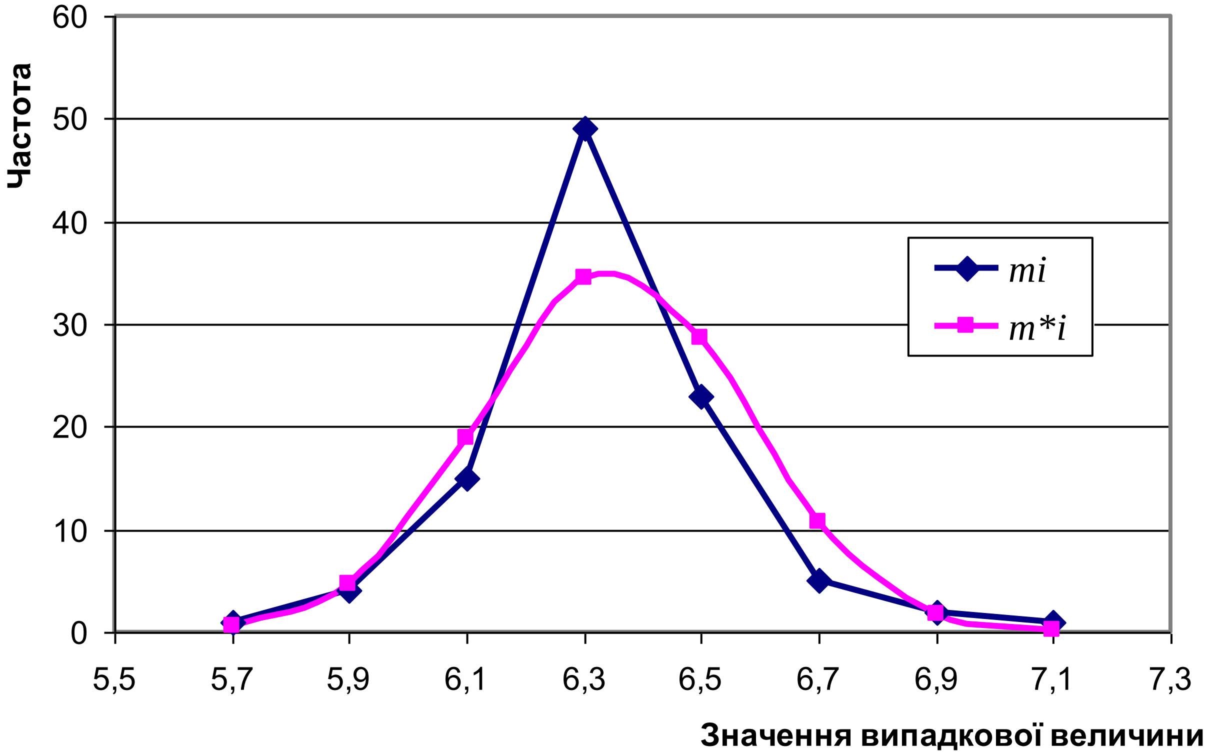


Рис. 4.5. **Полігон частот і графік вирівнюючих частот, що обчислені в припущенні нормального розподілу**

Якщо виникає необхідність у перевірці відповідності розподілу випадкової величини X рівномірному чи експоненціальному закону, необхідно в комірки **D2:D9** ввести формулу для обчислення функції розподілу, що відповідає певному закону (4.9) або (4.10), визначивши спочатку параметри цих законів розподілу.

4.6. Завдання для самостійної роботи

У табл. 4.3 наведені результати вимірювання випадкової величини X. За допомогою вбудованих функцій та надбудов MS Excel необхідно виконати такі завдання:

4.1. Визначити емпіричний закон розподілу випадкової величини X та побудувати гістограму частот та кумуляту.

4.2. Обчислити статистичні оцінки числових характеристик випадкової величини X.

4.3. Знайти довірчий інтервал, до якого з надійністю 95 % належить математичне сподівання теоретичного закону розподілу.

4.4. За критерієм Пірсона перевірити гіпотезу про закон розподілу випадкової величини в генеральній сукупності відповідно до припущення, яке можна зробити за виглядом гістограми.

4.5. Порівняти полігон частот та графік, що відповідає вирівнюючим частотам у припущенні певного теоретичного закону.

Таблиця 4.3

Вихідні дані

№ варі-анта	Значення, які приймає випадкова величина у вибірковій сукупності
1	2
4.1.	5,5 5,9 5,8 5,7 6,0 5,5 5,0 6,5 5,7 5,6 6,2 5,4 5,4 5,0 5,7 5,5 6,2 5,4 5,6 4,2 5,6 5,4 5,3 4,7 4,5 5,0 5,1 5,5 5,6 5,1 6,3 5,4 5,9 5,6 6,4 5,7 5,0 5,9 5,7 6,0 6,7 4,1 6,2 5,8 5,5 6,2 6,2 5,8 5,8 5,6 5,5 4,7 5,8 4,9 6,1 6,2 6,0 4,3 5,9 6,9 4,5 6,8 5,6 5,3 4,7 5,5 5,0 5,3 5,2 4,8 5,5 5,9 6,5 5,2 5,7 6,0 5,4 5,8 5,8 5,6 4,8 5,8 6,2 5,3 4,5 5,8 5,6 5,4 6,4 6,0 6,1 5,9 6,4 6,3 5,4 5,8 6,1 6,3 5,7 6,2 5,8 5,5 4,7 4,5 5,0 5,1 4,3 5,5 4,7 5,8 5,7 5,0 4,1 6,5.
4.2.	4,5 6,1 5,7 5,3 5,8 5,5 5,7 5,5 5,7 5,9 5,7 4,6 5,1 6,0 6,4 6,4 5,1 6,5 4,7 5,6 6,3 6,5 5,0 5,4 5,8 6,3 4,9 5,3 5,6 6,0 5,7 5,4 6,0 5,5 6,4 5,7 4,8 5,5 5,7 6,6 5,0 5,8 7,0 5,9 4,7 6,2 5,9 6,2 5,0 5,5 5,2 5,1 5,8 6,9 5,7 5,8 6,2 5,3 4,3 5,9 5,8 5,7 5,3 4,3 6,7 6,4 5,6 6,1 5,9 5,2 5,0 4,9 5,6 6,0 5,8 5,2 5,9 5,5 6,0 5,3 5,9 6,3 6,8 5,2 5,4 6,5 6,8 6,5 5,4 5,6 5,8 6,3 7,3 4,7 7,1 6,3 5,6 4,2 5,6 5,5 5,6 6,3 6,5 5,0 5,4 5,8 6,3 4,9 5,5 6,7 5,6 6,1 5,9 5,1.
4.3.	4,0 5,8 5,4 4,9 4,2 4,7 4,5 6,4 7,3 5,5 6,7 5,9 4,0 6,8 5,0 4,7 6,5 6,0 6,3 6,5 6,0 4,6 7,9 4,3 7,4 7,1 7,5 4,6 6,8 7,3 6,9 5,4 5,7 4,3 7,5 4,4 4,5 4,9 5,0 5,2 5,5 5,9 4,5 5,4 4,5 6,5 7,3 6,1 7,3 5,7 6,2 6,6 7,1 7,5 3,9 6,7 6,6 7,0 6,8 6,4 5,4 4,4 4,8 3,9 5,3 5,5 5,8 6,6 5,6 5,0 4,8 4,7 7,2 5,1 6,5 5,3 5,2 4,2 7,0 6,4 3,9 4,4 6,2 4,1 6,4 5,0 6,7 6,0 5,4 5,6 5,8 6,3 4,5 4,9 4,0 4,1 7,5 4,7 4,5 6,4 7,3 5,5 6,7 5,9 4,0 6,1 7,1 7,5 3,9 6,7 5,3 8,0 5,1 3,8.
4.4.	3,5 3,7 3,8 3,7 3,6 3,0 3,5 3,3 3,6 4,3 3,1 3,6 4,0 3,5 4,0 3,6 3,9 3,8 4,2 3,5 3,7 3,8 3,7 3,6 3,5 4,3 3,8 3,5 3,7 3,9 4,9 3,5 4,3 3,8 4,5 3,9 3,5 3,5 4,1 3,8 3,5 4,3 3,7 3,8 3,5 3,7 3,9 3,5 4,5 3,6 3,8 4,7 3,7 4,7 3,9 3,5 3,8 3,5 4,0 3,6 3,9 3,5 4,2 3,7 3,9 3,7 4,0 3,7 3,5 4,8 3,5 4,2 3,5 3,8 3,5 4,4 3,9 4,6 3,6 3,5 3,9 3,8 3,6 3,7 3,9 3,6 3,5 4,0 3,5 3,9 3,5 3,8 3,5 3,8 4,4 3,6 3,5 3,8 3,5 3,7 3,9 3,5 4,5 3,6 3,8 4,7 3,7 3,5 4,0 4,6 4,1 3,8 3,5 3,2.
4.5.	5,7 3,8 5,8 6,9 6,0 7,9 6,0 3,9 4,9 5,6 4,9 5,9 5,1 4,0 6,5 6,8 6,5 7,3 6,0 5,1 4,4 5,6 6,1 5,4 6,0 3,9 5,4 4,0 3,7 4,5 5,0 7,9 7,3 6,4 7,0 5,6 6,4 4,5 7,0 4,2 4,3 6,5 6,1 7,8 5,4 3,7 5,5 3,5 6,8 6,5 4,7 6,5 7,8 7,2 6,8 7,9 4,8 4,0 4,3 4,4 7,0 4,5 6,0 5,5 4,6 6,1 5,0 4,0 4,3 6,9 7,4 4,9 7,9 5,5 4,5 3,9 4,0 7,4 7,9 3,9 5,4 6,2 5,9 5,6 6,5 5,2 6,5 6,8 7,0 3,6 6,2 5,2 4,4 3,5 4,5 6,9 7,3 6,1 3,5 5,2 5,9 4,3 4,8 7,1 4,5 6,0 5,5 4,6 6,1 5,2 4,0 4,3 6,9 7,4.

Продовження табл. 4.3

1	2
4.6.	7,0 5,4 4,5 6,5 6,1 6,6 5,6 7,3 6,7 4,2 4,9 3,4 4,8 5,9 5,3 5,2 5,3 5,4 4,5 6,0 5,1 7,0 6,0 6,4 5,5 5,8 6,9 5,6 5,2 6,5 6,7 4,2 5,0 4,5 5,0 4,0 5,4 5,9 4,4 5,1 5,3 5,5 5,9 6,2 5,3 4,0 5,5 4,7 5,0 5,7 6,4 5,8 4,6 4,5 6,0 5,3 4,6 5,4 6,0 7,5 5,4 6,3 4,6 6,8 7,5 4,9 6,7 4,5 5,1 4,9 4,0 5,9 6,8 4,1 6,5 5,8 4,6 3,8 6,5 5,8 5,3 3,7 6,0 6,4 3,9 6,0 5,0 6,4 5,5 5,8 6,2 6,3 5,2 5,9 5,8 5,7 5,4 5,1 6,8 7,5 4,9 6,7 4,5 5,1 6,1 4,8 7,1 6,8.
4.7.	3,2 6,7 5,8 5,3 5,7 5,4 4,7 5,5 5,3 6,7 5,5 5,4 4,3 6,5 5,7 6,5 5,0 7,0 4,7 5,0 5,5 6,5 7,3 7,9 4,9 5,4 3,6 5,4 5,7 5,2 7,0 4,5 5,5 5,8 4,9 5,7 5,5 4,8 5,5 6,0 7,0 6,4 5,1 6,8 5,8 5,3 4,5 7,8 5,6 4,4 3,1 6,3 4,4 6,3 4,9 6,5 4,7 5,0 4,6 5,4 4,9 5,4 5,2 6,5 5,3 6,0 5,3 5,6 5,8 4,8 6,7 5,9 5,7 6,3 5,8 6,3 4,4 6,4 4,9 6,1 5,9 5,4 5,2 4,7 5,4 5,2 4,3 3,7 5,4 4,7 5,4 6,1 5,3 6,5 6,9 5,0 6,1 4,7 7,2. 5,4 4,9 6,1 5,9 5,4 5,2 4,7 5,4 6,1.
4.8.	3,0 6,9 5,1 4,9 5,3 7,0 3,4 5,0 5,1 6,4 3,9 7,2 5,5 4,3 5,4 4,9 3,9 4,8 5,8 4,2 6,2 4,7 5,4 5,6 6,6 4,1 5,5 5,8 6,0 5,9 4,5 6,4 5,0 6,5 4,5 5,5 5,0 3,7 5,5 6,5 6,8 3,9 5,8 6,3 5,9 6,1 5,5 5,8 4,0 4,5 7,9 3,8 4,0 5,3 4,3 5,4 5,9 4,6 5,9 6,4 4,7 6,4 4,0 6,0 5,5 5,7 5,0 6,0 3,7 5,1 5,0 4,8 5,4 5,3 6,3 4,9 6,4 5,6 5,4 4,9 5,5 4,1 4,7 5,3 4,5 5,5 6,0 4,5 5,0 4,4 4,3 5,4 5,0 5,3 5,8 4,7 5,4 5,6 6,6 4,1 5,5 5,8 4,6 5,0 5,4 5,1 4,7 5,2.
4.9.	3,5 3,7 4,4 4,2 4,8 3,9 4,0 5,1 4,3 4,0 6,8 7,4 4,2 3,5 6,3 3,8 4,2 3,6 5,5 3,8 3,8 3,5 3,9 4,2 3,8 3,9 5,9 4,4 3,9 4,9 4,5 3,8 4,8 3,7 4,8 3,4 3,6 3,9 3,8 6,4 5,0 3,8 5,5 4,5 4,2 3,5 4,0 3,5 6,5 5,8 4,3 3,7 4,0 3,9 4,1 4,4 3,7 4,4 3,5 3,8 3,7 3,9 4,0 4,5 7,9 3,8 4,0 5,3 4,6 5,9 3,9 4,7 3,4 4,0 3,6 3,8 3,7 5,0 3,5 6,0 3,9 4,1 5,7 5,1 3,7 5,0 5,4 5,3 4,5 3,8 4,5 5,0 3,8 5,5 4,5 3,9 4,5 5,0 3,9 4,3 3,8 5,0 4,1 4,7 5,0 4,1 3,7 4,1.
4.10.	6,0 5,4 5,0 6,0 3,6 5,4 6,2 4,0 5,4 5,6 5,2 5,0 6,4 5,0 4,2 5,0 5,3 5,2 4,0 4,4 5,3 5,3 5,0 5,8 5,6 5,8 5,2 5,4 5,8 5,7 6,1 5,4 5,3 5,0 4,5 4,3 7,1 5,0 7,4 5,6 6,0 4,7 5,4 4,7 5,8 6,0 6,2 6,8 4,9 5,0 6,6 5,5 5,9 6,5 4,5 5,4 6,9 5,6 4,5 6,5 4,4 4,9 6,1 4,9 5,9 5,4 4,3 5,6 5,4 4,9 5,1 5,6 4,4 4,8 5,2 5,6 5,6 5,4 4,7 5,2 4,9 5,4 5,8 5,4 4,9 5,4 5,9 6,0 4,9 7,2 4,8 5,8 4,9 6,1 4,9 5,9 5,4 4,3 5,6 5,5 7,4 5,8 5,4 4,7 4,8 5,4 5,0 6,3.
4.11.	3,9 4,4 3,8 3,9 5,8 4,2 4,3 3,5 4,8 3,5 5,1 3,7 3,6 4,0 3,6 5,0 4,0 3,5 3,5 4,0 3,5 3,4 3,4 3,8 6,8 4,8 3,9 4,5 4,4 3,5 4,8 3,6 4,2 3,5 3,5 3,9 5,1 3,7 3,6 3,9 4,0 3,6 3,7 3,8 3,4 3,8 4,8 3,9 5,0 4,0 3,5 3,5 4,0 4,5 4,4 3,5 4,8 3,6 3,5 4,2 3,8 3,8 3,7 3,5 4,5 7,3 4,6 3,5 4,8 4,0 3,2 5,0 3,7 5,8 4,6 3,8 6,2 3,8 3,6 3,8 4,0 3,1 3,4 3,8 5,5 3,7 4,3 4,5 4,3 3,5 4,0 3,8 4,8 3,9 5,0 4,0 3,5 3,5 4,0 3,6 3,2 4,0 3,4 3,9 3,2 3,8 7,0 6,7.
4.12.	5,4 4,5 4,9 4,2 4,0 4,7 4,5 4,1 4,5 4,6 4,0 4,6 4,5 4,2 3,5 3,9 4,0 4,7 4,2 3,9 5,6 3,8 4,5 3,9 3,8 5,7 6,2 3,6 3,4 3,7 4,2 3,7 4,4 3,4 3,8 3,9 3,6 3,5 3,9 5,1 3,7 4,0 3,9 4,4 4,8 4,6 5,0 4,0 3,5 4,2 5,7 4,2 4,8 3,6 3,4 3,5 3,7 3,5 3,7 3,9 3,8 3,7 4,0 3,5 3,8 3,7 4,3 3,8 3,5 4,5 3,6 4,2 5,5 4,2 3,5 4,3 4,7 3,5 5,8 4,2 3,6 4,6 4,2 3,6 4,4 5,9 3,7 4,3 4,5 3,6 6,5 3,5 3,8 3,5 4,6 4,2 4,0 5,3 3,7 6,0 4,4 3,6 3,5 3,9 5,1 3,7 4,0 3,9.

Продовження табл. 4.3

1	2
4.13.	6,1 6,6 6,2 6,3 6,1 6,4 5,9 6,2 6,3 5,7 6,2 6,0 6,4 6,2 6,3 6,4 6,1 6,6 6,0 6,2 6,3 6,0 6,5 6,1 5,9 6,2 6,3 6,1 6,0 6,1 6,2 6,1 6,3 6,1 6,0 6,2 6,8 6,2 6,3 5,7 6,0 5,8 6,3 5,3 6,2 5,5 6,4 6,1 6,0 6,2 6,3 6,0 6,0 6,1 6,0 6,2 6,3 6,2 6,1 6,5 6,1 6,0 6,2 6,2 6,1 6,0 6,2 6,4 6,1 6,0 6,2 6,3 5,9 6,2 6,2 6,2 5,8 6,0 5,8 6,3 6,1 6,0 6,2 6,3 6,2 6,1 5,6 6,0 6,2 6,3 6,7 6,2 6,1 5,9 6,2 6,4 5,9 5,8 5,9 6,1 6,7.
4.14.	4,5 5,5 4,7 5,4 5,5 6,0 4,8 6,8 5,3 5,6 5,7 5,8 7,5 7,1 5,2 5,7 6,3 6,7 5,1 5,7 6,4 6,6 5,0 5,0 5,7 5,8 6,3 6,4 5,8 4,9 5,4 6,7 5,9 6,4 6,2 6,4 5,7 5,5 5,7 4,6 5,5 6,0 6,4 6,4 5,1 6,5 4,7 6,3 6,3 6,5 6,8 5,0 4,9 3,2 7,2 4,5 6,0 5,7 6,3 5,5 5,4 6,7 4,3 6,5 6,3 6,1 5,7 7,7 6,5 5,0 7,0 4,7 5,0 5,5 4,3 6,3 7,9 5,7 5,2 7,0 6,8 5,6 5,8 4,0 6,0 5,5 5,7 6,0 5,5 6,0 7,3 6,4 5,4 6,8 6,5 5,6 5,7 5,8 7,5 7,1 5,2 5,7 6,3 5,0 6,1 7,0 4,7 5,8
4.15.	6,5 4,4 4,9 5,4 5,7 6,0 6,5 4,8 3,6 5,4 5,3 4,0 6,3 6,0 5,3 5,0 5,7 5,6 5,0 6,7 5,1 6,3 7,9 6,5 6,0 4,1 6,1 4,5 5,1 5,6 6,4 5,6 6,8 4,9 5,0 5,6 4,7 5,4 5,2 5,7 5,8 5,4 4,9 5,6 5,0 4,9 4,5 5,4 5,6 5,8 5,9 4,5 4,0 5,4 5,0 6,5 4,7 5,0 4,4 5,5 6,5 5,4 6,0 4,8 7,5 6,0 4,6 5,6 7,0 5,4 4,1 5,7 4,5 7,3 5,5 5,0 7,4 5,4 7,0 5,4 4,0 5,4 6,0 4,7 5,0 5,4 5,3 6,1 7,2 5,5 5,1 5,4 4,8 3,6 5,4 4,0 6,3 6,0 5,3 6,1 5,7 6,2 4,7 5,6 4,5 5,5 5,7 6,8.
4.16.	6,2 7,2 8,1 6,4 7,8 6,1 6,2 8,8 6,2 6,2 6,3 6,2 6,8 7,7 6,7 6,2 6,0 6,0 6,1 6,2 6,1 6,5 6,1 6,3 6,1 6,0 6,1 6,7 6,1 6,4 5,9 6,6 6,1 7,2 6,2 7,8 7,2 6,4 5,9 6,7 6,2 6,7 7,2 6,2 6,4 7,8 5,9 7,2 6,2 6,2 7,2 6,2 6,4 6,2 8,2 6,3 7,4 6,3 6,4 6,3 6,1 7,4 6,3 7,4 6,3 7,1 6,0 6,4 6,3 6,4 6,3 6,4 6,5 7,5 6,5 6,8 6,1 6,0 6,5 6,6 6,2 6,2 6,7 7,6 6,4 6,8 6,1 6,1 6,8 6,9 6,1 7,2 6,2 6,4 7,8 5,9 7,2 7,5 6,2 7,2 6,2 8,3 7,1 6,1 7,1 6,5 6,6 8,0.
4.17.	3,4 3,1 3,2 3,1 4,7 3,2 3,1 2,9 3,0 2,5 3,7 3,2 3,1 2,8 4,0 3,1 3,2 2,5 2,8 4,6 4,5 3,1 3,2 2,4 3,4 2,3 3,0 4,7 2,6 2,9 4,7 2,6 3,0 4,9 2,9 3,0 2,9 3,9 4,0 3,1 3,2 3,1 3,2 4,2 3,1 5,3 4,6 3,2 3,6 3,2 3,7 3,2 3,5 3,2 3,5 3,4 3,2 3,8 4,4 3,4 3,2 3,9 3,4 3,2 3,6 2,2 3,2 3,3 3,4 3,2 3,3 3,4 3,2 3,7 3,4 3,2 3,3 3,4 4,0 3,2 4,2 3,3 3,2 3,1 3,4 3,2 3,3 3,2 3,5 3,6 3,1 3,5 4,4 3,6 3,2 3,1 3,5 4,3 3,6 3,2 4,7 3,4 3,2 3,4 4,0 3,2 4,2 4,5.
4.18.	4,8 5,7 5,3 5,2 5,0 5,2 6,6 5,7 5,4 5,5 5,7 5,5 5,9 5,6 5,8 5,4 5,3 5,8 5,4 5,2 5,7 5,1 5,9 5,2 5,7 5,5 5,0 5,4 5,0 5,6 5,8 5,9 5,6 5,3 5,6 5,9 5,3 5,8 5,9 5,0 5,8 5,1 5,3 5,7 5,6 5,4 5,7 5,8 5,4 5,6 6,5 5,4 5,6 5,8 5,4 5,5 5,1 5,5 5,3 5,4 5,7 5,2 5,0 5,6 5,5 5,0 5,7 5,8 5,9 5,5 5,3 5,6 5,7 5,5 5,4 5,3 5,5 5,9 5,4 5,2 5,3 5,2 5,9 5,2 4,9 5,3 5,2 5,0 5,5 6,2 5,9 5,0 5,2 4,6 4,6 5,8 5,9 5,6 5,3 5,6 5,9 5,4 4,2 5,6 5,3 5,7 5,9 4,8.
4.19.	5,2 5,7 4,4 5,5 5,4 5,9 7,0 5,1 4,8 6,0 5,5 5,6 5,2 5,3 6,1 5,6 5,2 5,8 5,3 5,5 6,4 6,3 5,9 5,8 4,6 4,7 4,9 5,0 5,6 4,9 5,5 5,1 5,5 5,7 6,7 5,4 5,0 5,7 5,4 5,9 5,7 5,1 5,0 6,4 5,1 7,2 5,2 6,1 5,6 5,3 5,2 5,3 4,3 5,2 5,9 5,3 5,2 5,8 5,3 5,2 5,3 5,6 5,2 5,4 4,6 5,3 6,0 5,2 5,4 5,5 5,4 5,5 5,3 5,8 5,4 5,6 5,4 6,6 5,4 6,2 5,6 5,4 5,5 5,4 5,5 5,3 5,4 5,2 5,1 5,0 6,4 5,1 7,2 5,2 6,1 5,6 5,3 5,2 5,7 5,9 5,2 5,8 6,0 5,8 5,3 5,1 6,5 7,4.

Закінчення табл. 4.3

1	2
4.20.	3,4 3,1 2,7 2,8 3,1 3,2 2,4 3,1 3,4 3,8 4,2 2,7 2,2 3,2 2,3 2,5 2,4 3,0 3,4 3,2 3,8 2,5 2,9 2,3 2,9 3,6 2,5 2,4 2,2 4,7 3,6 2,1 3,2 3,4 4,7 2,8 3,3 3,7 3,9 2,7 3,5 2,3 3,7 3,2 3,6 4,3 3,3 3,7 2,2 3,2 1,5 2,2 2,3 1,8 3,6 3,3 3,7 3,3 2,7 2,8 3,8 3,0 4,2 1,8 3,2 2,3 3,9 3,3 3,6 4,4 2,5 1,7 3,6 2,7 3,9 3,2 3,9 2,0 3,0 3,4 4,5 2,4 5,2 2,8 2,5 2,8 1,9 2,8 2,2 2,8 3,0 3,8 2,7 1,9 3,6 2,8 3,1 2,8 2,9 2,7 3,5 2,3 3,7 3,2 3,6 4,3 3,3 3,9.
4.21.	2,0 2,8 2,0 2,3 3,0 2,0 2,3 2,2 3,1 2,4 2,5 2,7 2,5 2,4 2,6 2,7 2,4 2,2 2,1 2,0 2,8 2,0 1,7 2,9 2,0 2,4 2,9 3,3 2,4 2,5 2,5 2,4 2,6 2,3 2,1 2,7 2,1 2,3 2,0 2,9 2,5 2,0 2,7 2,0 2,1 2,2 2,7 2,9 2,0 3,2 2,2 2,0 2,1 2,4 2,5 2,7 2,1 2,6 2,4 2,1 2,0 2,4 2,1 2,4 2,3 2,0 2,3 2,0 1,8 2,1 3,0 2,2 2,7 2,0 1,6 2,1 2,3 2,0 1,9 2,4 2,1 2,8 2,3 2,0 3,0 2,5 2,1 2,2 2,4 2,0 2,1 1,9 2,1 2,0 2,1 2,4 2,3 2,0 2,3 1,8 2,1 3,0 2,2 2,1 2,2 2,0 2,7 1,8.
4.22.	64 92 18 13 28 132 17 140 18 35 116 135 20 53 90 40 85 15 18 42 83 38 36 24 12 170 92 132 14 68 115 185 89 19 73 50 18 37 11 67 50 20 12 82 31 129 10 242 32 19 128 195 10 40 44 25 76 82 15 14 35 92 25 22 21 364 14 128 85 19 109 141 83 20 80 92 85 13 36 29 12 20 18 26 22 132 89 240 36 84 116 202 172 57 19 22 21 81 127 12 26 35 30 145 98 164 67 132 210 148 192 210 184 140 132 94 78 34.
4.23.	9,5 6,8 7,8 10,93 11,2 11,4 12,0 14,9 13,5 12,2 9,7 6,2 9,4 14,7 13,6 12,4 14,8 18,3 17,4 16,8 9,4 9,1 5,6 15,2 16,8 15,4 16,9 17,5 15,8 17,9 9,8 9,2 8,1 10,0 10,3 11,7 15,2 16,8 12,2 28,3 9,5 7,8 3,2 30,8 21,2 25,4 24,8 26,4 18,1 22,3 9,6 11,8 7,2 14,7 10,7 12,9 10,2 17,8 10,4 19,6 4,9 5,8 3,2 18,1 23,2 19,3 12,4 24,9 23,2 25,7 6,8 9,6 7,2 14,4 23,2 13,6 10,1 15,9 11,7 14,4 9,8 7,2 3,9 4,4 25,6 11,9 27,4 19,3 22,9 21,5 5,9 9,4 6,5 14,3 28,5 12,4 21,7 10,4 6,9 23,2 30,8 21,2 25,4 24,8 26,4 18,4 22,3 9,6 5,8 7,2 14,1 23,1 7,8 10,9 21,2 11,4 12,0 15,9 19,7 29,1 4,1.
4.24.	4,9 9,1 8,7 16,6 18,1 21, 1 20,9 10,5 12,7 26,5 7,4 4,2 5,9 15,2 16,8 18,6 14,2 18,7 27,1 20,8 9,7 6,2 9,4 14,7 13,6 12,7 14,8 12,3 17,4 16,4 4,9 5,8 3,0 18,1 19,7 19,3 29,9 20,9 23,2 19,7 9,5 9,2 8,1 10,3 10,0 11,6 15,2 16,8 12,2 28,3 7,6 4,0 8,1 17,4 15,1 13,7 17,4 19,0 33,8 24,3 6,8 9,6 7,2 14,4 23,2 13,0 10,9 15,3 11,6 14,4 7,6 9,1 7,6 20,1 15,8 26,7 25,6 24,4 21,9 12,8 17,6 9,8 2,1 10,7 22,4 13,6 12,1 13,8 12,3 14,6 8,2 4,8 7,5 17,4 15,8 20,4 11,6 10,1 14,5 9,7 16,4 4,9 5,8 3,0 18,1 19,7 6,3 2,9 10,9 23,2 7,2 20,9 19,3 29,9 20,9 23,2 19,7 9,5 9,2 8,1 10,3 5,1.
4.25.	9,9 5,1 4,7 9,9 8,1 6,1 4,0 5,5 5,9 9,2 10,5 11,8 11,1 10,8 11,7 5,9 7,8 6,2 5,5 5,9 5,4 9,9 5,1 8,0 11,5 10,4 15,8 11,1 10,8 10,7 5,5 6,7 5,1 6,2 7,9 5,5 5,0 8,9 4,8 11,1 10,8 10,7 10,2 10,9 11,9 16,5 5,1 3,1 4,3 5,0 5,1 9,9 5,1 4,5 7,9 10,9 11,9 11,8 14,4 10,7 10,4 11,8 8,0 4,1 9,8 9,7 9,6 9,9 5,1 3,8 4,2 14,8 10,4 10,7 10,5 10,4 11,8 12,4 8,0 5,5 5,9 4,8 4,5 6,4 6,8 6,0 4,7 12,8 12,2 10,5 14,5 12,5 13,0 12,5 2,9 4,7 4,2 6,0 6,8 4,4 4,7 3,8 2,8 10,9 10,0 11,9 11,1 15,1 3,1 4,3 5,0 5,1 9,9 5,1 10,8 9,9 7,9 10,9 11,9 13,8 10,4 10,7 12,4 12,8 8,1 6,1 4,0 5,5 3,9 2,5.

4.7. Контрольні запитання

1. Дайте означення генеральної та вибіркової сукупностей.
2. Як формується вибіркова сукупність? Яким вимогам вона повинна відповідати?
3. Дайте означення статистичного розподілу, визначіть способи його задавання та наведіть приклади.
4. Дайте означення точкових оцінок основних числових характеристик розподілу випадкової величини в генеральній сукупності.
5. Визначте вимоги, яким повинні відповідати статистичні оцінки.
6. Наведіть формули для визначення довірчого інтервалу для математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення випадкової величини, що розподілена за нормальним законом.
7. Яку інформацію можна отримати за допомогою додаткових числових характеристик розподілу: моди, медіани, коефіцієнта варіації?
8. Як оцінити додаткові числові характеристики розподілу за допомогою гістограми або полігону та кумуляти?
9. Чим відрізняється визначення основних числових характеристик розподілу за незгрупованими та згрупованими емпіричними даними?
10. Дайте визначення статистичної гіпотези.
11. Наведіть означення нульової та альтернативної гіпотез.
12. Що називається статистичним критерієм? Які статистичні критерії Ви знаєте?
13. Що називають критичною областю статистичного критерію?
14. Що таке рівень значущості α?
15. Що таке помилка першого роду? Наведіть приклади.
16. Що таке помилка другого роду? Наведіть приклади.
17. Сформулюйте правильні висновки щодо основної гіпотези, які можуть бути результатом її перевірки.
18. Що стверджує статистична гіпотеза, яка розглядається при порівнянні теоретичного та емпіричного розподілів?
19. Запишіть формули для обчислення вирівнюючих частот за допомогою інтегральної функції розподілу в припущенні, що випадкова величина X в генеральній сукупності має нормальний закон розподілу.
20. Охарактеризуйте критерій (згоди) Пірсона.

Змістовий модуль 4. Математичне програмування. Дослідження операцій

Лабораторна робота № 5

5.1. Тема роботи: Симплексний метод розв'язання задач лінійного та цілочислового програмування.

5.2. Мета роботи – формування навичок застосування симплексного методу до розв'язання задач лінійного та цілочислового програмування на прикладі визначення оптимального плану задачі про використання сировини за допомогою вбудованих функцій та надбудов MS Excel.

5.3. Теоретичні положення

Оптимізаційні задачі є задачами на умовний екстремум, коли на аргументи функції, що досліджується на максимум або на мінімум, накладаються певні обмеження. Чимало реальних економічних задач полягає у визначення шляхів оптимізації певних процесів. До таких задач належить і задача про оптимальне використання сировини.

Розглянемо змістовну постановку задачі. Підприємство може виготовляти продукцію кількох найменувань ($j=\overline{1,n}$), використовуючи при цьому декілька видів сировини ($i=\overline{1,m}$). Матриця технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ визначає витрати сировини i-го типу на виготовлення одиниці продукції j-го типу. Запаси сировини, що може витрачати підприємство, визначаються матрицею-стовпцем $\mathbf{B}=(b_i)_{m\times 1}$, де b_i – запас сировини i-го типу. Прибуток від реалізації одиниці продукції описується матрицею-рядком $\mathbf{C}=(c_j)_{n\times 1}$, де c_j – прибуток, який отримує підприємство від реалізації одиниці продукції j-го типу. Необхідно визначити план виробництва, за яким прибуток від реалізації продукції буде найбільшим. Отже, задача полягає в тому, щоб на ***множині можливих планів*** $\mathbf{X}=(x_j)_{n\times 1}$ визначити ***оптимальний план*** $\mathbf{X}^*=(x_j^*)_{n\times 1}$, за якого прибуток підприємства був би найбільшим. Тобто ***критерієм ефективності***, за яким порівнюються можливі плани, є відповідний їм загальний прибуток від реалізації продукції.

У задачах математичного програмування функція $Z(\mathbf{X})$, що досліджується на екстремум, називається ***цільовою функцією***. У задачі про оптимальне використання сировини цільова функція описує загальний прибуток підприємства від реалізації продукції, вона має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \quad \to \quad \max. \qquad (5.1)$$

Керованими змінними (аргументами цільової функції) є кількість виготовленої продукції x_j ($j = \overline{1,n}$). Оскільки продукція виготовляється з сировини, яка вже є на підприємстві в певній кількості, то витрати сировини на виготовлення продукції за кожним її типом не можуть перевищувати запасів цієї сировини, отже, керовані змінні повинні задовольняти певну ***систему обмежень***.

Основна система обмежень означає, що витрати сировини на виготовлення продукції не повинні перевищувати запасів. Її можна надати у вигляді нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (5.2)$$

Крім того, обсяг виробництва не може бути від'ємним, тобто до системи обмежень слід включити ***обмеження на знак***:

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (5.3)$$

Системи нерівностей (5.2 та 5.3) утворюють систему обмежень на керовані змінні. Отже, ***математична модель*** задачі про оптимальне використання сировини задана співвідношеннями (5.1 – 5.3).

Оскільки основна система обмежень складається з нерівностей одного знака, то співвідношення (5.1 – 5.3) визначають математичну модель задачі у ***стандартній формі***. Якщо для визначення залишків сировини ввести ***додаткові змінні*** x_j, де $j = \overline{n+1; n+m}$, то система обмежень набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{j+i} = b_i, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (5.2^{I})$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n+m}. \qquad (5.3^{I})$$

Якщо система обмежень оптимізаційної задачі задана співвідношеннями (5.2^{I} – 5.3^{I}), то така форма надання називається ***канонічною***.

Розв’язком задачі є оптимальний план $\mathbf{X}^* = (x_j^*)$, що задовольняє систему обмежень і за якого цільова функція має найбільше значення: $Z(\mathbf{X}^*) = \max Z(\mathbf{X})$.

Оскільки цільова функція і основна система обмежень задачі про оптимальне використання сировини є лінійними відносно керованих змінних, то ця задача є задачею ***лінійного програмування***. Будь-яку задачу лінійного програмування можна розв’язати, тобто визначити її розв’язок, якщо він існує, або довести, що задача не має розв’язку.

Серед можливих вимог, яким повинні підпорядковуватись керовані змінні, може бути вимога цілочисельності. Цю додаткову умову можна записати так:

$$x_j \in N \cup \{0\} \ . \tag{5.4}$$

Оптимізаційні задачі, математичні моделі яких поряд з основною системою обмежень містить умову цілочисельності, утворюють окремий клас задач – ***цілочислове програмування***.

Методи цілочислової оптимізації можна розподілити на три основні групи: методи відсікання (графічний метод, метод Гоморі); комбінаторні методи (метод гілок та границь); наближені методи.

5.4. Змістовна постановка задачі

Підприємство може виготовляти два види продукції, використовуючи для цього чотири види сировини. За допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel визначити оптимальний план виробництва, якщо задані матриця технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}$, матриця запасів $\mathbf{B}$ та матриця $\mathbf{C}$, що визначає прибуток від реалізації одиниці готової продукції:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 100 \\ 65 \\ 70 \\ 120 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = (\quad 3).$$

Дослідити, як зміниться розв'язок задачі, якщо відносно кількості продукції існує додаткова умова – умова цілочисленості.

5.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 5

За вихідними даними побудуємо математичну модель задачі про оптимальне використання сировини як задачі лінійного програмування:

$$Z(\mathbf{X}) = x_1 + 3x_2 \quad \to \quad \max,$$

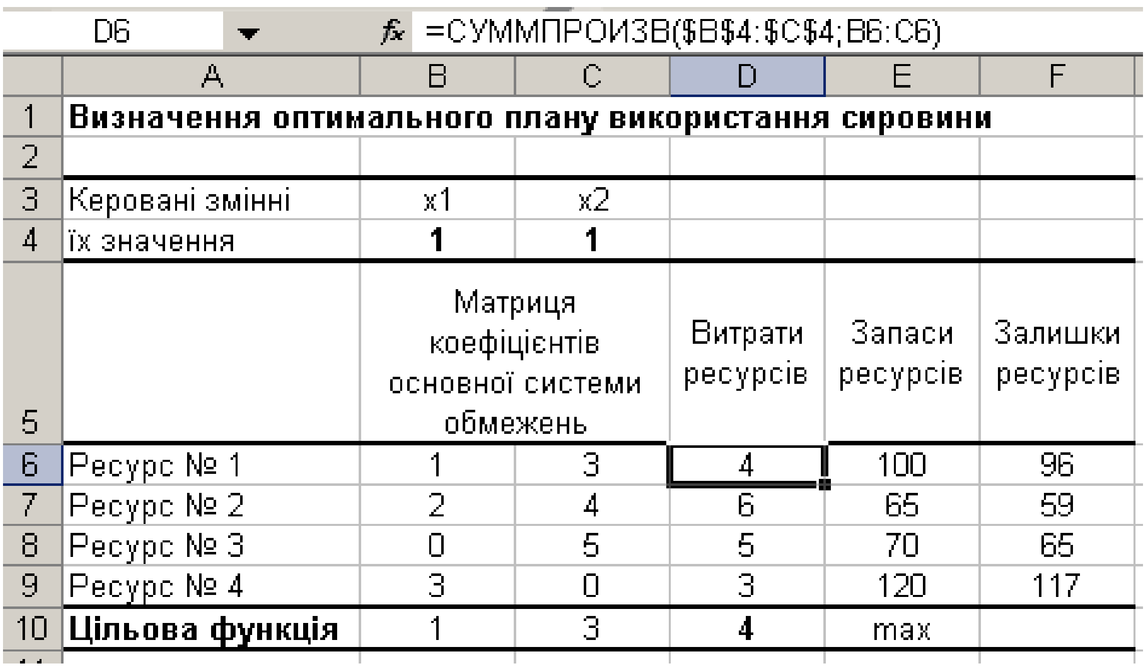
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 100; \\ 2x_1 + 4x_2 \le 65; \\ \qquad 5x_2 \le 70; \\ 3x_1 \qquad \le 12; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,2}.$$

Зверніть увагу, що основна система обмежень записана у вигляді нерівностей, тобто математична модель наведена у стандартній формі.

Застосуємо такий алгоритм її розв'язання.

1. На робочому аркуші книги MS Excel запишемо вихідні умови задачі у вигляді таблиці, зразок якої наведено на рис. 5.1.



D6 =СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B6:C6)

	A	B	C	D	E	F
1	**Визначення оптимального плану використання сировини**					
2						
3	Керовані змінні	x1	x2			
4	їх значення	**1**	**1**			
5		Матриця коефіцієнтів основної системи обмежень		Витрати ресурсів	Запаси ресурсів	Залишки ресурсів
6	Ресурс № 1	1	3	4	100	96
7	Ресурс № 2	2	4	6	65	59
8	Ресурс № 3	0	5	5	70	65
9	Ресурс № 4	3	0	3	120	117
10	**Цільова функція**	1	3	**4**	max	

Рис. 5.1. **Вихідні дані задачі про оптимальне використання сировини**

У комірках **B4:C4** записуємо значення керованих змінних (їх можна вибрати будь-якими). Це і є вихідний план виробництва. Зручно прийняти, наприклад, що $x_1 = x_2 = 1$.

2. Значення в комірках **D6:D9** відповідають кількості ресурсів за вихідним планом. Вони заповнюються за допомогою вбудованої функції **СУМПРОИЗВ()**, що належить до категорії **Математические**. Так, у комірку **D6** вводимо формулу: **= СУМПРОИЗВ($B$4:$C$4,B6:C6)** і розтягуємо її на комірки **D6:D9**.

Значення в комірці **D10** відповідає значенню цільової функції за вихідним планом, тому його можна обчислити, розтягнувши попередню формулу ще на одну комірку.

Комірки **F6:F9** відображають залишки ресурсів, тобто значення додаткових змінних. Їх значення обчислюються як різниця між запасами (комірки **E6:E9**) і витратами сировини за даним планом (комірки **D6:D9**).

3. Виділяємо комірку **D10**, куди виведено значення цільової функції, і активізуємо надбудову **Поиск решения**.

4. У діалоговому вікні надбудови **Поиск решения** заповнюємо поле **Установить целевую ячейку** (рис. 5.2). Обираємо варіант оптимізації – **максимальному значению**. У полі **Изменяя ячейки** посилаємось на блок керованих змінних **B4:C4**. Тепер можна вводити систему обмежень, для чого натискаємо кнопку **Добавить.**

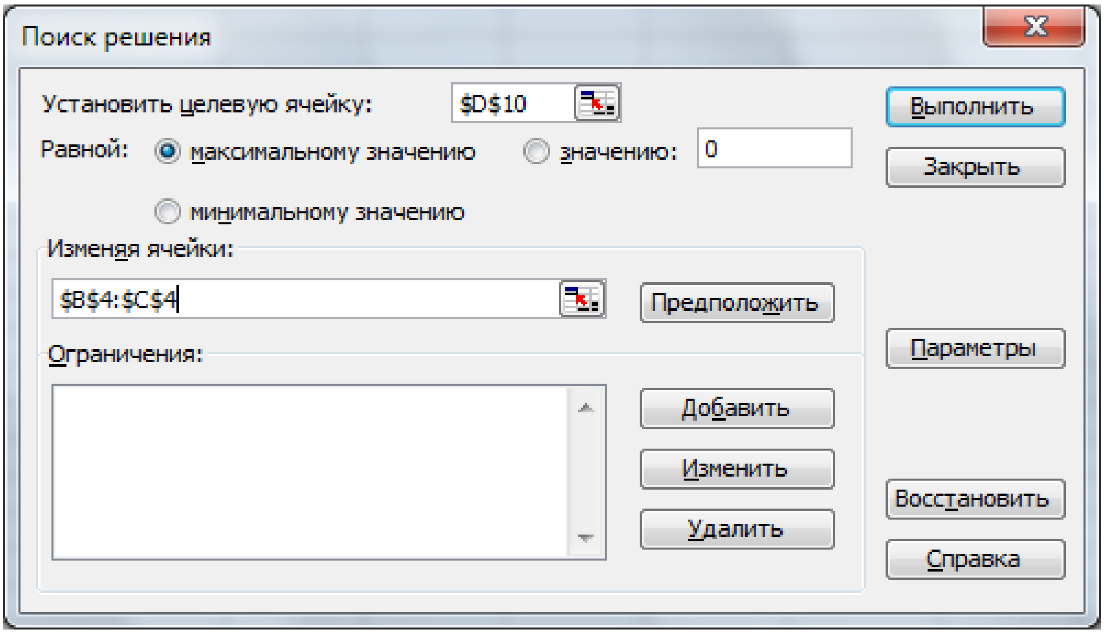


Рис. 5.2. **Діалогове вікно надбудови «Поиск решения»**

У лівому полі діалогового вікна **Добавление ограничений** даємо посилання на комірки **D6:D9**, що містять дані про витрати сировини (ліва частина основної системи обмежень), а в правому полі – на комірки **E6:E9**, що відповідають запасам сировини (права частина основної системи обмежень). У полі **Знак** обираємо такий знак, який відповідає обмеженню, що розглядається. У даному випадку це знак **<=** (рис. 5.3).

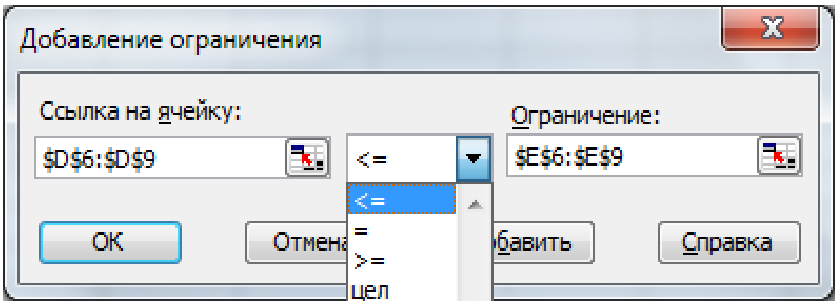


Рис. 5.3. **Діалогове вікно «Добавление ограничений»**

Сюди ж можна записати обмеження на знак. Для цього в діалоговому вікні **Добавление ограничений** натискаємо **Добавить**, у полі **Ссылка на ячейку** даємо посилання на комірки **B4:C4**, у полі **Знак** пишемо **>=**, а в полі **Ограничение** записуємо 0. Далі натискаємо **ОК**, що повертає діалогове вікно **Поиск решения**, і в ньому натискаємо кнопку **Параметры** (рис. 5.4).

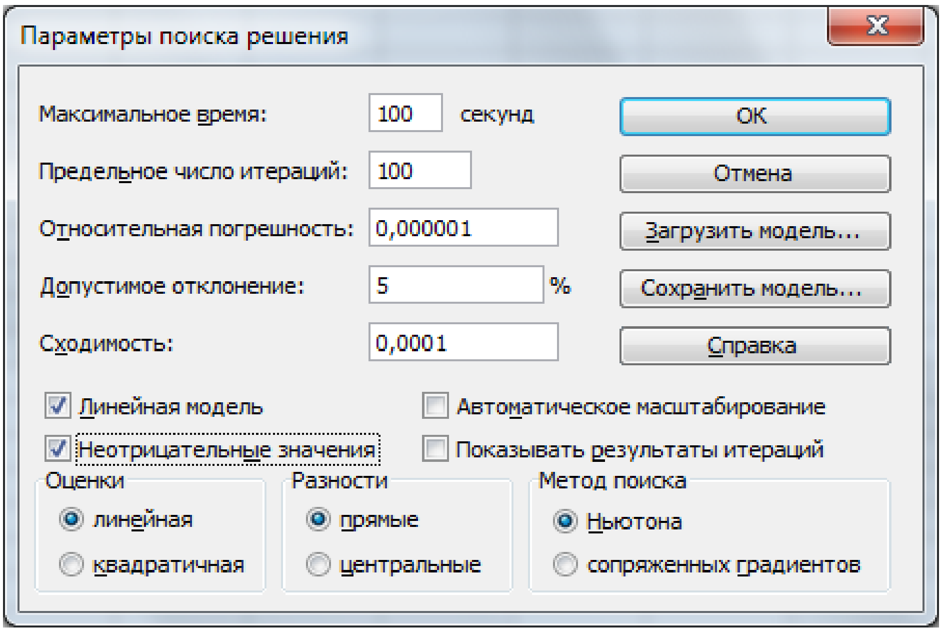


Рис. 5.4. **Діалогове вікно «Параметры поиска решения»**

Позначаємо прапорцем режими **Линейная модель** і **Неотрицательные значения**, якщо це не вказано в полі **Ограничения**, потім натискаємо **ОК** та повертаємось в діалогове вікно **Поиск решения**.

5. Тепер натискаємо кнопку **Выполнить**. Унаслідок цього на екрані з'являється вікно **Результаты поиска решения**, в якому відображено повідомлення про результат роботи (рис. 5.5).

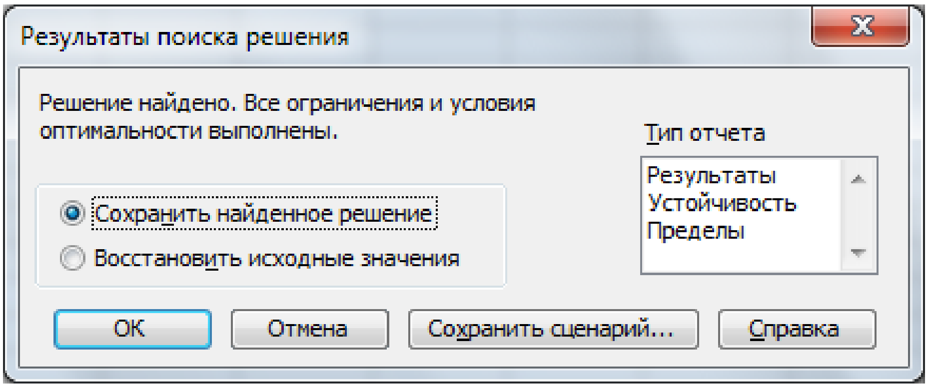


Рис. 5.5. **Діалогове вікно «Результаты поиска решения»**

Повідомлення, яке виводиться в діалоговому вікні, може бути такого змісту: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Це означає, що отримано розв'язок, який можна зберегти натисканням клавіші **ОК**, якщо перемикач стоїть у позиції **Сохранить найденное решение**. У цьому ж вікні пропонується вивести звіти **Результаты**, **Устойчивость Пределы**, для чого слід вказати необхідний тип звіту. Однак повідомлення може мати такий зміст: **Значения целевой ячейки не сходяться**, тобто задача у тому вигляді, як вона була введена, не має розв'язків. Причиною може бути як помилка в процесі побудови моделі або введення її даних, так і те, що задача дійсно не має розв'язку. В останньому випадку необхідно провести додатковий аналіз економічного аспекту моделі задачі.

Результат розв'язання даної задачі лінійного програмування наведено на рис. 5.6.

Одночасно на окремих аркушах, кожний з яких автоматично підписується відповідно до типу звіту і має посилання на робочий аркуш, можна отримати три звіти (таблиці 5.1 – 5.3), замовивши тип звіту у вікні **Результаты поиска решения**. У таблицях 5.1 – 5.3 ці звіти надані в тому ж вигляді, в якому вони виводяться надбудовою **Поиск решения**.

	A	B	C	D	E	F
1	**Визначення оптимального плану використання сировини**					
2						
3	Керовані змінні	x1	x2			
4	їх значення	**4,5**	**14**			
5		Матриця коефіцієнтів основної системи обмежень		Витрати ресурсів	Запаси ресурсів	Залишки ресурсів
6	Ресурс № 1	1	3	46,5	100	53
7	Ресурс № 2	2	4	65,0	65	0
8	Ресурс № 3	0	5	70,0	70	0
9	Ресурс № 4	3	0	13,5	120	106,5
10	**Цільова функція**	1	3	**46,5**	max	

Рис. 5.6. **Розв'язок задачі лінійного програмування**

Отже, відповідь задачі можна записати таким чином: $\mathbf{X}^* = (4{,}5; 14)$, $\max Z(\mathbf{X}) = Z(\mathbf{X}^*) = 46{,}5$.

Таблиця 5.1

Звіт «Результаты»

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**
$D$10	Цільова функція	0	46,5

Изменяемые ячейки

Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**
$B$4	Рішення x1	0	4,5
$C$4	Рішення x2	0	14

Ограничения

Ячейка	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
$D$6	Обмеження ресурсу № 1	46,5	$D$6<=$E$6	не связан.	53
$D$7	Обмеження ресурсу № 2	65	$D$7<=$E$7	связанное	0
$D$8	Обмеження ресурсу № 3	70	$D$8<=$E$8	связанное	0
$D$9	Обмеження ресурсу № 4	13,5	$D$9<=$E$9	не связан.	106,5

Відповідно до звіту **Результаты** максимальне значення прибутку становить 46,5 од. Для цього необхідно виробляти продукції 1-го виду в кількості 4,5 од., продукції 2-го виду – 14 од. Ресурс № 2 (кількістю 65 од.) і ресурс № 3 (кількістю 70 од.) використані повністю. Це відповідає результатам, які були виведені в робочій таблиці (рис. 5.6).

Статус обмежень за ресурсами № 2 та 3 визначається як **Связанное**, тобто обмеження за цими ресурсами стримує подальше збільшення виробництва. Водночас вихідні запаси ресурсів № 1 та 4 перевищують потреби виробництва за оптимальним планом на 53 одиниці та 106,5 одиниць відповідно. Статус відповідних обмежень – **не связанное**.

Отже, якщо у відповіді ще й надавати інформацію про залишки сировини, то оптимальний план задачі лінійного програмування матиме вигляд: $\mathbf{X}^* = (4{,}5; 14; 53; 0; 0; 106{,}5)$.

Таблиця 5.2

Звіт «Пределы»

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$D$10	Цільова функція	46,5

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевое Результат	Верхний предел	Целевое Результат
$B$4	Рішення x1	4,5	0	42	4,5	46,5
$C$4	Рішення x2	14	0	4,5	14	46,5

Аналіз залишків ресурсів дозволяє встановити чутливість моделі задачі щодо її параметрів. Так, у випадку якщо всі обмеження основної системи за оптимального плану перетворюються в тотожності, то будь-яка зміна ресурсів веде до того, що знайдений план перестає бути оптимальним, що є потенціальною загрозою стабільній роботі підприємства.

Відповідно до звіту **Устойчивость** ресурси № 1 та 4 використовуються неповністю, їх внутрішні ціни (тіньова ціна) дорівнюють нулю, тобто нема потреби в їх придбанні для продовження виробництва. У наведеній задачі визначені тіньові ціни дефіцитних ресурсів № 2 та 3. Для правих частин обмежень обчислено також можливі відхилення у запасах сировини, які не приведуть до змін оптимального плану відносно дефіцитності ресурсів.

Таблиця 5.3

Звіт «Устойчивость»

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$4	Рішення x1	4,5	0	1	0,5	1
$C$4	Рішення x2	14	0	3	1E+30	1

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$D$6	Обмеження ресурсу № 1	46,5	0	100	1E+30	53,6
$D$7	Обмеження ресурсу № 2	65	0,5	65	71	9
$D$8	Обмеження ресурсу № 3	70	0,2	70	11,25	10
$D$9	Обмеження ресурсу № 4	13,5	0	120	1E+30	106,5

Розглянемо, як зміниться оптимальний план задачі, якщо на її змінні накласти додатково обмеження цілочисельності (5.4). Задачу цілочислового програмування теж можна розв’язати за допомогою надбудови **Поиск решения**.

Скористаємось таблицею, що наведена на рис. 5.1. Активуємо надбудову **Поиск решения**, і в полі **Ограничения** її діалогового вікна записуємо вимогу цілочисельності. Для цього в діалоговому вікні **Добавить ограничения** (рис. 5.7) у центральному полі натискаємо **цел.**

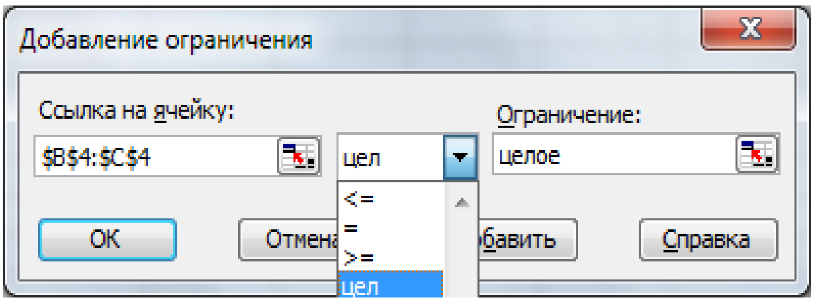


Рис. 5.7. **Діалогове вікно «Добавление ограничения»**

Як кінцевий результат застосування надбудови **Поиск решения** до задачі, що розглядається, виводиться така робоча таблиця (рис. 5.8).

	A	B	C	D	E	F
1	**Визначення оптимального плану використання сировини**					
2						
3	Керовані змінні	x1	x2			
4	їх значення	**4**	**14**			
5		Матриця коефіцієнтів основної системи обмежень		Витрати ресурсів	Запаси ресурсів	Залишки ресурсів
6	Ресурс № 1	1	3	46	100	54
7	Ресурс № 2	2	4	64	65	1
8	Ресурс № 3	0	5	70	70	0
9	Ресурс № 4	3	0	12	120	108
10	**Цільова функція**	1	3	**46**	max	

Рис. 5.8. **Розв'язок задачі цілочислового програмування**

Запишемо оптимальний план задачі цілочислового програмування з урахуванням залишків сировини: $\mathbf{X}^* = (4; 14; 54; 1; 0; 108)$. Отже, якщо виробляти 4 одиниці продукції першого виду і 14 одиниць продукції другого виду, то отримаємо максимальний прибуток, що складає 46 ум. од.

Слід зауважити, що в процесі розв'язання задачі цілочислового програмування за допомогою надбудови **Поиск решения** інформація про чутливість оптимального розв'язку до зміни параметрів (тобто звіт **Устойчивость**) не надається. Таку інформацію можна отримати лише шляхом повторної оптимізації моделі з новими значеннями параметрів.

5.6. Завдання для самостійної роботи

Підприємство може виготовляти чотири типи продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$ та $П_4$. Виробництво продукції потребує витрат сировини трьох видів. Відповідно до технології виробництва відомі питомі витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного типу.

У табл. 5.4 наведено норми витрат ресурсів на одиницю продукції, обсяг запасів ресурсів та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного типу. Необхідно знайти оптимальний план виробництва, який забезпечує максимальний прибуток; визначити, які ресурси обмежують подальше виробництво, і знайти інтервали зміни запасів ресурсів і змін ціни для кожного виду продукції, за яких план залишається оптимальним.

Таблиця 5.4

Вихідні дані задачі про оптимальне використання сировини

№ варіанта	Вид ресурсу	Витрати ресурсів на 1 виріб				Запаси ресурсів
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
1	2	3	4	5	6	7
5.1	I	1	3	2	4	17
	II	3	4	1	3	20
	III	5	3	2	2	21
	Ціна 1-го виробу	12	14	10	13	
5.2	I	3	1	3	2	59
	II	4	3	3	1	67
	III	3	5	1	2	75
	Ціна 1-го виробу	20	12	17	10	
5.3	I	3	3	1	2	48
	II	3	4	3	1	50
	III	1	3	3	2	40
	Ціна 1-го виробу	12	15	14	11	
5.4	I	3	1	2	4	26
	II	4	3	1	3	28
	III	3	5	2	1	46
	Ціна 1-го виробу	18	12	12	14	
5.5	I	3	1	1	2	18
	II	3	2	3	4	20
	III	1	2	2	1	14
	Ціна 1-го виробу	7	5	6	9	
5.6	I	1	2	3	1	21
	II	3	4	3	2	14
	III	2	1	1	2	15
	Ціна 1-го виробу	6	9	8	5	

Продовження табл. 5.4

1	2	3	4	5	6	7
5.7	I	2	3	1	1	40
	II	1	5	1	2	58
	III	2	1	1	2	34
	Ціна 1-го виробу	7	12	6	10	
5.8	I	1	3	3	2	40
	II	3	4	3	1	50
	III	3	3	1	2	48
	Ціна 1-го виробу	9	15	11	10	
5.9	I	2	1	1	2	17
	II	2	5	1	1	29
	III	1	3	1	2	20
	Ціна 1-го виробу	10	12	5	7	
5.10	I	1	3	4	2	29
	II	3	4	3	1	32
	III	5	3	1	2	49
	Ціна 1-го виробу	12	15	14	11	
5.11	I	1	3	2	4	34
	II	3	4	1	3	40
	III	5	3	2	2	42
	Ціна 1-го виробу	24	28	20	26	
5.12	I	3	1	3	2	118
	II	4	3	3	1	134
	III	3	5	1	2	150
	Ціна 1-го виробу	40	24	34	20	
5.13	I	3	3	1	2	96
	II	3	4	3	1	100
	III	1	3	3	2	80
	Ціна 1-го виробу	24	30	28	22	
5.14	I	3	1	2	4	52
	II	4	3	1	3	56
	III	3	5	2	1	92
	Ціна 1-го виробу	36	24	24	28	

Продовження табл. 5.4

1	2	3	4	5	6	7
5.15	I	3	1	1	2	36
	II	3	2	3	4	40
	III	1	2	2	1	28
	Ціна 1-го виробу	14	10	12	18	
5.16	I	1	2	3	1	42
	II	3	4	3	2	28
	III	2	1	1	2	30
	Ціна 1-го виробу	12	18	16	10	
5.17	I	4	3	1	3	48
	II	3	1	2	4	56
	III	3	5	2	1	84
	Ціна 1-го виробу	26	20	24	28	
5.18	I	3	4	1	2	46
	II	3	3	1	4	38
	III	1	2	2	1	52
	Ціна 1-го виробу	24	20	12	18	
5.19	I	4	2	3	1	54
	II	2	4	3	2	32
	III	4	1	1	1	40
	Ціна 1-го виробу	22	18	16	14	
5.20	I	3	1	2	4	76
	II	4	3	1	3	64
	III	4	5	2	2	92
	Ціна 1-го виробу	30	24	20	28	
5.21	I	2	1	1	2	18
	II	1	2	3	4	20
	III	1	2	4	1	24
	Ціна 1-го виробу	14	10	20	18	
5.22	I	1	3	3	5	62
	II	3	3	4	2	48
	III	2	1	3	2	54
	Ціна 1-го виробу	12	18	16	20	

Закінчення табл. 5.4

1	2	3	4	5	6	7
5.23	I	3	2	4	4	72
	II	3	1	1	3	68
	III	5	3	2	1	90
	Ціна 1-го виробу	35	21	24	28	
5.24	I	3	4	1	2	86
	II	3	2	3	4	72
	III	1	1	2	1	68
	Ціна 1-го виробу	14	20	15	18	
5.25	I	1	2	3	1	42
	II	3	4	1	2	39
	III	2	1	1	3	30
	Ціна 1-го виробу	12	21	16	14	

5.7. Контрольні запитання

1. Які задачі є задачами математичного програмування?
2. Які складові математичної моделі задачі лінійного програмування?
3. Які існують форми наведення математичної моделі задачі лінійного програмування?
4. Назвіть параметри задачі про оптимальне використання сировини і поясніть, який економічний сенс вони мають.
5. Що таке додаткові змінні? Поясніть, який економічний сенс мають додаткові змінні в задачі про оптимальне використання сировини.
6. Що називається оптимальним планом задачі лінійного програмування? Яке його геометричне тлумачення?
7. Як за оптимальним планом виробництва визначити, які ресурси використані не повністю і як обчислити залишки ресурсів?
8. Які існують основні методи розв’язання задач лінійного програмування і які особливості їх застосування?
9. Чи існують обмеження для застосування симплексного методу до розв’язання задач лінійного програмування?
10. Наведіть алгоритм розв’язання задачі лінійного програмування з використанням симплексної таблиці.

11. Які особливості має математична модель задачі цілочислового програмування?

12. Назвіть методи розв'язання задачі цілочислового програмування.

13. Охарактеризуйте типи задач, до розв'язання яких доцільно застосовувати надбудову **Поиск решения** середовища MS Excel.

14. Що таке альтернативний оптимум і як визначити кінцевою ітерацією симплексної таблиці, що такий оптимум існує?

15. Чи можна в процесі застосування надбудови **Поиск решения** одночасно використовувати обмеження, що містять різні знаки нерівності та знак рівняння?

16. Як провести аналіз отриманих результатів обчислень за допомогою надбудови **Поиск решения**?

17. Як розв'язати задачу цілочислового програмування засобами MS Excel?

18. Які типи звітів можна отримати за допомогою надбудови **Поиск решения**? Яку основну інформацію вони містять?

Лабораторна робота № 6

6.1. Тема роботи: Теорія двоїстості. Аналіз стійкості оптимального плану.

6.2. Мета роботи – оволодіння методикою побудови математичної моделі двоїстих задач і їх розв'язання за теоремами двоїстості та симплексним методом. Дослідження стійкості оптимального плану задачі про оптимальне використання сировини щодо зміни обсягів сировини, вартості готової продукції та технологічних коефіцієнтів з використанням можливостей надбудови **Поиск решения** MS Excel.

6.3. Теоретичні положення

Кожній задачі лінійного програмування за певним правилом відповідає задача, яка є ***спряженою***, або ***двоїстою*** відносно вихідної. Обидві задачі утворюють ***пару спряжених взаємно двоїстих задач***, кожна з яких може розглядатись як самостійна задача лінійного програмування. Визначивши оптимальний план однієї із задач, можна за ***теоремами двоїстості*** знайти розв'язок спряженої задачі.

Повернемося до задачі про оптимальне використання сировини. Припустимо, що підприємство може не тільки використовувати наявні ресурси для виробництва продукції, але й реалізовувати сировину, якщо останнє є більш вигідним. Позначимо через y_i $(i=\overline{1,n})$ ***умовну*** (***внутрішню***, ***тіньову***) або ***маргінальну ціну*** одиниці сировини i-го виду, запаси якої на підприємстві дорівнюють b_i $(i=\overline{1,m})$. Умовна ціна залежить від прибутків, які підприємство очікує отримати від реалізації готової продукції, що вироблена з цієї сировини: чим вищі ці прибутки, тим більшу ціну підприємство хоче отримати від реалізації ресурсів, якщо виявиться, що реалізовувати сировину більш вигідно, ніж продукцію, яка вироблена з цієї сировини. Задача про визначення граничних значень умовних цін, у разі перевищення яких виробництво стає менш вигідним, ніж реалізація сировини, є двоїстою до задачі про оптимальне використання сировини.

У процесі побудови математичної моделі двоїстої задачі за математичною моделлю вихідної слід мати на увазі такі властивості. По-перше, кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості рядків матриці коефіцієнтів основної системи обмежень вихідної задачі. По-друге, коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі є вільні члени основної системи обмежень вихідної задачі. Тип екстремуму, на який досліджується цільова функція двоїстої задачі, є протилежним тому, на який досліджується цільова функція вихідної задачі. По-третє, основна система обмежень двоїстої задачі складається з нерівностей, знак визначається за видом екстремуму двоїстої задачі. Матрицю коефіцієнтів основної системи обмежень двоїстої задачі отримують із матриці коефіцієнтів основної системи обмежень вихідної задачі шляхом транспонування. Правою частиною основної системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти цільової функції вихідної задачі. І четверте, якщо математична модель вихідної задачі задана у стандартній формі, тобто основна система обмежень надана у вигляді нерівностей одного знака, то математична модель двоїстої задачі містить обмеження на знак.

У тому випадку, коли математична модель вихідної задачі задана у стандартній формі, вихідна і двоїста задачі утворюють ***симетричну пару*** спряжених задач.

Для симетричної пари співвідношення між математичними моделями вихідної та двоїстої задач у матричній формі має вигляд:

Вихідна задача **Двоїста задача**

$$Z = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \quad \to \quad \max, \qquad F = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \quad \to \quad \min, \tag{6.1}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{B}, \qquad \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} \geq \mathbf{C}^{\mathbf{T}},$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}. \qquad \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}.$$

Побудуємо модель двоїстої задачі за її економічним тлумаченням.

Оскільки покупець прагне придбати сировину якомога дешевше, критерієм ефективності двоїстої задачі буде загальна вартість усіх видів ресурсів, яка досліджується на мінімум. Тобто маємо цільову функцію:

$$F(\mathbf{Y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \quad \to \quad \min. \tag{6.2}$$

Зрозуміло, що підприємство продаватиме наявні ресурси лише за умов, що кошти, які воно може отримати від реалізації сировини, не будуть нижчими, ніж очікувані прибутки від реалізації готової продукції. Цю умову можна записати як рівність екстремальних значень цільових функцій спряжених задач: $F(\mathbf{Y}^*) = Z(\mathbf{X}^*)$, що відповідає ***1-й теоремі двоїстості***.

Як і в задачі про оптимальне використання сировини, матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ є матрицею технологічних коефіцієнтів, матриця $\mathbf{C} = (c_j)_{1 \times n}$ визначає прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції j-го типу. Розглянувши умову беззбитковості за кожним видом готової продукції, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n. \end{cases} \tag{6.3}$$

Система нерівностей (6.3) є основною системою обмежень задачі, що є двоїстою до задачі про оптимальне використання сировини. Отже, коефіцієнтами при невідомих є елементи транспонованої матриці технологічних коефіцієнтів, а її правою частиною – елементи транспонованої матриці прибутку від реалізації.

Оскільки ціни, навіть умовні, не можуть бути від’ємними, то для змінних двоїстої задачі є обмеження на знак:

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{6.4}$$

Отже, математична модель двоїстої задачі (6.2 – 6.4) відповідає співвідношенням (6.1).

Розв’язком двоїстої задачі буде матриця-рядок $\mathbf{Y}^* = \left(y_i^*\right)_{1 \times m}$, елементами якої є тіньові ціни. Вони задовольняють системи обмежень (6.3) та (6.4), і цільова функція $F(\mathbf{Y}^*) = \min F(\mathbf{Y})$ досягає мінімуму. Якщо ціни на сировину перевищуватимуть тіньові ціни, підприємству стає більш вигідним продати сировину, ніж виробляти з неї продукцію.

Зв’язок між оптимальними планами вихідної і двоїстої задач визначається ***2-ю теоремою двоїстості***:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) \cdot y_i^* = 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ &\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) \cdot x_j^* = 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } y_i^* > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i; \\ &\text{якщо } y_i^* = 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Згідно з ***теоремою про оцінки*** тіньові ціни, що відповідають оптимальному плану $\mathbf{Y}^* = \left(y_i^*\right)_{1 \times m}$, є оцінками впливу зміни обсягів запасів сировини $\mathbf{B} = \left(b_i\right)_{m \times 1}$ на можливий прибуток від реалізації. Якщо $y_i^* > 0$, то значення цільової функції вихідної задачі можна збільшити завдяки збільшенню запасів j-ї сировини, оскільки ця додаткова кількість сировини буде використовуватися для збільшення випуску продукції. Так, збільшення запасів сировини i-го виду на величину Δb_i за умов, що всі інші запаси сировини залишаються без змін, дає можливість збільшити обсяг продукції, що виробляється, і призводить до збільшення цільової функції на величину $\Delta Z(\mathbf{X}^*)$:

$$\Delta Z(\mathbf{X}^*) = \Delta b_i \cdot y_i^*. \qquad (6.7)$$

Отже, найбільший прибуток (в межах стійкості оптимального плану) слід очікувати від збільшення запасів тієї сировини, яка за оптимальним планом двоїстої задачі має найбільшу тіньову ціну.

6.4. Змістовна постановка задачі

Підприємство може виробляти чотири види продукції, використовуючи для цього три види сировини. Визначити оптимальний план виробництва, якщо задані матриця технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A}$, матриця запасів сировини $\mathbf{B}$ та матриця $\mathbf{C}$, що визначає прибуток від реалізації одиниці готової продукції:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 5 & 9 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 8 & 11 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 220 \\ 360 \\ 410 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = (6 \quad 3 \quad 7 \quad 2).$$

Знайти умовні ціни, в разі перевищення яких стає більш вигідним продати сировину, ніж виробляти з неї продукцію, та дослідити стійкість оптимального плану використання сировини. Розв'язання задачі здійснювати в MS Excel за допомогою надбудови **Поиск решения**.

6.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 6

За даними вихідної задачі укладемо математичну модель двоїстої. Оскільки цільова функція вихідної задачі досліджується на максимум, то цільова функція двоїстої задачі, коефіцієнтами якої є кількість запасів сировини кожного виду, повинна досліджуватись на мінімум:

$$F(\mathbf{Y}) = 220y_1 + 360y_2 + 410y_3 \quad \to \quad \min. \qquad (6.2^{I})$$

Відповідно до виду екстремуму цільової функції нерівності основної системи обмежень повинні мати знак $\geq$. За кожним стовпчиком вихідної матриці технологічних коефіцієнтів складаємо нерівність щодо загальної ціни всіх видів сировини, що входить до складу продукції певного виду. Для цього транспонуємо вихідну матрицю технологічних коефіцієнтів (змінюємо її стовпчики на рядки) і в правій частині нерівностей вказуємо ціни на готову продукцію. Отже, отримуємо:

$$\begin{cases} 10y_1 + 12y_2 + 8y_3 \geq 9; \\ 12y_1 + 6y_2 + 11y_3 \geq 3; \\ 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 7; \\ 9y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2. \end{cases} \qquad (6.3^{I})$$

Оскільки спряжені задачі є симетричними, то змінні двоїстої задачі мають обмеження на знак:

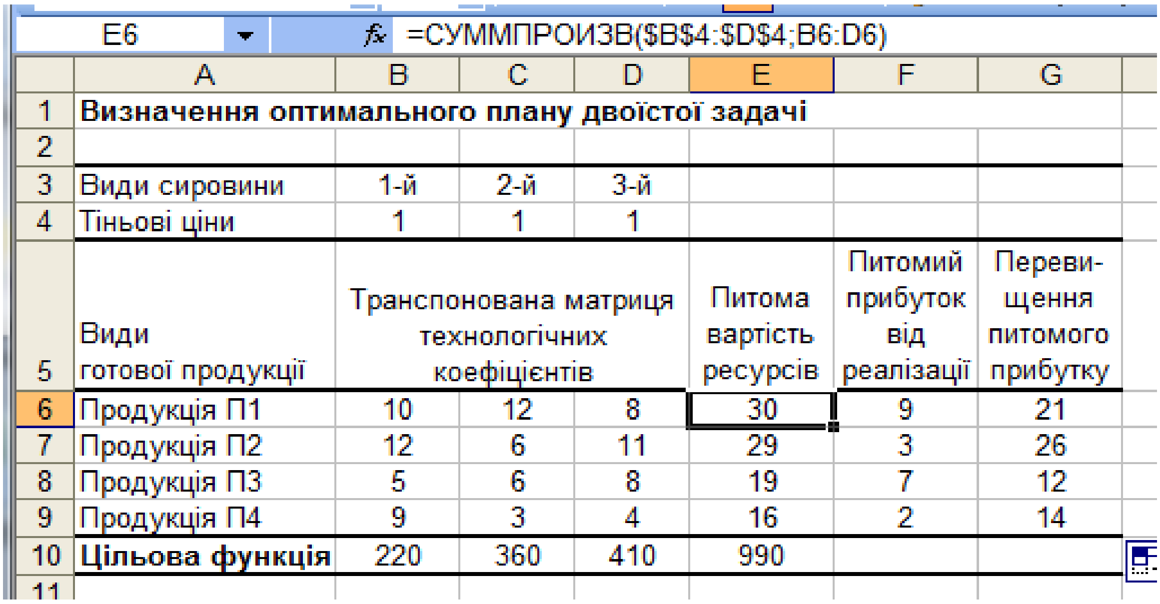
$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \qquad (6.4^{I})$$

Співвідношення (6.2^{I}) – (6.4^{I}) утворюють математичну модель двоїстої задачі.

Отже, виходячи з принципів побудови математичної моделі двоїстої задачі було отримано ті ж самі співвідношення, що відповідають тлумаченню задачі, двоїстої до задачі про оптимальне використання сировини. До речі, якщо здійснювати її розв’язання за допомогою симплекс-методу, то виникне потреба вводити фіктивну змінну, тобто це розширена М-задача.

Для розв’язання задачі застосуємо надбудову **Поиск решения** і будемо дотримуватись такого алгоритму.

1. На робочому аркуші книги MS Excel утворюємо таблицю, що містить вихідні дані двоїстої задачі і в якій буде здійснюватися обчислення (рис. 6.1). Керованими змінними даної задачі є тіньові ціни, вихідні значення яких записуємо в комірки **$B$4:$D$4**. Ці значення зручно вважати рівними одиниці. Для обчислення вартості сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції кожного виду і визначається в умовних цінах, застосуємо вбудовану функцію **СУММПРОИЗВ()**. Так, у комірку **E6** зводимо формулу: **=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B6:D6)**. Зверніть увагу, що посилання на комірки **$B$4:$D$4** є абсолютним, отже, розтягуємо цю формулу на комірки **E6:E9**. Значення загальної вартості сировини, яка є цільовою функцією для двоїстої задачі, виводимо у комірку **E10**. Це можна зробити, якщо розтягнути ту ж саму формулу ще й на комірку **E10.**



E6 =СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B6:D6)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Визначення оптимального плану двоїстої задачі**						
2							
3	Види сировини	1-й	2-й	3-й			
4	Тіньові ціни	1	1	1			
5	Види готової продукції	Транспонована матриця технологічних коефіцієнтів			Питома вартість ресурсів	Питомий прибуток від реалізації	Перевищення питомого прибутку
6	Продукція П1	10	12	8	30	9	21
7	Продукція П2	12	6	11	29	3	26
8	Продукція П3	5	6	8	19	7	12
9	Продукція П4	9	3	4	16	2	14
10	**Цільова функція**	220	360	410	990		
11							

Рис. 6.1. **Вихідна таблиця**

У комірках **F6:F9** записані граничні значення умовної вартості (праві частини основної системи обмежень), а в комірках **G6:G9** обчислюємо різницю між значеннями кожної з комірок **E6:E9** та значеннями у відповідних їм комірках **F6:F9**. Наприклад, до комірки **G6** вводимо формулу: **=E6-F6**.

2. Викликаємо діалогове вікно **Поиск решения** і заповнюємо його поля відповідно до математичної моделі двоїстої задачі (рис. 6.2).

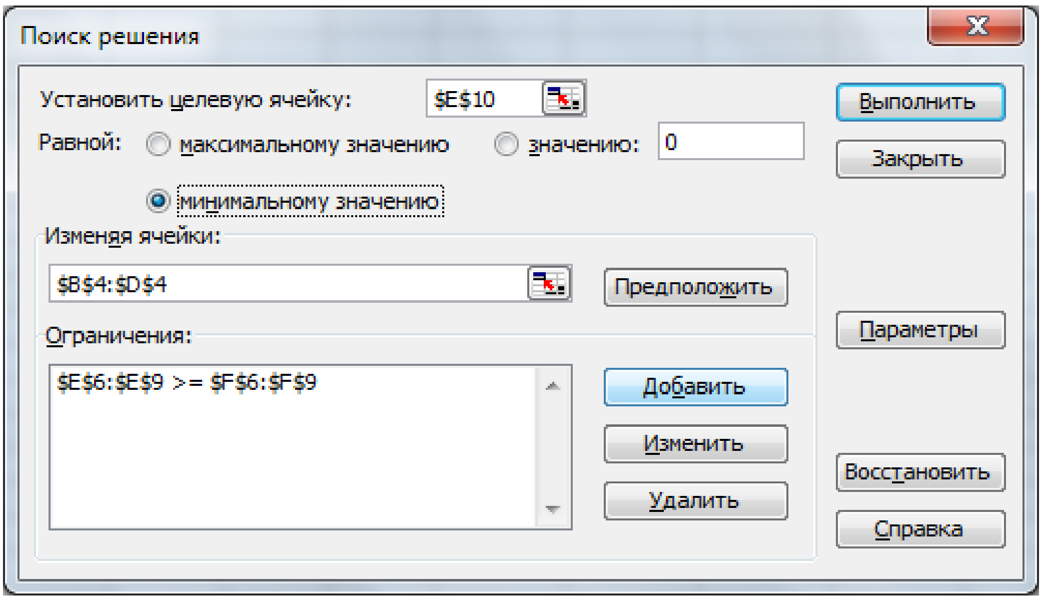


Рис. 6.2. **Діалогове вікно «Поиск решения» із заповненими полями для розв’язку двоїстої задачі**

Так, у поле **Установить целевую ячейку** вводимо посилання на комірку **$E$10** та встановлюємо перемикач проти умови **Равной: максимальному значению**. До поля **Изменяя ячейки** вводимо посилання на впливові комірки **$B$4:$D$4** та додаємо обмеження на їх значення. Для цього ставимо курсор у поле **Ограничения**, натискаємо кнопку **Добавить**. У діалоговому вікні **Добавление ограничения** (рис. 6.3) до лівого поля вводимо ліву частину нерівностей основної системи обмежень (**$E$6:$E$9**), вибираємо знак у центральному полі (**>=**) та до правого поля вводимо правую частину обмеження (**$F$6:$F$9**) і, натиснувши кнопку **ОК**, повертаємося до діалогового вікна **Поиск решения**.

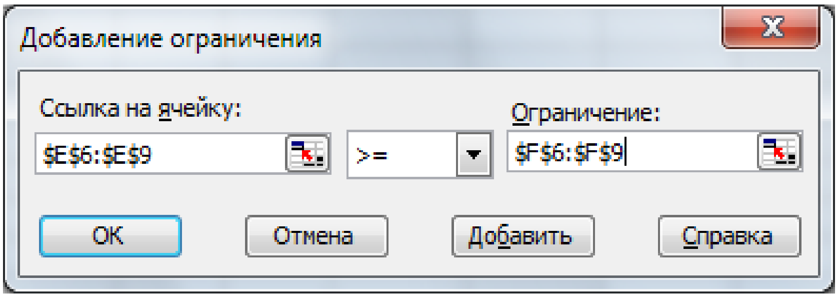


Рис. 6.3. **Основна система обмежень двоїстої задачі**

3. Визначаємо параметри моделі, для чого натискаємо **Параметры** і в діалоговому вікні **Параметры поиска решения** ставимо прапорці до вічок **Линейная модель** та **Неотрицательные значения**, оскільки змінні двоїстої задачі мають обмеження на знак. Натисканням кнопки **ОК** повертаємося до діалогового вікна **Поиск решения**.

4. Для розв'язку в діалоговому вікні **Поиск решения** натискаємо кнопку **Выполнить**, унаслідок чого в таблиці на робочому аркуші MS Excel змінюються значення умовних цін, питома вартість сировини для кожного виду продукції та загальна вартість усіх видів сировини в умовних цінах. Одночасно на екрані з'являється діалогове вікно **Результаты поиска решения**, у якому читаємо **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Отже, було знайдено оптимальний розв'язок. Встановлюємо перемикач у позицію **Сохранить найденное решение** і вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость**. Натискаємо **ОК**, і на робочому аркуші в таблиці, що відповідала вихідній, зберігається розв'язок двоїстої задачі (рис. 6.4), а звіт про стійкість оптимального плану виводиться на окремому робочому аркуші (табл. 6.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Визначення оптимального плану двоїстої задачі**						
2							
3	Види сировини	1-й	2-й	3-й			
4	Тіньові ціни	1,4	0	0			
5	Види готової продукції	Транспонована матриця технологічних коефіцієнтів			Питома вартість ресурсів	Питомий прибуток від реалізації	Переви-щення питомого прибутку
6	Продукція П1	10	12	8	14	9	5
7	Продукція П2	12	6	11	16,8	3	13,8
8	Продукція П3	5	6	8	7	7	0
9	Продукція П4	9	3	4	12,6	2	10,6
10	**Цільова функція**	220	360	410	308		

Рис. 6.4. **Розв’язок двоїстої задачі**

Таблиця 6.1

Звіт «Устойчивость» розв’язку двоїстої задачі

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэфф.	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$4	Тіньові ціни	1,4	0	220	36,25	220
$C$4	Тіньові ціни	0	96	360	1E+30	96
$D$4	Тіньові ціни	0	58	410	1E+30	58
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$E$6	Питома вартість	14	0	9	5	1E+30
$E$7	Питома вартість	16,8	0	3	13,8	1E+30
$E$8	Питома вартість	7	44	7	1E+30	2,5
$E$9	Питома вартість	12,6	0	2	10,6	1E+30

Отримано розв’язок $\mathbf{Y}_1^* = (1{,}4;\ 0;\ 0)$, за яким значення цільової функції становить: $\min F(\mathbf{Y}) = F(\mathbf{Y}_1^*) = 308$ ум. од.

Розглянемо інтерпретацію отриманого оптимального плану. Оскільки тіньові ціни на сировину 2-го та 3-го типів дорівнюють нулю, це означає, що дані види сировини підприємству не потрібні. Навпаки, в процесі виробництва за оптимальним планом сировина 1-го виду витрачена повністю, отже, для того, щоб надалі збільшити виробництво, потрібно придбати саме сировину 1-го типу. У разі збільшення кількості цієї сировини на одиницю завдяки зростанню обсягу виробництва загальний прибуток від реалізації продукції (значення цільової функції) збільшиться на 1,4 ум. од.

Дійсно, кількість вихідних запасів сировини 2-го та 3-го типів така, що в процесі виробництва за оптимальним планом є надлишки цих видів сировини у кількості 96 од. та 58 од. відповідно. Відповідно до першої частини табл. 6.1 (стовпчик **Допустимое уменьшение**) кількість сировини 2-го типу можна зменшити на 96 од., а сировини 3-го типу – на 58 од., при цьому оптимальний план залишається без змін. Щоб переконатись у цьому, розглянемо нову задачу (задача № 2), яка відрізняється від вихідної тільки кількістю сировини 2-го типу: $b_2 = 360 - 96 = 264$, що відповідає гранично допустимому зменшенню кількості сировини 2-го типу. Математична модель задачі № 2 має ту ж саму систему обмежень, тобто (6.3^{I} – 6.4^{I}), але іншу цільову функцію:

$$F(\mathbf{Y}) = 220y_1 + 264y_2 + 410y_3 \quad \to \quad \min. \qquad (6.2^{II})$$

Знайдемо розв'язок цієї задачі за допомогою надбудови **Поиск решения**. Результат її застосування наведено на рис. 6.5.

C4 | fx | 1,16666666666667

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Визначення оптимального плану двоїстої задачі №2**						
2							
3	Види сировини	1-й	2-й	3-й			
4	Тіньові ціни	0	1 1/6	0			
5	Види готової продукції	Транспонована матриця технологічних коефіцієнтів			Питома вартість ресурсів	Питомий прибуток від реалізації	Перевищення питомого прибутку
6	Продукція П1	10	12	8	14	9	5
7	Продукція П2	12	6	11	7	3	4
8	Продукція П3	5	6	8	7	7	0
9	Продукція П4	9	3	4	3,5	2	1,5
10	**Цільова функція**	220	264	410	308		
11							

Рис. 6.5. **Розв'язок задачі № 2**

Отже, в разі зменшення кількості сировини 2-го типу на 96 од. в кінцевій таблиці надбудови **Поиск решения** отримано інший оптимальний план: $\mathbf{Y}_2^* = (0;\ 7/6;\ 0)$. Однак слід звернути увагу, що йому відповідає те ж саме значення цільової функції: $\min F(\mathbf{Y}) = F(\mathbf{Y}_2^*) = 308$ ум. од. Це означає, що за такого співвідношення сировини різних типів лінія рівня цільової функції виходить з многокутника планів не через вершину $\mathbf{Y}_1^*$, як це відбувалось за умовами вихідної задачі, а через ребро, що з'єднує вершини $\mathbf{Y}_1^*$ та $\mathbf{Y}_2^*$. Тобто за умовами задачі № 2 оптимальними є і план $\mathbf{Y}_1^*$, і план $\mathbf{Y}_2^*$, а також їх опукла лінійна комбінація:

$$\mathbf{Y}^* = \lambda \mathbf{Y}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{Y}_2^*, \text{ де } \lambda \in [0; 1].$$

Це означає, що задача № 2 має ***альтернативний оптимум***.

Табл. 6.1 також містить інформацію щодо стійкості оптимального плану двоїстої задачі $\mathbf{Y}_1^* = (1{,}4;\ 0;\ 0)$ в разі зміни правої частини нерівностей її основної системи обмежень (розділ **Ограничения**). Ці параметри у вихідній задачі відображають ринкову ціну на одиницю продукції кожного виду. Слід звернути увагу, що продукція 1-го, 2-го та 4-го видів має нульову тіньову ціну, а тіньова ціна на продукцію 3-го виду дорівнює 44. Це означає, що збільшення ринкової ціни на продукцію 3-го виду на одиницю призведе до збільшення значення цільової функції на 44 ум. од. Для того щоб переконатись у цьому, розглянемо нову задачу (задача № 3), умова якої відрізняється від умови задачі № 1 тільки відносно ринкової ціни за одиницю продукції 3-го виду.

Нехай ціна на продукцію третього виду зросте на 2 од., тобто $c_3 = 7 + 2 = 9$ ум. од. Отже, маємо математичну модель задачі № 3:

$$F(\mathbf{Y}) = 220y_1 + 360y_2 + 410y_3 \quad \to \quad \min, \tag{6.2$^{\text{I}}$}$$

$$\begin{cases} 10y_1 + 12y_2 + 8y_3 \ge 9; \\ 12y_1 + 6y_2 + 11y_3 \ge 3; \\ 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 \ge 9; \\ 9y_1 + 3y_2 + 4y_3 \ge 2; \end{cases} \tag{6.3$^{\text{II}}$}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{6.4$^{\text{II}}$}$$

Згідно зі співвідношенням (6.7) слід очікувати, що значення цільової функції задачі № 3 за оптимальним планом буде більшим, ніж для цільової функції задачі № 1, на величину $\Delta F(\mathbf{Y}^*) = 2 \cdot 44 = 88$ ум. од. Застосуємо для розв'язання цієї задачі надбудову **Поиск решения** MS Excel. Результати наведені на рис. 6.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Визначення оптимального плану двоїстої задачі №3**						
2							
3	Види сировини	1-й	2-й	3-й			
4	Тіньові ціни	1,8	0	0			
5	Види готової продукції	Транспонована матриця технологічних коефіцієнтів			Питома вартість ресурсів	Питомий прибуток від реалізації	Переви-щення питомого прибутку
6	Продукція П1	10	12	8	18	9	9
7	Продукція П2	12	6	11	21,6	3	18,6
8	Продукція П3	5	6	8	9	9	0
9	Продукція П4	9	3	4	16,2	2	14,2
10	**Цільова функція**	220	360	410	396		
11							

Рис. 6.6. **Розв'язок задачі № 3**

З рис. 6.6 видно, що порівняно з вихідною задачею цільова функція дійсно зросла на 88 ум. од. : $F(\mathbf{Y}_3^*) = 308 + 88 = 396$ ум. од. При цьому тип оптимального плану двоїстої задачі залишився без змін, тобто дефіцитною є сировина 1-го виду, а для сировини 2-го та 3-го видів є надлишки. Однак тіньова ціна на сировину 1-го виду зросла до 1,8 ум. од., тобто сировина 1-го виду стала для підприємства ще більш цінною. Для вихідної задачі оптимального використання сировини це означає, що оптимальний план випуску продукції залишиться без змін, однак зростання тіньової ціні сировини 1-го виду, оскільки кількість саме сировини 1-го виду обмежує випуск продукції, робить її ще більш цінною для підприємства в умовах зростання ринкової ціни продукції.

6.6. Завдання для самостійної роботи

Підприємство може виготовляти чотири типи продукції. Виробництво продукції потребує витрат сировини трьох видів. Згідно з технологією, що застосовується на виробництві, витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду задані матрицею $\mathbf{A}$. Запаси сировини визначаються матрицею $\mathbf{B}$, а ринкові ціни на одиницю кожного з трьох видів продукції – матрицею $\mathbf{C}$.

Скласти математичну модель задачі про оптимальне використання сировини та визначити її оптимальний план. Відповідно до моделі вихідної задачі побудувати математичну модель двоїстої задачі щодо внутрішніх (маргінальних) цін на сировину та знайти оптимальний план цієї задачі й відповідне йому значення цільової функції за допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel. Дослідити стійкість оптимального плану вихідної задачі щодо запасів сировини та ринкової ціни на готову продукцію. Надати економічну інтерпретацію отриманих результатів.

Ці вихідні дані наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Вихідні дані задачі про оптимальне використання сировини

Варіант	Матриці параметрів системи
1	2
6.1	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 5 & 9 \\ 9 & 6 & 6 & 3 \\ 8 & 11 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = (220 \quad 160 \quad 310)$; $\mathbf{C} = (9 \quad 5 \quad 7 \quad 4)$
6.2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 3 \\ 8 & 11 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = (180 \quad 240 \quad 320)$; $\mathbf{C} = (9 \quad 12 \quad 7 \quad 6)$
6.3	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 9 \\ 9 & 10 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = (320 \quad 260 \quad 310)$; $\mathbf{C} = (4 \quad 5 \quad 7 \quad 8)$
6.4	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 9 \\ 9 & 6 & 6 & 12 \\ 6 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = (190 \quad 210 \quad 160)$; $\mathbf{C} = (7 \quad 6 \quad 9 \quad 4)$

1	2
6.5	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 9 \\ 9 & 6 & 12 & 3 \\ 8 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 310 & 280 & 340 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 9 & 10 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
6.6	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 7 & 12 & 5 & 9 \\ 9 & 6 & 10 & 7 \\ 8 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 250 & 220 & 360 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$
6.7	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 10 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 11 & 8 & 3 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 340 & 260 & 280 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 9 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$
6.8	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 320 & 290 & 270 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
6.9	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 9 \\ 10 & 8 & 8 & 3 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 330 & 410 & 390 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 6 & 10 & 7 & 4 \end{pmatrix}$
6.10	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 10 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 12 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 270 & 360 & 250 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
6.11	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 9 \\ 12 & 6 & 8 & 12 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 190 & 280 & 210 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
6.12	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 11 & 9 \\ 9 & 11 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 290 & 380 & 230 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

1	2
6.13	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 8 & 5 & 4\\ 9 & 12 & 6 & 9\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}250 & 360 & 240\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 9 & 7 & 4\end{pmatrix}$
6.14	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 9 & 5 & 9\\ 9 & 8 & 6 & 12\\ 8 & 12 & 9 & 4\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}240 & 280 & 300\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 5 & 4\end{pmatrix}$
6.15	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 12 & 9\\ 9 & 4 & 8 & 3\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}240 & 160 & 210\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 7 & 8\end{pmatrix}$
6.16	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 4 & 5 & 9\\ 9 & 6 & 8 & 12\\ 8 & 10 & 9 & 4\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}280 & 260 & 340\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9 & 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$
6.17	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 9 & 3 & 9\\ 9 & 4 & 12 & 8\\ 5 & 7 & 6 & 4\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}170 & 260 & 250\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 4 & 7 & 8\end{pmatrix}$
6.18	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9 & 4 & 5 & 9\\ 10 & 7 & 8 & 7\\ 8 & 5 & 9 & 4\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}210 & 280 & 240\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 4 & 6\end{pmatrix}$
6.19	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 9 & 12 & 9\\ 9 & 10 & 8 & 7\\ 4 & 7 & 9 & 6\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}270 & 360 & 240\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 10 & 8\end{pmatrix}$
6.20	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 8 & 5 & 4\\ 4 & 5 & 10 & 9\\ 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix};$ $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}230 & 320 & 180\end{pmatrix};$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}8 & 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$

Закінчення табл. 6.2

1	2
6.21	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6&9&11&7\\9&8&6&10\\8&12&9&5\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}140&180&200\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}7&9&5&4\end{pmatrix}$
6.22	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10&7&10&9\\9&4&8&3\\8&7&5&4\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}160&210&180\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9&5&7&8\end{pmatrix}$
23	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7&4&8&9\\9&6&4&8\\8&7&3&4\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}230&160&240\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&5&7&5\end{pmatrix}$
24	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&9&8&9\\10&4&7&5\\8&7&9&4\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}280&260&310\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&5&7&8\end{pmatrix}$
25	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7&4&5&9\\9&6&8&12\\8&10&9&5\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}380&260&320\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9&5&10&8\end{pmatrix}$

6.7. Контрольні запитання

1. За якими принципами здійснюється побудова математичної моделі двоїстої задачі?
2. Яка пара спряжених задач називається симетричною?
3. Які існують типи пар спряжених задач? У чому полягають особливості побудови їх математичних моделей?
4. Чому виникає потреба в побудові двоїстої задачі?
5. Як визначити розв’язок двоїстої задачі за розв’язком вихідної? Сформулюйте теореми двоїстості, які ви знаєте.
6. Яке економічне тлумачення має задача, що є двоїстою до задачі про оптимальне використання сировини?

7. Чому змінні задачі, двоїстої до задачі про оптимальне використання сировини, мають назву тіньових (маргінальних) цін?

8. Поясніть, в чому полягає різниця між тіньовими цінами (змінними двоїстої задачі) і цінами реалізації (коефіцієнтами цільової функції вихідної задачі).

9. Наведіть економічну інтерпретацію теорем двоїстості.

10. Як за розв'язком двоїстої задачі визначити стійкість оптимального плану вихідної задачі щодо зміни обсягів запасів сировини?

11. Як за розв'язком двоїстої задачі перевірити стійкість оптимального плану вихідної задачі щодо зміни цін на готову продукцію?

12. Яку інформацію містять звіти **Устойчивость** та **Пределы** надбудови **Поиск решения**?

Лабораторна робота № 7

7.1. Тема роботи: Класична транспортна задача. Задача про оптимальний розподіл операцій за обладнанням як транспортна задача.

7.2. Мета роботи – формування навичок побудови математичної моделі задачі про оптимальний розподіл операцій за видами обладнання як класичної транспортної задачі та її розв'язання із застосуванням надбудови **Поиск решения** MS Excel.

7.3. Теоретичні положення

Одним із найпоширеніших типів задач лінійного програмування є транспортна задача. На базі моделей такого типу можна розв'язувати не тільки задачі оптимізації постачання, але й безліч інших економічних задач. ***Класична транспортна задача за критерієм витрат*** має таке тлумачення. Нехай є постачальники A_i $(i=\overline{1,m})$, у яких накопичені запаси певної продукції у кількості a_i $(i=\overline{1,m})$, і споживачі B_j $(j=\overline{1,n})$ цієї продукції, потреби яких відомі і складають b_j $(j=\overline{1,n})$. Причому виконується ***умова збалансованості***:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \qquad (7.1)$$

тобто сума всіх запасів дорівнює сумі всіх потреб. Також задана матриця питомої вартості перевезення $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$, де кожний елемент c_{ij} цієї матриці визначає вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача (передбачається, що постачання здійснюються без посередників). Необхідно скласти план перевезень, за яким потреби споживачів задовольняються за рахунок продукції зі складів постачальників, при цьому загальна вартість перевезення повинна бути мінімальною. Якщо позначити через x_{ij} кількість вантажу (в умовних одиницях), яка надходить від i-го постачальника j-му споживачеві, то план перевезень утворює матрицю $\mathbf{X} = (x_{ij})_{m\times n}$. Оскільки в даній задачі критерієм ефективності є загальна вартість перевезень $Z(\mathbf{X})$, яка досліджується на мінімум, то цільова функція має вигляд:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \quad \to \quad \min. \qquad (7.2)$$

Керованими змінними в транспортній задачі є кількість вантажу x_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$), що перевозиться від i-го постачальника j-му споживачеві. Вони повинні задовольняти певні обмеження. Слід визначити ці обмеження.

По-перше, запаси, що зберігаються в кожного з постачальників, необхідно вивезти:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (7.3)$$

по-друге, потреби всіх споживачів треба задовольнити:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,n}. \qquad (7.4)$$

Перевезення здійснюються тільки в одному напрямку: від постачальника до споживача, зворотних потоків нема, тому змінні транспортної задачі не можуть бути від'ємними:

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (7.5)$$

Системи рівнянь (7.3) та (7.4) утворюють основну систему обмежень транспортної задачі, а нерівності (7.5) – це обмеження на знак.

Отже, математична модель класичної транспортної задачі за критерієм витрат задана співвідношеннями (7.2) – (7.5). Оскільки і цільова функція, і функції, що містяться в системі обмежень, є лінійними, то класична транспортна задача є задачею лінійного програмування. Її основна система обмежень надана у вигляді рівнянь, тобто математична модель транспортної задачі, що задана співвідношеннями (7.2) – (7.5), подана в канонічній формі.

Розв'язком транспортної задачі за критерієм витрат є оптимальний план перевезень $\mathbf{X}^* = (x_{ij}^*)_{m \times n}$, компоненти якого задовольняють системі обмежень (7.3) – (7.5) і за якого цільова функція $Z(\mathbf{X}^*) = \min Z(\mathbf{X})$ досягає найменшого з можливих значень.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є збалансованість попиту й пропозиції, тобто виконання співвідношення (7.1). Якщо балансова умова виконується, то така задача називається ***закритою***, або ***збалансованою***. Якщо ж балансова умова порушена, то задача називається ***відкритою*** і для того, щоб її розв'язати, спочатку її треба закрити, для чого вводять ***фіктивного учасника***. Таким учасником є споживач, якщо має місце співвідношення: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Тоді фіктивному споживачеві приписують потреби $b_{j+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то фіктивним учасником є постачальник, якому приписують обсяг запасів $a_{i+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Питома вартість перевезень за участю фіктивного споживача або фіктивного постачальника вважається рівною нулю. Отже, змінні, які визначають обсяг перевезень за участю фіктивного учасника, є ***додатковими***, оскільки вони вводяться в нерівність для перетворення її в рівняння. Оскільки надлишки вантажу не залишаються на складі (якщо пропозиція перевищує попит) або попит не задовольняється в повному обсязі (якщо попит перевищує пропозицію), то ці змінні входять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами. Це теж відповідає властивостям додаткових змінних.

Слід зазначити, що важливою властивістю розв'язку транспортної задачі за критерієм витрат є те, що його компоненти є цілими числами, якщо параметри задачі є цілими числами. Отже, в задачах про оптимізацію призначення на вакантні посади, визначення верстатного парку тощо немає потреби додатково накладати умову цілочисельності.

Розглянемо проблему, яка полягає в тому, що для виготовлення продукції необхідно виконати кілька типів виробничих операцій. Для цього на підприємстві застосовується декілька типів верстатів. Позначимо кожен з типів верстатів A_i $(i=\overline{1,m})$, відповідно, ресурс верстату i-го типу становить a_i $(i=\overline{1,m})$. За технологічним процесом загальний час, що витрачається на виконання операції B_j $(j=\overline{1,n})$, дорівнює b_j $(j=\overline{1,n})$. Матриця $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ визначає продуктивність кожного з верстатів при виконанні певної операції.

Потрібно розподілити операції за видами обладнання таким чином, щоб загальна ефективність від використання обладнання була найбільшою, тобто цільова функція досліджується на максимум.

Побудуємо математичну модель задачі про розподіл операцій. Керованими змінними x_{ij} в даній задачі є термін виконання i-ї операції на j-му верстаті. Критерієм ефективності виступає загальна продуктивність робіт, отже, необхідно так розподілити операції, щоб цільова функція сягала максимуму:

$$Z(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \quad \to \quad \max. \tag{7.6}$$

Змінні x_{ij} повинні задовольняти основну систему обмежень:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, \quad j=\overline{1,n};\\&\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1,m}.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Також має місце обмеження на знак:

$$x_{ij}\ge 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{7.8}$$

Хоча цільова функція задачі про оптимізацію роботи обладнання досліджується на максимум, а транспортної задачі за критерієм витрат – на мінімум, математичну модель задачі про розподіл операцій за верстатами (7.6) – (7.8) можна побудувати за тим самим принципом, що й математична модель транспортної задачі, де ресурс верстата A_i $(i=\overline{1,m})$ відповідає запасам постачальника A_i, а час, що витрачається на виконання кожної операції B_j ($j=\overline{1,n}$), відповідає потребам споживача B_j. Продуктивність верстатів c_{ij} у процесі виконання певної операції відіграє роль тарифу перевезення c_{ij}, а витрати часу x_{ij} кожного верстату на виконання певної операції є аналогами обсягів перевезень x_{ij}.

Нагадаємо, що тільки закрита транспортна задача має розв'язок. Для задачі про розподіл операцій за верстатами умова збалансованості виглядає таким чином: загальний час виконання операцій повинен дорівнювати загальному часу використання верстатів, отже, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Якщо задача про розподіл не є збалансованою, то для її розв'язання вводять фіктивних учасників (операції або верстати), продуктивність роботи яких вважається нульовою.

7.4. Змістовна постановка задачі

На виробничій дільниці працюють три верстати: фрезерувальний, шліфувальний та токарний. Ресурс верстатів дорівнює відповідно 100, 150 та 250 годин. Для виготовлення продукції застосовуються чотири технологічних операції, кожну з яких можна виконати на будь-якому з верстатів. Для виконання певного обсягу робіт визначили загальну тривалість кожної операції. Так, для виконання першої операції загальний час повинен становити 50 год, другої – 100 год, третьої – 200 год та четвертої – 150 год. Продуктивність кожного виду верстатів у процесі виконання кожної операції (в одиницях виробів) задана матрицею:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розподілити операції за видами обладнання таким чином, щоб необхідний обсяг робіт було виконано якомога скоріше. Дослідити вплив параметрів математичної моделі на стійкість оптимального плану.

7.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 7

Слід зазначити, що вимога виконати весь обсяг робіт якомога скоріше за заданої продуктивності верстатів означає, що на кожному верстаті потрібно виготовити якомога більшу кількість деталей. Критерієм ефективності в даній задачі є загальна продуктивність обладнання, відповідно цільова функція описує загальну кількість виробленої продукції і досліджується на максимум:

$$\begin{aligned} Z = {} & 8x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + \\ & + 4x_{21} + x_{22} + 6x_{23} + 7x_{24} + \\ & + x_{31} + 9x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34} \quad \to \quad \max. \end{aligned}$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$, то задача є збалансованою.

Далі записуємо основну систему обмежень у вигляді рівнянь (виконується балансова умова). Вона складається з двох частин: по-перше, усі технологічні операції, що передбачені в процесі виготовлення продукції, необхідно виконати відповідно до технологічних норм, по-друге, термін роботи кожного з верстатів потрібно використати в повному обсязі.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 50; \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 100; \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 200; \\ \sum_{j=1}^{3} x_{4j} = 150. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 100; \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 150; \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 250; \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Для розв’язання задачі застосуємо такий алгоритм.

1. Побудуємо таблицю, що відповідає умовам задачі (рис. 7.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Розподіл операцій за видами обладнання**					
3							
4		Верстати	Час виконання операцій				Фактичний час роботи верстата
5			№1	№2	№3	№4	
6		Фрезерувальний	0	0	0	0	0
7		Шліфувальний	0	0	0	0	0
8		Токарний	0	0	0	0	0
9		Фактичний час виконання операції	0	0	0	0	
10							
11		Верстати	Продуктивність верстата				Ресурс використання верстата
12			№1	№2	№3	№4	
13		Фрезерувальний	8	3	5	2	100
14		Шліфувальний	4	1	6	7	150
15		Токарний	1	9	4	3	250
16		Загальний час виконання операції	50	100	200	150	
17		Кількість виготовленої продукції	0	0	0	0	**0**
18							

Рис. 7.1. **Вихідні дані задачі про розподіл операцій**

Керовані змінні записані в комірках **C6:F9**, яким надамо нульові значення, значенню цільової функції відповідає комірка **G17**. У рядку **17** визначаємо загальний час виконання кожної операції, який необхідно витратити для виготовлення заздалегідь заданої кількості деталей, а також загальний час на виробництво продукції. Так, у комірку **C17** записуємо формулу: **=СУММПРОИЗВ(C6:C8;C13:C15)**. Комірка **G17** містить інформацію про загальний час, який потрібен для виконання всього обсягу робіт. Його значення обчислюється за формулою: **=СУММ(C17:F17)**.

2. Активізуємо надбудову **Поиск решения**. У її діалоговому вікні заповнюємо поле **Установить целевую ячейку**. Обираємо варіант оптимізації – **максимальному значению**. У полі **Изменяя ячейки** посилаємось на блок $**C$6:$F$8**. У полі **Ограничения** вказуємо відношення, що відповідають вихідній системі обмежень (рис. 7.2).

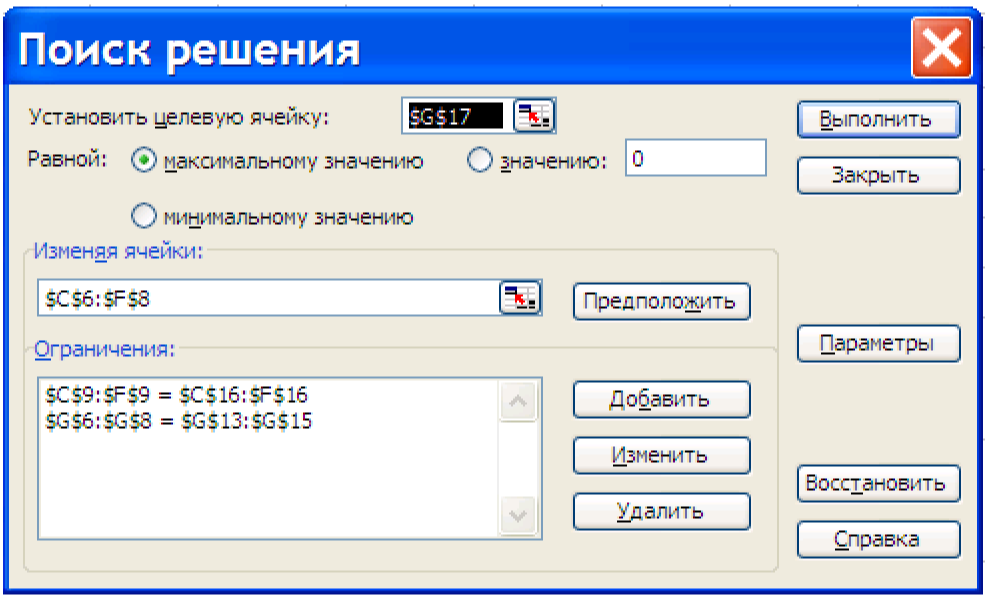


Рис. 7.2. **Діалогове вікно надбудови «Поиск решения»**

Далі натискаємо кнопку **Параметры** та прапорцями визначаємо режими **Линейная модель** і **Неотрицательные значения**. Натискаємо **OK** і повертаємось у діалогове вікно **Поиск решения**.

Оскільки математична модель введена, натисканням кнопки **Выполнить** виводимо вікно **Результаты поиска решения**, що містить повідомлення про те, що розв'язок знайдено, вибираємо вид звіту й виводимо інформацію про оптимальний план розподілу операцій за верстатами на робочий аркуш MS Excel (рис. 7.3).

Розподіл операцій за видами обладнання

Верстати	Час виконання операцій				Фактичний час роботи верстата
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Фрезерувальний	50	0	50	0	100
Шліфувальний	0	0	0	150	150
Токарний	0	100	150	0	250
Фактичний час виконання операції	50	100	200	150	

Рис. 7.3. **Оптимальний план розподілу операцій за обладнанням**

Отже, на фрезерувальному верстаті потрібно виконувати операції № 1 і № 3 протягом 50 годин кожна, на шліфувальному – операцію № 4 протягом 150 годин, на токарному – операцію № 2 протягом 100 годин і операцію № 3 – 150 годин. При цьому максимальна кількість деталей, яку можна виготовити за умови використання обладнання, що є на підприємстві, становить 3 200 одиниць (значення цільової функції за оптимальним планом).

Оптимальний план задачі про розподіл операцій за обладнанням можна подати у вигляді матриці:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 100 & 150 & 0 \end{pmatrix},$$

а також у вигляді графіка, тобто ***на мережах*** (рис. 7.4).

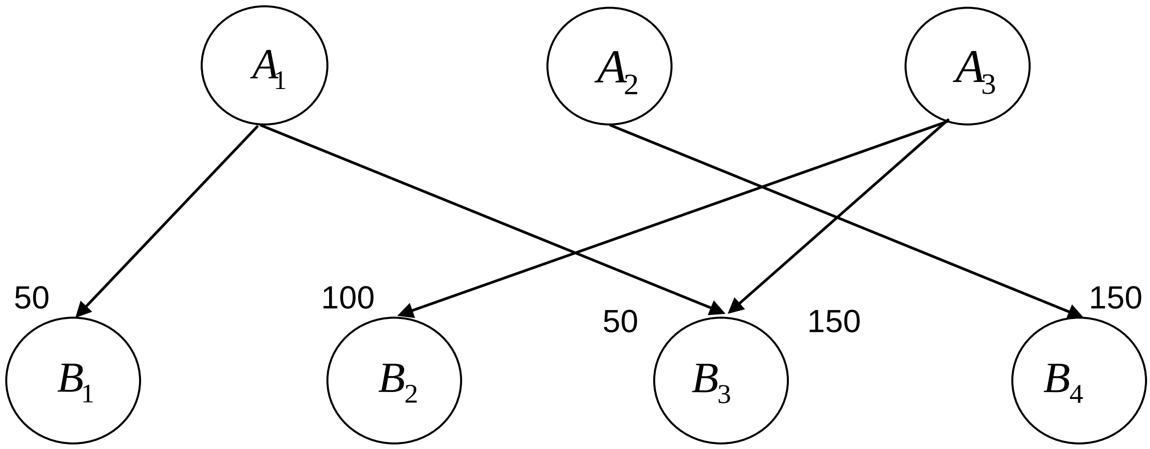


Рис. 7.4. **Оптимальний план розподілу операцій за обладнанням**

На рис. 7.5 наведено звіт **Устойчивость.** Перша частина звіту містить оптимальний план (**Результирующие значения**), значення коефіцієнтів цільової функції та межі, в яких кожний із цих коефіцієнтів окремо можна змінювати таким чином, що оптимальний план задачі при цьому залишається незмінним. У другій частині звіту **Устойчивость** четвертий стовпчик містить інформацію про тіньові ціни, тобто змінні задачі, двоїстої до вихідної. Для транспортної задачі змінні двоїстої задачі називаються ***потенціалами*** учасників. Слід зазначити, що потенціали фрезерувального та токарного верстатів мають від'ємні значення. Це означає, що збільшення ресурсу роботи (якщо це можливо) кожного з цих верстатів окремо призведе до збільшення цільової функції, тобто до збільшення загальної кількості виготовленої продукції.

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$6	Фрезерувальний № 1	50	0	8	1E+30	6
$D$6	Фрезерувальний № 2	0	-7	3	7	1E+30
$E$6	Фрезерувальний № 3	50	0	5	6	2
$F$6	Фрезерувальний № 4	0	-2	2	2	1E+30
$C$7	Шліфувальний № 1	0	-7	4	7	1E+30
$D$7	Шліфувальний № 2	0	-12	1	12	1E+30
$E$7	Шліфувальний № 3	0	-2	6	2	1E+30
$F$7	Шліфувальний № 4	150	0	7	1E+30	2
$C$8	Токарний № 1	0	-6	1	6	1E+30
$D$8	Токарний № 2	100	0	9	1E+30	7
$E$8	Токарний № 3	150	0	4	2	2
$F$8	Токарний № 4	0	0	3	2	2

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$6	Фрезерувальний Фактичний час роботи верстата	100	-3	100	150	0
$G$7	Шліфувальний Фактичний час роботи верстата	150	0	150	0	1E+30
$G$8	Токарний Фактичний час роботи верстата	250	-4	250	150	0
$C$9	Фактичний час виконання операції № 1	50	11	50	0	50
$D$9	Фактичний час виконання операції № 2	100	13	100	0	100
$E$9	Фактичний час виконання операції № 3	200	8	200	0	150
$F$9	Фактичний час виконання операції № 4	150	7	150	0	150

Рис. 7.5. **Звіт «Устойчивость»**

7.6. Завдання для самостійної роботи

Авіакомпанія обслуговує п’ять авіаліній. Для цього вона може використовувати три типи літаків, кількість яких (відповідно до типів літаків) становить 25, 55 та 20 одиниць. Для забезпечення своєчасності перевезень потреби в літаках для кожної з цих авіаліній складають 25, 15, 30, 10 та 20 одиниць.

Розподілити літаки за авіалініями так, щоб загальний прибуток від їх експлуатації був максимальним, якщо прибуток від одного літака в разі його використання на певній авіалінії задано матрицею (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Вихідні дані задачі

№	Матриця питомої прибутковості	№	Матриця питомої прибутковості
1	2	1	2
7.1	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&12&7&8&4\\6&3&2&9&6\\5&8&6&4&3\end{pmatrix}$	7.2	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}8&9&7&5&4\\6&3&4&9&5\\10&8&6&7&3\end{pmatrix}$
7.3	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&2&7&6&4\\7&9&2&9&6\\5&8&6&12&3\end{pmatrix}$	7.4	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&10&7&8&4\\6&3&12&9&6\\5&8&6&7&4\end{pmatrix}$
7.5	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}7&5&7&8&4\\6&4&10&9&6\\5&8&6&4&7\end{pmatrix}$	7.6	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&9&5&5&4\\6&10&4&9&5\\4&8&6&7&12\end{pmatrix}$
7.7	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9&8&7&8&4\\6&5&2&10&6\\5&4&6&4&5\end{pmatrix}$	7.8	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&5&7&8&5\\8&3&9&12&6\\5&8&6&4&10\end{pmatrix}$
7.9	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&8&7&8&4\\8&3&12&9&6\\5&9&6&4&3\end{pmatrix}$	7.10	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&8&11&8&4\\8&10&4&9&6\\12&6&8&4&13\end{pmatrix}$
7.11	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&9&4&8&7\\8&12&9&10&6\\5&8&6&4&8\end{pmatrix}$	7.12	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&8&7&8&9\\6&5&10&6&14\\5&4&6&4&5\end{pmatrix}$
7.13	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}8&6&7&8&4\\6&3&4&9&6\\5&8&6&5&9\end{pmatrix}$	7.14	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12&6&7&8&4\\6&3&10&9&6\\5&8&6&4&8\end{pmatrix}$

Закінчення табл. 7.1

1	2	1	2
7.15	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}10&8&7&8&2\\6&10&9&5&6\\5&8&6&3&8\end{pmatrix}$	7.16	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&3&7&8&4\\6&9&2&12&6\\5&8&6&4&10\end{pmatrix}$
7.17	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&6&7&8&4\\4&5&2&9&6\\5&8&6&4&3\end{pmatrix}$	7.18	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}7&12&7&8&4\\4&3&8&9&6\\5&8&6&12&3\end{pmatrix}$
7.19	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&4&3&8&4\\10&3&2&9&7\\7&8&6&4&6\end{pmatrix}$	7.20	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}12&6&7&8&10\\6&3&9&2&6\\5&8&6&4&9\end{pmatrix}$
7.21	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&12&7&8&5\\7&9&12&9&6\\5&4&6&10&7\end{pmatrix}$	7.22	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}10&6&7&8&10\\6&14&9&2&7\\9&8&6&11&9\end{pmatrix}$
7.23	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9&7&4&8&4\\6&11&2&12&8\\5&8&6&4&10\end{pmatrix}$	7.24	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&8&9&8&7\\6&4&9&5&6\\10&8&6&3&4\end{pmatrix}$
7.25	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}10&7&4&9&12\\6&5&5&7&8\\12&8&6&4&8\end{pmatrix}$		

7.7. Контрольні запитання

1. Поясніть, в чому полягає економічний сенс класичної транспортної задачі.
2. Сформулюйте умову існування розв’язку транспортної задачі.
3. Який сенс мають співвідношення, що складають основну систему обмежень транспортної задачі?

4. Яка транспортна задача вважається відкритою і чи може вона мати розв'язок?

5. Для чого і за якими принципами вводять фіктивних учасників перевезень?

6. Які змінні є додатковими в транспортній задачі? Назвіть ознаки, за якими можна визначити, що саме ці змінні є додатковими.

7. Сформулюйте основні етапи розв'язання транспортної задачі за методом потенціалів.

8. Чи можна визначити розв'язок транспортної задачі за допомогою симплекс-методу?

9. Який план транспортної задачі вважається виродженим?

10. Які ускладнення виникають у процесі розв'язання транспортної задачі, якщо за будь-якою ітерацією виникає вироджений план?

11. Як за оцінками останньої ітерації визначити, чи має транспортна задача альтернативний оптимум?

12. Про що свідчать тіньові ціни у звіті про стійкість розв'язку?

13. Як впливає зменшення чи збільшення питомих витрат на перевезення (у межах стійкості оптимального плану) на розв'язок транспортної задачі?

14. Як впливає зменшення чи збільшення запасів або потреб (у межах стійкості оптимального плану) на розв'язок транспортної задачі?

15. Наведіть приклади задач лінійного програмування, які можна звести до транспортної задачі.

16. Як слід перетворити модель виробництва із запасами для того, щоб її можна було подати як аналог транспортної задачі?

17. Які особливості має модель про розподіл операцій за видами обладнання в разі її подання як транспортної задачі?

18. Про що свідчить аналіз стійкості розв'язку задачі про розподіл операцій за видами обладнання?

Лабораторна робота № 8

8.1. Тема роботи: Оптимізаційні задачі управління запасами.

8.2. Мета роботи – засвоєння основних принципів розв'язання задач динамічного програмування на прикладі моделі управління запасами з урахуванням можливості їх накопичення; застосування надбудови **Поиск решения** MS Excel.

8.3. Теоретичні положення

Математичні моделі, що відповідають задачам лінійного програмування, зазвичай складаються на даний момент, тобто обмежені якимось одним часовим проміжком. Моделі, що розроблені для одного періоду, називаються ***статичними***. Відповідно моделі, що охоплюють декілька часових періодів, називаються ***динамічними***. Існують два підходи до розв'язання задач динамічного програмування. Згідно з одним із них кожний період окремо розглядається як задача лінійного програмування зі своїм критерієм ефективності. У цьому випадку загальним критерієм ефективності вважається сума критеріїв ефективності всіх періодів, які взяті з певними ваговими коефіцієнтами, причому вагові коефіцієнти залежать від часу. Також необхідно синхронізувати події таким чином, щоб вони розвивались у потрібному напрямі. Цей підхід дозволяє суттєво зменшити вимірність кожної із математичних моделей, які в сукупності визначають загальну задачу. Згідно з іншим підходом задача динамічного програмування розглядається в цілому, а окремим проміжкам часу відповідають обмеження, які повинні задовольняти змінні цільової функції. Суттєвим ускладненням цього підходу є експоненціальне зростання вимірності математичної моделі в разі збільшення кількості періодів, на які поділяється термін планування. Нагадаємо, що в MS Excel існує ліміт на кількість стовпців (не більше 256) та на кількість змінних (200 змінних) у разі застосування надбудови **Поиск решения**.

Динамічні моделі управління запасами є достатньо поширеним класом багатофазних моделей управління матеріальними ресурсами, фінансовими резервами, трудовими ресурсами тощо.

Розглянемо приклад класичної детермінованої однопродуктової моделі управління ресурсами. Вона називається ***детермінованою***, оскільки передбачається, що на початку першого періоду планування відомі попит (потреби в даному виді ресурсу, які необхідно задовольнити) для всіх наступних періодів.

Нехай для n майбутніх періодів відомо, яким саме буде попит на продукцію певного виду. Позначимо через d_t кількість цієї продукції, яку необхідно мати протягом t-го періоду ($t=\overline{1,n}$), щоб задовольнити попит у повному обсязі. Таким чином, d_t – це відомий нам попит, тобто обсяг продукції, що буде реалізовуватись протягом t-го періоду. Передбачається, що повернення продукції неможливе, отже, $d_t > 0$.

Для того щоб задовольнити попит, протягом періоду необхідно здійснювати виробництво продукції в обсязі $\mathbf{X} = \left(x_t\right)_{1\times n}$, з якого частина може накопичуватись у вигляді запасу. Витрати на виробництво одиниці продукції протягом певного тижня задані матрицею витрат $\mathbf{C} = \left(c_t\right)_{1\times n}$. Позначимо також через K_t максимальну кількість продукції, яку можна виробити протягом t-го періоду.

Запас визначається як кількість продукції, що переходить з t-го тижня на тиждень $t+1$. Позначимо через h_t питомі витрати на зберігання продукції протягом t-го періоду. Припустимо, що вихідний запас, тобто запас перед початком періоду планування, становить I_0. За його збереження плата не нараховується. Запас продукції, який отримуємо наприкінці t-го періоду, становить I_t. Вважається, що запас продукції, який існує наприкінці t-го періоду, є вихідним запасом на початку тижня $t+1$, тобто в процесі зберігання продукція не псується.

Необхідно визначити оптимальний план виробництва $\mathbf{X}^* = \left(x_t^*\right)_{1\times n}$, за яким попит на продукцію кожного періоду задовольняється в повному обсязі, а загальні витрати за цим планом на виробництво і збереження продукції протягом усього терміну реалізації плану будуть мінімальними.

Запаси продукції наприкінці кожного періоду описуються балансовими рівняннями. Так, наприкінці 1-го періоду матимемо запас:

$$I_1 = I_0 + x_1 - d_1.$$

Запишемо балансове рівняння відносно запасу продукції наприкінці довільного періоду. Відповідно запас, який утворився для кінця t-го періоду, можна визначити за рекурентним співвідношенням через запас попереднього $t-1$-го періоду та кількості продукції, що була вироблена та реалізована протягом t-го періоду:

$$I_t = I_{t-1} + x_t - d_t, \quad \text{де } t = \overline{1,n}. \tag{8.1}$$

Якщо в це співвідношення підставити значення запасів попередніх періодів, які теж визначені через кількість виробленої і реалізованої продукції, то отримаємо формулу, за якою можна обчислити запас наприкінці будь-якого періоду:

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^{t} x_i - \sum_{i=1}^{t} d_i \, .$$

Отже, змінна I_t $(t = \overline{1,n})$ визначається через керовані змінні x_t та параметри моделі I_0 та d_t.

Запишемо умову, яка передбачає, що для кожного періоду попит на продукцію задовольняється в повному обсязі. Для 1-го періоду маємо:

$$I_0 + x_1 \geq d_1 .$$

Перепишемо це співвідношення у вигляді:

$$I_0 + x_1 - d_1 \geq 0 .$$

Така форма запису означає, що запас наприкінці 1-го періоду не повинен бути від’ємним. Тобто вимога задоволення попиту за період t є еквівалентною вимозі невід’ємності запасу наприкінці періоду t.

Таким чином, математична модель управління запасами має такий вигляд. Цільова функція досліджується на мінімум:

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{t=1}^{n} c_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t I_t \quad \to \quad \min \tag{8.2}$$

за основних обмежень:

$$\begin{cases} I_t = I_{t-1} + x_t - d_t, \quad t = \overline{1,n}; \\ x_t \leq K_t \end{cases} \tag{8.3}$$

та обмежень на знак:

$$\begin{cases} x_t \geq 0; \\ I_t \geq 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

Співвідношення (8.2) – (8.3) утворюють математичну модель задачі управління запасами як задачі динамічного програмування.

Слід зауважити, що в процесі побудови математичної моделі задачі динамічного програмування необхідно визначити термін, для якого здійснюється планування (***термін планування***), а також обумовити кількість періодів, на які буде поділятися цей термін.

Визначення тривалості періодів, на які поділяється термін планування, передбачає, що кожний із цих періодів повинен характеризуватись сталими значеннями всіх параметрів, що розглядаються в даній задачі. Звідси випливає, що чим більшою є кількість періодів, тим більш точно математична модель описує певний економічний процес. Однак чим більша кількість періодів, тим більше змінних необхідно ввести в модель для її побудови, отже, тим більшою стає вимірність цієї моделі і, відповідно, значно ускладнюється пошук її розв'язку.

8.4. Змістовна постановка задачі

Підприємство, що виробляє потужні генератори, сформувало портфель замовлень на поточний рік (табл. 8.1). Постачання матеріалів, які необхідні для виробництва продукції, здійснюється щоквартально, постачання готової продукції замовникам також здійснюється наприкінці відповідного кварталу. У зв'язку з неритмічністю роботи підприємства протягом року та коливанням цін на матеріали у табл. 8.1 також наведені виробничі потужності підприємства та питомі витрати на виробництво одного генератора протягом року. Крім того, табл. 8.1 містить вартість зберігання одного генератора на складі підприємства протягом одного кварталу.

Таблиця 8.1

Дані щодо виробництва генераторів за кварталами

Показники	I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал
Обсяг замовлення, шт.	58	36	34	59
Виробничі потужності, шт.	60	62	64	66
Питомі витрати, млн грн	28	27	27,8	29
Вартість зберігання 1 генератора, тис. грн	300	300	300	300

Вихідний запас генераторів на початок року становив 15 одиниць. Перехідний запас на період, який є наступним за плановим, повинен становити не менше ніж 7 генераторів. Вартість зберігання готової продукції визначається для кількості генераторів, що обчислюється як середнє між залишками на початок та на кінець звітного періоду, яким у даному випадку є квартал.

Необхідно скласти щоквартальний план виробництва генераторів протягом одного року таким чином, щоб забезпечити своєчасне виконання замовлення, при цьому загальні витрати на виробництво і зберігання генераторів протягом усього року, на який здійснюється планування, повинні бути найменшими.

8.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 8

Позначимо через $\mathbf{X} = (x_t)_{1\times 4}$ річний план виробництва, елементами якого є незалежні змінні x_t $(t = \overline{1,4})$, які визначають кількість генераторів, що виробляються кожного кварталу. Оскільки всі дані, що наведені в табл. 8.1, представлені поквартально, то параметри задачі є сталими для кожного окремого кварталу. Отже, доцільно поділити рік, для якого здійснюється планування виробництва, саме на квартали.

Введемо залежні змінні I_t, які відповідають запасам, що утворюються наприкінці певного кварталу як надлишок готової продукції відносно замовлення. Відповідно до вихідних умов щодо питомих витрат на виробництво генераторів c_t $(t = \overline{1,4})$ та їх зберігання h_t $(t = \overline{1,4})$, що наведені в табл. 8.1, записуємо критерій ефективності, яким у даному випадку є загальні витрати підприємства протягом поточного року, пов'язані з виготовленням генераторів та їх зберіганням, у вигляді:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{X}) = {} & 28x_1 + 27x_2 + 27{,}8x_3 + 29x_4 + \\ & + 0{,}3\cdot(I_0 + I_1)\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot(I_1 + I_2)\cdot 0{,}5 + \\ & + 0{,}3\cdot(I_2 + I_3)\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot(I_3 + I_4)\cdot 0{,}5 \quad \to \quad \min . \end{aligned}$$

Слід звернути увагу на те, що за даними, які наведені у табл. 8.1, питомі витрати на виробництво генераторів вимірюються у млн грн, а вартість їх зберігання – у тис. грн. У процесі побудови цільової функції необхідно ці показники звести до однієї вимірності. У даному випадку загальні витрати на виготовлення і зберігання генераторів наведені в млн грн. Хоча цей вираз можна значно спростити шляхом елементарних перетворень, але для обчислень за допомогою MS Excel такий запис є більш зручним.

Відповідно до економічного сенсу задачі основна система обмежень враховує такі основні співвідношення. По-перше, обсяг випуску продукції, яку виробляє підприємство, може здійснюватись у межах його виробничих потужностей. По-друге, надлишки продукції наприкінці поточного кварталу дорівнюють різниці між обсягом продукції, що виготовлена в поточному кварталі з урахуванням залишків продукції наприкінці кварталу, який безпосередньо передує поточному, і обсягом постачання в поточному кварталі. По-третє, передбачається, що перехідний запас на період, який є наступним за плановим, повинен становити не менше ніж 7 генераторів. Отже, отримуємо основну систему обмежень у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 \le 60; \\ x_2 \le 62; \\ x_3 \le 64; \\ x_4 \le 66; \\ I_1 = 15 + x_1 - 58; \\ I_2 = I_1 + x_2 - 36; \\ I_3 = I_2 + x_3 - 34; \\ I_4 = I_3 + x_4 - 59; \\ I_4 \ge 7. \end{cases}$$

Математична модель задачі містить також обмеження на знак, оскільки як основні, так і залежні змінні не можуть бути від'ємними:

$$\begin{cases} x_t \ge 0, \quad t = \overline{1, 4}; \\ I_t \ge 0, \quad t = \overline{0, 4}. \end{cases}$$

Отже, задача планування виробництва розглядається як задача динамічного програмування. Знайдемо розв'язок цієї задачі, застосувавши для цього надбудову **Поиск решения** MS Excel. Розв'язання здійснюємо за таким алгоритмом.

1. На робочому аркуші книги MS Excel побудуємо таблицю, яка відповідає умовам задачі. Отже, заповнюємо вихідні дані задачі відповідно до табл. 8.1 (рис. 8.1). Для кожного кварталу виділяємо окремий стовпчик (це стовпчики **C**, **D**, **E** та **F**). У комірках **C3:F3** записуємо питомі витрати на виробництво генератора відповідно до періоду. У комірках **C4:F4** записуємо питомі витрати на зберігання генератора.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Задача про управління запасами**					
2	**Питомі витрати**		I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал	
3	Виробництво, млн грн		28	27	27,8	29	
4	Зберігання, млн грн		0,3	0,3	0,3	0,3	
5							
6	Вироблено за планом		50	50	50	50	
7	Потужність виробництва		60	62	64	66	
8	Запас на початок періоду		15	7	21	37	
9	Замовлення		58	36	34	59	
10	Запас на кінець періоду		7	21	37	28	7
11							
12	Виробничі витрати		1400	1350	1390	1450	
13	Витрати на зберігання		3,3	4,2	8,7	9,75	
14		Усього	1403,3	1354,2	1398,7	1459,75	**5615,95**
15							

Рис. 8.1. **Вихідні дані задачі про управління запасами**

2. Для матриці плану виробництва виділяємо комірки **C6:F6**. Будемо вважати, що первинний план виробництва для кожного кварталу становить 50 генераторів (за такого обсягу виробництва надлишки продукції за кожним кварталом не матимуть від’ємних значень).

3. Комірки **C7:F7** містять інформацію про потужність виробництва (за табл. 8.1).

4. Інформація щодо запасів на початок періоду міститься в комірках **C8:F8**. Для першого кварталу за умовою задачі початковий запас дорівнює 15 генераторам. Для комірок **D8:F8** за формулами (8.1) визначається запас, що відповідає першій сукупності нерівностей основної системи обмежень (8.3).

5. Комірки **C9:F9** містять інформацію про обсяги замовлень за кожним кварталом (за табл. 8.1).

6. У комірках **C10:F10** обчислюються запаси на кінець планового періоду. Ці запаси відповідають запасам на початок наступного періоду, їх значення обчислюються за формулами (8.1). Крім того, у комірці **G10** вказано нижню межу запасу, що за вихідними умовами задачі відповідає кінцю всього періоду планування, тобто кінцю 4-го кварталу.

7. Виробничі витрати, що виводяться в комірках **C12:F12**, відповідають витратам на виробництво генераторів протягом кварталу і визна-

чаються як добуток питомих витрат і відповідної їм кількості генераторів. Так, для комірки **С12** маємо формулу: **= С3*С6**.

8. Витрати на зберігання, що виводяться в комірках **С13:F13**, визначаються як середні витрати на зберігання генераторів протягом кварталу. Так, для комірки **С12** маємо формулу: **= С4*(С8+С10)/2**.

9. Рядок «Усього» містить загальні витрати на виробництво і зберігання генераторів, що виводяться в комірках **С14:F14** і визначаються як сума відповідних витрат (комірок дванадцятого та тринадцятого рядків).

10. Значення комірки **G14** обчислюється як сума значень комірок **С14:F14** і визначає загальні витрати підприємства протягом року, для якого здійснювалось планування. Для виведення цього значення застосовується формула: **= СУММ(C14:F14)**. Ця комірка містить значення цільової функції задачі динамічного програмування.

11. Активізуємо надбудову **Поиск решения** і в її діалоговому вікні виконуємо налаштовування економіко-математичної моделі задачі. Для цього заповнюємо поле **Установить целевую ячейку**, надавши посилання на комірку **G14**. Відповідно до умов даної задачі обираємо варіант оптимізації **минимальному значению**. У рядку **Изменяя ячейки** надаємо посилання на комірки **С6:F6**. Заповнюємо вікно **Ограничения** співвідношеннями лівої та правої частин обмежень з урахуванням умов задачі. Натискаємо кнопку **Параметры** та вибираємо режим **Линейная модель** та **Неотрицательные значения**. Натиснувши клавішу **ОК**, повертаємось у діалогове вікно **Поиск решений** (рис. 8.2).

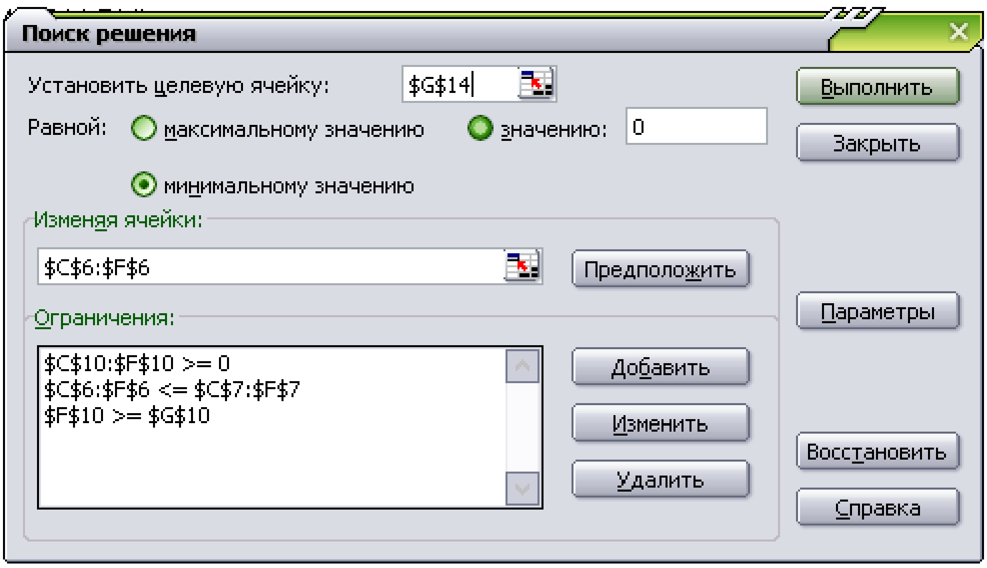


Рис. 8.2. **Діалогове вікно «Поиск решения»**

12. Оскільки всі обмеження моделі враховані, натискаємо кнопку **Выполнить** і на екрані з'являється вікно **Результаты поиска решений**, у якому відображено повідомлення про результат роботи: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Отже, задача має розв'язок.

13. У діалоговому вікні вказуємо **Тип отчета**: **Устойчивость** і підтверджуємо пропозицію **Сохранить найденное решение** натисканням клавіші **ОК**. Результат розв'язання задачі динамічного програмування представлено на рис. 8.3. Одночасно з цим ми отримуємо звіт **Устойчивость**, який виводиться на окремому аркуші MS Excel (табл. 8.2).

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Задача про управління запасами**					
2	**Питомі витрати**		I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал	
3	Виробництво, млн грн		28	27	27,8	29	
4	Зберігання, млн грн		0,3	0,3	0,3	0,3	
5							
6	Вироблено за планом		53	62	64	0	
7	Потужність виробництва		60	62	64	66	
8	Запас на початок періоду		15	10	36	66	
9	Замовлення		58	36	34	59	
10	Запас на кінець періоду		10	36	66	7	7
11							
12	Виробничі витрати		1484	1674	1779,2	0	
13	Витрати на зберігання		3,75	6,9	15,3	10,95	
14		Усього	1487,75	1680,9	1794,5	10,95	**4974,1**
15							

Рис. 8.3. **Розв'язок задачі про управління запасами**

За результатами оптимізації отримуємо щоквартальний план виробництва генераторів $\mathbf{X}^* = (53 \quad 62 \quad 64 \quad 0)$. За цим планом замовлення на кожний квартал будуть своєчасно виконані, перехідний запас на майбутній період складатиме 7 генераторів (що відповідає нижній границі необхідного запасу), а загальні витрати підприємства на виробництво та зберігання готової продукції будуть найменшими і становитимуть:

$$\min Z(\mathbf{X}) = Z(\mathbf{X}^*) = 4\,974{,}10 \text{ млн грн.}$$

До речі, якщо здійснювати оптимізацію чотирьох статичних моделей окрема за цими ж вихідними умовами, то отримаємо інший план виробництва, за яким цільова функція матиме значення 5 038,50 млн грн, тобто на 64,4 млн грн більше, ніж у випадку оптимізації цієї задачі як задачі динамічного програмування.

Тепер порівняємо результати, отримані на місці вихідної таблиці (рис. 8.3), з даними, що містяться у звіті щодо стійкості розв'язку задачі динамічного програмування (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Звіт «Устойчивость» задачі управління запасами

Изменяемые ячейки						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Нормир. стоимость**	**Целевой Коэф.**	**Допуст. Увелич.**	**Допус. Уменьш.**
$C$6	Вироблено за планом, I квартал	53	0	29,05	0,1	0,8
$D$6	Вироблено за планом, II квартал	62	-1,3	27,75	1,3	1E+30
$E$6	Вироблено за планом, III квартал	64	-0,8	28,25	0,8	1E+30
$F$6	Вироблено за планом, IV квартал	0	0,1	29,15	1E+30	0,1
Ограничения						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Теневая Цена**	**Огранич. Пр. часть**	**Допуст. Увелич.**	**Допуст. Уменьш.**
$F$10	Запас, кінець IV кварталу	7	29,05	7	7	7
$C$10	Запас, кінець I кварталу	10	0	0	10	1E+30
$D$10	Запас, кінець II кварталу	36	0	0	36	1E+30
$E$10	Запас, кінець III кварталу	66	0	0	66	1E+30
$F$10	Запас, Кінець IV кварталу	7	0	0	7	1E+30

Слід звернути увагу на коефіцієнти цільової функції, які наведені в розділі звіту **Изменяемые ячейки**. На перший погляд здається, що тут має місце помилка. Наприклад, коефіцієнт цільової функції, який відповідає змінній x_1 (на рис. 8.3 він міститься в комірці **С3** таблиці вихідних значень), дорівнює 28, тоді як у звіті **Устойчивость** цій же змінній відповідає число 29,05. Ця розбіжність пояснюється тим, що змінна x_1 входить до цільової функції не тільки окремо, але й як доданок у складі залежних змінних I_1, I_2, I_3 та I_4, що теж містяться в цільовій функції. Для першого кварталу необхідно враховувати питомі витрати на зберігання одного генератора до кінця року. Оскільки були враховані середні оцінки рівня запасів за квартал, то це рівнозначно тому, що генератори випускаються всередині кварталу. Таким чином, генератор, який виготовлено в першому кварталі, згідно з моделлю зберігається протягом 3,5 кварталів. Звідси отримуємо додаткові витрати $0{,}3 \cdot 3{,}5 = 1{,}05$ млн грн, які й необхідно врахувати у складі питомих витрат першого кварталу. Так само пояснюються розбіжності у значеннях коефіцієнтів цільової функції при змінних x_2, x_3 та x_4 за кінцевим виглядом робочої таблиці і звітом **Устойчивость**.

8.6. Завдання для самостійної роботи

Компанія формує інвестиційний портфель на два найближчих роки. На даний момент вона має вільні кошти у кількості 2 млн грн, але через 6, 12 та 18 місяців компанія очікує надходження прибутків від попередніх інвестицій. Розмір грошових надходжень надано в табл. 8.3. Фінансова політика компанії передбачає, що вкладати можна тільки власні кошти, і не вважає за можливе користування позикою.

Таблиця 8.3

Надходження від попередніх інвестицій

Термін надходження від початку планового періоду	6 місяців	12 місяців	18 місяців
Прибуток, тис. грн	500	400	380

Компанія має можливість інвестувати кошті у нові проекти «5-й кілометр» та «Медична картка», а також покласти їх на депозит із розрахунку m % за шість місяців (такий термін дії депозиту розглядається для того, щоб задачу можна було розглядати як задачу динамічного програмування з тривалістю одного періоду – півроку). Участь у кожному проекті можлива як у повному обсязі, так і менше, ніж 100 %. Однак якщо компанія бере участь у проекті менше, ніж 100 %, то її внески протягом дії відповідного проекту і прибуток від інвестицій зменшуються, оскільки він визначається пропорційно до частки участі.

Інвестиційні проекти передбачають наступні умови. У разі 100-відсоткового рівня участі у проекті «5-й кілометр» фінансові потоки представлені таблицею (табл. 8.4), де від'ємні величини визначають обсяг інвестиційних відрахувань на різних етапах проекту, а додатні – прибутки від інвестицій у випадку 100-відсоткового рівня участі.

Таблиця 8.4

Фінансова динаміка проекту «5-й кілометр»

Термін надходження	Вихідний внесок	6 місяців	12 місяців	18 місяців	24 місяця
Прибуток, тис. грн	-1 000	$-a_1$	a_2	a_3	a_4

Фінансова динаміка проекту «Медична картка» у разі 100-відсоткового рівня участі наведена в табл. 8.5, де від'ємні величини визначають обсяг інвестиційних відрахувань, а додатні – прибутки від інвестицій.

Таблиця 8.5

Фінансова динаміка проекту «Медична картка»

Термін надходження	Вихідний внесок	6 місяців	12 місяців	18 місяців	24 місяця
Прибуток, тис. грн	-800	b_1	$-b_2$	$-b_3$	b_4

Необхідно визначити, у яких частках від 2 млн грн компанія повинна вкладати кошти в інвестиційні проекти і чи варто замість участі в цих проектах частину або всі кошти покласти на депозит. При цьому критерієм ефективності є максимізація прибутку після закінчення 24 місяців.

Побудувати математичну модель задачі оптимізації інвестиційного портфеля як задачі динамічного програмування і визначити її розв'язок за допомогою надбудови **Поиск решения** MS Excel.

Значення параметрів задачі за варіантами наведені в табл. 8.6.

Таблиця 8.6

Значення параметрів задачі динамічного програмування

№ варіанта	Кількість коштів за етапами інвестиційних проектів, тис. грн								m, %
	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	
8.1	700	1 800	400	600	500	200	700	2 000	7
8.2	500	1 300	800	500	600	300	500	1 900	10
8.3	600	1 500	900	700	400	400	200	2 100	15
8.4	700	1 300	600	900	600	500	200	2 200	7
8.5	400	1 200	900	800	500	400	300	1 800	12
8.6	500	1 500	700	400	600	800	500	2 100	10
8.7	900	800	1 400	800	500	300	400	2 000	15
8.8	500	1 200	900	800	700	400	500	2 200	10
8.9	800	1 300	600	900	500	200	600	1 700	7
8.10	400	1 600	700	400	400	500	800	2 000	12
8.11	600	1 400	900	500	600	700	300	2 300	10
8.12	500	1 800	600	400	400	800	700	1 900	7
8.13	700	1 600	500	400	800	300	600	1 700	12
8.14	500	1 500	700	400	600	800	500	2 100	7
8.15	700	1 700	500	700	600	300	500	1 900	15
8.16	500	1 800	700	600	500	800	400	2 000	10
8.17	900	800	1 100	800	500	800	400	1 800	12
8.18	800	1 200	600	900	600	500	200	2 200	9
8.19	600	1 200	900	800	900	400	500	1 200	12
8.20	500	1 300	700	400	800	500	800	2 100	10
8.21	800	1 400	500	400	1 100	600	600	1 500	9
8.22	700	1 100	600	900	1 600	500	200	2 400	10
8.23	500	1 400	900	600	700	800	400	2 600	8
8.24	700	800	1 200	800	500	800	600	1 900	11
8.25	600	1 300	900	800	1 100	400	600	1 200	8

Дослідити стійкість оптимального плану за результатами, які виводяться у звіті **Устойчивость** надбудови **Поиск решения** MS Excel.

8.7. Контрольні запитання

1. Наведіть основні характеристики моделі управління запасами.
2. Які задачі вважаються задачами динамічного програмування?
3. Які існують методи розв'язання задач динамічного програмування і які принципи покладені в їх основу?
4. Як визначити оптимальний розмір замовлення у детермінованій моделі управління запасами?
5. Що необхідно знати для визначення оптимального розміру замовлення в моделі з виробництвом?
5. Чи співпадають розв'язки задачі управління запасами у разі застосування різних методів побудови її математичної моделей?
6. Як визначається критерій ефективності в задачах динамічного програмування?
7. Як визначається критерій ефективності за поетапного розгляду задачі динамічного програмування як сукупності статичних задач?
8. Які вимоги висуваються до параметрів задачі динамічного програмування у випадку поділу терміну її реалізації на періоди?
9. Чи визначається кількість періодів, на які поділяють термін реалізації математичної моделі динамічного програмування?
10. У чому полягає складність розв'язання задачі динамічного програмування порівняно із сукупністю статичних задач?
11. Які змінні містить математична модель управління запасами і в чому полягає економічний сенс цих змінних?
12. Чому коефіцієнти цільової функції математичної моделі задачі динамічного програмування відрізняються від тих значень, які виводяться у звіті **Устойчивость** як цільові коефіцієнти?

Лабораторна робота № 9

9.1. Тема роботи: Задача масового обслуговування як задача стохастичного програмування. Задачі заміни

9.2. Мета роботи – засвоєння основних принципів розв'язання задач масового обслуговування, оволодіння методикою побудови моделі та розв'язання задачі заміни устаткування.

9.3. Теоретичні положення

9.3.1. Характеристика системи масового обслуговування

Часто доводиться стикатися з такими ситуаціями: черга покупців в касах магазинів; колона автомобілів, рух яких зупинений світлофором; ряд верстатів, що вийшли з ладу і чекають ремонту, і т. д. Усі ці ситуації об'єднує та обставина, що системам необхідно перебувати в стані очікування. Очікування є наслідком імовірнісного характеру виникнення потреб в обслуговуванні й розкиду показників обслуговуючих систем, які називають ***системами масового обслуговування*** (***СМО***).

Мета вивчення СМО полягає в тому, щоб узяти під контроль деякі характеристики системи, встановити залежність між кількістю обслуговуваних одиниць і якістю обслуговування. Якість обслуговування тим вища, чим більша кількість обслуговчих одиниць. Але економічно невигідно мати зайві обслуговчі одиниці.

У промисловості СМО застосовуються під час: постачання сировини, матеріалів, комплектуючих виробів на склад і видачі їх зі складу; обробки широкої номенклатури деталей на одному й тому ж устаткуванні; організації налагоджування і ремонту устаткування; визначення оптимальної чисельності обслуговуючих відділів і служб підприємств і т. д.

Основними елементами СМО є ***джерела заявок***, їх ***вхідний потік***, ***канали обслуговування*** і ***вихідний потік***.

Існує кілька принципів класифікації СМО. Так, залежно від характеру формування черги СМО розрізняють:

системи з відмовами, в яких за умови зайнятості всіх каналів обслуговування заявка не стає в чергу і система не обслуговується;

системи з необмеженими очікуваннями, в яких заявка стає в чергу, якщо в момент її надходження всі канали були зайняті.

Також існують і системи змішаного типу з очікуванням і обмеженою довжиною черги: заявка отримує відмову, якщо надходить у мить, коли всі місця в черзі зайняті. Заявка, що потрапила в чергу, обслуговується обов'язково.

За кількістю каналів обслуговування СМО поділяються на одноканальні й багатоканальні. Залежно від розташування джерела вимог системи можуть бути розімкненими (джерело заявок знаходиться поза системою) і замкнутими (джерело знаходиться безпосередньо в самій системі).

Розглянемо окремо елементи СМО.

На практиці найбільш поширеним вхідним потоком є ***простий потік*** заявок, що характеризується стаціонарністю, ординарністю і відсутністю післядії.

Стаціонарність характеризується тим, що ймовірність надходження певної кількості вимог (заявок) протягом певного проміжку часу залежить тільки від довжини цього проміжку.

Ординарність потоку визначається неможливістю одночасної появи двох або більш заявок.

Відсутність післядії характеризується тим, що надходження заявки не залежить від того, коли і скільки заявок надійшло до цього моменту. В цьому випадку ймовірність того, що кількість заявок, які надійшли на обслуговування за інтервал часу t, дорівнює k й визначається за законом Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

де λ – ***інтенсивність потоку заявок****,* тобто середня кількість заявок за одиницю часу:

$$\lambda = \frac{1}{\tau},$$

де τ – середнє значення інтервалу часу, який минає між двома послідовними надходженнями заявок.

Для такого потоку заявок час між надходженнями двох послідовних заявок є неперервною випадковою величиною, що розподілена за експоненціальним законом зі щільністю ймовірностей:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Випадковий час очікування в черзі до початку обслуговування теж вважається розподіленим за експоненціальним законом зі щільністю ймовірностей:

$$f(t) = \nu e^{-\nu t},$$

де ν – ***інтенсивність руху черги****,* тобто середня кількість заявок, що надходять на обслуговування за одиницю часу.

У свою чергу

$$\nu = (t_{оч})^{-1},$$

де $t_{оч}$ – середній час очікування.

Вихідний потік заявок пов'язаний із потоком обслуговування в каналі, де тривалість обслуговування $t_{обсл}$, є випадковою величиною, і часто вона вважається розподіленою за показниковим закон зі щільністю ймовірностей:

$$f(t_{обсл}) = \mu e^{-\mu t},$$

де μ – ***інтенсивність потоку обслуговування,*** тобто середня кількість заявок, що обслуговуються за одиницю часу:

$$\mu = (t_{обсл})^{-1},$$

де $t_{обсл}$ – середній час обслуговування.

Важливою характеристикою СМО, яка пов'язує між собою λ і μ, є ***інтенсивність навантаження*** $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

СМО з відмовами. Заявка, що надійшла в систему з відмовами в той час, коли всі канали виявились зайнятими, отримує відмову, в наслідок чого система залишається без обслуговування. Показником якості обслуговування виступає ймовірність відмови. Передбачається, що всі канали доступні рівною мірою для всіх заявок, вхідний потік є простим, час обслуговування однієї заявки ($t_{обсл}$) розподілений за показниковим законом. Для розрахунку характеристик, що визначають сталий режим роботи СМО з відмовами, застосовують такі формули:

1) імовірність простою каналів обслуговування в очікуванні заявок ($k = 0$):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}; \tag{9.1}$$

2) імовірність відмови в обслуговуванні, коли заявка, що надійшла на обслуговування, застане всі канали зайнятими ($k = n$):

$$P_{відм} = P_n = \frac{P_0 \rho^n}{n!}; \qquad (9.2)$$

імовірність обслуговування:

$$P_{обсл} = 1 - P_{відм}; \qquad (9.3)$$

середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів:

$$n_з = \rho \cdot P_{обсл}; \qquad (9.4)$$

частка каналів, що зайняті обслуговуванням заявок:

$$k_з = \frac{n_з}{n}; \qquad (9.5)$$

абсолютна пропускна спроможність СМО:

$$A = \lambda \cdot P_{обсл}. \qquad (9.6)$$

СМО з необмеженим очікуванням. Заявка, що надійшла в систему з необмеженим очікуванням і застала всі канали системи зайнятими, стає в чергу й очікує звільнення одного з каналів.

Основною характеристикою якості обслуговування для такої системи є час очікування, протягом якого заявка перебуває в черзі. Для таких систем характерна відсутність відмови в обслуговуванні, отже, $P_{відм} = 0$ і $P_{обсл} = 1$.

Для систем з очікуванням існує ***дисципліна черги***:

обслуговування по черзі за принципом «першим прийшов – першим обслуговується»;

випадкове неорганізоване обслуговування за принципом «останнім прийшов – першим обслуговується»;

обслуговування з пріоритетами за принципом «генерали і полковники обслуговуються поза чергою».

Для розрахунку характеристик, що визначають сталий режим роботи СМО з необмеженим очікуванням, застосовують такі формули:

1) імовірність простою каналів, коли немає заявок ($k = 0$):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}, \qquad (9.7)$$

де $\frac{\rho}{n} < 1$;

2) імовірність одночасного обслуговування k заявок:

$$P_k = \frac{P_0 \rho^k}{k!}, \quad 1 \le k \le n; \qquad (9.8)$$

3) імовірність зайнятості в обслуговуванні одночасно всіх каналів:

$$P_n = \frac{P_0 \rho^n}{n!}; \qquad (9.9)$$

4) імовірність того, що заявка буде очікувати на обслуговування:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} P_0; \qquad (9.10)$$

5) середня кількість заявок у черзі:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!\,(n-\rho)^2} P_0; \qquad (9.11)$$

6) середній час очікування заявки в черзі:

$$t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}. \qquad (9.12)$$

7) середній час перебування заявки в СМО:

$$t_{СМО} = t_{оч} + t_{обсл}. \qquad (9.13)$$

8) середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів:

$$n_з = \rho; \qquad (9.14)$$

9) середня кількість вільних каналів:

$$n_в = n - n_з; \qquad (9.15)$$

10) коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування:

$$k_з = \frac{n_з}{n}; \qquad (9.16)$$

11) середня кількість заявок в СМО:

$$z = L_{оч} + n_з. \qquad (9.17)$$

СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги. Якщо заявка, що надійшла в систему з очікуванням і з обмеженою довжиною черги, знайшла всі канали цієї системи зайнятими, а також зайнятою виявилась обмежена черга заявок, у такому разі система залишається без обслуговування.

Існування обмеження на довжину черги може бути викликано такими причинами:

обмеженням верхньої межі часу перебування заявки в черзі;

обмеженням верхньої межі довжини черги;

обмеженням загального часу перебування заявки в системі.

Основною характеристикою якості такої системи є ймовірність того, що для заяви матиме місце відмова в обслуговуванні.

Для розрахунку характеристик, що визначають сталий режим роботи СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги, застосовують такі формули:

1) імовірність простою каналів обслуговування, коли немає заявок ($k = 0$):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\left[1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}; \qquad (9.18)$$

2) імовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{відм} = \frac{P_0 \cdot \rho^{n+m}}{n!\, n^m}; \tag{9.19}$$

3) імовірність обслуговування:

$$P_{обсл} = 1 - P_{відм}; \tag{9.20}$$

4) абсолютна пропускна спроможність:

$$A = \lambda \cdot P_{обсл}; \tag{9.21}$$

5) середня кількість зайнятих каналів:

$$n_з = \frac{A}{\mu}; \tag{9.22}$$

6) середня кількість заявок у черзі:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\rho / n)^m (m + 1 - m\rho / n)}{(1 - \rho / n)^2} \cdot P_0; \tag{9.23}$$

середній час очікування обслуговування:

$$t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}; \tag{9.24}$$

середня кількість заявок, які одночасно перебувають у системі:

$$z = L_{оч} + n_з; \tag{9.25}$$

середній час перебування заявки в системі:

$$t_{СМО} = \frac{z}{\lambda}. \tag{9.26}$$

9.3.2. Модель задачі заміни устаткування

Заміна устаткування – важлива економічна проблема. Фірма може ухвалити рішення про заміну старого устаткування на нове того ж типу або його ремонт. Відремонтоване устаткування згодом можна частково замінити на нове, більш сучасне, або відремонтувати його знову. Рішення визначається майбутнім попитом на продукцію, для випуску якої застосовується дане устаткування.

Повна заміна устаткування економічно виправдана за високого рівня попиту. З іншого боку, можна відремонтувати старе устаткування і через один рік, наприклад, замінити його на нове, більш досконале.

У задачі про заміну устаткування процес ухвалення рішення складається з двох етапів: вирішення питання про поточну заміну або ремонт устаткування та рішення, що приймається через один рік, щодо часткової його заміни і ремонту. Задачу заміни устаткування можна подати у вигляді задачі динамічного програмування.

Для побудови математичної моделі задачі введемо такі позначення:

$r(t)$ – вартість продукції, що виробляється за один рік на одиниці устаткування, тривалість експлуатації якого t років;

$u(t)$ – щорічні витрати на обслуговування устаткування, тривалість експлуатації якого t років;

$s(t)$ – залишкова вартість устаткування, тривалість експлуатації якого t років;

P – купівельна ціна устаткування.

Розглянемо період N років, у межах якого потрібно визначити оптимальний цикл заміни устаткування. Нехай $f_N(t)$ – максимальний прибуток, який може отримати підприємство від устаткування, загальний термін експлуатації якого становить t років, протягом тих N років циклу, що залишилися для використання устаткування, за умови здійснення оптимальної стратегії.

Тривалість експлуатації устаткування відлічується в напрямі перебігу процесу. Так, $t=0$ відповідає випадку використання нового устаткування. Тимчасові ж стадії процесу нумеруються у зворотному напрямі відносно ходу процесу. Так, $N=1$ належить до однієї тимчасової стадії, що залишається до завершення процесу, а $N=N$ – відповідає початку процесу. На кожному етапі процесу, що складається з N стадій, повинне бути ухвалене рішення про збереження або заміну устаткування. Вибраний варіант повинен забезпечувати отримання максимального прибутку.

Функціональні рівняння, засновані на принципі оптимальності, мають вигляд:

$$f_N(t) = max\begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \rightarrow збереження; \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \rightarrow заміна, \end{cases} \qquad (9.27)$$

$$f_1(t) = max\begin{cases} r(t) - u(t) \rightarrow збереження; \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \rightarrow заміна. \end{cases} \qquad (9.28)$$

Рівняння (9.27) описує процес, що складається з N стадій, а рівняння (9.28) – процес, що складається з однієї стадії. Обидва рівняння складаються з двох частин: верхній рядок визначає прибуток, що отримує підприємство в разі збереження устаткування; нижній – прибуток за умови ліквідації старого обладнання і переходу на нове устаткування.

У рівнянні (9.27) функція $r(t) - u(t)$ є різницею між вартістю проведеної продукції і експлуатаційними витратами на N-й стадії процесу. Функція $f_{N-1}(t+1)$ характеризує сумарний прибуток від $(N-1)$ стадій, що залишилися, для устаткування, тривалість експлуатації якого на початку здійснення цих стадій складає $(t+1)$ років.

Нижній рядок у співвідношенні (9.27) визначається таким чином. Різниця $s(t) - P$, яка є функція часу, представляє собою чисті витрати на заміну устаткування, тривалість експлуатації якого становить t років. Функція $r(0)$ описує прибуток, що отримує підприємство від нового устаткування, тривалість експлуатації якого, відповідно, дорівнює 0 років. При цьому передбачається, що перехід від роботи на устаткуванні, тривалість експлуатації якого t років, до роботи на новому устаткуванні здійснюється миттєво, тобто період заміни старого устаткування і перехід на роботу на новому устаткуванні відбуваються протягом однієї стадію. Функція $f_{N-1}(1)$ у співвідношенні (9.27) є прибутком, який отримує підприємство протягом тих $N-1$ стадій, до початку здійснення яких тривалість експлуатації устаткування складає один рік.

Аналогічну інтерпретацію можна надати рівнянню для одностадійного процесу. Однак воно не містить функції $f_0(t+1)$, оскільки N набуває значень 1, 2... N.

Рівняння $f_0(t)=0$ виходить з означення функції $f_N(t)$.

Рівняння (9.27) і (9.28) є рекурентними співвідношеннями, які дозволяють визначити величину $f_N(t)$ залежно від $f_{N-1}(t+1)$. Структура цих рівнянь показує, що в разі переходу від однієї стадії процесу до наступної тривалість експлуатації устаткування збільшується з t до $(t+1)$ років, а кількість стадій, що залишилися, зменшується з N до $(N-1)$. Розрахунок починають із застосування рівняння (9.27).

Рівняння (9.27) і (9.28) дозволяють оцінити варіанти заміни і збереження устаткування з метою ухвалення того з управлінських рішень, яке забезпечить більший прибуток. Отже, ці співвідношення дають можливість вибрати оптимальну стратегію вирішення питання щодо збереження або заміни устаткування.

9.4. Змістовна постановка задачі

Завдання 9.1 (*СМО з відмовами*)**.** У відділі технічного контролю (ВТК) працюють три контролери. Якщо деталь надходить в ВТК, коли всі контролери зайняті перевіркою деталей, що надійшли раніше, то вона проходить неперевіреною. Середня кількість деталей, що надходять в ВТК протягом години, дорівнює 24, середній час, який витрачає один контролер на перевірку однієї деталі, дорівнює 5 хвилин.

Визначити ймовірність того, що деталь пройде ВТК не перевіреною, наскільки завантажені контролери і скільки їх необхідно поставити, щоб $P_{обсл} \geq 0{,}95$.

Завдання 9.2 (*СМО з необмеженим очікуванням*). Ощадкаса має трьох контролерів-касирів ($n=3$) для обслуговування вкладників. Потік вкладників надходить в ощадкасу з інтенсивністю $\lambda=30$ людино-годин. Середня тривалість обслуговування контролером-касиром одного вкладника $t_{обсл}=3$хв.

Визначити характеристики ощадкаси як об'єкта СМО.

Завдання 9.3 (*СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги*). Магазин отримує ранні овочі з приміських теплиць. Автомобілі з вантажем прибувають у різний час з інтенсивністю $\lambda = 6$ машин щодня. Підсобні приміщення і устаткування для підготовки овочів до продажу дозволяють обробляти і зберігати товар, привезений двома автомашинами ($m = 2$). У магазині працюють три фасувальники ($n = 3$), кожен з яких в середньому обробляє вантаж з однієї машини протягом часу $t_{обсл} = 4$ год. Тривалість робочого дня за умови змінної роботи складає 12 год.

Визначити, якою повинна бути місткість підсобних приміщень, щоб імовірність повної обробки товарів була $P_{обсл} \geq 0{,}97$.

Завчання 9.4 (*про заміну устаткування*). Вихідні умови задачі про заміну устаткування, що застосовує магазин, зручно подати у вигляді «***дерева рішень»*** (рис. 9.1).

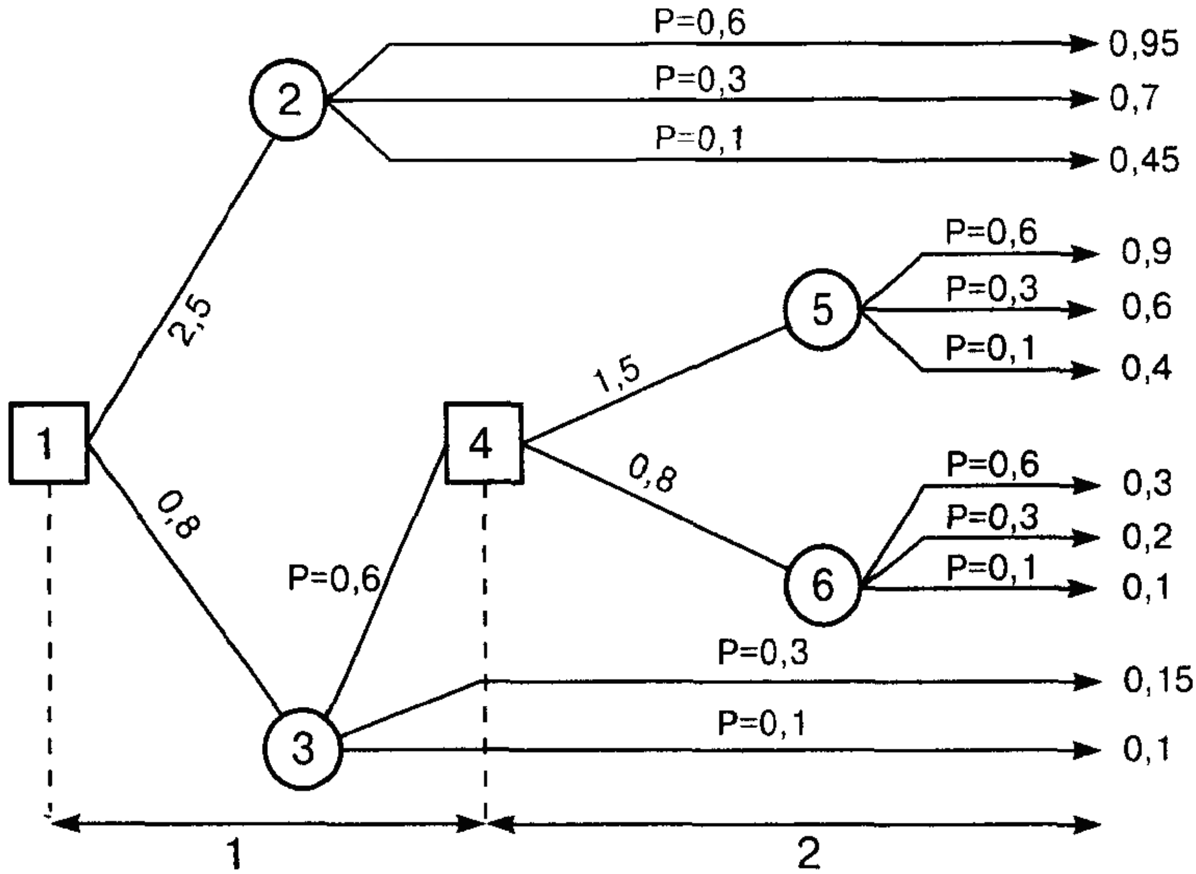


Рис. 9.1. **Дерево рішень, що містить вихідні дані задачі про заміну устаткування**

Дерево рішень має два типи вершин: «***вирішальні***» і «***випадкові***». Передбачається, що рівень попиту з боку покупців може бути високим, середнім і низьким. Починаючи з «вирішальної» вершини 1, необхідно ухвалити управлінське рішення або про повну заміну зношеного устаткування, або про його ремонт. Вершини 2 і 3 є «випадковими». Магазин розглядатиме можливість встановлення більш досконалого устаткування або повторного ремонту старого в тому випадку, якщо попит на продукцію після закінчення одного року експлуатації досягне високого рівня. Тому у вершині 4, яка є вирішальною, ухвалюється рішення або про часткову заміну старого устаткування більш досконалим, або про ремонт старого. Вершини 5 і 6 є «випадковими».

Зверніть увагу, що при побудові дерева рішень вирішальні вершини зображуються у вигляді квадратів, а випадкові – у вигляді кіл.

Аналіз ринкової ситуації показує, що ймовірність високого, середнього і низького рівнів попиту складає 0,6, 0,3 і 0,1 відповідно. Заміна новим устаткуванням того ж типу, що і старе, обійдеться власнику магазину в 2,5 млн грн, а ремонт старого – в 0,8 млн грн. Ці дані підписані над лініями, що з’єднують вершину 1 з вершинами 2 і 3 (рис. 9.1). Витрати на часткову заміну устаткування на більш досконале, ніж старе, оцінюються у 1,5 млн грн, а повторний ремонт старого – у 0,8 млн грн. Ці дані підписані над лініями, що з’єднують вершину 4 з вершинами 5 і 6 (рис. 9.1)

Щорічний прибуток магазину залежно від того, яку стратегію буде обрано, оцінюється таким чином:

у випадку заміни старого устаткування на нове того ж типу за високого, середнього і низького рівнів попиту прибуток становитиме 0,95; 0,7 і 0,45 млн грн відповідно;

у випадку ремонту старого устаткування за високого, середнього і низького рівнів попиту прибуток становитиме 0,3; 0,15 і 0,1 млн грн відповідно;

у випадку часткової заміни устаткування на більш досконале за високого, середнього і низького рівнів попиту прибуток підприємства оцінюється в 0,9; 0,6 і 0,4 млн грн відповідно;

у випадку повторного ремонту старого устаткування за високого, середнього і низького рівнів попиту прибуток підприємства оцінюється в 0,3; 0,2 і 0,1 млн грн відповідно.

Необхідно визначити оптимальну стратегію щодо заміни устаткування на п’ятирічний період.

9.5. Приклад виконання лабораторної роботи № 9

Завдання 9.1. За умовою задачі маємо, що $\lambda = 24$ деталей/год, або $\lambda = 0{,}4$деталей/хв, $t_{обсл} = 5$ хв. Звідси інтенсивність потоку обслуговування становить

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = 1/5 = 0{,}2,$$

а інтенсивність завантаження дорівнює

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2.$$

За формулами (9.1) – (9.6) обчислимо характеристики сталого режиму СМО з відмовами для $n = 3$. Для цього запишемо розв'язок на робочому аркуші MS Excel у такому вигляді (рис. 9.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Характеристики сталого режиму СМО з відмовами							
2									
3	λ =	0,4							
4	μ =	0,2							
5	t =	5							
6	ρ =	2						n = 3	
7	Імовірність простою каналів обслуговування							0,158	
8	Імовірність відмови в обслуговуванні							0,21	
9	Імовірність обслуговування							0,79	< 0,95
10	Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів							1,58	
11	Частка каналів, зайнятих обслуговуванням							0,53	
12	Абсолютна пропускна спроможність							0,32	

Рис. 9.2. **Характеристики СМО з відмовами для *n* = 3**

Імовірність того, що при $n = 3$ деталь пройде через ВТК без перевірки, складає 21 %, і контролери будуть зайняті перевіркою на 53 %. Оскільки при $n = 3$ маємо $P_{обсл} = 0{,}79 \le 0{,}95$, то проводимо розрахунки далі.

Аналогічні розрахунки проводимо для $n = 4$ (рис. 9.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Характеристики сталого режиму СМО з відмовами									
2											
3	λ =	0,4									
4	μ =	0,2									
5	t =	5									
6	ρ =	2						n = 3		n = 4	
7	Імовірність простою каналів обслуговування							0,158		0,14	
8	Імовірність відмови в обслуговуванні							0,21		0,095	
9	Імовірність обслуговування							0,79	< 0,95	0,905	< 0,95
10	Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів							1,58		1,81	
11	Частка каналів, зайнятих обслуговуванням							0,53		0,45	
12	Абсолютна пропускна спроможність							0,32		0,36	

Рис. 9.3. **Характеристики СМО з відмовами для *n* = 4**

Отже, ми отримали, що $P_{обсл} = 0{,}905 \le 0{,}95$. Продовжуємо ітерації. Тепер проводимо розрахунки для $n = 5$ (рис. 9.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Характеристики сталого режиму СМО з відмовами											
2													
3	λ =	0,4											
4	μ =	0,2											
5	t =	5											
6	ρ =	2						n = 3		n = 4		n = 5	
7	Імовірність простою каналів обслуговування							0,158		0,14		0,14	
8	Імовірність відмови в обслуговуванні							0,21		0,095		0,037	
9	Імовірність обслуговування							0,79	< 0,95	0,905	< 0,95	0,963	> 0,95
10	Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів							1,58		1,81		1,93	
11	Частка каналів, зайнятих обслуговуванням							0,53		0,45		0,39	
12	Абсолютна пропускна спроможність							0,32		0,36		0,39	

Рис. 9.4. **Характеристики СМО з відмовами для *n* = 5**

Для випадку $n = 5$розрахунки дали такі результати: $P_0 = 0{,}137$, $P_{відм} = 0{,}037$ та $P_{обсл} = 0{,}963 \ge 0{,}95$.

Отже, звідси випливає, що для забезпечення ймовірність перевірки деталей більше ніж 95 %, необхідно, щоб у ВТК працювало не менше п'яти контролерів.

Завдання 9.2. За умовами задачі інтенсивність потоку обслуговування становить $\mu = \left(t_{обсл}\right)^{-1} = 0{,}333$, а інтенсивність навантаження дорівнює $\rho = 1{,}5$. Оскільки маємо СМО з необмеженим очікуванням, то для обчислення її характеристик застосовуємо формули (9.7) – (9.17).

На робочому аркуші MS Excel записуємо характеристики сталого режиму СМО наведено на рис. 9.5.

Таким чином, імовірність простою контролерів-касирів дорівнює 21 % робочого часу, імовірність відвідувачеві опинитися в черзі складає 11,8 %, середня кількість відвідувачів у черзі – 0,236 осіб, середній час очікування відвідувачами обслуговування – 0,472 хв.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Характеристики сталого режиму СМО з необмеженим очікуванням									
2											
3	μ =	0,333									
4	ρ =	1,5									
5	Імовірність простою контролерів-касирів протягом робочого дня										0,210
6	Імовірність застати всіх контролерів-касирів зайнятими										0,118
7	Імовірність черги										0,118
8	Середня кількість заявок у черзі										0,236
9	Середній час очікування заявки в черзі										0,472
10	Середній час перебування заявки в СМО										3,472
11	Середня кількість вільних каналів										1,5
12	Коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування										0,5
13	Середня кількість відвідувачів в ощадкасі										1,736

Рис. 9.5. **Характеристики СМО з необмеженим очікуванням**

Таким чином, імовірність простою контролерів-касирів протягом робочого дня дорівнює 21 %, імовірність того, що відвідувач буде змушений очікувати на обслуговування, складає 11,8 %, середня кількість відвідувачів у черзі – 0,236 осіб, середній час очікування відвідувачами обслуговування – 0,472 хв.

Завдання 9.3. Визначимо інтенсивність завантаження фасувальників овочів:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2.$$

Відповідно, інтенсивність потоку обслуговування становить:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = 1 \cdot 12 / 4 = 3 \text{ автомобілі за день.}$$

Маємо СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги, відповідно, використовуємо формули (9.18) – (9.26).

На новому робочому аркуші тієї ж самої книги MS Excel записуємо основні характеристики сталого режиму СМО, як наведено на рис. 9.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Характеристики сталого режиму СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги											
2													
3	μ =	3											
4	ρ =	2										m = 2	
5	Імовірність простою фасувальників за відсутності машин (заявок)											0,128	
6	Імовірність відмови в обслуговуванні											0,075	
7	Імовірність обслуговування											0,925	< 0,97

Рис. 9.6. **Основні характеристики СМО для *m* = 2**

Оскільки $P_{обсл} = 0{,}925 \le 0{,}97$, то продовжуємо розрахунки.

Нехай $m = 3$ (рис. 9.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Характеристики сталого режиму СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги											
2													
3	μ =	3											
4	ρ =	2										m = 3	
5	Імовірність простою фасувальників за відсутності машин (заявок)											0,122	
6	Імовірність відмови в обслуговуванні											0,048	
7	Імовірність обслуговування											0,952	< 0,97

Рис. 9.7. **Основні характеристики СМО для *m* = 3**

Оскільки $P_{обсл} = 0{,}952 \le 0{,}97$, продовжуємо розрахунки.

Вважатимемо, що $m = 4$ (рис. 9.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Характеристики сталого режиму СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги											
2													
3	μ =	3											
4	ρ =	2										m = 4	
5	Імовірність простою фасувальників за відсутності машин (заявок)											0,120	
6	Імовірність відмови в обслуговуванні											0,028	
7	Імовірність обслуговування											0,972	> 0,97

Рис. 9.8. **Основні характеристики СМО для *m* = 4**

Оскільки ми отримали $P_{обсл} = 0{,}972 > 0{,}97$, то обчислення закінчено. Звідси випливає, що для досягнення заданої ймовірності обслуговування місткість підсобних приміщень овочевого магазину необхідно збільшити до $m = 4$.

Знайдемо решту параметрів СМО для розрахованого випадку при $P_0 = 0{,}12, \quad P_{відм} = 0{,}028, \quad P_{обсл} = 0{,}972$ (рис. 9.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Характеристики сталого режиму СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги											
2													
3	μ =	3											
4	ρ =	2										m = 4	
5	Імовірність простою фасувальників за відсутності машин (заявок)											0,120	
6	Імовірність відмови в обслуговуванні											0,028	
7	Імовірність обслуговування											0,972	> 0,97
8	Абсолютна пропускна спроможність											5,832	
9	Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів (фасувальників)											1,944	
10	Середня кількість заявок в черзі											0,548	
11	Середній час очікування обслуговування											0,09	
12	Середня кількість машин в магазині											2,492	
13	Середній час перебування машини в магазині											0,415	

Рис. 9.9. **Характеристики СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги**

Отже, підсобні приміщення магазину повинні вміщувати товар, обсяг якого відповідає тому, що можуть перевезти 4 автомашини. За цих умов імовірність повної обробки продукції становитиме $P_{обсл} = 0{,}972$.

Ще однією з альтернатив, реалізація якої дозволяє досягти заданої ймовірності обслуговування можне, бути збільшення кількості фасувальників. Для розв'язання цієї задачі необхідно послідовно проводити обчислення СМО для випадків $n = 4, 5$ і т. д.

Однак кількість альтернатив на цьому не вичерпується. Задачу про оптимізацію обслуговування можна також розв'язати, одночасно збільшуючи місткість підсобних приміщень та кількість фасувальників або зменшуючи час обробки товарів.

Завдання 9.4. Проведемо оцінку результатів кожної стратегії і визначимо, які рішення слід ухвалювати у «вирішальних» вершинах 1 і 4 (див. рис. 9.1).

Обчислення почнемо з етапу 2.

Для останніх 4 років альтернативи, що відносяться до вершини 4, оцінюються так:

$$ДЧЗ = (0{,}9 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}1) \cdot 4 - 1{,}5 = 1{,}54 \text{ млн грн}$$

або

$$ДДР = (0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}1) \cdot 4 - 0{,}8 = 0{,}2 \text{ млн грн},$$

де $ДЧЗ$ – прибуток, який отримає підприємство, якщо ухвалить управлінське рішення, яке передбачає часткову заміну устаткування на більш досконале;

$ДДР$ – прибуток, який отримає підприємство, якщо ухвалить рішення про заміну устаткування, що двічі пройшло ремонт.

Оскільки $ДЧЗ > ДДР$, то у вершині 4 (рис. 9.1) більш вигідним є часткова заміна устаткування на більш досконале. При цьому прибуток підприємства становитиме 1,54 млн грн.

Отже, для подальших розрахунків у вершині 4 «дерева рішень» (рис. 9.1) можна залишити лише одну «гілку», якій відповідає прибуток у 1,54 млн грн за 4 роки.

Обчислимо прибуток на 1-му етапі для «вирішальної» вершини 1. Воно може становити:

$$ДЗН = (0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}45 \cdot 0{,}1) \cdot 5 - 2{,}5 = 1{,}625 \text{ млн грн}$$

або

$$ДЗО = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 5 + 1{,}54 - 0{,}8 = 1{,}195 \text{ млн грн},$$

де $ДЗН$ – прибуток, який отримає підприємство, якщо ухвалить управлінське рішення про заміну старого устаткування на нове того ж типу;

$ДЗО$ – прибуток, який отримає підприємство, якщо ухвалить рішення про ремонт устаткування і в подальшому заміну його на більш досконале.

Оскільки $ДЗН > ДЗО$, то оптимальним рішенням у вершині 1 є повна заміна старого устаткування на нове того ж типу.

Таким чином, оптимальною стратегією фірми при проведенні заміни устаткування є повна заміна старого устаткування на нове того ж типу, при цьому прибуток складатиме 1,625 млн грн.

9.6. Завдання для самостійної роботи

Для проведення обчислень, передбачених в процесі виконання завдань для самостійної роботи, необхідно застосовувати вбудовані функції MS Excel.

Завдання 9.1. Контроль готової продукції фірми здійснюють контролери, кількість яких визначається A. Вважається, що контролери працюють неперервно протягом усього робочого часу. Якщо виріб надходить на контроль у той час, коли всі контролери зайняті перевіркою інших готових виробів, то цей виріб не перевіряється.

Середня кількість виробів, що випускає фірма і які, відповідно, поступають на контроль, складає B виробів за годину.

Середній час, який витрачає контролер на перевірку одного виробу, становить C хв.

Залежно від співвідношення характеристик A, B і C існує ймовірність, що частина готової продукції не буде походити перевірку, оскільки при її надходженні всі контролери будуть займатися перевіркою інших готових виробів.

Визначити ймовірність того, що виріб пройде перевірку, наскільки завантажені контролери і скільки їх необхідно поставити, щоб $P_{обсл} \geq D$.

Вихідні дані кожного варіанта наведено в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Значення коефіцієнтів умови задачі

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	3	4	5	6	3	5	4	2	3	5	4	5	6	3	4
B	20	22	25	30	18	28	24	14	16	26	25	27	32	22	23
C	7	6	5	8	6	4	3	5	6	7	5	6	7	6	5
D	0,97	0,98	0,96	0,97	0,98	0,96	0,98	0,97	0,96	0,98	0,97	0,96	0,98	0,98	0,97

Завдання 9.2. Прибуткова каса міського району, тривалість роботи якої становить A годин у день, проводить прийом від населення оплати за комунальні послуги та різні інші види платежів, що у середньому становить B осіб на день.

У прибутковій касі працюють C операторів-касирів.

Середня тривалість обслуговування одного клієнта складає D хв.

Визначити характеристики роботи прибуткової каси як об'єкта СМО.

Вихідні дані кожного варіанта наведено в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

Значення коефіцієнтів умови задачі

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	11	10	10	9	8	9	8	11	7	7	10	9	9	8	8
B	220	220	300	300	280	270	240	300	200	240	280	280	270	260	280
C	2	2	3	3	4	4	3	3	2	4	4	2	3	2	3
D	4	3	4	3	4	3	5	5	2	5	3	4	3	4	3

Завдання 9.3. На АЗС встановлено A колонок для видачі бензину.

Біля станції знаходиться майданчик на B автомашин для очікування заправки.

На станцію прибуває в середньому C маш./год.

Середній час заправки однієї автомашини – D хв.

Вихідні дані кожного варіанта наведено в табл. 9.3.

Таблиця 9.3

Значення коефіцієнтів умови задачі

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	3	2	3	3	2	4	3	2	3	3	2	3	3	4	4
B	2	3	4	3	3	2	4	2	2	2	2	3	4	3	4
C	15	10	20	30	25	20	35	15	20	30	20	25	30	25	30
D	2	3	4	3	2,5	3,5	3	2	2,5	3	3	3	3	4	3

Визначити ймовірність відмови й середню довжину черги.

Завдання 9.4. Фірма розглядає можливість ухвалення управлінського рішення щодо заміні старого устаткування новим того ж самого типу або про ремонт зношеного устаткування. Устаткування, яке було свого часу відремонтовано, згодом можна частково замінити на нове, більш сучасне, або відремонтувати його знову.

Рішення визначається майбутнім попитом на продукцію, яку виготовляє підприємство на цьому устаткуванні.

Повна заміна устаткування економічно виправдана лише за умови високого рівня попиту. З іншого боку, можна відремонтувати старе устаткування і через один рік його замінити на нове, більш досконале, або знову його відремонтувати.

Фірма розглядає це завдання на п’ятирічний період.

Передбачається, що попит на продукцію фірми може виявитися високим, середнім і низьким. Аналіз ринкової ситуації показує, що ймовірність високого, середнього і низького рівнів попиту складає 0,6; 0,3 і 0,1 відповідно. Заміна новим устаткуванням того ж виду, що й старе, коштуватиме 3 млн грн, а ремонт старого – 1 млн грн.

Витрати на часткову заміну устаткування на досконаліше, ніж старе, оцінюються в 2 млн грн, а повторний ремонт старого – в 1 млн грн.

На рис. 9.10 задача подана у вигляді дерева рішень.

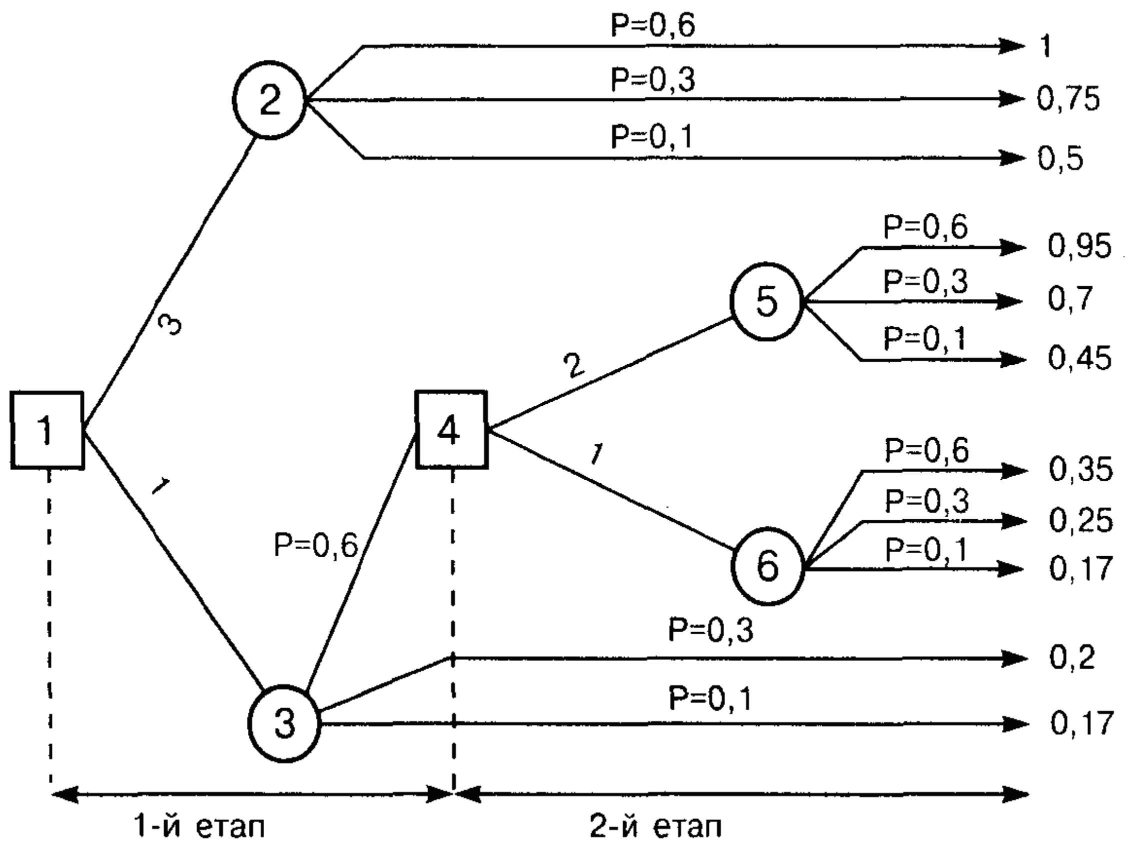


Рис. 9.10. **Вихідні дані задачі про заміну устаткування**

Щорічні доходи в разі реалізації кожної з альтернатив такі:

заміна старого устаткування на нове того ж виду за високого, середнього і низького рівнів попиту дає 1,0; 0,75 і 0,5 млн грн відповідно;

ремонт старого устаткування за високого, середнього й низького рівнів попиту оцінюється в 0,35; 0,2 і 0,17 млн грн відповідно;

часткова заміна устаткування на досконаліше за високого, середнього і низького рівнів попиту складе 0,95; 0,7 і 0,45 млн грн відповідно;

повторний ремонт старого устаткування за високого, середнього і низького рівнів попиту передбачає 0,35; 0,25 і 0,17 млн грн відповідно.

Визначити оптимальну стратегію фірми щодо заміни устаткування.

9.7. Контрольні запитання

1. Наведіть основні поняття, які застосовуються в теорії систем масового обслуговування.

2. Назвіть принципи, за якими здійснюється класифікація систем масового обслуговування.

3. Наведіть принципи, що визначають дисципліну черги.

4. Які характеристики має простий потік заявок?

5. Який закон розподілу імовірностей використовується в теорії масового обслуговування для характеристики простого потоку заявок, що надходять на вхід системи?

6. Яка кількість заявок в популяції передбачається в теорії масового обслуговування?

7. Що вважається основною характеристикою якості систем масового обслуговування?

8. Якими основними параметрами визначають конфігурацію системи масового обслуговування?

9. Який закон розподілу ймовірності зазвичай використовується в теорії масового обслуговування для опису часу, що витрачається на обслуговування заявок?

10. Поясніть сутність задач заміни устаткування.

11. Наведіть основні типи задач заміни устаткування.

12. Що таке «дерево рішень»?

13. Чим відрізняються вирішальні й випадкові типи вершин дерева рішень?

3. Глосарій

Змістовий модуль 3. Теорія ймовірностей та математична статистика

Альтернативна гіпотеза – гіпотеза, що протилежна нульовій (основній) гіпотезі.

Відсутність післядії – властивість потоку подій, за якою імовірність настання певної кількості подій на довільному проміжку часу не залежить від того, яка кількість подій відбулась до початку цього проміжку.

Вибіркова сукупність – підмножина об'єктів, дібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності.

Вибіркові характеристики – характеристики розподілу випадкової величини, що обчислені за даними вибіркової сукупності.

Випадкова величина – однозначна числова функція $X = f(\Omega)$, яку задано на просторі елементарних подій.

Випадкова подія – подія, яка в результаті випробування може відбутись, а може не відбутись.

Випадковий процес $X(t)$ – процес, значення якого за будь-якого значення аргументу t є випадковою величиною.

Випробування – реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Генеральна сукупність – називається множина однотипних об'єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню.

Граничні теореми – теореми, які встановлюють наближені співвідношення для обчислення ймовірностей появи події певну кількість разів у випадку проведення випробувань за схемою Бернуллі за необмеженого зростання кількості випробувань.

Дискретна випадкова величина – величина, яка може набувати значення із скінченої або зліченної множини ізольованих значень.

Дисперсійний аналіз – метод багатовимірної статистики, який дозволяє здійснювати дослідження впливу якісних факторів і аналізу значущості цього впливу.

Дисперсія – числова характеристика розпорошення випадкової величини відносно її математичного сподівання.

Добуток подій $A, B, C,\ldots$ – подія, яка полягає в тому, що матимуть місце одночасно всі випадкові події, добуток яких розглядається.

Довірчий інтервал – інтервал, що покриває всі значення випадкової величини з заданою ймовірністю або із заданим рівнем значущості.

Достовірна подія – подія, яка в результаті випробування неодмінно відбудеться.

Елементарні події – події, які не можна розкласти на простіші.

Ефективна статистична оцінка – статистична оцінка, якій за умови заданого обсягу вибірки відповідає найменша з можливих дисперсій.

Закон розподілу випадкової величини – співвідношення між значеннями випадкової величини і їхніми ймовірностями.

Залежні події – події, ймовірність кожної з яких змінюється у зв'язку з настанням чи ненастанням іншої.

Імовірність події – кількісна міра об'єктивної можливості реалізації події в певному випробуванні.

Інтенсивність потоку – середня кількість подій, які відбуваються за одиницю часу.

Коефіцієнт кореляції – характеристика взаємозв'язку випадкових величин.

Кореляційний аналіз – метод багатовимірного статистичного аналізу, який полягає в дослідженні коефіцієнтів кореляції між випадковими величинами.

Кореляційна залежність – залежність між двома випадковими величинами, за якої зміна однієї з них впливає на середнє значення іншої.

Критична область – сукупність значень критерію, за яких відхиляють нульову гіпотезу.

Критичні точки – точки, які відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

Малоймовірна подія – подія, ймовірність появи якої зневажливо мала в даній системі випробувань.

Математичне сподівання – числова характеристика, що характеризує центр сукупності значень випадкової величини.

Метод найменших квадратів (***МНК***) – один із методів, який використовується для статистичного оцінювання параметрів регресійної моделі за емпіричними даними.

Незалежні події – події, поява однієї з яких не змінює ймовірності появи іншої.

Неможлива подія – подія, яка в даному випробуванні точно не відбудеться.

Неперервна випадкова величина – величина, значення якої суцільно заповнюють певний інтервал.

Несумісні події – події, які не можуть з'явитися разом в одному й тому ж випробуванні.

Нульова гіпотеза – основна висунута гіпотеза.

Область прийняття гіпотези – сукупність значень критерію, за яких приймають нульову гіпотезу.

Обсяг генеральної сукупності – кількість об'єктів у генеральній сукупності.

Ординарність – властивість потоку подій, за якою імовірність настання двох і більше подій за малий проміжок часу t істотно менша за ймовірність того, що відбудеться одна подія.

Переміщення – це комбінації, що складаються з одних і тих же n різних елементів та відрізняються тільки порядком їх розміщення.

Повна група подій – множина, яку утворюють попарно несумісні випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ на просторі елементарних подій Ω, коли в результаті випробування неодмінно відбудеться одна з них.

Подія – результат випробування.

Полігон частот – графічне подання статистичного розподілу дискретної випадкової величини.

Помилка першого роду – помилка, якої можна припуститися, якщо в процесі перевірки статистичної гіпотези основну гіпотезу відхиляють, тоді як вона правильна.

Помилка другого роду – помилка, якої можна припуститися, якщо в процесі перевірки статистичної гіпотези основну гіпотезу приймають, а вона є хибною.

Простір елементарних подій – множина всіх можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитись випробування.

Простий відбір – спосіб відбору, коли об'єкти відбираються до вибіркової сукупності по одному.

Потік подій – послідовність подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

Регресійний аналіз – метод дослідження детермінованого взаємозв'язку між двома або більше випадковими величинами, визначення форми цього зв’язку, обчислення параметрів лінії регресії та перевірки статистичних гіпотез щодо значущості параметрів моделі й адекватності регресійної моделі в цілому.

Рівень значущості – ймовірність помилки першого роду.

Рівняння регресії першого роду – формули, які виражають умовні математичні сподівання.

Різниця подій A і B – така випадкова подія, для якої сприятливими є всі елементарні події, що є сприятливими для випадкової події A, за винятком тих, які є сприятливими для випадкової події B.

Реалізація випадкового процесу – детермінована функція $x(t)$, на яку перетворюється випадковий процес $X(t)$ внаслідок випробування.

Розміщення – комбінації, які складені з n різних елементів по m елементів, що відрізняються або складом елементів, або їх порядком.

Ряд розподілу – закон розподілу дискретної випадкової величини, що наданий у вигляді таблиці.

Система n ***випадкових величин –*** сукупність випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$, які розглядаються спільно.

Сполучення – комбінації, які складені з n різних елементів по m елементів, що відрізняються хоча б одним елементом.

Статистична гіпотеза – гіпотеза, яка стосується виду або параметрів розподілу випадкової величини і яку можна перевірити на підставі результатів спостереження у випадковій вибірці.

Статистичний критерій – випадкова величина, яка застосовується для перевірки статистичної гіпотези.

Стаціонарність – властивість потоку подій, за якою ймовірність того, що за певний проміжок часу t відбудеться та чи інша кількість подій, залежить лише від довжини проміжку і не залежить від початку його відліку, тобто інтенсивність потоку стала.

Сума подій $A, B, C, ...$ – подія, яка полягає в тому, що матиме місце хоча б одна з випадкових подій, сума яких розглядається.

Сумісні події – події, які можуть з’явитися разом в одному й тому ж випробуванні.

Схема Бернуллі – схема незалежних і однорідних випробувань.

Теорія випадкових процесів – розділ математичної науки, який вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їхнього розвитку.

Типовий відбір (***стратифікація***) – спосіб формування вибірки, коли об'єкти вибирають з типових частин генеральної сукупності.

Умовний закон розподілу випадкової величини, яка належить системі – закон розподілу, знайдений за умови, що друга випадкова величина набула певного значення.

Функція розподілу – функція, що визначає ймовірність, з якою випадкова величина набуває значення, менше за певне значення x.

Змістовий модуль 4. Математичне програмування. Дослідження операцій

Альтернатива – ситуація, в якій належить зробити вибір однієї з двох можливостей, що виключають одна одну.

Альтернативний оптимум – існування двох або більше оптимальних планів ЗЛП, що мають однакове екстремальне значення цільової функції.

Багатокритеріальна модель – математична модель ЗЛП, яка передбачає послідовне дослідження многокутника планів за кількома критеріями, наприклад, транспортна задача за критеріями вартості та часу.

Балансова умова – в транспортній задачі рівність загальних попиту і загальної пропозиції.

Бінарні змінні – змінні, що можуть набувати лише двох значень: нуль та один.

Відкрита (***незбалансована***) ***транспортна задача*** – транспортна задача, для якої загальний попит перевищує загальні потреби або, навпаки, загальні потреби перевищують загальний попит.

Графічний метод розв'язання – метод розв'язання задач математичного програмування, модель яких або містить дві змінні, або може бути перетворена таким чином, що базисними будуть лише дві змінні.

Двоїсті оцінки – змінні двоїстої ЗЛП, які дозволяють оцінити стійкість розв'язку вихідної задачі за розв'язком спряженої.

Детермінована модель – модель, яка передбачає жорсткі функціональні зв'язки між факторами моделі.

Дихотомічні змінні – змінні, які можуть набувати лише двох значень, наприклад, «так» чи «ні».

Динамічна модель – модель, що враховує взаємозв'язок між змінними в часі.

Додаткові змінні – змінні, які вводяться до основної системи обмежень, що надана у стандартній формі, для перетворення її в канонічну.

Допустимий розв'язок (***план***) – сукупність значень змінних, що задовольняють систему обмежень.

Дослідження операцій – дисципліна, що займається розробкою і застосуванням методів знаходження оптимальних рішень на основі математичного моделювання, статистичного моделювання і різних евристичних підходів у різних сферах людської діяльності.

Загальна форма ЗЛП – задача, математична модель якої містить у основній системі обмежень рівняння та нерівності різних знаків.

Закрита (***збалансована***) ***транспортна задача*** – основна система обмежень якої надається у формі рівнянь, оскільки загальний попит дорівнює загальній пропозиції.

Канонічна (***основна***) ***форма ЗЛП*** – задача, математична модель якої містить у основній системі обмежень тільки рівняння.

Керовані (***впливові***) ***змінні*** – змінні задачі математичного програмування, значення яких впливають на значення цільової функції.

Лінійне програмування (***ЛП***) – розділ математичного програмування, що розглядає задачі, в яких функції основної системи обмежень, а також цільова функція є лінійними.

Математична модель ЗЛП – модель, що складається з основної системи обмежень, яким повинні відповідати керовані змінні, обмеження на знак та цільової функції.

Математичне програмування – математична дисципліна, яка висвітлює методи розв'язання оптимізаційних задач про знаходження умовних екстремумів функцій на множині скінечнновимірного векторного простору, що визначається лінійними і нелінійними обмеженнями.

Модель – уявний або матеріальний об'єкт, що у процесі дослідження замінює об'єкт – оригінал і дозволяє отримати нову інформацію щодо властивостей об'єкта – оригіналу.

Многокутник планів – сукупність допустимих розв'язків ЗЛП, тобто значень змінних, які задовольняють систему обмежень.

Невироджений план – опорний розв'язок системи обмежень ЗЛП, кількість додатних компонентів якого дорівнює кількості обмежень основної системи обмежень.

Операція – будь-який захід або система дій, що об'єднані єдиним задумом і спрямовані на досягнення певної мети.

Опорний план – координати вершини многокутника планів.

Оптимальний план – розв'язок системи обмежень, якому відповідає екстремальне значення цільової функції.

Оптимізаційна задача – задача, яка полягає у визначенні умовного екстремуму цільової функції.

Ризик – характеристика ситуації, що має невизначеність результату, (передбачається можливість несприятливих наслідків), у вузькому сенсі ризик – це кількісна оцінка можливості появи події, визначається як частота однієї події в разі настання іншої.

Симплекс – метод – універсальний метод розв'язання ЗЛП шляхом послідовного перебору опорних планів у напрямку збільшення (зменшення) значення цільової функції.

Система – сукупність елементів, що перебувають у взаємодії і утворюють певну цілісність.

Спряжена пара двоїстих задач – вихідна та двоїста задачі, математичні моделі яких побудовані таким чином, що оптимальні плани обох задач дають однакові значення їх цільових функцій і розв'язок однієї задачі можна визначити за розв'язком спряженої.

Стандартна форма ЗЛП – задача, математична модель якої містить в основній системі обмежень нерівності одного знаку і цей знак відповідає виду екстремуму цільової функції.

Стохастична модель – модель задачі, що передбачає наявність випадкових впливів на досліджувані показники.

Теореми двоїстості – система теорем, які дозволяють визначити розв'язок вихідної задачі за розв'язком двоїстої і навпаки.

Транспортна задача – класична транспортна задача передбачає визначення оптимального плану перевезень однорідної продукції від постачальників до споживачів, якому відповідає найменші загальні витрати.

Цілочислове програмування – розділ математичного програмування, об'єктом дослідження якого є задачі, що містять тільки цілочислові змінні, або частина їхніх змінних може бути тільки цілочисловими.

Цільова функція – критерій ефективності, за яким здійснюється порівняння допустимих розв'язків.

4. Рекомендована література

4.1. Основна

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М. : Высшая школа, 1986. – 320 с.

2. Бабіна О. Д. Робоча програма навчальної дисциплін «Вища та прикладна математика» для студентів галузі знань «Менеджмент і адміністрування» усіх форм навчання / О. Д. Бабіна, О. В. Лежепьокова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2010. – 84 с.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – М. : Юрайт-Издат, Высшее образование, 2009. – 480 с.

4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – 5-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2000. – 400 с.

5. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2006. – 438 с.

6. Лебедєва І. Л. Економіко-математичні моделі на базі транспортної задачі : навч. посібн. / І. Л. Лебедєва, Г. К. Снурнікова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2007. – 160 с.

7. Малярець Л. М. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посібн. / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 568 с.

8. Малярець Л. М. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики в Excel : навч.-практичн. посібн. / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Е. Ю. Железнякова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2007. – 160 с.

9. Малярець Л. М. Економіко-математичне моделювання : навч. посібн. / Л. М. Малярець. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2010. – 312 с.

10. Малярец Л.М. Экономико-математические методы и модели : учебн. пособ. для иностранных студентов / Л. М. Малярец. – Х. : Изд. ХНЭУ, 2013. – 288 с.

11. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посібн. / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Е. Ю. Железнякова та ін. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2010. – 404 с.

4.2. Додаткова

12. Гарнаев А. Ю. Использование MS EXCEL и VBA в экономике и финансах. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

13. Економіко – математичне моделювання : навч. посібн. / Т. С. Клебанова, О. В. Раєвнєва, С. В. Прокопович та ін. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2010. – 352 с.

14. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібн. : у 2-х ч. Ч. І : Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : КНЕУ, 2000. – 304 с.

15. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібн. : у 2-х ч. Ч. ІІ : Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.

16. Исследование операций в экономике : учебн. пособ. для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Крамера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 408 с.

17. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман – М. : Высшая школа – 1975. – 270 с.

18. Красс М. С. Математические методы и модели для магистров экономики : учебн. пособ. / М. С. Красс, Б. П. Чупринов. – СПб. : Питер, 2006. – 496 с.

19. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 551 с.

20. Кузнецов А. В. Высшая математика : Математическое программирование. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн. : Вышэйшая школа, 2001. – 552 с.

21. Кузнецов А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию : учебн. пособ / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич., 2-е изд. – Мн. : Вышэйшая школа, 2001. – 448 с.

22. Символоков Л. В. Решение бизнес-задач в Microsoft Office / Л. В. Символоков. – М.: ЗАО «Издательство БИНОМ», 2001. – 512 с.

23. Сингаевская Г. И. Функции в Microsoft Office Excel: 2010 / Г. И. Сингаевская. – М. : Диалектика, 2010. – 672 с.

24. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха; пер. с англ. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2001. – 912.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Лебедєва Ірина Леонідівна
Норік Лариса Олексіївна

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Лабораторний практикум
для студентів напряму підготовки
6.030601 «Менеджмент»

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Новицька О. С.**

Коректор **Новицька О. С.**

План 2014 р. Поз. № 20-П.
Підп. до друку 26.12.2014 р. Формат 60 х 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 12,5. Обл.-вид. арк. 15,63. Тираж 400 прим. Зам. № 339.

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9-А

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.